

Глава 18

Гиперболический хаос структур Тьюринга

В предыдущих главах мы имели дело с системами, в которых фазы колебаний во времени на последовательных стадиях активности осцилляторов подчинялись растягивающему отображению окружности или гиперболическому отображению на торе. В качестве альтернативы интересно рассмотреть возможность аналогичных манипуляций с *пространственной* фазой структур, формирующихся в распределенной среде. Это расширяет инструментарий построения моделей и дает новое направление для поиска ситуаций, связанных с гиперболическим хаосом, в том числе, в контексте гидродинамической турбулентности и систем типа реакция-диффузия. Возможность реализации на этом пути гиперболического хаоса, ассоциирующегося с аттрактором типа Смейла – Вильямса, была недавно продемонстрирована [Kuptsov et al., 2012]. Добавим, что описание динамики с помощью укороченных уравнений для амплитуд пространственных мод позволит ввести новые прототипы низкоразмерных моделей с хаотической динамикой (подобно уравнениям Лоренца, полученным в свое время при переходе к конечномерному описанию конвекции жидкости).

18.1. Структуры Тьюринга и модельные уравнения

Существует класс распределенных систем, в которых неустойчивость пространственно однородного состояния ведет к формированию стационарных во времени пространственных структур, обладающих, по крайней мере, приблизительно, пространственной периодичностью. Этот круг задач является составной частью дисциплины, известной как *теория самоорганизации*. Одним из общепризнанных ее источников считается работа Тьюринга «Химические основы морфогенеза» [Turing, 1952], где впервые был предложен механизм образования пространственных структур в системе химически реагентов вследствие разности соответствующих им коэффициентов диффузии. В качестве примера модели, где такой феномен имеет место, приведем систему уравнений в частных производных Гирера – Майнхардта [Gierer and Meinhardt, 1972]. В одномерном случае она записывается в виде

$$\begin{aligned} \partial_t a &= \rho a^2 / h - \mu_a a + \rho_a + D_a \partial_x^2 a, \\ \partial_t h &= \rho a^2 - \mu_h h + \rho_h + D_h \partial_x^2 h. \end{aligned} \quad (18.1)$$

Здесь переменные a и h характеризуют концентрации реагентов, *активатора* и *ингибитора*, зависящие от координаты x и времени t . Параметры μ_a и μ_h отвечают за распад активатора и ингибитора, а ρ_a и ρ_h за их пополнение внешним источником. Коэффициент ρ определяет интенсивность взаимодействия. Принципиальный момент состоит в том, что коэффициенты диффузии для активатора D_a и ингибитора D_h могут различаться. Если второй коэффициент существенно больше первого, то возникает неустойчивость однородного стационарного состояния $a = \text{const}$, $h = \text{const}$ по отношению к возмущениям с некоторым волновым числом на нулевой частоте, приводящая к формированию пространственно осциллирующего паттерна. Это иллюстрируется на рис. 18.1а, где показана зависимость концентрации активатора от координаты и времени на диаграмме, построенной по результатам численного решения дифференциальных уравнений в частных производных (18.1) с параметрами, указанными в подписи к рисунку. Начальные условия заданы в виде стационарного пространственно однородного состояния с добавленными малыми случайными возмущениями. Граничные условия отвечают системе длины L , замкнутой в кольцо: $a(x, t) \equiv a(x + L, t)$, $h(x, t) \equiv h(x + L, t)$ (периодические граничные условия).

Для численного решения уравнений (18.1) (как и других рассматриваемых в этой главе уравнений с частными производными) можно использовать так называемый *метод линий* [Сармин, Чудов, 1963; Schiesser, 1991; Hamdi et al., 2007]. В рамках этого метода сначала выполняется дискретизация на пространственной сетке с некото-

рым достаточно малым шагом $\Delta x=L/M$, где M – число шагов по длине. Так, вместо (18.1) записываем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{a}_m &= \rho a_m^2 / h_m - \mu_a a_m + D_a (a_{m+1} - 2a_m + a_{m-1}) / \Delta x^2 + \rho_a, \\ \dot{h}_m &= \rho a_m^2 - \mu_h h_m + D_h (h_{m+1} - 2h_m + h_{m-1}) / \Delta x^2 + \rho_h,\end{aligned}$$

где пространственный индекс m принимает значения $0, \dots, M-1$. Дополнительно должны быть специально учтены граничные условия на концах системы. В частности, для периодических граничных условий в уравнении для $m=0$ полагаем $a_{-1} = a_{M-1}$, $h_{-1} = h_{M-1}$, а в уравнении для $m=M-1$, соответственно, $a_M = a_0$, $h_M = h_0$. Затем уравнения решаются одним из стандартных численных методов, применимых для обыкновенных дифференциальных уравнений, например, методом Рунге – Кутты четвертого порядка.

Какова простейшая, минимальная модель, описывающая феномен образования структур? Очевидно, в ней должна обеспечиваться характерная форма зависимости инкремента (декремента) от волнового числа для возмущений нулевой частоты вблизи пространственно-однородного равновесного состояния, а также механизм нелинейного ограничения этой неустойчивости. Такой моделью служит *уравнение Свифта – Хохенберга*, сформулированное первоначально применительно к задачам конвекции [Swift and Hohenberg, 1977; Pomeau and Manneville, 1980]

$$\partial_t u + [1 + \kappa^2 \partial_x^2]^2 u = Au - u^3. \quad (18.2)$$

Это уравнение допускает тривиальное стационарное пространственно-однородное состояние $u \equiv 0$. Параметр A отвечает за неустойчивость этого состояния (когда $A > 0$), а параметр κ определяет пространственный масштаб возникающих структур. В самом деле, в линейном приближении (в пренебрежении кубическим членом, определяющим насыщение неустойчивости и стабилизацию формирующегося паттерна) подстановка $u \sim \exp(\lambda t - ikx)$ приводит к выражению для инкремента $\lambda = A - (1 - \kappa^2 k^2)^2$. Максимум инкремента достигается при значении $k = 1/\kappa$, что приблизительно соответствует волновому числу образующегося паттерна.

