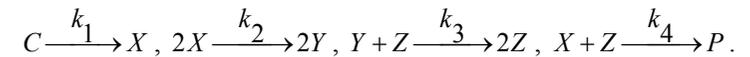


## Классификация и примеры динамических систем

1. Охарактеризуйте с точки зрения классификации следующие динамические системы: уравнение нелинейного осциллятора, уравнение Ван-дер-Поля, уравнение Релея, уравнение автогенератора с жестким возбуждением.

2. Бриггсом и Раушером в 1973 г. была открыта реакция, названная йодными часами. В процессе этой реакции может периодически изменяться концентрация йода, а цвет раствора меняется с белого на синий, снова на белый и т.д. (Подробнее см. Д.Гарел, О.Гарел, "Колебательные химические реакции".) Схема реакции выглядит следующим образом:



Получите динамическую систему для переменных  $X, Y, Z$ , описывающую эту реакцию.

3. Получите отображение для механической системы, являющейся моделью ускорения Ферми (рис.36). Все удары упругие, стенка колеблется по гармоническому закону. Смещением стенки пренебречь.

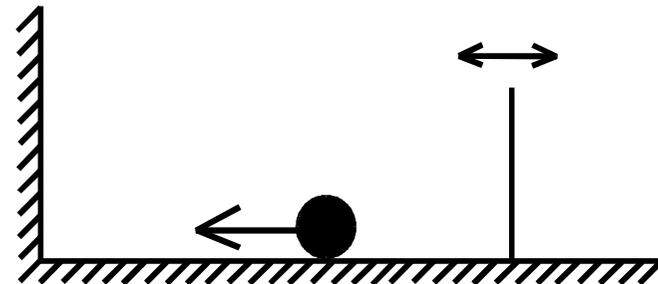


Рис.36

4. В работе Икеды с соавторами была рассмотрена оптическая система в виде кольцевого резонатора, частично заполненного средой с фазовой нелинейностью (рис.37). Резонатор возбуждается лучом лазера через одно полупрозрачное зеркало, а выходной сигнал снимается через другое. Как показал Икеда, при некоторых условиях такая система может быть приближенно описана с помощью отображения  $z_{n+1} = A + Bz_n \cdot \exp(i|z_n|^2)$ . Здесь  $z$  - комплексная амплитуда света,  $A$  - параметр, пропорциональный сигналу лазера,

$B$  - параметр диссипации поля в среде. Получите соответствующее действительное отображение и дайте его классификацию.

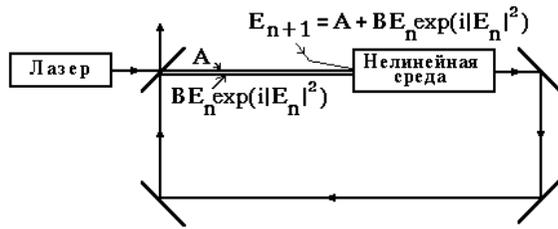


Рис. 37

5. Тенисон, Либерман и Лихтенберг рассмотрели следующую систему: луч света может бегать между двумя зеркалами, одно из которых имеет “гофрировку” в виде синусоидального профиля (рис.38). Получите двумерное дискретное отображение, описывающее динамику этой системы. В качестве переменных используйте угол  $\varphi$  и координату  $x$  падения луча на нижнее зеркало. Покажите, что в случае слабой гофрировки:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2a \sin x_n \quad (\varphi_n, \text{mod } 2\pi), \\ x_{n+1} &= x_n + h \operatorname{tg} \varphi_{n+1} \quad (x_n, \text{mod } 2\pi). \end{aligned}$$

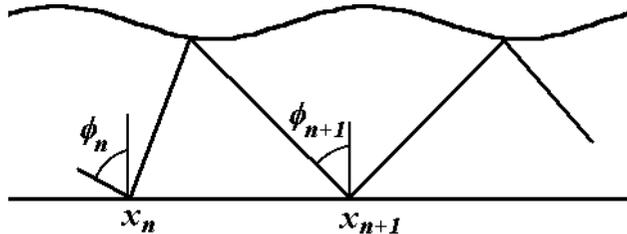


Рис.38

6. Получите отображение для системы с импульсным воздействием вида

$$\dot{x} = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(t - nT).$$

Охарактеризуйте полученное отображение.

7. Рассмотрите движение линейного диссипативного осциллятора под действием внешней периодической импульсной силы, амплитуда которой зависит от координаты осциллятора:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(t - nT).$$

(В качестве физической реализации может выступать железный маятник между полюсами электромагнита.) Охарактеризуйте полученное отображение. Покажите, что при определенном выборе функции  $f(x)$  оно приводится к отображению Эно

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n, \end{aligned}$$

и установите смысл его параметров.

8. Покажите, что отображение Эно и обобщенное отображение Эно

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned}$$

обратимы. Когда они консервативны, а когда диссипативны?

9. Нелинейный диссипативный осциллятор находится под импульсным воздействием

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = C \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Используя в промежутке между ударами решение, полученное методом медленно меняющихся амплитуд, получите дискретное отображение для координаты и скорости осциллятора. Покажите, что оно совпадает с отображением Икеды.

10. Покажите, что система

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = A + \varepsilon \sin x \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

приводится к двумерному отображению Заславского

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{K}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma}) \sin(2\pi x_n) + \frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma} y_n, \\ y_{n+1} &= e^{-\Gamma} (y_n + \varepsilon \sin 2\pi x_n), \end{aligned}$$

и установите смысл параметров и переменных в этом отображении. Как оно выглядит в консервативном случае?

