1. ***Природа хаоса в простейшей модели.*** Задайте случайный код из двух символов достаточно большой длины N, для чего используйте стандартную процедуру генерации случайных чисел. Затем,

а) Для логистического отображения $x' = 1 - \lambda x^2$ при λ=2 методом итераций в обратном времени получите значение x, с которого надо стартовать для того, чтобы последовательность знаков переменной при прямых итерациях воспроизвела вашу случайную последовательность. До каких N компьютер правильно воспроизводит последовательность?

б) Воспроизведите расчеты для меньших значений λ, например, λ=1.8. Оцените какой процент кодов определенной длины составляют запрещенные, приводящие на некотором шаге к появлению отрицательного числа под знаком квадратного корня.

в) При λ=2 сопоставьте результаты прямых итераций, начиная от $x_0 = \sqrt{3}/2$ и расчета по аналитической формуле

$$x_n = -\cos(2^n \arccos(-x_0)) .$$

При каких n наступает расхождение?

2. ***Перемешивание.*** Продемонстрируйте на экране компьютера несколько шагов итераций двумерных консервативных отображений – как деформируется закрашенная область, в качестве которой возьмите изображение кота, как у Арнольда. Проделайте это для

- Для отображения "кот Арнольда", заданного уравнениями

$$x' = x + y, y' = x + 2y (\mathrm{mod} 1) ,$$

- Для отображения пекаря

$$\begin{aligned} &x' = 2x,\ y = y/2\,y,\ \ x \le 1/2, \\ &x' = 2x - 1, y' = (y+1)/2\,y, x \le 1/2. \end{aligned}$$

В чем выражается наличие свойства перемешивания?

3. ***Система Лоренца.*** Проведите следующее исследование системы Лоренца.

а) Составьте анимационную программу, показывающую вращение жидкости в конвективной петле, описываемое уравнениями Лоренца при b=1. Распределение температуры кодируйте цветом. Пронаблюдайте качественно разные режимы динамики при различной интенсивности подогрева.

б) Составьте программу численного решения уравнений Лоренца

$$dx/dt = \sigma\,(y - x), dy/dt = rx - y - xz, dz/dt = xy - bz$$

стандартным методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Постройте графики временной зависимости для динамических переменных от времени и проекции фазового портрета на плоскости (x,y), (y,z), (z,x). Используйте "классический" набор параметров, r=28, b=8/3, σ=10

в) Запуская траекторию системы Лоренца из окрестности начала координат, отследите ее поведение при r=5, 12, 13.927, 20, 24.06, 28. Остальные параметры стандартные, σ=10, b=8/3. Обсудите результаты в контексте бифуркационного анализа.

г) Пронаблюдайте переход к хаосу через удвоения периода в системе Лоренца. Для этого постройте "бифуркационное дерево" на плоскости (r, z), где по оси ординат откладывайте максимумы z. Положите σ=10, b=8/3, а интервал изменения параметра r от 98 до 100. (Проверьте, обеспечивает ли выбранный шаг интегрирования достаточную точность!)

д) Пронаблюдайте переход к хаосу через перемежаемость в системе Лоренца. Для этого постройте графики зависимости z(t) в интервале времени порядка 200 для системы Лоренца при s=10, b=8/3 и значениях r=166, 166.15, 166.3. Получите для указанных параметров также фазовые портреты аттрактора в проекциях на три координатные плоскости.

4. ***Регулярные режимы и хаос в трехмерных потоках.*** Постройте фазовые портреты аттракторов для следующих систем.

а) Система Ресслера при a=0.2, b=0.2, и различных c в интервале от 2 до 5.

б) Генератор с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова

$$dx/dt = mx + y - xz, dy/dt = -x, dz/dt = g(-z + \Phi(x)), \Phi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x^2, x > 0 \end{cases},$$

при g=0.6, и различных значениях m от 0.4 до 1.5.

в) Схема Чуа

$$\begin{aligned} dx/dt &= \alpha\,(y - h(x)), \\ dy/dt &= x - y + z, \quad h(x) = \begin{cases} (2x-3)/7, x \ge 1 \\ -x/7, |x| \le 1 \\ (2x+3)/7, x \le -1 \end{cases} \\ dz/dt &= -\beta y, \end{aligned}$$

α и β от 2 до 5.