На рис. 1.18б показана пространственно-временная диаграмма, построенная по результатам численного решения уравнения (18.2) с периодическими граничными условиями, т.е. для участка среды, замкнутого в кольцо. Начальные условия отвечают малому случайному возмущению тривиального пространственно-однородного состояния. Параметры указаны в подписи к рисунку. На диаграмме можно видеть формирование в среде пространственной структуры с волновым числом, отвечающим максимуму инкремента в соответствии с приведенным выше выражением, см. график на вставке спра-

ва внизу. Качественно картина демонстрирует сходство с процессом для уравнения Гирера – Майнхардта и, очевидно, является общей в отношении моделей с неустойчивостью Тьюринга.

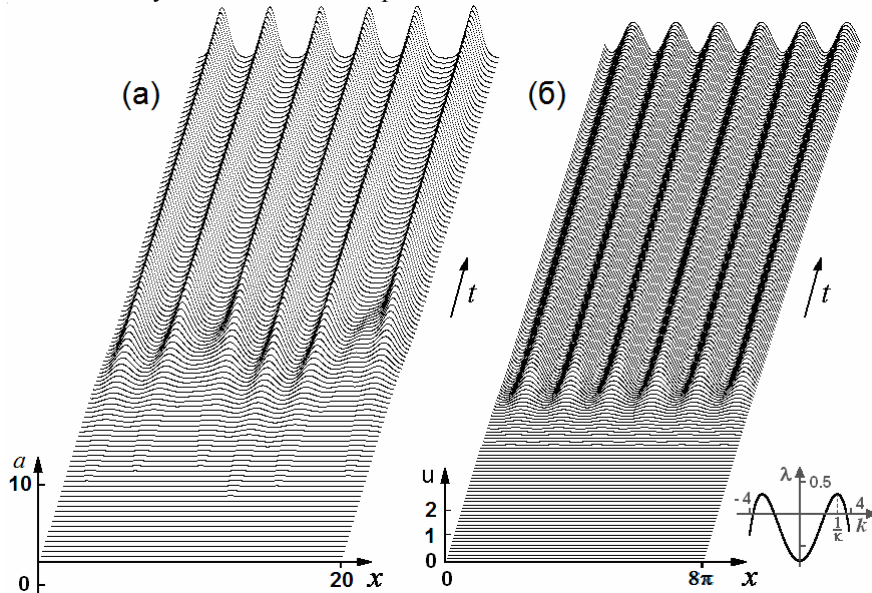


Рис.18.1. Пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие возникновение структур типа Тьюринга из малых случайных возмущений пространственно-однородного состояния в одномерном случае: (а) модель Гирера – Майнхардта (18.1) при $\rho_a=\rho_b=0$, $\mu_a=0.3$, $\rho=.3$, $\mu_b=0.7$, $D_a=.02$, $D_b=0.8$; (б) модель Свифта – Хохенберга (18.2) при $\kappa=1/3$, $A=0.3$, $L=8\pi$. На вставке показана зависимость инкремента (декремента) λ от волнового числа k для возмущений на нулевой частоте

18.2. Гиперболический хаос в модели Свифта – Хохенберга с модуляцией параметров

Обратимся к системе, в которой, благодаря преобразованию пространственной фазы на последовательных временных периодах образующихся попеременно длинноволновых и коротковолновых структур Тьюринга, реализуется гиперболическая хаотическая динамика на аттракторе типа соленоида Смейла – Вильямса [Kuznetsov et al., 2012].

Рассмотрим модификацию одномерной модели Свифта – Хохенберга, в которой параметр κ изменяется во времени, а отвечающий за неустойчивость параметр A характеризуется пространственной зависимостью:

$$\partial_t u + [1 + \kappa^2(t)\partial_x^2]^2 u = A(x)u - u^3. \quad (18.3)$$

Конкретно, будем считать, что функция $A(x)$ представляется отрезком ряда Фурье

$$A(x) = A_0 + B \cos 2x + D \cos 4x, \quad (18.4)$$

а величина κ переключается с периодом T между двумя постоянными значениями:

$$\kappa(t) = \begin{cases} 1, & nT \leq t/T < n + \frac{1}{2}, \\ 1/3, & n + \frac{1}{2} \leq t/T < n + 1. \end{cases} \quad (18.5)$$

Это обеспечивает возбуждение двух различных, попеременно сменяющих друг друга во времени, структур Тьюринга, характеризуемых доминирующим волновым числом $k=1$ или $k=3$. Временной интервал между переключениями должен превышать характерную длительность образования или исчезновения структур Тьюринга. Нелинейный кубический член в уравнении отвечает за насыщение неустойчивости, но играет и другую важную роль в динамике системы, что объяснено ниже.

18.2.1 Кольцевая система

Предположим сначала, что система (18.3) имеет кольцевую геометрию и наложены периодические граничные условия, т.е.

$$u(x, t) \equiv u(x + L, t). \quad (18.6)$$

При этом длину L целесообразно выбрать так, чтобы геометрия была согласована с возможностью рождения структур Тьюринга с волновыми числами $k=1$ и 3 . Для этого полагаем $L = 2\pi l$, где l целое число.