11. Рассмотрите неавтономный генератор пилообразных колебаний, для которого момент запуска каждого очередного импульса управляется сигналом  $U(t) = U_0 + \varepsilon \sin \omega t$  (рис.39). Получите дискретное отображение, дающее зависимость момента начала  $(n+1)$ -го импульса от момента начала  $n$ -го импульса и покажите, что оно совпадает с отображением окружности. Длительность импульсов в автономном режиме  $T$ .

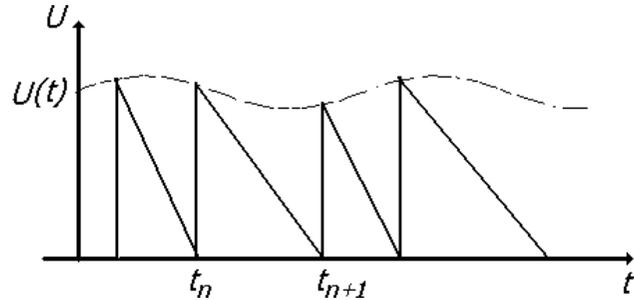


Рис.39

12. Получите одномерное отображение для генератора пилообразных колебаний из предыдущей задачи в случае, когда "запускающий" сигнал также представляет собой некоторое пилообразное напряжение. Покажите, что при определенном выборе параметров систему можно привести к отображению  $x_{n+1} = \{2x_n\}$ , известному как сдвиг Бернулли.

13. Предлагается следующая классификационная схема построения эталонных модельных отображений:

- логистическое отображение  $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$ ,
- кубическое отображение  $x_{n+1} = a + bx_n \pm x_n^3$ ,
- ...

Продолжите этот ряд. Постройте аналогичный ряд двумерных обратимых отображений.

## Бифуркации одномерных потоков

14. Покажите, что одномерная потоковая система всегда градиентна. Какие результаты теории катастроф по этой причине можно перенести в теорию бифуркаций?

15. Изобразите бифуркационные диаграммы для бифуркаций седло-узел  $\dot{x} = \lambda - x^2$ , транскритической  $\dot{x} = \mu x - x^2$  и вилки  $\dot{x} = \lambda x - x^3$ . То же самое для обратных (субкритических) форм этих бифуркаций.

16. Найдите закон изменения во времени переменной  $x(t)$  для бифуркаций седло-узел и вилки при  $\lambda > 0$  и  $\lambda < 0$ . Решите аналогичную задачу в случае субкритических бифуркаций.

17. Установите связь бифуркации седло-узел и транскритической бифуркации.

18. Установите связь с катастрофой сборки бифуркаций седло-узел, вилки, а так же вилки в случае снятия вырождения. Используйте трехмерный рисунок многообразия катастрофы сборки и бифуркационные диаграммы.

19. Изобразите фазовые портреты двумерной системы, отвечающие бифуркации седло-узел. Рассмотрите случай устойчивого и неустойчивого узла. Изобразите аналогичный рисунок для бифуркации вилки.

## Бифуркация Андронова-Хопфа

20. Покажите, что для двумерного потока общего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned}$$

порог бифуркации Андронова Хопфа может быть определен из условия  $S = 0, J > 0$ , где  $S$  и  $J$  – след и якобиан матрицы, описывающей эволюцию возмущения потока

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix},$$

и вычисленной непосредственно в неподвижной точке.

21. Найдите порог бифуркации Андронова Хопфа в уравнении Брюсселя-тора

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A - Bx + x^2 y - x, \\ \dot{y} &= Bx - x^2 y. \end{aligned}$$

22. Приведите уравнение Брюсселятора в окрестности неподвижной точки к каноническому для фокуса виду.

23. Одна из популярных в популяционной биологии моделей "хищник-жертва" может быть представлена в виде

$$\dot{x} = \alpha(x)x - xy, \quad \dot{y} = xy - my.$$

Если положить  $\alpha = const$ , то мы получим классическую модель Вольтерра. (Подробнее см. Ю.М. Свиржев, "Нелинейные диссипативные структуры и катастрофы в экологии", где рассмотрены и другие варианты такой системы.) Покажите, что если функция  $\alpha(x)$ , характеризующая мальтузианский рост "жертвы", имеет вид, показанный на рис.40а, то в системе невозможна бифуркация Андронова-Хопфа, а если ее вид соответствует рис.40б, то такая бифуркация возможна. Найдите порог бифуркации в случае  $\alpha(x) = a + bx - x^2$ . (Предварительно покажите, что для произвольной параболической аппроксимации функции  $\alpha(x)$  коэффициент перед членом  $x^2$  действительно можно убрать перенормировкой.)

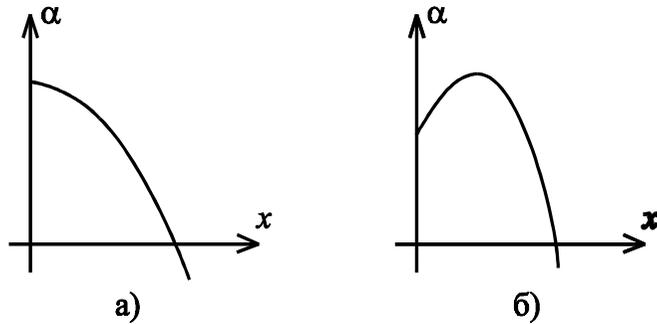


Рис.40

24. Изобразите качественно фазовые портреты трехмерного потока, демонстрирующего бифуркацию Андронова Хопфа.