г) Несколько систем Спротта:

$$dx/dt = yz, dy/dt = x - y, dz/dt = 1 - xy,$$

$$dx/dt = -y, dy/dt = x + z, dz/dt = xz + 3y,$$

$$dx/dt = yz, dy/dt = x^2 - y, dz/dt = 1 - 4x,$$

$$dx/dt = -0.2y, dy/dt = x + z, dz/dt = x + y^2 - z,$$

$$dx/dt = xy - z, dy/dt = x - y, dz/dt = x + 0.3y,$$

$$dx/dt = -2y, dy/dt = x + z^2, dz/dt = 1 + y - 2z,$$

5. *Неавтономные потоковые системы.* Проведите исследование одной из представленных ниже неавтономных систем по следующей схеме:

а) Постройте несколько различных реализаций $x(t)$ для значений параметров, отвечающих периодическим и хаотическим режимам.

б) Продемонстрируйте существование чувствительной зависимости от начальных условий, для чего слегка измените эти условия для хаотической реализации; подберите эту вариацию так, чтобы на экране дисплея реализации на начальном участке совпадали, а затем – расходились.

в) Продемонстрируйте чувствительную зависимость от начальных условий для фазовых траекторий на плоскости $x, \dot{x}$.

г) Создайте программу, рисующую проекцию портрета аттрактора на плоскость $x, \dot{x}$, и пронаблюдайте трансформацию аттрактора при вариации параметров.

д) Продемонстрируйте возможность сосуществования аттракторов при фиксированных значениях параметров.

е) Создайте программу, которая рисует не только фазовые траектории на плоскости $x, \dot{x}$, но и точки в сечении Пуанкаре (соответствующие сечения должны быть проведены через период внешнего воздействия) и пронаблюдайте различные режимы с помощью таких сечений.

ж) Используя программу построения отображения Пуанкаре, получите карту динамических режимов на плоскости параметров (как правило, используйте плоскость амплитуда – частота воздействия).

*Неавтономные системы для **и**сследования*

- Система Уеды

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B\cos t,$$

- Осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x - x^3/6 = A\sin\omega t,$$

- Система Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A\sin\omega t,$$

- Брюсселятор

$$\dot{x} = A - Bx + x^2 y - x + A\cos s\omega t,$$
$$\dot{y} = Bx - x^2 y.$$

(положите A=0,4).

6. *Сечение Пуанкаре и метод Эно.* Создайте программу, позволяющую строить сечения Пуанкаре для трехмерных потоков. Для определения координат точки пересечения с секущей плоскостью используйте метод Эно. Получите вид аттракторов в сечении Пуанкаре и пронаблюдайте их эволюцию при вариации параметров. Сопоставьте вид сечений с соответствующими фазовыми портретами. Модифицируйте программу так, чтобы она демонстрировала так же и отображение первого возвращения, используя в качестве переменной одну из координат точки пересечения фазовой траектории с плоскостью. Что можно сказать о динамике системы на основе полученных иллюстраций? Постройте бифуркационные деревья для той же переменной в зависимости от одного из параметров. Сопоставьте исследование аттракторов и вид бифуркационного дерева.

Динамические системы для исследования.

- Система Реслера.
- Генератор с инерционной нелинейностью.
- Генератор Кияшко-Пиковского-Рабиновича.
- Генератор Кислова-Дмитриева.

$$T\dot{x} + x = F(z),$$
$$\dot{y} = x - z,$$
$$\dot{z} = y - z/Q,$$

где F(z)= $Mz\exp(-z^2)$ для Q=10 и T=1.

7. ***Двухпараметрическое исследование трехмерных потоков.*** Используя предыдущую программу и программу построения карт динамических режимов двумерных отображений, постройте карты для трехмерных потоков. Постройте трехмерные портреты аттракторов в характерных точках плоскости параметров. Пронаблюдайте каскад удвоений периода, хаотические аттракторы, аттракторы, отвечающие "островкам устойчивости" в хаотической области.

Динамические системы для исследования те же, что и предыдущей задаче

8. ***Ляпуновские показатели.*** Составьте программы, позволяющие вычислять старший ляпуновский показатель для одномерных отображений, двумерных отображений и потоков. Получите графики зависимости этого показателя от какого-либо параметра для трех систем (по одной из каждого класса). Самостоятельно подберите диапазон изменения управляющего параметра и значения остальных параметров, чтобы зафиксировать интересные особенности динамики (удвоения периода, хаос и др.). Отметьте точки циклов максимальной устойчивости, точки бифуркаций удвоения периода, области хаоса.

