

Глава 6

Дифференциальные уравнения с периодическими переключениями

Возможный подход к построению неавтономных систем с однородно гиперболическими аттракторами состоит в том, чтобы организовать эволюцию во времени как периодически повторяющуюся последовательность определенных стадий, на каждой из которых правые части дифференциальных уравнений, описывающих систему, заданы по-своему. Иными словами, правые части представлены кусочно-непрерывными и периодическими во времени функциями. Их можно назвать *дифференциальными уравнениями с периодическими переключениями*. Фактически, именно подход, основанный на уравнениях с периодическими переключениями, был применен Хантом [Hunt, 2000] для построения надстройки аттрактора типа Плыкина, как упоминалось в главе 4 (см. также Приложение E). Здесь мы рассмотрим другие, намного более простые модели с аттракторами типа Смейла – Вильямса и Плыкина, описываемые уравнениями с кусочно-непрерывными во времени правыми частями.

6.1 Система с переключениями, имеющая аттрактор типа Смейла - Вильямса

Построим неавтономную систему, мгновенное состояние которой описывается трехмерным вектором (x, y, z) , а расширенное фазовое пространство четырехмерное. Рассмотрим четыре периодически повторяющихся стадии непрерывных преобразований, каждая из которых занимает единичной интервал времени, и которые описываются следующими дифференциальными уравнениями.

I. Дифференциальное вращение вокруг оси x :

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\frac{\pi}{2}xz, \quad \dot{z} = \frac{\pi}{2}xy. \quad (6.1)$$

II. Неравномерный сдвиг со сжатием вдоль оси y :

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -d_1(y - 2x^2 + 1), \quad \dot{z} = 0. \quad (6.2)$$

III. Поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси y :

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}z, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = \frac{\pi}{2}x, \quad (6.3)$$

IV. Сжатие в направлении единичной окружности, расположенной в плоскости $z=0$:

$$\dot{x} = \mu x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = \mu y(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{z} = -d_2 z. \quad (6.4)$$

Динамические уравнения можно представить в виде единой записи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\pi}{2}zf_3(t) + \mu x(1 - x^2 - y^2)f_4(t), \\ \dot{y} &= -\frac{\pi}{2}xf_1(t) - d_1(y - 2x^2 + 1)f_2(t) + \mu y(1 - x^2 - y^2)f_4(t), \\ \dot{z} &= \frac{\pi}{2}xyf_1(t) + \frac{\pi}{2}xf_3(t) - d_2zf_4(t), \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $f_k(t) = 1$, если $k - 1 \leq t - 4[t/4] < k$, и 0 в иных случаях. Рассматривая по отдельности последовательно все четыре стадии, на которых решение уравнений (6.1)-(6.4) находится в аналитическом виде, получаем отображение

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b}(\mathbf{x}_n), \quad (6.6)$$

где

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\mu} z}{\sqrt{1 + (e^{2\mu} - 1) \left[z^2 + \left[e^{-d_1} (y \cos \frac{\pi}{2} x - z \sin \frac{\pi}{2} x) + (2x^2 - 1)(1 - e^{-d_1}) \right]^2 \right]}} \\ \frac{e^{\mu - d_1} (y \cos \frac{\pi}{2} x - z \sin \frac{\pi}{2} x) + e^{\mu} (2x^2 - 1)(1 - e^{-d_1})}{\sqrt{1 + (e^{2\mu} - 1) \left[z^2 + \left[e^{-d_1} (y \cos \frac{\pi}{2} x - z \sin \frac{\pi}{2} x) + (2x^2 - 1)(1 - e^{-d_1}) \right]^2 \right]}} \\ e^{-d_2} x \end{pmatrix}$$

Обратное отображение также можно явно:

$$\mathbf{b}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{ye^{d-\mu} \cos(\frac{\pi}{2} e^{d_2} z) - xe^{-\mu} \sin(\frac{\pi}{2} e^{d_2} z)}{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)(e^{-2\mu} - 1)}} + (2z^2 e^{2d_2} - 1)(1 - e^d) \cos(\frac{\pi}{2} e^{d_2} z)} \\ - \frac{ye^{d-\mu} \sin(\frac{\pi}{2} e^{d_2} z) - xe^{-\mu} \cos(\frac{\pi}{2} e^{d_2} z)}{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)(e^{-2\mu} - 1)}} - (2z^2 e^{2d_2} - 1)(1 - e^d) \sin(\frac{\pi}{2} e^{d_2} z)} \\ ze^{d_2} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

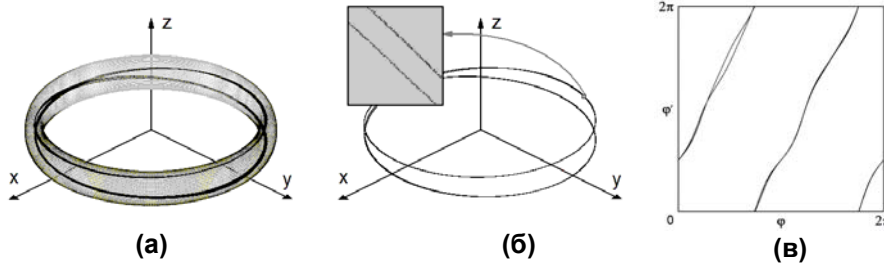


Рис.6.1. Поглощающая область в фазовом пространстве и ее образ при действии отображения (6.6) (а); портрет аттрактора (б) и итерационная диаграмма для угловой координаты (в). Значения параметров $d_1=d_2=2$, $\mu=2$.