Система функционирует следующим образом. На каждом временном интервале, когда $\kappa(t) = 1$, формируется и доминирует паттерн с волновым числом $k=1$, который характеризуется некоторой пространственной фазой φ , что в грубом приближении соответствует пространственному распределению $u \sim U_1 \cos(x + \varphi) + \tilde{U}_3 \cos(3x + 3\varphi)$. Здесь $\tilde{U}_3 \ll U_1$, и U_1 имеет порядок \sqrt{A} . (Третья гармоника возникает естественным образом благодаря наличию в уравнении кубического нелинейного члена.) После переключения κ к значению параметра $\kappa(t) = 1/3$ длинноволновая компонента с $k=1$ затухает, но система становится неустойчивой по отношению к возбуждению паттерна с волновым числом $k=3$. Начальная стимуляция этого коротковолнового пат-

терна обеспечивается составляющей \tilde{U}_3 , так что он получает пространственную фазу 3φ . В конце рассматриваемого интервала времени первая гармоническая составляющая практически исчезает, и реализуется пространственная структура $u \sim U_3 \cos(3x + 3\varphi)$, с амплитудой U_3 порядка \sqrt{A} . После следующего переключения, когда вновь $\kappa(t) = 1$, третья гармоника затухает, но реализуется неустойчивость для первой гармоники, и ее амплитуда начинает расти. «Зародышем» для этого роста служит компонента с волновым числом $k=1$, возникшая из комбинации затухающей коротковолновой моды и коэффициента $\chi(x)$, зависящего от пространственной координаты. Если функция $A(x)$ содержит доминирующую вторую гармонику (т.е. $B \gg D$), то длинноволновая мода формируется с фазой 3φ , из-за присутствия члена, пропорционального $\cos 2x \cos(3x + 3\varphi) = \frac{1}{2} \cos(x + 3\varphi) + \dots$. Таким образом, пространственная фаза паттерна на каждом полном периоде модуляции претерпевает утроение (с точностью до постоянного фазового сдвига): $\varphi_{n+1} = 3\varphi_n + \text{const}$.

Другой вариант состоит в том, что функция $A(x)$ может иметь доминирующую четвертую гармонику (т.е. $D \gg B$). Тогда на этапе рождения длинноволновой моды роль «зародыша» играет составляющая, записываемая, как $\cos 4x \cos(3x + 3\varphi) = \frac{1}{2} \cos(x - 3\varphi) + \dots$. Поэтому отображение для фазы получается в виде $\varphi_{n+1} = -3\varphi_n + \text{const}$.

В силу того, что для пространственной фазы реализуется равномерно растягивающее отображение окружности, характеризуемое положительным показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 3 \approx 1.0986$, стробоскопическое отображение, описывающее изменение состояния системы $u_n(x) \equiv u(x, t_n)$ на интервале времени от момента $t_n = nT + \text{const}$ до момента t_{n+1} , будет гиперболическим.

Если варьировать параметры так, чтобы изменялся относительный вес компонент с волновыми числами $k=2$ и $k=4$ в функции $A(x)$, то, по-видимому, будут наблюдаться переходы между топологически разными типами поведения.

Конечно, описанный режим работы имеет место при условии правильного подбора параметров. Значение A должно быть задано так, чтобы получить на последовательных полупериодах модуляции неустойчивость для моды с волновым числом $k=1$ и затухание для моды с $k=3$, или наоборот. Переменная составляющая $A(x)$ должна быть небольшой по сравнению с амплитудой развитого паттерна, чтобы обеспечивать только вклад в качестве «зародыша» для формирования длинноволнового паттерна. Те не менее, он должен иметь достаточный уровень, чтобы дать начало процессу, достигающему насыщения на временном масштабе T . Аналогичные требования предъявляются к уровню третьей гармоники, которая на соответствующей стадии динамики запускает формирование коротковолнового паттерна. На

самом деле, эти требования не очень ограничительные: тип динамического поведения, который здесь обсуждается, имеет место в довольно широкой области параметров.

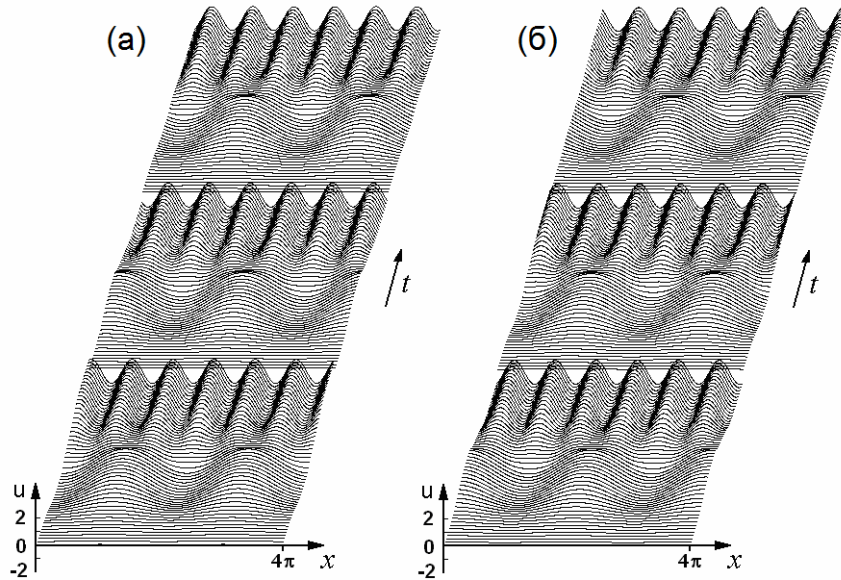


Рис.18.2. Результаты численного решения уравнения (18.3) с периодическими граничными условиями, представленные в виде трехмерных пространственно-временных диаграмм, для $A_0=0.6$, $T=25$, $L=4\pi$ для случая $B=0.03$, $D=0$ (а) и $B=0$, $D=0.03$ (б).