25. Покажите, что для трехмерного потока порогу бифуркации Андронова Хопфа отвечает соотношение  $J=HS$ , связывающее три инварианта матрицы для возмущений, вычисленной в неподвижной точке. Здесь  $J$  – якобиан,  $S$  – след матрицы, а  $H$  – третий инвариант, выражающийся через собственные числа матрицы  $\lambda_i$  следующим образом:  $H = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$ .

26. Найдите порог бифуркации Андронова Хопфа в трехмерном потоке, описывающем генератор Кислова-Дмитриева. Этот генератор состоит из

трех замкнутых в кольцо элементов: нелинейного усилителя НУ, инерционного элемента ИЭ и фильтра Ф в виде колебательного контура (рис.41). Для усилителя предполагается, что сигналы на входе и выходе связаны через функцию  $F(z) = Mze^{-z^2}$ . Такая система описывается трехмерным потоком

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x/T + F(z)/T, \\ \dot{y} &= x - z, \\ \dot{z} &= y - z/Q. \end{aligned}$$

Здесь  $M$  – коэффициент усиления,  $Q$  – добротность контура,  $T$  – характерное время инерционного элемента. Покажите, что порог бифуркации Андронова Хопфа дается соотношением

$$\frac{2 \ln M}{T} = \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{Q} \right) \left( 1 + \frac{1}{TQ} \right).$$

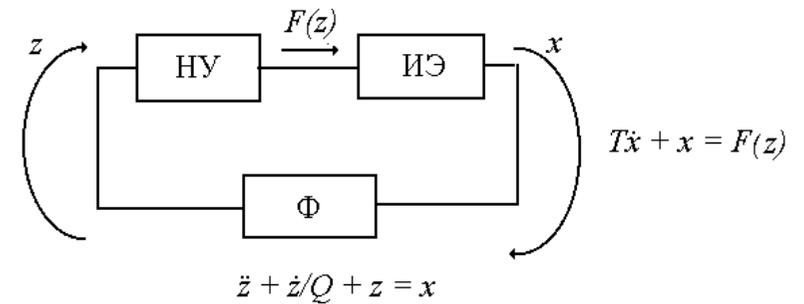


Рис.41

27. Для модели Реслера следующего вида

$$\dot{x} = -(y+z), \quad \dot{y} = x+ay, \quad \dot{z} = bx+z(x-c),$$

найдите связь между параметрами, соответствующую бифуркации Андронова-Хопфа неподвижной точки  $x=y=z=0$ . (Такой вариант модели Реслера рассмотрен в книге Г.Николиса и И.Пригожина "Познание сложного".)

## Бифуркации предельных циклов

28. Какая бифуркация предельных циклов возможна на фазовой плоскости, если уравнение для медленной амплитуды имеет вид

$$\dot{a} = -a + \lambda a^3 - a^5.$$

Найдите пороговое значение параметра  $\lambda$ . Предварительно изобразите график искусственно введенного потенциала  $U(a)$ , такого что  $\dot{a} + \partial U / \partial a = 0$ , и обсудите его трансформации при вариации  $\lambda$ . Покажите, что в системе возможна катастрофа складки. Найдите бифуркационное значение параметра  $\lambda$  и изобразите соответствующий фазовый портрет. Какова коразмерность этой бифуркации? Как она называется в теории бифуркаций?

29. Проведите аналогичное рассмотрение в случае

$$\dot{a} = a - \lambda a^3 + \mu a^5 - a^7,$$

отвечающем катастрофе сборки.

30. Для разновидности системы Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x+1)^2 = 0,$$

проведите двухпараметрическое исследование бифуркаций. Найдите линию бифуркации Андронова Хопфа неподвижной точки. Покажите, что она обрывается в точке бифуркации коразмерности два, которая лежит на линии бифуркации седло-узел. Изобразите фазовый портрет в окрестности этой точки. Обратите внимание, что к этой точке подходит ещё и линия нелокальной бифуркации, на которой предельный цикл рождается из петли сепаратрисы. Найдите также линии превращения узлов в фокусы. Исследуйте устойчивость узлов и фокусов.

31. Проведите исследование бифуркаций для модели

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x-1)^2 = 0.$$

В чем отличия от системы, рассмотренной в предыдущей задаче?

32. Проведите двухпараметрическое исследование бифуркаций в динамической системе типа "хищник-жертва"

$$\dot{x} = \alpha(x)x - xy, \quad \dot{y} = V(x)y - my,$$

в случае искусственно выбранных функций  $\alpha(x) = 1 + ax - x^2$ ,  $V(x) = x - x^2$ . Укажите коразмерность найденных бифуркаций. Обратите внимание на бифуркацию, аналогичную представленной в предыдущих задачах.

33. Проведите полный бифуркационный анализ укороченного уравнения Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием (см. задачу 82 из главы "Колемания")

$$\dot{a} = \lambda a / 2 - a^3 + B \cos \varphi / 2a,$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta - B \sin \varphi / 2a.$$

Представьте результаты исследования на плоскости параметров  $\Delta$ ,  $B$ . Покажите, что в системе может быть три неподвижные точки и укажите линию, на которой возможно их слияние в результате бифуркации седло-узел. Обратите внимание, что эта линия имеет точку сборки. Какая её часть является границей языка синхронизации? Найдите далее линию бифуркации Андронова Хопфа. На ней так же расположена точка бифуркации коразмерности два, к которой подходит вторая ветвь линии седло-узловой бифуркации и линия рождения предельного цикла из петли сепаратрисы. Исследование можно провести не в полярных, а в декартовых координатах.