Одномерные отображения.

- Логистическое.
- Кубическое.
- Окружности.
- $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$.

Двумерные отображения

- Отображение Эно.
- Система Икеды.
- Нелинейное модельное отображение с бифуркацией Неймарка

$$x_{n+1} = Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2),$$
$$y_{n+1} = Jy_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.$$

Потоки.

- Система Ресслера.
- Система Лоренца.
- Система Уеды.

- Генератор с инерционной нелинейностью.
- Одна из систем Спротта: $\ddot{x} + \lambda x - \dot{x}^2 + x = 0$, 2.12< λ <2,18.

9. ***Спектр ляпуновских показателей.*** Составьте программу вычисления спектра ляпуновских показателей для системы Ресслера с использованием процедуры ортогонализации по Граму-Шмидту. Проведите аккуратные вычисления с оценкой погрешности при c=5, a=1/5, b=1/5.. Какова сигнатура спектра ляпуновских показателей в этом случае?

10. ***Двухпараметрический ляпуновский анализ.*** Составьте программу по построению карт ляпуновского показателя, на которой оттенком серого цвета отобразите его величину. Постройте такие карты для одной из следующих систем.

- Кубическое отображение.
- Логистическое отображение вида $x_{n+1} = r_n x_n(1-x_n)$ под действием бинарного сигнала, для следующих законов изменения r_n: *b, a,...; b, b, a, b, a, ...; b, b, b, b, b, b, a, a, a, a, a, a,...* Попробуйте подобрать другие интересные варианты последовательности r_n.
- Логистическое отображение под действием гармонического сигнала $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \cos 2\pi\omega n$, где частота ω принимает значения 1/3, 1/5, 1/7.
- Отображение окружности.
- Отображение Эно.
- Система Икеды.
- Универсальное отображение с бифуркацией Неймарка из задачи 89 главы “Бифуркации”. Как представлены на таких картах циклы максимальной устойчивости? Области crossroad area? Языки синхронизации?

11. ***Устойчивость по Пуассону и возвраты Пуанкаре.***

а) Для одной из систем с хаотической динамикой (Лоренца, Ресслера, или любой другой) отследите последовательность возвратов Пуанкаре, взяв несколько значений ε, задающих точность возврата. Какой характер носит последовательность временных интервалов между возвратами?

б) Рассмотрите систему двух осцилляторов с несоизмеримыми частотами. Отследите последовательность возвратов Пуанкаре, взяв несколько значений ε, задающих точность возврата. Какой характер носит последовательность временных интервалов между возвратами?

12. ***Геометрия странных аттракторов.***

а) Для отображения Эно

$$x' = 1 - ax^2 - by, y' = x \ .$$

при b=-0.3, a=1.4 получите изображение странного аттрактора на плоскости (x,y), а также в увеличенном масштабе фрагменты этого изображения, позволяющие рассмотреть канторо-подобную поперечную структуру аттрактора. Рассмотрите далее аналогичным образом критический аттрактор в точке b=0.3, a_c=1.9516465. В чем отличие этих случаев?

б) Придумайте способ графического изображения на экране компьютера процедуры последовательного построения аттрактора Смейла-Вильямса. Этот аттрактор имеет место в трехмерном отображении, определение которого в цилиндрических координатах (r,φ,z) таково:

$$r' = 1 + 0.2(r-1) + 0.1\cos\varphi,\ z' = 0.1\sin\varphi,\ \varphi' = 2\varphi(\mathrm{mod}\,2\pi)\ .$$

Связь цилиндрических координат с декартовыми: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$. Тор, фигурирующий на начальном этапе построения, в сечении имеет окружность радиуса 0.3.

13. ***Фрактальная размерность.*** Следующая процедура позволяет генерировать последовательность точек, принадлежащих двухмасштабному канторову множеству с масштабными факторами a и b:

$$x_{2n} = b(x_n + 1), x_{2n+1} = -a(x_n + 1), x_0 = b/(1-b)\ .$$

Опробуйте на этом множестве алгоритм вычисления размерности по Grassberger-Pocaccia. Специально рассмотрите случай a=b=1/3, что соответствует классическому канторовому множеству, а также a=2.5029…, b=a^2, что отвечает аппроксимации аттрактора Фейгенбаума двухмасштабным канторовым множеством. Сравните значение размерности с теоретическим.