Рис. 18.2 иллюстрирует пространственно-временное поведение системы с периодическими граничными условиями. В одном случае переменная составляющая функции $A(x)$ определяется второй гармоникой разложения в ряд Фурье, а в другом – четвертой. Приведены типичные зависимости переменной u от координаты x и времени t , отложенных по соответствующим осям координат. Значения параметров, заданные в расчетах, приведены в подписи к рисунку. На обеих диаграммах можно видеть попеременное образование и затухание длинноволновой и коротковолновой структур Тьюринга, и этот процесс повторяется с периодом T . Обратим внимание, что пространственные фазы паттернов, возникающих на последовательных периодах, отличаются и, как можно убедиться, подчиняются хаотическому отображению типа Бернулли. На рис. 18.3 представлены итерационные диаграммы для пространственных фаз. В расчетах на компьютере фазы определяются в моменты времени $t_n = (n + \frac{1}{4})T$ из соотношения $\varphi_n = \arg[u(L/2, t_n) + i\partial_x u(L/2, t_n)]$, где пространственная производная $\partial_x u$ получается численным дифференцированием, и результаты представляются в координатах φ_n и φ_{n+1} . Это эмпирическое отображение соответствует

ожидаемому топологическому типу. А именно, один оборот для прообраза соответствует трем оборотам для образа в том же направлении в случае пространственной неоднородности, заданной второй гармоникой, и в обратном направлении в случае четвертой гармоники.

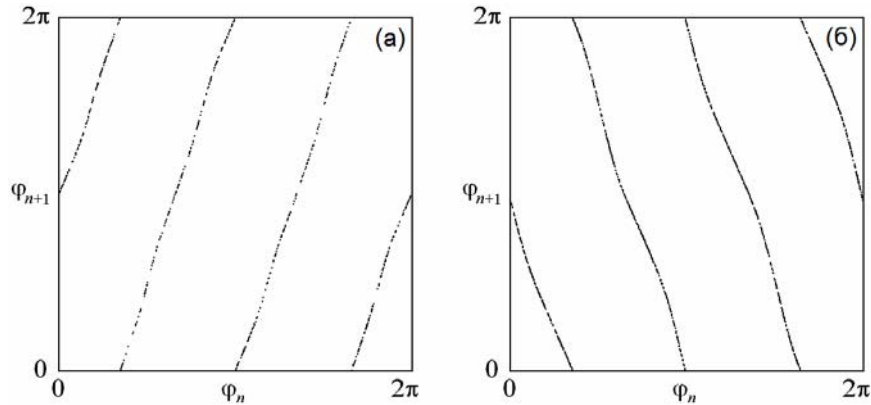


Рис. 18.3. Диаграммы для пространственных фаз структур Тьюринга, вычисленных в моменты времени $t_n = (n + \frac{1}{4})T$, для системы (18.3) с периодическими граничными условиями при $A_0=0.6$, $T=25$, $L=4\pi$. Панель (а) отвечает случаю $B=0.03$, $D=0$, а панель (б) случаю $B=0$, $D=0.03$.

Чтобы охарактеризовать хаос количественно и продемонстрировать его грубость, обратимся к результатам вычисления показателей Ляпунова. На рис. 18.4 показаны первые пять показателей Ляпунова для стробоскопического отображения в зависимости от параметра A_0 для случая $B=0.03$, $D=0$. Хаотический режим имеет место в области выше некоторого порогового значения $A_0 \approx 0.38$. В этом режиме присутствует один положительный показатель Ляпунова, который остается почти постоянным в широком диапазоне. В частности, при $A=0.6$ показатели таковы:

$$\Lambda = \{1.018, -9.34, -9.34, -11.42, -18.64 \dots\} \quad (18.7)$$

Как и ожидалось, старший показатель близок к $\ln 3$. Из диаграммы видно, что все показатели зависят от параметра плавно, без резких всплесков и провалов, что можно рассматривать как проявление грубости гиперболического хаоса. Размерность аттрактора в стробоскопическом сечении, вычисленная по формуле Каплана – Йорке, при $A_0=0.6$ составляет $D_{KY} \approx 1.11$.

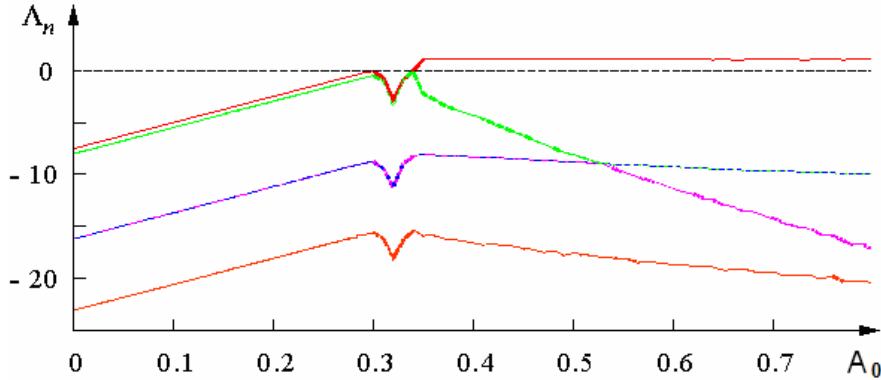


Рис. 18.4. Наибольшие пять показателей Ляпунова в зависимости от параметра A_0 для стробоскопического отображения системы (18.3) с периодическими граничными условиями при $B=0.03$, $T=25$, $L=4\pi$.