## Бифуркации одномерных отображений коразмерности один

34. Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для логистического отображения  $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$ . Используя этот результат найдите порог касательной бифуркации, условие максимальной устойчивости неподвижной точки и порог бифуркации рождения 2-цикла. Изобразите соответствующие итерационные диаграммы.

35. Найдите значения параметра, отвечающие касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода для неподвижной точки отображения  $x_{n+1} = \lambda - x_n^4$ .

36. Получите уравнения, определяющие значения переменной  $x$  и бифуркационные значения параметра  $\lambda$  для касательной бифуркации неподвижных точек отображения  $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$ . Дайте графическое решение уравнения для переменной  $x$ . Покажите, что существует множество таких бифуркаций. Приблизленно оцените соответствующие значения параметра  $\lambda$ . То же самое для бифуркации удвоения периода.

37. Оцените число итераций, необходимое для прохождения "коридора" ширины  $\Delta x = 0,1$  для отображения  $x_{n+1} = \lambda + x_n - x_n^2$  в случае  $\lambda = -0,001$ .

38. Изобразите итерационные диаграммы до порога бифуркации типа «вилки» и за ним для отображения  $x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^3$ . То же самое для обратной формы бифуркации.

39. Покажите, что для отображения  $x_{n+1} = \lambda x_n / \sqrt{1 + x_n^2}$  имеет место бифуркация типа "вилка". Найдите бифуркационное значение параметра и изобразите итерационные диаграммы для ситуаций до и после бифуркации.

40. Найдите элементы 2-цикла логистического отображения и определите его мультипликатор как функцию управляющего параметра  $\lambda$ . Найдите значения  $\lambda$ , отвечающие рождению 2-цикла, 2-циклу максимальной устойчивости и порогу бифуркации удвоения периода - рождению 4-цикла. Изобразите соответствующие итерационные диаграммы.

41. Постройте функцию  $F(x) = f(f(x))$ , где  $f(x) = \lambda - x^2$ . Изобразите её график при различных  $\lambda$  и обсудите его трансформации у порога бифуркации рождения 2-цикла логистического отображения. Укажите элементы 2-цикла на этом рисунке.

42. Покажите, что если отображение  $x_{n+1} = f(x_n)$  имеет неподвижную точку  $x_0$ , в которой мультипликатор обращается в минус единицу:  $\mu = f'(x_0) = -1$ , то двукратно проитерированное отображение  $F(x_0) = f(f(x_0))$  обладает следующими свойствами:

1.  $F'(x_0) = +1$ ,

2.  $F''(x_0) = 0$ ,

3.  $F'''(x_0) = 2Sf(x_0)$ , где  $Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2$  - так называемая производная Шварца функции  $f$ .

43. Используя результат предыдущей задачи, покажите, что бифуркация  $\mu = -1$  на «языке» двукратно проитерированной функции  $F(x) = f(f(x))$  отвечает бифуркации вилки. Изобразите трансформации функции  $F(x)$  для прямой и обратной такой бифуркации. Когда происходит бифуркация удвоения периода, а когда жесткий переход через  $-1$ ? Что можно сказать о знаке производной Шварца в этих ситуациях?

44. Найдите производную Шварца для функции  $f(x) = a + bx \pm x^3$ , соответствующей кубическому отображению. О чем говорят результаты вычислений?

45. Возможны ли жесткие переходы через мультипликатор  $-1$  в четвертичном отображении  $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4$ ?

46. Получите уравнение, с помощью которого можно найти 3-цикл максимальной устойчивости логистического отображения и определите соответствующее значение параметра  $\lambda$ , хотя бы приближенно.

47. Изобразите 2, 4 и 8-циклы максимальной устойчивости логистического отображения  $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$  на итерационной диаграмме.

48. В таблице представлены бифуркационные значения параметра, отвечающие удвоениям периода на базе неподвижной точки логистического отображения. Оцените по этим данным константы  $K$  и  $\delta$  в законе Фейгенбаума.

n	$\lambda_n$
0	0.75
1	1.25
2	1.36809894
3	1.39404616
4	1.39963724
5	1.40082874
	...

### Бифуркации двух- и трехпараметрических одномерных отображений

49. Для кубического отображения вида  $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$  найдите область устойчивости на плоскости параметров  $a, b$  ограниченную линией касательной бифуркации и линией удвоения периода. Покажите, что первая имеет точку сборки.

50. Для кубического отображения из предыдущей задачи область устойчивости 2-цикла имеет вид, типичный для циклов всех периодов и для двухпараметрических отображений (рис.42). Такие конфигурации К.Мира называют "crossroad area". Линии каких бифуркаций изображены на рисунке? Изобразите эволюцию двукратно проитерированной функции при движении по нескольким характерным маршрутам и поясните типичность подобных конфигураций. Найдите координаты точки сборки.

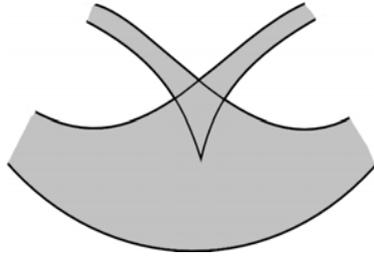


Рис.42

51. На примере предыдущего отображения установите, как расположены линии, отвечающие отображению максимума в минимум и минимума в максимум. Укажите точку на плоскости параметров, отвечающую 2-циклу, опирающемуся одновременно на два квадратичных экстремума. Покажите, что вдоль найденных линий двукратно проитерированное отображение имеет экстремум четвертой степени.