14. ***Бассейны притяжения.*** Постройте бассейны притяжения отображения Эно $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 - by_n,\ y_{n+1} = x_n$ при b=0.3 и значениях параметра λ=1.15, 1.395 и 1.405. Укажите другими цветами аттракторы системы и все седловые точки и циклы. Пронаблюдайте эволюцию границы бассейнов притяжения и ее фрактализацию. Постройте многообразия всех седловых режимов. Как они связаны с границами бассейнов?

15. ***Удвоения периода.*** Создайте программу, демонстрирующую бифуркационное дерево для системы с удвоениями периода и одновременно – портрет аттрактора в выбранной с помощью “мыши” точке на дереве. Пронаблюдайте удвоения периода, хаотические режимы, основные периодические окна в хаотической области и каскад удвоений на их базе, бифуркации слияния полос. Исследование проведите параллельно для одномерного необратимого, двумерного обратимого отображений и потока:

- Логистическое отображение.
- Отображение Эно.
- Система Реслера.

Что общего, а что различного обнаруживается для этих классов систем?

16. ***Скейлинг для систем с удвоениями периода.*** Представьте иллюстрации скейлинга на бифуркационном дереве и графике ляпуновского показателя для одномерного отображения, демонстрирующего удвоения периода. Предварительно определите положение критической точки.

Системы для исследования:

- Логистическое отображение.
- Отображение $x_{n+1} = \lambda\cos x_n$.
- Отображение окружности внутри одного из языков синхронизации.

17. ***Спектры для систем с удвоениями периода.*** Постройте спектр дискретного отображения в области изменения одного из параметров, отвечающей удвоениям периода. Проследите за эволюцией спектра при удвоениях. Постройте спектр точно в критической точке. Оцените уровень перепада между субгармониками разного уровня и сравните с предсказанием теории Фейгенбаума. Постройте спектр для одного из окон устойчивости в закритической точке и в точке, отвечающей хаотическому режиму.

Системы для исследования:

- Логистическое отображение, λ_c=1,4011552.
- Отображение Эно для b=0,3, λ_c=1.9516465.

18. ***Фрактальные свойства критического аттрактора при переходе к хаосу через удвоения периода.***

а) Составьте программу, позволяющую находить неустойчивые циклы периода 2, 4, 8,...2^k для логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ в критической точке λ_c=1.401155189092 и вычислите мультипликаторы этих циклов. Для нахождения циклов используйте хорошо сходящуюся рекуррентную схему $x^{(n+1)} = x^{(n)} + (f(x^{(n)}) - x^{(n)})/2.6$, где *f(x)* обозначает результат 2^k -кратной итерации логистического отображения при старте из точки x.

б) Для логистического отображения получите на экране компьютера несколько первых уровней построения критического аттрактора, как канторовидного множества.

в) Постройте график сигма-функции Фейгенбаума.

г) Вычислите размерность Хаусдорфа критического аттрактора Фейгенбаума D. Для этого составьте программу, вычисляющую сумму l_i^D, где l_i – длины интервалов, отвечающие k-ому уровню построения аттрактора, и подберите D так, чтобы значения суммы для k-ого и k+1-го уровней совпадали. Как зависит точность расчета от уровня k?

д) Составьте программу, позволяющую получить спектр обобщенных размерностей Реньи D_q и скейлинг-спектр $f(\alpha)$. Постройте графики этих зависимостей при различном выборе уровня k. Сравните результаты с расчетами по модели двухмасштабного канторова множества. Вычислите по возможности точно информационную и корреляционную размерности критического аттрактора.

19. ***Воздействие шума на системы с удвоениями периода.***

а) Постройте бифуркационное дерево и график ляпуновского показателя для логистического отображения под действием шума $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon y_n$, где y_n –случайная последовательность, генерируемая компьютером. Покажите, что шум разрушает тонкую структуру дерева тем сильнее, чем более глубокий уровень организации дерева мы рассматриваем. Как влияет шум на положение границы хаоса?