Для случая, когда пространственная неоднородность определяется четвертой гармоникой $B=0$, $D=0.03$, спектр показателей Ляпунова при $A=0.6$:

$$\Lambda = \{1.084, -9.44, -9.44, -11.97, -18.94 \dots\} \quad (18.8)$$

Здесь снова старший показатель близок к $\ln 3$, а остальные отрицательны. Размерность по формуле Каплана – Йорке составляет $D_{KY} \approx 1.12$.

В работе [Kuznetsov et al., 2012] проведена проверка гиперболичности путем анализа статистического распределения углов пересечения устойчивых и неустойчивых подпространств на принадлежащей аттрактору траектории, что соответствует методике, описанной в главе 11. Использовался вариант метода, подразумевающий обращение с ортогональным дополнением к сжимающему подпространству, размерность которого мала, в отличие от самого сжимающегося подпространства, имеющего высокую (формально бесконечную) размерность [Kuznetsov, 2012]. В данном случае расширяющееся подпространство одномерное, так что достаточно вычислить единственный вектор возмущения при проходе опорной траектории в прямом времени, и единственный вектор сопряженной задачи при проходе в обратном времени, найти скалярные произведения этих векторов в точках траектории, и проверить, насколько близко к нулю может оказаться его абсолютная величина d_1 . Для стробоскопического отображения системы (18.3) с параметрами, указанными в подписи к рис. 18.2 (а), было обработано 10^5 точек на аттракторе, и при этом оказалось, что распределение сосредоточено в области $(1-5 \times 10^{-5}) < d_1 \leq 1$. Это означает, что растягивающее направление всегда почти ортогонально по отношению к сжимающему подпространству. Тем самым предположение о гиперболической природе аттрактора подтверждается.

18.2.2 Конечномерная модель

Для системы, заданной модифицированным уравнением Свифта – Хохенберга

$$\partial_t u + [1 + \kappa^2(t) \partial_x^2] u = (A_0 + B \cos 2x + D \cos 4x)u - u^3 \quad (18.9)$$

с периодическими граничными условиями, можно построить конечномерную модель. Будем считать что длина системы $L=2\pi$ и примем во внимание, что в динамике в основном участвуют только моды с волновыми числами $k=1$ и $k=3$. Сделаем в уравнении (18.9) подстановку

$$u = a_1(t) \cos x + b_1(t) \sin x + a_3(t) \cos 3x + b_3(t) \sin 3x, \quad (18.10)$$

что дает

$$\begin{aligned} & \dot{a}_1 \cos x + \dot{b}_1 \sin x + \dot{a}_3 \cos 3x + \dot{b}_3 \sin 3x + a_1 [1 - \kappa^2]^2 \cos x \\ & + b_1 [1 - \kappa^2]^2 \sin x + a_3 [1 - 9\kappa^2]^2 \cos 3x + b_3 [1 - 9\kappa^2]^2 \sin 3x = \\ & (a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x)(A_0 + B \cos 2x + D \cos 4x) - \\ & - (a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x)^3. \end{aligned} \quad (18.11)$$

Теперь мы должны сохранить в правой части только члены такой же пространственной структуры, как у членов, присутствующих в левой части, и приравнять те и другие. Для этого сначала умножаем уравнение (18.11) на $\cos x$ и интегрируем по пространственному периоду 2π , затем повторяем ту же процедуру, но с умножением на $\sin x$, $\cos 3x$ и $\sin 3x$. Выписывая каждый раз неисчезающие члены, получаем

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + [1 - \kappa^2]^2 a_1 &= [A_0 - \frac{3}{4}(a_1^2 + b_1^2 + 2a_3^2 + 2b_3^2 + a_1 a_3 + 2b_1 b_3)] a_1 + \\ & + (\frac{3}{4} b_1^2 + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} D) a_3 + \frac{1}{2} B a_1, \\ \dot{b}_1 + [1 - \kappa^2]^2 b_1 &= [A_0 - \frac{3}{4}(a_1^2 + b_1^2 + 2a_3^2 + 2b_3^2 - 2a_1 a_3 - b_1 b_3)] b_1 - \\ & - (\frac{3}{4} a_1^2 + \frac{1}{2} D) b_3 + \frac{1}{2} B (-b_1 + b_3), \\ \dot{a}_3 + [1 - 9\kappa^2]^2 a_3 &= [A_0 - \frac{3}{4}(2a_1^2 + 2b_1^2 + a_3^2 + b_3^2)] a_3 + \\ & + (\frac{3}{4} b_1^2 - \frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} D) a_1 \\ \dot{b}_3 + [1 - 9\kappa^2]^2 b_3 &= [A_0 - \frac{3}{4}(2a_1^2 + 2b_1^2 + a_3^2 + b_3^2)] b_3 - \\ & - (\frac{3}{4} a_1^2 - \frac{1}{4} b_1^2 - \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} D) b_1. \end{aligned} \quad (18.12)$$

Напомним, что параметр κ следует считать зависящим от времени согласно выражению (18.5).