52. Для неподвижной точки кубического отображения  $x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3$ :

а) Найдите линию мультипликатора  $\mu = +1$  (касательной бифуркации) на плоскости  $a, b$ . Покажите, что эта линия имеет точку сборки и укажите её координаты. Изобразите все характерные конфигурации функции  $f(x) = a + bx - x^3$  в точке сборки и её окрестности.

б) Найдите линию мультипликатора  $\mu = -1$  и нанесите её на плоскость  $a, b$ . Вычислите производную Шварца вдоль этой линии и укажите, какие её части отвечают бифуркации удвоения, а какие – жесткому переходу. Укажите на плоскости  $a, b$  точку коразмерности два, в которой производная Шварца обращается в нуль (flip – бифуркация коразмерности два).

в) Найдите уравнение для линий касательной бифуркации 2-цикла и покажите, что они выходят из найденной выше точки с нулевой производной Шварца и пересекают ось  $a$  в точках  $a = \pm\sqrt{2/3}$ .

г) Заштрихуйте на рисунке область устойчивости 2-цикла. (Вторая типичная конфигурация двухпараметрических отображений – “spring-area” по терминологии К.Мира).

53. Изобразите характерную трансформацию двукратно проитерированного отображения из предыдущей задачи в окрестности точки flip-бифуркации коразмерности два.

54. Изобразите качественно бифуркационные диаграммы, соответствующие двум представленным на рис.43 маршрутам на карте динамических режимов.

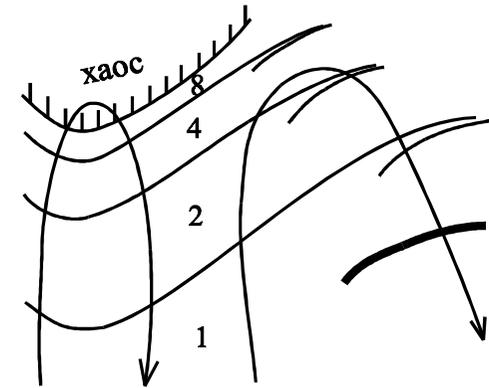


Рис.43

55. Найдите условие, отвечающее существованию кубической точки перегиба для отображения  $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4 - cx_n$ . Какой объект задает это условие в пространстве трех параметров  $a, b, c$ ? Найдите условие, отвечающее отображению квадратичного экстремума в кубическую точку перегиба. Какой объект задает это условие в пространстве трех параметров  $a, b, c$ ? То же самое для ситуации, когда кубическая точка перегиба отображается в квадратичный экстремум.

56. Покажите, что при условии, что квадратичный экстремум отображается в кубическую точку перегиба, двукратно проитерированное отображение имеет экстремум шестой степени. Изобразите соответствующую ситуацию на итерационной диаграмме. Какова ее коразмерность?

57. Покажите, что при условии, что квадратичный экстремум отображается в другой квадратичный экстремум, а тот - еще в один, то трехкратно проитерированное отображение имеет экстремум восьмой степени. Изобразите соответствующую ситуацию на итерационной диаграмме. Какова ее коразмерность?

## Бифуркации двумерных отображений

**58.** Изобразите качественно динамику изображающей точки на фазовой плоскости двумерного отображения непосредственно в окрестности неподвижной точки в случаях, когда

а) оба мультипликатора  $\mu_1$  и  $\mu_2$  действительны и  $0 < \mu_1 < 1$ ,  $0 < \mu_2 < 1$ ;  $0 < \mu_1 < 1$ ,  $-1 < \mu_2 < 0$ ;  $\mu_1 > -1$ ,  $\mu_2 > -1$ ;  $\mu_1 < -1$ ,  $\mu_2 < -1$ .

б) Мультипликаторы комплексные, причем модуль близок к единице, а фаза – к нулю; к  $\pi/2$ ; к  $\pi$ .

**59.** Покажите, что для произвольного двумерного отображения область устойчивости неподвижной точки на плоскости след  $S$ , якобиан  $J$  линеаризованной матрицы (матрицы монодромии) имеет вид треугольника, ограниченного тремя линиями:

а)  $J = S - 1$ , которой отвечает значение одного из мультипликаторов  $+1$  и, соответственно, касательная бифуркация;

б)  $J = -S - 1$ , которой отвечает значение одного из мультипликаторов  $-1$  и, соответственно, бифуркация удвоения периода;

в)  $J = 1$ , которой отвечает пара комплексно сопряженных мультипликаторов модуль которых равен единице, т.е. бифуркация Неймарка рождения инвариантной кривой.

Изобразите эти линии и «треугольник устойчивости» на  $S, J$  плоскости.

**60.** Укажите, как располагаются точки, отвечающие всем ситуациям из задачи 58 относительно «треугольника устойчивости».

**61.** Укажите точки бифуркаций коразмерности два, не имеющие аналога в одномерном случае, на рисунке «треугольника устойчивости».

**62.** Найдите диапазон значений параметра  $\mu$ , в котором является устойчивой нетривиальная неподвижная точка отображения Гукенхеймера и Холмса

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n, \\y_{n+1} &= \mu y_n (1 - x_n).\end{aligned}$$

Определите фазовый угол  $\theta$  (аргумент мультипликатора), отвечающий обращению якобиана отображения в единицу.

**63.** Для отображения Эно  $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 - by_n$ ,  $y_{n+1} = x_n$  найдите неподвижные точки, матрицу монодромии, а также её след и якобиан как функции

параметров  $b$  и  $\lambda$ . Найдите линии касательной бифуркации, бифуркации удвоения периода и нанесите их на плоскость  $b, \lambda$ . Укажите также области действительных и комплексных мультипликаторов.