б) Продемонстрируйте скейлинг на бифуркационном дереве и графике ляпуновского показателя. Для этого действуйте аналогично задаче 16 но пересчитывайте амплитуду шума на каждом шаге преобразовании подобия в $\mu_F = 6.618\ldots$ раз. (Константа μ_F найдена Кратчфильдом с соавторами).

в) Продумайте, как можно использовать свойство скейлинга для оценки константы μ для отображений $x_{n+1} = \lambda - x_n^N + \varepsilon y_n$ с другим порядком экстремума. Сделайте такие оценки для N=4,6,8.

г) Постройте карты ляпуновских показателей для кубического отображения $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3 + \varepsilon y_n$ при различных значениях амплитуды

шума. Как трансформируется граница хаоса и режимы максимальной устойчивости?

20. ***Нефейгенбаумовские удвоения и трикритические точки в двухпараметрических отображениях.*** Для кубического отображения $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$ найдите условие, когда максимум отображается в минимум и нанести соответствующую линию на карту динамических режимов (см. также задачу 51 из раздела “Бифуркации”). определите визуально точку, в которой эта линия подходит к границе хаоса на основе фейгенбаумовских удвоений. Сравните вашу оценку с точными значениями a_T=0.24269876…, b_T=1.95138576… Постройте бифуркационное дерево и графики ляпуновского показателя вдоль этой линии. В чем их отличие от фейгенбаумовского случая? Продемонстрируйте скейлинг на этих графиках, используя константы δ_T=7.248 по оси управляющего параметра, a_T^2=2.876 по оси переменной x. Константа δ_T характерна для удвоений в отображении $x_{n+1} = \lambda - x_n^4$. Для объяснения ее появления в нашем случае покажите, что при условии отображения экстремума в экстремум двукратно проитерированное отображение имеет экстремум четвертого порядка. Обсудите универсальный характер полученных результатов для двухпараметрических одномерных отображений. Какой способ можно рекомендовать на их основе для поиска концевых точек фейгенбаумовских линий на плоскости параметров?

21. ***Перемежаемость.*** Пронаблюдайте переход к хаосу через перемежаемость в логистическом отображении $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ при выходе из окна периода 3 в сторону уменьшения параметра λ (начните с λ=1.76). Постройте графики зависимости x от дискретного времени n для нескольких значений параметра λ меньших порога возникновения перемежаемости. Пронаблюдайте присутствие ламинарных и турбулентных стадий и изменение их длительности в зависимости от параметра λ.

22. ***Синхронизация и квазипериодические режимы для отображения окружности.*** Постройте карту динамических режимов для отображения окружности. Получите так называемую "чертову лестницу", дающую зависимость числа вращения от параметра при K<1 и K=1. Укажите на этой лестнице ступеньки, отвечающие нескольким последовательным уровням построения дерева Фейри. Получите увеличенный фрагмент чертовой лестницы в окрестности иррационального числа вращения, $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$, известного как "золотое сечение" при K=1. Идентифицируйте ступеньки этой лестницы, отвечающие аппроксимации золотого сечения при помощи чисел Фибоначчи. Получите итерационные диаграммы, демонстрирующие циклы с числами вращения 1/3 и 2/5. Получите итерационную диаграмму, отвечающую какому-либо квазипериодическому режиму. Используйте для определения соответствующих параметров чертову лестницу. Постройте спектр в этой точке. Как в структуре спектра проявляется квазипериодический характер режима?

23. ***Разрушение инвариантной кривой. Сильные и слабые резонансы.*** Проследите за эволюцией инвариантной кривой вдоль границ языков синхронизации с числами вращения w=1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 для отображения кольца

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{k}{2\pi}\sin 2\pi\theta_n + br_n,$$
$$r_{n+1} = br_n - \frac{k}{2\pi}\sin 2\pi\theta_n.$$

(Если это удобно, можно использовать языки 2/3, 2/5 и т.д.) В качестве фазовых переменных используйте $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Как из инвариантной кривой возникает хаотический аттрактор? Обсудите устройство многообразий соответствующих основных циклов внутри языков. Однотипно ли оно для разных языков, или имеются принципиальные отличия? Используйте как построение многообразий, так и технику "конденсации" облака изображающих точек в фазовом пространстве.