На рис. 6.1а показана эмпирически подобранная поглощающая область для случая $d_1=d_2=2$, $\mu=2$, которая задается неравенством $(p\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + qz^2 \leq 1$, $p = 12.5$, $q = 25$, а также ее образ при действии отображения Пуанкаре (6.6). Действие отображения качественно соответствует конструкции Смейла – Вильямса. На диаграмме (б) приведен портрет аттрактора, причем на вставке можно видеть поперечную канторову структуру составляющих его волокон. Хотя локальные направления растяжения не вполне совпадают с направлениями вдоль волокон, а локальное сжатие происходит не ортогонально волокнам, с углами, зависящими от положения в фазовом пространстве, степень соответствия с геометрической конструкцией Смейла – Вильямса оказывается достаточной для существования однородно гиперболического аттрактора. Рисунок (в) иллюстрирует итерационную диаграмму для угловой координаты, определенной для каждой очередной итерации отображения с номером n как $\varphi_n = \arg(x_n + iy_n)$. Его

вид соответствует растягивающему отображению окружности – слегка деформированному отображению Бернулли: изменение аргумента на величину 2π отвечает изменению функции на величину 4π .

Показатели Ляпунова получаются равными $\Lambda_1 = 0.661$, $\Lambda_2 = -2.601$, $\Lambda_3 = -4.930$, а размерность Каплана – Йорке для аттрактора $D_L \approx 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.25$. Численные расчеты подтверждают выполнение критерия конусов во всей поглощающей области.

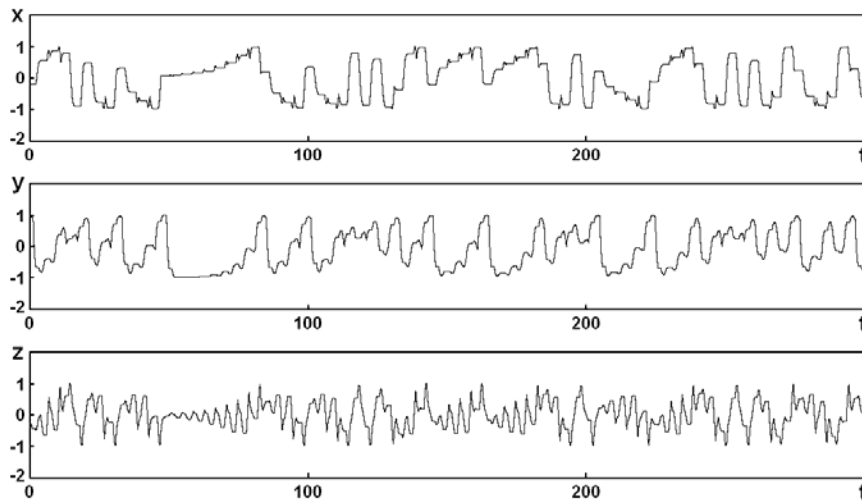


Рис.6.2. Зависимости от времени для динамических переменных x , y , z , полученные в результате численного решения уравнений (6.5) при $d_1=d_2=2$, $\mu=2$

На рис. 6.2 и 6.3 иллюстрируются некоторые особенности динамики в непрерывном времени согласно дифференциальным уравнениям (6.5). На рис. 6.2 показаны зависимости динамических переменных от времени, демонстрирующие очевидно хаотическое поведение. На рис. 6.3 показан аттрактор в расширенном фазовом пространстве системы с непрерывным временем в трехмерной проекции. Изображение представлено тонами серого цвета: глубина тона показывает относительную продолжительность пребывания фазовых траекторий в соответствующих пикселях. В поперечном сечении объекта гиперплоскостью $t=\text{const}$ имеет место соленоид, показанный на рис. 6.16.