**64.** Опишите эволюцию мультипликаторов неподвижной точки отображения Эно на комплексной плоскости при фиксированном  $b > 0$  при увеличении  $\lambda$ .

**65.** Покажите, что для неподвижной точки отображения Эно матрица монодромии представляется в виде

$$\begin{pmatrix} S & -J \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**66.** Покажите, что вектора-столбцы

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

являются собственными векторами матрицы монодромии неподвижной точки отображения Эно. Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – её собственные значения. Найдите соответствующие собственные числа. Покажите, что эти вектора задают на плоскости  $x, y$  систему координат, для которой матрица монодромии диагональна. (Используйте результат предыдущей задачи.) Найдите эволюцию в дискретном времени произвольной начальной точки  $x_0, y_0$ .

**67.** Найдите элементы 2-цикла отображения Эно как функции параметров  $\lambda$  и  $b$ . Покажите, что при условии  $\lambda = 3(1+b)^2/4$ , соответствующем обращению одного из мультипликаторов неподвижной точки в  $-1$ , рождается 2-цикл. Исследуйте устойчивость этого цикла, для чего найдите матрицу монодромии, вычислите след  $S$  и якобиан  $J$  этой матрицы. Найдите аналитическое выражение для линии удвоения периода 2-цикла и нанесите ее на  $b, \lambda$  плоскость.

**68.** Чему равен якобиан  $N$ -цикла отображения Эно? Уменьшается или увеличивается радиус окружности, по которой движутся в комплексной плоскости мультипликаторы циклов отображения Эно при удвоениях периода?

**69.** Для консервативного отображения Эно опишите эволюцию мультипликаторов на комплексной плоскости при удвоениях периода.

**70.** Рассмотрите два идентичных связанных одномерных отображения

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \varepsilon(y_n - x_n), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \varepsilon(x_n - y_n).\end{aligned}$$

Исследуйте симметричный режимы, т.е. такие, для которых  $x=y$ . Покажите, что аттракторы симметричного режима определяются соответствующими решениями для автономной системы. Покажите, что мультипликаторы неподвижной точки связанных систем даются выражениями  $\mu_1 = f'(x)$  и  $\mu_2 = \mu_1 - 2\varepsilon$ . Исходя из этих результатов, найдите линии касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода неподвижной точки на плоскости  $\lambda, \varepsilon$  в случае двух связанных логистических отображений, т.е. при  $f(x) = \lambda - x^2$ .

71. Изобразите на фазовой плоскости эволюцию устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки, 2-цикла и 4-цикла при последовательных удвоениях периода.

72. Изготовьте лист Мебиуса из бумажной полосы. Изготовьте бумажную модель неустойчивого многообразия цикла удвоенного периода в трехмерном пространстве на базе 3-цикла, показанного на рис.44.

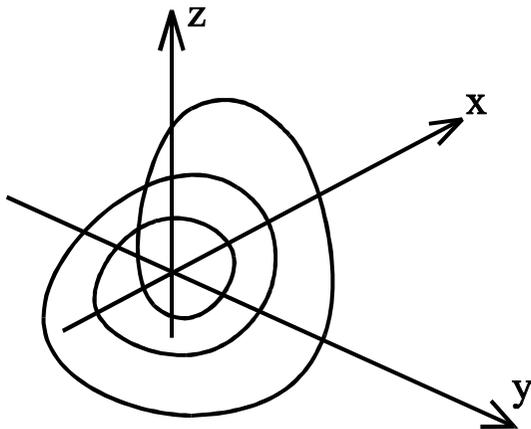


Рис.44

## Квазипериодические режимы и синхронизация в двумерных и одномерных отображениях

73. Для квадратичного отображения вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jx_n - 1/5(x_n^2 + y_n^2)\end{aligned}$$

покажите, что область устойчивости неподвижной точки имеет вид треугольника из задачи 59. Укажите линию бифуркации Неймарка рождения инвариантной кривой на плоскости параметров  $S, J$ . Изобразите качественно картину языков синхронизации, примыкающих к этой линии. Где расположены острия языков с числами вращения  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ?

74. Найдите линию бифуркации Неймарка на базе симметричного 2-цикла для двух связанных логистических отображений из задачи 70. Для этого, используя свойства якобиана произведения матриц, найдите якобиан матрицы монодромии такого цикла и приравняйте его единице. (Указание. Используйте выражения для произведения и суммы элементов 2-цикла логистического отображения.)

75. Выпишите все числа вращения, отвечающие резонансному циклу периода 5. Изобразите качественно все соответствующие правила обхода элементов цикла. То же самое для цикла периода 7.

76. Для неавтономной системы Ван-дер-Поля в сечении Пуанкаре наблюдается бифуркация Неймарка рождения инвариантной кривой. Какая бифуркация отвечает этой ситуации, если она описывается укороченным уравнением?

77. Есть ли бифуркация Неймарка в отображении Заславского? Отображении Эно?

78. Как соотносятся отображения Заславского, кольца и окружности, описывающие явления синхронизации?

79. Изобразите качественно итерационные диаграммы для отображения окружности (без взятия модуля), отвечающие числам вращения  $w=1/3$  и  $w=2/3$ .

80. Приведите рисунок зависимости напряжения релаксационного генератора пилообразных колебаний из задачи 9 от времени и дайте интерпретацию числа вращения для такой системы. Какие режимы генератора соответствуют иррациональным, а какие - рациональным числам вращения?