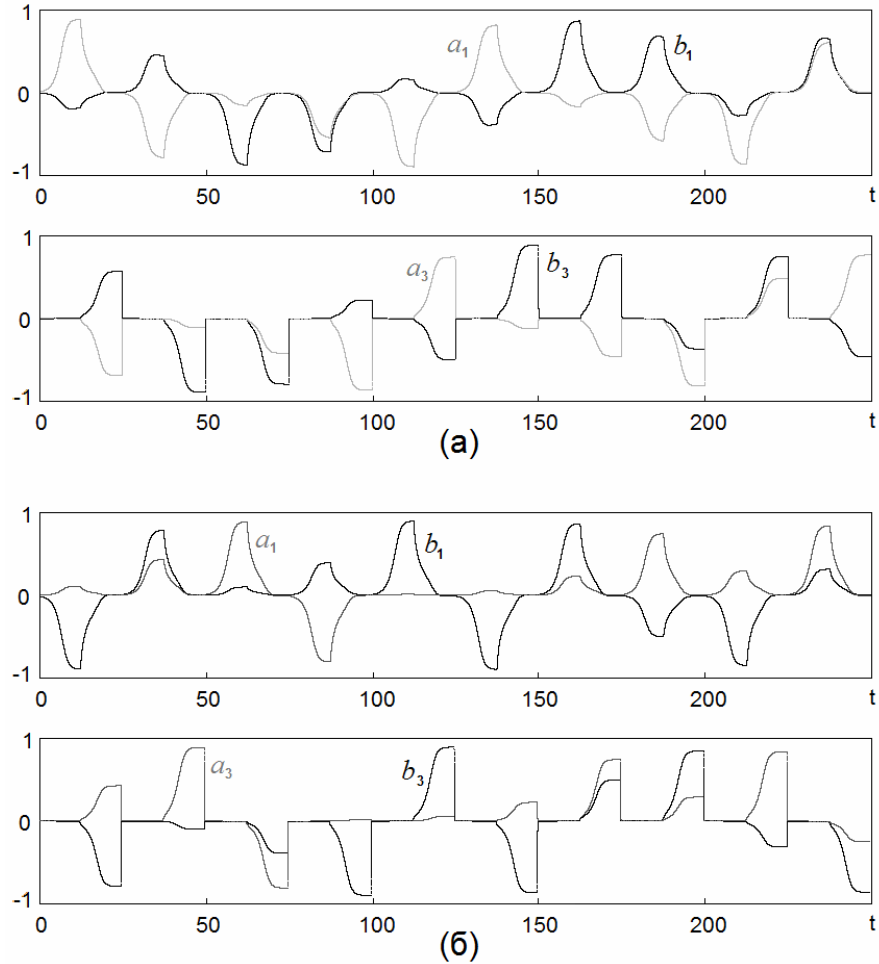


Рис. 18.5. Зависимости амплитудных коэффициентов от времени, полученные в результате численного решения уравнений (18.12) при $A_0=0.6$, $T=25$ в случае $B=0.03$, $D=0$ (а) и $B=0$, $D=0.03$ (б).

Динамика модели (18.12) иллюстрируется на рис. 18.5 для двух случаев, когда пространственная неоднородность задана в виде второй и четвертой гармоники. В обоих случаях на графике можно видеть переключения после каждого очередного полупериода $T/2$. Различные высоты горбов у временных зависимостей a_1 и b_1 или a_3 и b_3 , обусловлены вариациями пространственной фазы. При стробоскопическом рассмотрении динамика фазы отвечает троекратно растягивающему отображению окружности. Чтобы в этом

убедиться, на рис. 18.6 приводятся диаграммы для фаз, вычисленных по формуле $\varphi_n = \text{arg}[a_1(t_n) + ib_1(t_n)]$. Как и для исходной модели, из графиков видно, что один полный оборот для прообраза соответствует трем оборотам для образа, причем в прямом направлении в первом варианте, и в обратном направлении во втором.

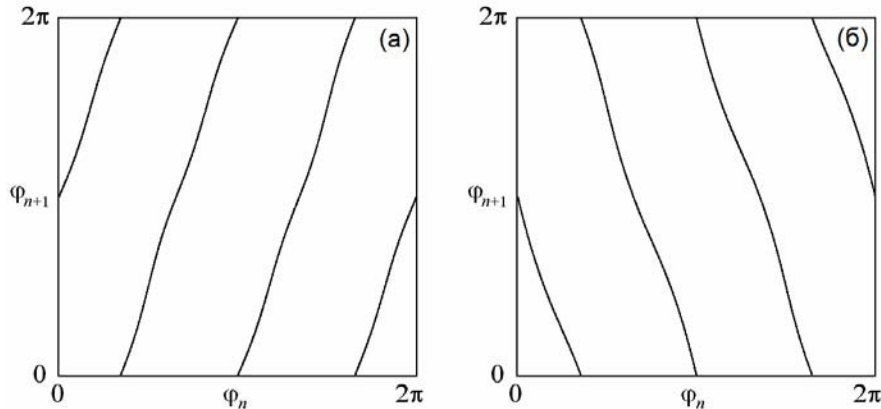


Рис. 18.6. Диаграммы для фаз, вычисленных по формуле $\varphi_n = \text{arg}[a_1(t_n) + ib_1(t_n)]$ в моменты времени $t_n = (n + \frac{1}{4})T$, для системы (18.12) при $A_0=0.6$, $T=25$, $L=4\pi$. Панель (а) отвечает случаю $B=0.03$, $D=0$, а панель (б) случаю $B=0$, $D=0.03$.

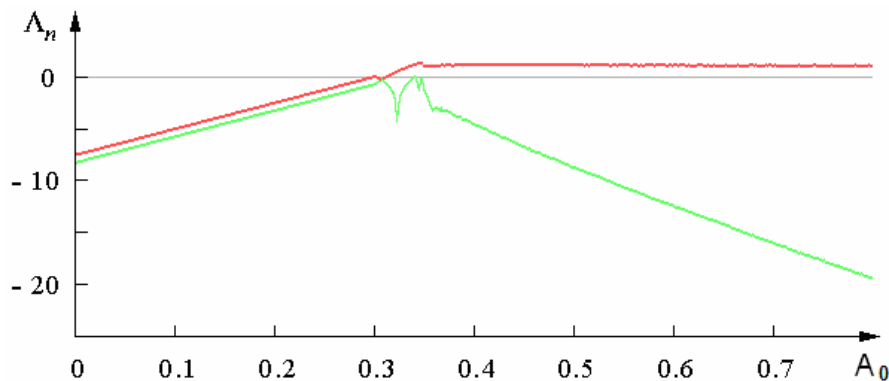


Рис. 18.7. Показатели Ляпунова в зависимости от параметра A_0 для стробоскопического отображения системы (18.12) при $B=0.03$, $D=0$, $T=25$, $L=4\pi$. В масштабе графика не показаны еще два отрицательных показателя, очень большие по абсолютной величине.