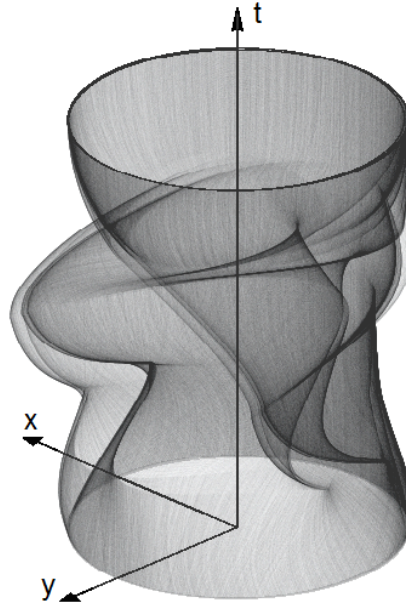


Рис.6.3. Портрет аттрактора системы с непрерывным временем (6.5) в четырехмерном расширенном фазовом пространстве в трехмерной проекции. Тона серого цвета обозначают относительную продолжительность пребывания фазовых траекторий в соответствующих пикселях.

6.2 Динамическая система с аттрактором типа Плыкина

Перейдем к построению в явном виде неавтономной потоковой системы с аттрактором типа Плыкина [Kuznetsov, 2009; Кузнецов, 2009]. Отправной точкой служит отображение, составленное из последовательно повторяющихся четырех стадий, каждая из которых соответствует геометрически очевидным непрерывным преобразованиям на двумерной сфере.

6.2.1 Аттрактор типа Плыкина на сфере

Рассмотрим сферу единичного радиуса (рис. 6.4). Точку на сфере можно задать в угловых координатах (θ, φ) или в декартовых координатах

$$x = \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \cos \theta, \quad (6.8)$$

удовлетворяющих соотношению $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Как доказано Плыкиным, отображение сферы в себя может иметь гиперболический аттрактор при наличии не менее четырех дырок – односвязных областей, не посещаемых принадлежащими аттрактору траекториями. В нашей конструкции эту роль будут играть окрестности четырех точек A, B, C, D с координатами $(x, y, z) = (\pm 1/\sqrt{2}, 0, \pm 1/\sqrt{2})$. Северный и южный полюса сферы обозначены, соответственно, N и S.

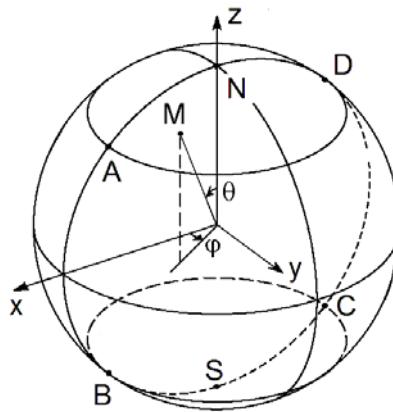


Рис.6.4. Единичная сфера с отмеченными точками A, B, C, D, окрестности которых отвечают дырам, не посещаемым траекториями на аттракторе. Северный и южный полюса обозначены, соответственно, N и S. Поясняется смысл угловых координат некоторой точки M, изображены также оси декартовой системы координат x, y, z.

Рассмотрим последовательность четырех выполняемых друг за другом непрерывных преобразований.

I. Сток по параллели – смещение изображающих точек вдоль параллелей от меридианов NABS и NCBS к равноудаленной от них меридиональной окружности. В декартовых координатах это описывается уравнениями

$$\dot{x} = -\epsilon xy^2, \quad \dot{y} = \epsilon x^2 y, \quad \dot{z} = 0, \quad (6.9)$$

где ϵ – некоторый параметр.

II. Дифференциальное вращение вокруг оси z с угловой скоростью, линейно зависящей от z, так что изображающие точки на параллели, проходящей через B и C, остаются неподвижными, а на параллели, проходящей через A и D, совершают поворот на 180° согласно уравнениям

$$\dot{x} = \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)y, \quad \dot{y} = -\pi(z/\sqrt{2} + 1/2)x, \quad \dot{z} = 0. \quad (6.10)$$

III. Сток к экватору – смещение изображающих точек по окружностям с центрами на оси x на сфере от большого круга ABCD к экватору:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \varepsilon y z^2, \quad \dot{z} = -\varepsilon y^2 z. \quad (6.11)$$

IV. Дифференциальное вращение вокруг оси x с угловой скоростью, линейно зависящей от x , так что в плоскости, ортогональной оси x и проходящей через точку C, изображающие точки неподвижны, а в сечении, содержащем точку B, претерпевают поворот на 180° :

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\pi(x/\sqrt{2} + 1/2)z, \quad \dot{z} = \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)y. \quad (6.12)$$

Процедура симметрична в том смысле, что стадии (I)-(II) в точности аналогичны стадиям (III)-(IV) с обменом ролями между осями x и z .

Интуитивно представляется правдоподобным, что такая последовательность преобразований породит поток, формирующий вытянутые волокна с тонкой поперечной структурой, присутствие которых характерно для аттракторов типа Плыкина.

Динамические уравнения можно представить в виде единой записи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\varepsilon x y^2 f_1(t) + \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)y f_2(t), \\ \dot{y} &= \varepsilon x^2 y f_1(t) - \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)x f_2(t) + \varepsilon y z^2 f_3(t) - \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)z f_4(t), \\ \dot{z} &= -\varepsilon y^2 z f_3(t) - \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)y f_4(t), \end{aligned} \quad (6.13)$$

где $f_k(t) = 1$, если $k - 1 \leq t - 4[t/4] < k$, и 0 в иных случаях.