Затем проведите аналогичное рассмотрение для универсального двумерного отображения с бифуркацией Неймарка

$$x_{n+1} = Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2),$$
$$y_{n+1} = Jy_n - (x_n^2 + y_n^2)\big/5.$$

В чем отличие наблюдаемой картины для этих двух отображений? В каком случае можно говорить о "сильных" и "слабых" резонансах? Обсудите как только возможно детально внутреннее устройство каждого языка в обоих случаях (удвоения периода, хаос на их основе, вторичные бифуркации Неймарка, вторичная структура языков синхронизации, точки бифуркаций коразмерности два и т.д.).

24. ***Глобальные бифуркации в системе с квазипериодическими режимами.*** Постройте карту динамических режимов неавтономного Брюсселятора

$$\dot{x} = A - (B+1)x + x^2 y + b\cos\omega t,$$
$$\dot{y} = Bx - x^2 y,$$

на плоскости параметров амплитуда воздействия b – частота воздействия ω при b=1.2, A=0.4. Укажите точку бифуркации коразмерности два, в которой смыкаются два основных языка синхронизации с числами вращения w=1 и w=1/2. Постройте сечение Пуанкаре в окрестности этой точки. Попытайтесь восстановить хотя бы качественно полную картину бифуркаций на основе такого исследования. Пронаблюдайте более подробно глобальную бифуркацию исчезновения инвариантной кривой в результате ее столкновения с неустойчивым многообразием седлового 2-цикла при b=0.02 и ω=0.62, 0.6288, 0.62889. Для последнего значения увеличьте "ломанный" участок инвариантной кривой и покажите, что он имеет складки. При ω=0.629 пронаблюдайте, как изображающие точки в сечении Пуанкаре "убегают" с инвариантной кривой. К какому множеству они при этом движутся?

25. ***Удвоения торов.*** Для логистического отображения под квазипериодическим воздействием

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon\cos(2\pi y_n),$$
$$y_{n+1} = y_n + \omega \pmod 1,$$
$$\omega = (\sqrt{5} - 1)/2,$$

пронаблюдайте при небольших ε (ε≤0.1) инвариантные кривые (торы). С помощью отображения первого возвращения для переменной x продемонстрируйте удвоения торов с ростом управляющего параметра λ при фиксированной амплитуде ε. Могут ли пересекаться инвариантные кривые, отвечающие удвоенному тору? Как изображающая точка "прыгает" по 2-тору? 4-тору? Определите примерное положение линий удвоения торов на плоскости (λ,ε). Какие значения параметра λ отвечают точкам, в которых эти линии подходят к оси λ? Обсудите связь бифуркации удвоения торов с обычными удвоениями. Как вы думаете, возможны ли удвоения разрушенных торов?

26. ***Странные нехаотические аттракторы.*** Для логистического отображения под действием квазипериодического воздействия с частотой, отвечающей золотому сечению

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon\cos(2\pi y_n + \varphi),$$
$$y_{n+1} = y_n + \omega \pmod 1,$$
$$\omega = (\sqrt{5} - 1)/2,$$

постройте отображения первого возвращения для переменной x при ε=0.3, λ=0.9; ε=0.15, λ=0.9; ε=0.45, λ=0.8; ε=0.45, λ=0.9. Какие из полученных объектов обладают фрактальной структурой? Найдите в каждом случае показатели Ляпунова. Классифицируйте соответствующие аттракторы. Значение λ_c=1.1580968, ε_c=0.3602485, φ_c=2.48323 отвечают критической ситуации, в которой сходятся области существования странного нехаотического аттрактора, хаоса и различных торов. Постройте фазовый портрет аттрактора в этой точке. С помощью программы, рисующей фазовые портреты, просмотрите возможные режимы в окрестности критической точки на плоскости (λ,ε).

Учебное издание

Кузнецов Александр Петрович

КОЛЕБАНИЯ, КАТАСТРОФЫ, БИФУРКАЦИИ, ХАОС

Оригинал-макет подготовили
Сатаев И.Р., Широков А.П.

Обложка художника Д.В.Соколова

Изд. лицензия ЛР № 020773 от 15.05.98

Подписано к печати 26.04.2000.Формат 60x84 1/16.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Бумага типографская N1
Усл. печ. Л. 6,25 (6,5). Уч.-изд. л. 6,4. Тираж 300 экз. Заказ 170.

410026, Саратов, ул. Астраханская, 83
Издательство ГосУНЦ «Колледж»

Отпечатано в ГосУНЦ «Колледж