На рис. 18.7 показан график зависимости показателей Ляпунова для стробоскопического отображения системы (18.12) в зависимости от параметра A_0 для случая $B=0.03$, $D=0$, $T=25$. Как и в исходной распределенной системе, хаотический режим имеет место в области выше некоторого порогового значения параметра A_0 , и в этом режиме присутствует один положительный показатель Ляпунова, остающийся практически постоянным в ши-

роком диапазоне по параметру и близкий к $\ln 3$. В частности, при $A = 0.6$ показатели таковы:

$$\Lambda = \{1.083, -12.5, -804.7, -806.5\}. \quad (18.13)$$

Интересно сравнить результаты расчета показателей Ляпунова для конечномерной модели и для исходной распределенной системы (18.8). Как видно из сопоставления рис. 18.7 и 18.4, у распределенной системы присутствуют избыточные отрицательные показатели. Очевидно, им соответствуют возмущения, имеющие пространственную структуру, отличную от мод, принятых во внимание при выводе уравнений конечномерной модели. При кратном увеличении длины распределенной системы количество таких избыточных показателей будет расти.

Тестирование конечномерной модели по методике главы 11 вновь показывает, что растягивающее и сжимающее подпространства почти ортогональны, т.е. гиперболичность подтверждается.

18.2.3 Система с фиксированными граничными условиями

Можно ли наблюдать гиперболический хаос структур Тьюринга при конфигурации, отличной от кольцевой геометрии, например для фиксированных граничных условий? Специфика кольцевой геометрии в том, что пространственная фаза паттерна в каждый момент может быть совершенно произвольной, принимая без каких-либо ограничений те значения, которые диктует хаотическая динамика отображения Бернулли. Фиксированные граничные условия могут этому помешать, поскольку вблизи концов системы паттерну навязывается некоторая определенная пространственная фаза. Можно попытаться преодолеть это препятствие, подобрав длину системы достаточно большой, чтобы влияние концов на центральные участки нивелировалось, но все же не настолько большой, чтобы возникла неустойчивость на второй и следующих модах, что вело бы к появлению многомерного аттрактора.

Рассмотрим уравнение (18.9) с нулевыми граничными условиями:

$$u(0,t) = 0, u_x(0,t) = 0, u(L,t) = 0, u_x(L,t) = 0. \quad (18.14),$$

На рис.18.8 показана пространственно-временная диаграмма такой системы при $A_0=0.6$, $T=25$, $L=8\pi$, $B=0.03$, $D=0$: приведена зависимость переменной u от координаты x и времени t . Как и в ранее рассмотренных случаях, наблюдается попеременное образование и затухание длинноволновой и коротковолновой структур Тьюринга. В данном случае надо обратить внимание на пространственные фазы паттернов в центральной части системы. Обработка данных показывает, что они подчиняются хаотическому

отображению утроения типа Бернулли. На рис. 18.9 представлены итерационные диаграммы для пространственных фаз, определяемых в моменты времени $t_n = (n + \frac{1}{4})T$ из соотношения $\varphi_n = \arg[u(L/2, t_n) + iu_x(L/2, t_n)]$. На рис.18.10 показан портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в двумерной проекции на плоскость переменных $(u(L/2, t_n), u_x(L/2, t_n))$. У аттрактора различима поперечная канторова структура, характерная для соленоида Смейла – Вильямса.

Расчеты показывают, что в обширной области параметров система имеет единственный положительный показатель Ляпунова, величина которого почти не зависит от параметра A_0 и близка к $\ln 3$ (см. рис.18.11). В частности, при $A=0.6$ показатели Ляпунова составляют

$$\Lambda = \{1.047, -1.59, -3.92, -4.97, -6.16, \dots\},$$

и оценка размерности Каплана – Йорке дает 1.66.