Отображение Пуанкаре, которое определяет преобразование вектора состояния $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n, z_n)$ за период $T = 4$, можно найти в явном виде. Проводя последовательно решение дифференциальных уравнений (6.9)-(6.12) и учитывая упомянутую симметрию задачи, можно выразить результирующий вектор состояния \mathbf{x}_{n+1} как

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_+(\mathbf{f}_-(\mathbf{x}_n)) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad (6.14)$$

где

$$\mathbf{f}_{\pm}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \pm z \\ \frac{ye^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1) \pm xe^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1)}{\sqrt{\cosh \varepsilon(x^2+y^2) + \varepsilon(y^2-x^2)} \frac{\sinh \varepsilon(x^2+y^2)}{\varepsilon(x^2+y^2)}} \\ \frac{ye^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1) \mp xe^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1)}{\sqrt{\cosh \varepsilon(x^2+y^2) + \varepsilon(y^2-x^2)} \frac{\sinh \varepsilon(x^2+y^2)}{\varepsilon(x^2+y^2)}} \end{pmatrix}$$

Соотношение (6.14) определяет отображение единичной сферы в себя \mathbf{f} , причем для этого отображения C служит неподвижной точкой, а точки A , B и D составляют неустойчивую орбиту периода 3: $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$. Отображение \mathbf{f} обратимое. Обратное отображение получается в результате тех же преобразований, выполняемых в обратном порядке и с инвертированными направлениями поворотов.

На рис. 6.5 показан аттрактор отображения \mathbf{f} при $\varepsilon=0.77$. Следует отметить характерную фрактальную структуру аттрактора: объект как бы составлен из полосок, каждая из которых содержит полоски следующего уровня, и так далее.

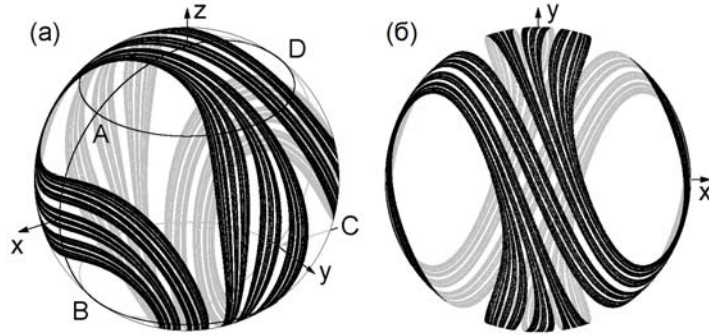


Рис.6.5. Аттрактор отображения (6.14) при $\varepsilon=0.77$ на единичной сфере, представленной в аксонометрической проекции (а) и в полярной азимутальной проекции (б).

На рис. 6.6 показана зависимость двух показателей Ляпунова отображения от параметра ε . Процедура вычислений основана на алгоритме Бенетина (см. главу 1) и состоит в совместных итерациях отображения (6.14) и двух комплектов соответствующих уравнений в вариациях.

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{f}'_{\pm}(\mathbf{f}_{\pm}(\mathbf{x}_n))\mathbf{f}'_{\pm}(\mathbf{x}_n)\tilde{\mathbf{x}}_n, \quad (6.15)$$

с ортогонализацией векторов возмущения к радиус-вектору (x,y,z) и друг к другу и их нормировкой на фиксированную константу.

В области $\varepsilon < \varepsilon_c \approx 2.03$ один из двух показателей Ляпунова положительный, что говорит о наличии хаоса, а второй отрицательный. При $\varepsilon > \varepsilon_c$ (сильная диссипация на стадиях I и III), хаос исчезает. Отметим плавную зависимость положительного показателя Ляпунова от параметра, на графике которой нет провалов, характерных для многих систем с негиперболическими аттракторами (приложение А). На рисунке показан также график для размерности аттрактора, рассчитанной по формуле Каплана – Йорке, которая в данном случае имеет вид $D_{KY} = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2|$. Видно, что в области хаоса с ростом параметра ε размерность плавно убывает от 2, что соответствует исчезающе малой диссипации, примерно до 1. В частности, при $\varepsilon=0.77$ показатели Ляпунова равны $\Lambda_1 = 0.959$ и $\Lambda_2 = -1.141$, так что размерность Каплана – Йорке $D_{KY} \approx 1.84$.