81. Для отображения окружности  $x_{n+1} = x_n + \Omega + k \sin 2\pi x_n \pmod{1}$  найдите границы основного языка синхронизации, и изобразите их на плоскости  $\Omega, K$ . Найдите линию, отвечающую циклам максимальной устойчивости, и укажите на ней точку, отвечающую циклу, опирающемуся одновременно на максимум и на минимум. Найдите линию удвоения периода, лежащую внутри этого языка, и также изобразите ее на плоскости параметров.

82. Получите (в неявном виде) уравнения, определяющие для отображения окружности границы языка синхронизации с числом вращения  $w=1/2$ .

84. *Эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве для отображений.* Проведите исследование, аналогичное описанному в предыдущей задаче, для представленных ниже дискретных отображений.

## Динамические системы и бифуркации. Задачи для компьютерных исследований

83. *Эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве для потоковых систем.* Задайте облако изображающих точек в фазовом пространстве в виде прямоугольной "решетки" из набора точек. Напишите программу, позволяющую наблюдать за эволюцией этого облака во времени для представленных ниже потоковых систем. Проследите за эволюцией облака. Ответьте на вопросы: консервативна или диссипативна система? Есть ли в ней аттракторы? Какого типа эти аттракторы? Проведите компьютерное моделирование для различных значений параметров. Изменяется ли при этом характер эволюции облака? Что происходит с аттракторами? Попробуйте изменить форму облака и его начальное положение.

*Динамические системы для исследования.*

- Нелинейный осциллятор вблизи катастрофы сборки

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + ax + b + x^3 = 0 .$$

- Уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2) \dot{x} + x = 0 .$$

- Уравнение Релея

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2) \dot{x} + x = 0 .$$

- Уравнение автогенератора с жестким возбуждением

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4) \dot{x} + x = 0 .$$

- Брюсселятор

$$\dot{x} = A - Bx + x^2 y - x,$$

$$\dot{y} = Bx - x^2 y.$$

- Система Реслера

$$\dot{x} = -(y + z),$$

$$\dot{y} = x + ay,$$

$$\dot{z} = b + z(x - c).$$

Динамические системы для исследования.

- Отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n, \\y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

- Шарик на вибрирующем столе

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= (1 - \varepsilon)v_n + K \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + v_{n+1} \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

- Система Икеды

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2).$$

- Отображение Теннисона, Либермана и Лихтенберга, описывающее отражение света от гофрированного зеркала

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2a \sin x_n \pmod{2\pi}, \\ x_{n+1} &= x_n + h \operatorname{tg} \varphi_{n+1} \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Если система может быть консервативной, особо рассмотрите соответствующие значения параметров.

**85. Однопараметрический анализ потоковых систем. Бифуркация Андронова-Хопфа.** Создайте программу, строящую портреты для представленных ниже динамических систем. Пронаблюдайте бифуркацию Андронова-Хопфа рождения предельного цикла, его эволюцию при дальнейшем увеличении параметра. Определите порог бифуркации Андронова-Хопфа из линейного анализа и сравните с результатами компьютерного моделирования.

Динамические системы для исследования.

- Брюсселятор при фиксированном  $A=1$  и различных  $B$ .
- Система, описывающая колебания в гликолизе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - xy^y, \\ \dot{y} &= \alpha(xy^y - y).\end{aligned}$$

(Зафиксируйте какой-либо из параметров.)

- Уравнения колебаний самолета

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \rho - \cos \varphi, \\ \dot{\rho} &= 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin \varphi).\end{aligned}$$

(Зафиксируйте какой-либо из параметров.)

- Модель хищник-жертва вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a + bx - x^2)x - xy, \\ \dot{y} &= xy - my,\end{aligned}$$

при  $a=b=1$ .

- Система Реслера при  $b=2, c=4$  и различных  $a$ . Для системы Реслера постройте как проекции аттракторов на какую-либо координатную плоскость, так и аттракторы в трехмерном пространстве.
- Генератор Кислова-Дмитриева

$$\begin{aligned}T\dot{x} + x &= F(z), \\ \dot{y} &= x - z, \\ \dot{z} &= y - z/Q,\end{aligned}$$

где  $F(z) = Mz \exp(-z^2)$  для  $Q=10$  и  $T=1$ .

**86. Двухпараметрическое исследование двумерных потоковых систем.** Постройте плоскость параметров вашей системы, содержащую аналитически определенные линии и точки бифуркаций – свои для каждой динамической системы. Постройте портреты аттракторов (или фазовые портреты) в выбранных вами точках на плоскости параметров. Проведите компьютерные эксперименты, иллюстрирующие динамику системы вблизи линий и точек бифуркаций, а также внутри характерных областей на плоскости параметров. Не демонстрирует ли ваша система каких-либо иных бифуркаций, не представленных на плоскости параметров?

Динамические системы для исследования.

- Модель "хищник-жертва"

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a + bx - x^2)x - xy, \\ \dot{y} &= xy - my,\end{aligned}$$

в случае  $a=1$ . Нанесите на плоскость  $b, m$  линию бифуркации Андронова-Хопфа. Есть ли в анализируемой системе бифуркации коразмерности два? Если да, то какие (см. задачу 32)?

- Уравнение типа Ван-дер-Поля с нелинейностью, характерной для осциллятора с катастрофой складки

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x+1)^2 = 0.$$

Нанесите на плоскость параметров линии бифуркаций седло-узел, Андронова-Хопфа и точку бифуркации коразмерности два (см. задачи 30 и 31). Постройте все характерные фазовые портреты грубых систем в окрестности точки бифуркации коразмерности два. Попробуйте по результатам компьютерного моделирования нанести на плоскость параметров линию, отвечающую петле сепаратрисы.