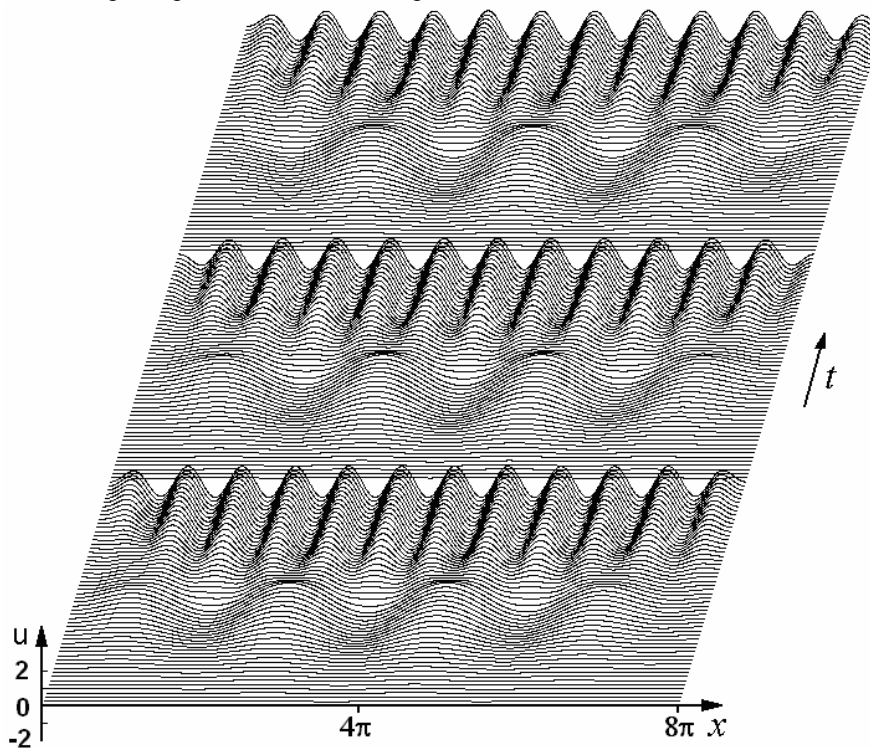


Рис.18.8. Результаты численного решения уравнения (18.3) с нулевыми граничными условиями, представленные в виде трехмерных пространственно-временных диаграмм, для $A_0=0.6$, $T=25$, $L=8\pi$ для случая $B=0.03$, $D=0$.

Тест на гиперболичность в отношении статистики углов пересечения устойчивых и неустойчивых подпространств в точках траектории на аттракторе показывает, что характеристическая величина d_1 хорошо отделена от нуля, хотя распределение в данном случае шире, чем в случае периодических граничных условий ($0.93 < d_1 < 1$).

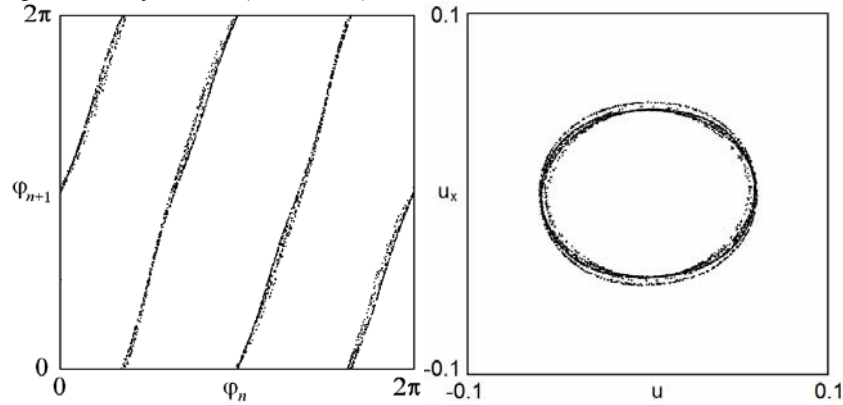


Рис. 18.9. Диаграммы для пространственных фаз структур Тьюринга, вычисленных в моменты времени $t_n = (n + \frac{1}{4})T$, для системы (18.3) с нулевыми граничными условиями. Значения параметров $A_0=0.6$, $T=25$, $B=0.03$, $D=0$, $L=8\pi$.

Рис. 18.10. Портрет аттрактора стробоскопического отображения в проекции на плоскость переменных $(u(L/2, t_n), u_x(L/2, t_n))$, где $t_n = (n + \frac{1}{4})T$, для системы (18.3) с нулевыми граничными условиями. Значения параметров те же, что на рис.8.9.

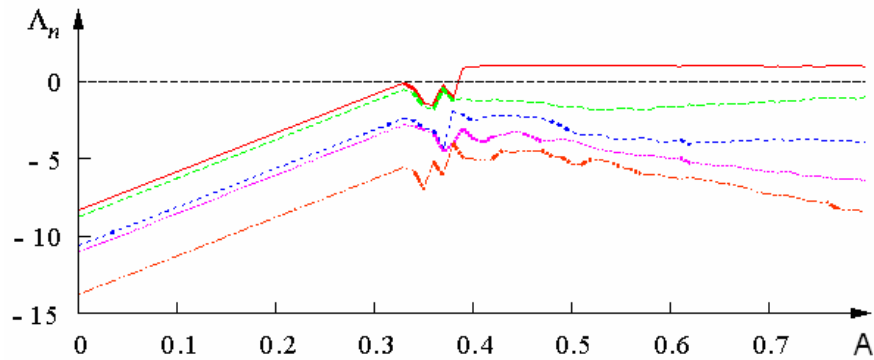


Рис. 18.11. Пять наибольших показателей Ляпунова в зависимости от параметра A для стробоскопического отображения системы (18.3) при $t_n = (n + \frac{1}{4})T$ для нулевых граничных условий при $B=0.03$, $D=0$, $T=25$, $L=8\pi$.

Подводя итог этой главы, заключаем, что гиперболическая хаотическая динамика может возникать в распределенных системах за счет взаимодействия пространственных структур с различной длиной волны. Хаотическое по-

ведение пространственных фаз паттернов в соответствии с трехкратно растягивающим отображением окружности было продемонстрировано здесь для уравнения в частных производных типа Свифта – Хохенберга и для редуцированной модели, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Впрочем, данный тип динамики не следует рассматривать, как специфичный только для модели Свифта – Хохенберга. Ингредиенты, необходимые для реализации механизма умножения фазы, а именно чередование паттернов вследствие модуляции параметров, нелинейность и пространственная неоднородность могут быть найдены или созданы во многих пространственно распределенных системах. Тем самым открываются перспективы для поиска и построения моделей с гиперболическим хаосом, относящихся к образованию структур, например, в динамике жидкости (рябь Фарадея, конвекционные валы), при механических колебаниях (параметрические колебания струны), в системах реакция-диффузия (структуры Тьюринга, структуры, индуцированные адвекцией).