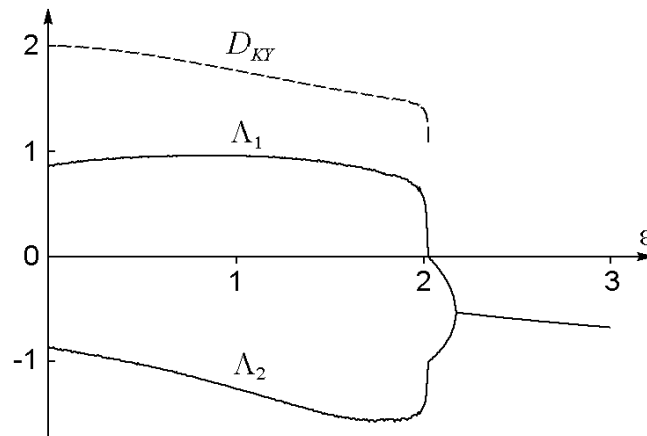


Рис.6.6. Зависимость от параметра ε показателей Ляпунова (сплошные линии) и размерности аттрактора, вычисленной по формуле Каплана – Йорке (пунктир), для отображения сферы (6.14). Область гиперболического хаоса согласно результатам проверки критерия конусов приблизительно $0.35 < \varepsilon < 2$. В области $\varepsilon > \varepsilon_c \approx 2.023$ хаоса нет, и динамика становится периодической.

Численная проверка критерия конусов подтверждает гиперболическую природу аттрактора в интервале значений параметра $0.35 < \varepsilon < 2$ [Kuznetsov, 2009; Кузнецов, 2009]. Рис. 6.7 иллюстрирует, как эволюционирует структура аттрактора при изменении параметра в этом диапазоне: полосы, образующие поперечную канторову структуру выглядят толстыми при малых значениях параметра ε и становятся все уже по мере его увеличения.

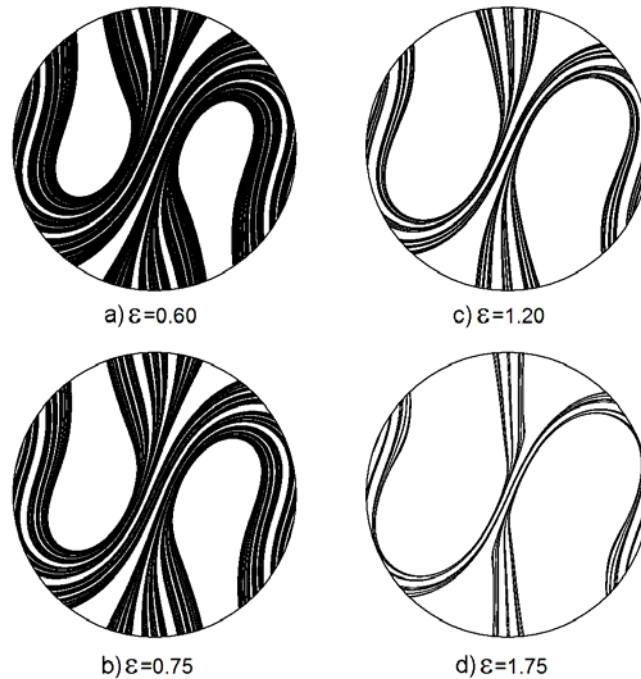


Рис.6.7. Портреты аттракторов отображения (6.14), представленные в полярной азимутальной проекции северного полушария для разных величин параметра ε в области гиперболичности. (Карты для южного полушария выглядят аналогично; они получаются зеркальным отражением картинки относительно вертикальной оси.)

6.2.2 Аттрактор типа Плыкина на плоскости

Описание динамики можно переформулировать так, чтобы мгновенные состояния системы представлялись точками на плоскости. Подходящей для этого является следующая замена переменных

$$W = X + iY = \frac{x - z + iy\sqrt{2}}{x + z + \sqrt{2}}. \quad (6.16)$$

Это соответствует стереографической проекции со сферы на плоскость при взятии за центр проецирования точки $C(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. Эта точка не принадлежит аттрактору (находится в «дырке»), поэтому аттрактор на плоскости оказывается расположенным в ограниченной области. Обратная замена переменных выражается соотношениями

$$x = \frac{1 - |W|^2 + 2\operatorname{Re}W}{\sqrt{2}(1 + |W|^2)}, \quad y = \frac{2\operatorname{Im}W}{1 + |W|^2}, \quad z = \frac{1 - |W|^2 - 2\operatorname{Re}W}{\sqrt{2}(1 + |W|^2)}. \quad (6.17)$$

Теперь уравнения динамики (6.9)-(6.12) можно переписать в новых переменных, достоинство которых состоит в том, что третья, избыточная переменная оказывается исключенной. Для этого вычисляем производные по времени от выражений (6.17), подставляем производные от старых переменных согласно (6.9)-(6.12), и выражаем результат через X и Y . Для четырех стадий динамики получаем:

Стадия I:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \varepsilon Y^2 \frac{(1 + 2X - X^2 - Y^2)(X - 1)}{(1 + X^2 + Y^2)^2}, \\ \dot{Y} &= \varepsilon Y \frac{(1 + 2X - X^2 - Y^2)(1 + 2X - X^2 + Y^2)}{2(1 + X^2 + Y^2)^2}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Стадия II:

$$\dot{X} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{Y(1 - X)^2}{1 + X^2 + Y^2}, \quad \dot{Y} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{(1 - X)(1 + 2X - X^2 + Y^2)}{1 + X^2 + Y^2}. \quad (6.19)$$