- Укороченное уравнение, отвечающее системе Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием (см. задачу 33)

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \lambda a/2 - a^3 + B \cos \varphi / 2a, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta - B \sin \varphi / 2a.\end{aligned}$$

### 87. Двухпараметрическое исследование одномерных отображений.

Постройте карту динамических режимов одного из предложенных отображений – т.е. плоскость параметров, на которой оттенком серого цвета обозначены циклы определенного периода. Линии каких бифуркаций коразмерности один можно обнаружить на вашей карте? Какие точки бифуркаций коразмерности два? Укажите ситуации типа "crossroad area" и "spring area". Создайте дополнительную программу, которая строит итерационные диаграммы в задаваемых вами точках карты. С помощью этой программы проведите следующее исследование:

- выберите маршрут, пересекающий несколько линий удвоения и наблюдайте каскад удвоений периода на итерационной диаграмме,
- получите циклы с небольшими периодами, например 3 или 5, в островках устойчивости в области хаоса,
- выберите точку вблизи линии касательной бифуркации (до ее порога) и наблюдайте соответствующую эволюцию изображающей точки,
- пронаблюдайте хаотические режимы,
- исследуйте эволюцию аттракторов в окрестности точки сборки,
- исследуйте эволюцию аттракторов в окрестности критической точки линии удвоения периода (flip-бифуркации коразмерности два).

"Просмотрите" увеличенные фрагменты карты, внутри которых можно наблюдать интересную динамику.

*Примеры динамических систем для исследования.*

- Кубическое отображение вида

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3.$$

- Кубическое отображение вида

$$x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3.$$

- "Квартичное" отображение

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4.$$

- Любое другое двух- (и более) параметрическое отображение.

**88. Двухпараметрическое исследование двумерных отображений.** Постройте карты динамических режимов двумерного двухпараметрического отображения. Идентифицируйте бифуркационные линии коразмерности один и точки коразмерности два, а также характерные композиции бифуркаций на карте. "Просмотрите" увеличенные фрагменты карты, внутри которых можно наблюдать интересную динамику. Создайте программу, которая демонстрирует аттракторы отображения. С ее помощью наблюдайте эволюцию аттракторов при вариации параметров, в частности, каскады удвоений периода, а также хаотические аттракторы и их эволюцию. Особое внимание уделите фейгенбаумовским критическим аттракторам. Просмотрите увеличенные фрагменты критических и хаотических аттракторов. С помощью программы, демонстрирующей эволюцию изображающей точки на фазовой плоскости наблюдайте последовательные "прыжки" этой точки, приближающейся к неподвижной точке, а также последовательные "прыжки" изображающей точки, приближающейся к циклу.

*Динамические системы для исследования.*

- Отображение Эно

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

- Шарик на вибрирующем столе

$$\nu_{n+1} = (1 - \varepsilon)\nu_n + K \sin \varphi_n,$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \nu_n \pmod{2\pi}.$$

- Система Икеды

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2).$$

**89. Квазипериодические движения, синхронизация и бифуркация Неймарка.** Получите карты динамических режимов для представленных ниже систем. Идентифицируйте на картах линию бифуркации Неймарка (линию нейтральности) и языки синхронизации. Постройте портреты аттракторов в

окрестности какого-либо языка синхронизации. Варьируя параметры, наблюдайте инвариантную кривую и цикл, отвечающий синхронизации. Пронаблюдайте "прыжки" изображающей точки, приближающейся к инвариантной кривой и к некоторому циклу. Определите число вращения, соответствующее этому циклу. С помощью конденсации изображающих точек в фазовом пространстве наблюдайте в режиме компьютерной мультипликации многообразия цикла, реализующегося внутри языка синхронизации. Идентифицируйте точки бифуркации коразмерности два, характерные для двумерных отображений, если они имеются в вашей системе.

*Динамические системы для исследования.*

- Универсальное двумерное отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jy_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.\end{aligned}$$

- Два идентичных логистических отображения с линейной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n), \\y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n).\end{aligned}$$

- неидентичные связанные логистические отображения с квадратичной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - Cy_n^2, \\y_{n+1} &= 1 - Ay_n^2 - Bx_n^2,\end{aligned}$$

для фиксированных  $B=0,375$ ,  $C=-0,25$ .

**90. Неустойчивое и устойчивое многообразие.** Создайте программу, которая строит устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки. Алгоритм может выглядеть следующим образом. В очень малой (за пределами разрешения экрана) окрестности неподвижной точки выбирается случайным образом стартовая точка, которая подвергается последовательным итерациям. Затем процедура повторяется для другой стартовой точки и т.д. В результате на экране компьютера прорисовывается неустойчивое многообразие. Чтобы построить устойчивое многообразие, необходимо реализовать ту же процедуру, итерируя отображение в обратном времени. Для реализации этого метода необходимо очень точно знать координаты неподвижной точки. Если она не ищется аналитически, то предварительно необходимо организовать соответствующий численный поиск с помощью метода Ньютона. Пронаблюдайте трансформацию многообразий при вариации параметров. Зафиксируйте момент образования гомоклинической структуры и наблюдайте

ее эволюцию. Исследуйте две системы: дискретное отображение и поток, причем в последнем случае используйте результаты решения предыдущей задачи.

Дискретные отображения:

- отображение Эно,
- кубическое отображение типа Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a - bx_n + x_n^3 - cy_n, \\y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}$$

- отображение кольца

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n + br_n,$$

$$r_{n+1} = br_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n,$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$