Стадия III:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \varepsilon Y^2 \frac{(1 - 2X - X^2 - Y^2)(X + 1)}{(1 + X^2 + Y^2)^2}, \\ \dot{Y} &= \varepsilon Y \frac{(1 - 2X - X^2 - Y^2)(1 - 2X - X^2 + Y^2)}{2(1 + X^2 + Y^2)^2}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Стадия IV:

$$\dot{X} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{Y(1 + X)^2}{1 + X^2 + Y^2}, \quad \dot{Y} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{(1 + X)(1 - 2X - X^2 + Y^2)}{1 + X^2 + Y^2}. \quad (6.21)$$

Динамические уравнения можно представить в виде единой записи:

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \left[\varepsilon Y^2 \frac{1+2X-X^2-Y^2}{1+X^2+Y^2} f_1(x) + \frac{\pi Y(X-1)}{\sqrt{2}} f_2(x) \right] \frac{X-1}{1+X^2+Y^2} \\
&+ \left[\varepsilon Y^2 \frac{1-2X-X^2-Y^2}{1+X^2+Y^2} f_3(x) - \frac{\pi Y(1+X)}{\sqrt{2}} f_4(x) \right] \frac{X+1}{1+X^2+Y^2}, \\
\dot{Y} &= \left[\varepsilon Y \frac{1+2X-X^2-Y^2}{1+X^2+Y^2} f_1(x) - \frac{\pi(1-X)}{\sqrt{2}} f_2(x) \right] \frac{1+2X-X^2+Y^2}{2+2X^2+2Y^2} \\
&+ \left[\varepsilon Y \frac{1-2X-X^2-Y^2}{1+X^2+Y^2} f_3(x) - \frac{\pi(1+X)}{\sqrt{2}} f_4(x) \right] \frac{1-2X-X^2+Y^2}{2+2X^2+2Y^2},
\end{aligned} \tag{6.22}$$

где $f_k(t) = 1$, если $k-1 \leq t - 4[t/4] < k$, и $f_k(t) = 0$ в иных случаях.

На рис. 6.8 показан аттрактор в трехмерном расширенном фазовом пространстве (X, Y, t) . Чтобы сделать видимой присущую объекту структуру, картина представлена в технике кодирования тонами серого цвета. Более темные тона отвечают относительно большей вероятности посещения соответствующих пикселей траекторией на аттракторе. Интервал времени, представленный по вертикальной оси соответствует в точности периоду изменения коэффициентов в уравнениях. В сечении горизонтальной плоскостью можно видеть объект с поперечной фрактальной структурой.

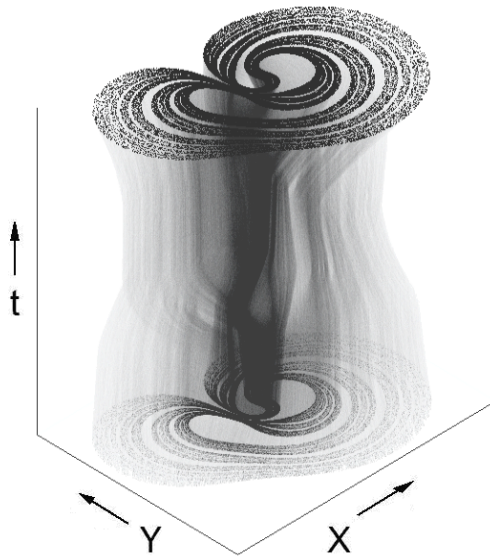


Рис. 6.8. Портрет аттрактора системы (6.22) при $\varepsilon=0.77$ в расширенном трехмерном фазовом пространстве. Использована техника представления тонами серого цвета: более темные тона отвечают относительно большей вероятности посещения соответствующих пикселей траекторией на аттракторе.

Отображение Пуанкаре можно вывести либо произведя аналитическое решение уравнений динамики (последовательно для четырех стадий), либо выполнив в (6.14) замену переменных согласно соотношениям (6.16) и (6.17). Полученное отображение представляется следующим образом

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{T}_+(\mathbf{T}_-(\mathbf{W}_n)) \equiv \mathbf{T}(\mathbf{W}_n), \quad (6.23)$$

$$\mathbf{T}_{\pm}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\pm(1-|W|^2-2X) - \frac{2\sqrt{2}Ye^{\rho/2} \sin \Phi \mp (1-|W|^2+2X)e^{-\rho/2} \cos \Phi}{\sqrt{\operatorname{ch} \rho + \gamma \operatorname{sh} \rho / \rho}}}{\pm(1-|W|^2-2X) + \frac{2\sqrt{2}Ye^{\rho/2} \sin \Phi \mp (1-|W|^2+2X)e^{-\rho/2} \cos \Phi}{\sqrt{\operatorname{ch} \rho + \gamma \operatorname{sh} \rho / \rho}} + 2 + 2|W|^2} \\ \frac{\sqrt{2} \frac{2\sqrt{2}Ye^{\rho/2} \cos \Phi \pm (1-|W|^2+2X)e^{-\rho/2} \sin \Phi}{\sqrt{\operatorname{ch} \rho + \gamma \operatorname{sh} \rho / \rho}}}{\pm(1-|W|^2-2X) + \frac{2\sqrt{2}Ye^{\rho/2} \sin \Phi \mp (1-|W|^2+2X)e^{-\rho/2} \cos \Phi}{\sqrt{\operatorname{ch} \rho + \gamma \operatorname{sh} \rho / \rho}} + 2 + 2|W|^2} \end{pmatrix}$$

где

$$|W|^2 = X^2 + Y^2, \quad \rho = \varepsilon \frac{8Y^2 + (1-|W|^2-2X)^2}{2(1+|W|^2)^2},$$

$$\gamma = \varepsilon \frac{8Y^2 - (1-|W|^2-2X)^2}{2(1+|W|^2)^2}, \quad \Phi = \pi \frac{1-X}{1+|W|^2}.$$

Портрет аттрактора на плоскости, полученный итерациями отображения (6.22) при $\varepsilon=0.77$, показан на рис. 6.9а. Это тот же самый объект, который можно видеть в сечении на рис.6.8.

Чтобы убедиться, что это аттрактор типа Плыкина и подтвердить, что он однородно гиперболический, были построены на графике устойчивое и неустойчивое слоения в области D , содержащей аттрактор (рис. 6.9б).¹ Устойчивые и неустойчивые многообразия располагаются вдоль черных и серых кривых, соответственно. Как можно видеть из рисунка, неустойчивые многообразия расположены вдоль волокон аттрактора, тогда как устойчивые многообразия расположены поперек них. Взаимное расположение устойчи-

¹ Метод построения состоит в следующем. Сначала для некоторой точки \mathbf{x} находим образ при итерациях отображения Пуанкаре $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^N(\mathbf{x})$ и прообраз путем итераций обратного отображения $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^{-N}(\mathbf{x})$, где N – эмпирически подобранное целое число. Затем, используя случайные начальные условия $\tilde{\mathbf{y}}$ в малой окрестности $\tilde{\mathbf{x}}$, проводим итерации отображения Пуанкаре и получаем множество точек $\mathbf{y} = \mathbf{f}^N(\tilde{\mathbf{y}})$, которые прорисовывают неустойчивое многообразие. Точно так же, стартуя от начальных условий $\bar{\mathbf{y}}$ в малой окрестности $\bar{\mathbf{x}}$ и проводя итерации обратного отображения, прорисовываем устойчивое многообразие точками $\mathbf{y} = \mathbf{f}^{-N}(\bar{\mathbf{y}})$. Точность, с которой получается график, быстро увеличивается с ростом N . Фактически $N = 6$ уже вполне достаточно для того, чтобы иметь столь малую погрешность, что на графике она визуальнo неразличима.

вых и неустойчивых многообразий в области D определенно исключает касания.

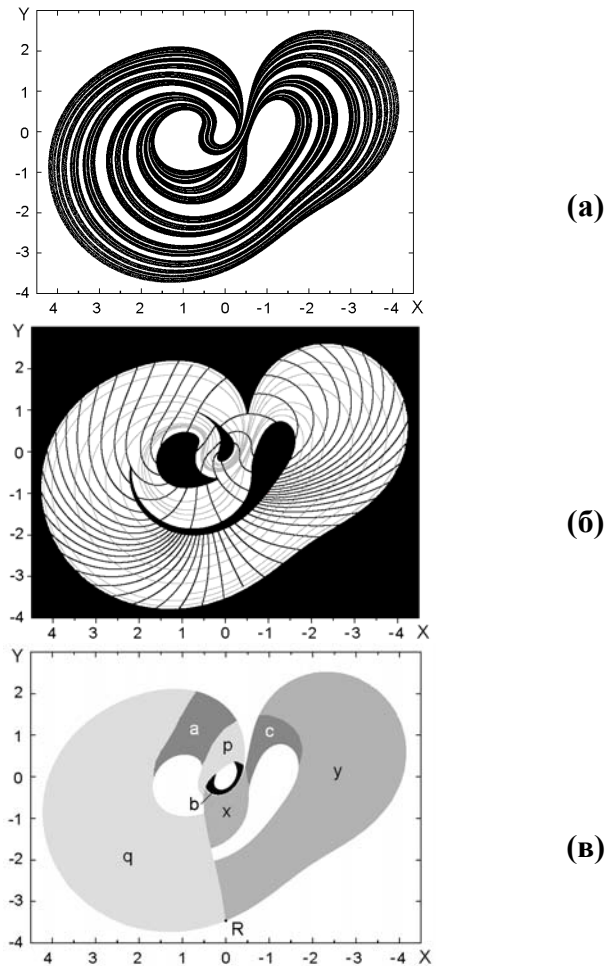


Рис.6.9. (а) Портрет аттрактора отображения (6.23) при $\epsilon=0.77$. (б) Устойчивое и неустойчивое слоения, построенные вычислениями на компьютере в поглощающей области D , которая показана белым. Устойчивые и неустойчивые многообразия располагаются вдоль черных и серых кривых, соответственно. (в) Марковское разбиение: границы между подобластями проходят по устойчивому многообразию неподвижной точки R , принадлежащей аттрактору. Это разбиение можно сравнить с тем, которое показано на рис. 3.5б, что свидетельствует о принадлежности обоих объектов к одному и тому же классу аттракторов типа Плькина. Для большей наглядности сравнения, направление горизонтальной координатной оси инвертировано, и использованы идентичные цвета и символы для обозначения подобластей здесь и на рис. 3.5б.

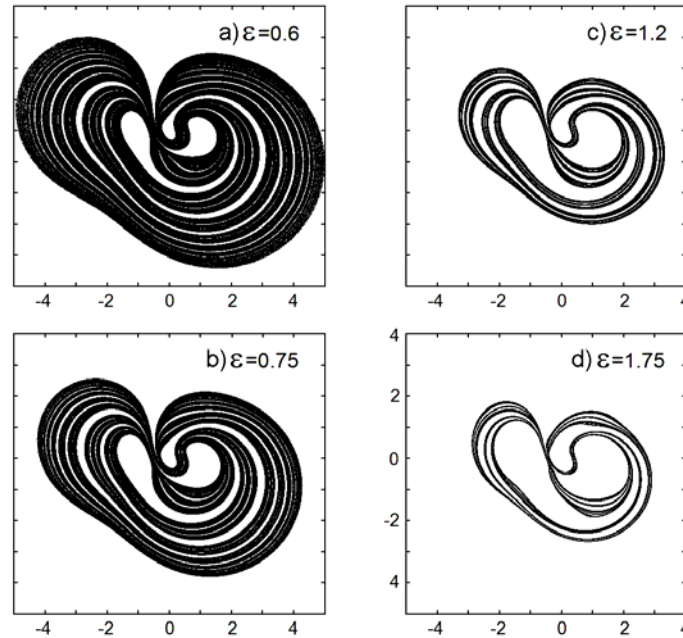


Рис.6.10. Вид аттрактора отображения (6.23) на плоскости для разных значений параметра ε в области гиперболичности.

Далее, можно построить марковское разбиение области D (рис. 6.9в). Пограничная кривая, разделяющая элементы разбиения, представляет собой устойчивое многообразие неподвижной точки типа седла R , которая принадлежит аттрактору (при $\varepsilon=0.77$ она имеет координаты $X=0$, $Y=-3.45524253$). Сравнение взаимного расположения подобластей с тем, которое было приведено на рис. 3.5б для аттрактора типа Плыкина, с очевидностью показывает, что данный аттрактор относится к тому же самому классу. Соответственно, аттрактор отображения (6.14) должен интерпретироваться как аттрактор типа Плыкина на сфере.

Оба представления, на сфере и на плоскости, связаны гладкой заменой переменных. Поэтому показатели Ляпунова для аттрактора на плоскости, приведенного на рис. 6.9, в точности те же, что и для аттрактора на сфере, показанного на рис. 6.5. Аттрактор является однородно гиперболическим, по крайней мере, в интервале по параметру $0.35 < \varepsilon < 2$, как это следует из компьютерной проверки критерия конусов. Рис. 6.10 иллюстрирует трансформацию структуры портретов аттрактора на плоскости при изменении параметра в этом интервале.

Можно было бы возразить, что с точки зрения классической гиперболической теории потоков приведенный пример не выглядит вполне удовлетворительным, поскольку скорость изменения вектора состояния во времени

определяется функциями, претерпевающими разрыв в момент переключения от одной стадии к другой. Тем не менее, эволюция на временном интервале, равном периоду повторения стадий, задается *диффеоморфизмом*, представляющим собой композицию диффеоморфизмов, относящихся к каждой стадии. Поэтому, как пример оператора эволюции в дискретном времени с гиперболическим аттрактором, он адекватен. С другой стороны, оказывается возможным слегка «подправить» оператор эволюции так, чтобы исключить разрывы в определении потока. Если изменение системы в каком-то смысле невелико, можно ожидать, что изменение стробоскопического отображения тоже мало, и, в силу структурной устойчивости, у отображения однородно гиперболический аттрактор сохранится. Соответствующая модификация рассмотренной здесь системы указана в работе [Кузнецов, 2009].