

## **Глава 19**

# **Электронные схемы с гиперболическим хаосом в программной среде Multisim**

На основе систем с однородно гиперболическими аттракторами, о которых рассказывалось в предыдущих главах этой книги, можно говорить о создании реально функционирующих устройств, демонстрирующих грубый хаос, например, в электронике, с перспективами применения в схемах скрытой коммуникации, шумовой локации, для генерации случайных чисел, в криптографии. Имея в виду разработку электронных устройств, естественно обратиться к программным средствам схемотехнического моделирования. В настоящей главе обсуждается несколько схем, представляющих собой динамические системы с аттракторами типа Смейла – Вильямса и Плыкина, которые реализованы в программной среде NI Multisim. Первые две схемы отвечают идеологии построения физических систем, когда используются обычные радиодетали – резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, транзисторы, диоды, источники постоянного и переменного напряжения, а цель состоит, скорее, в реализации интересующего типа динамики на качественном уровне, нежели в точном следовании исходным уравнениям. Остальные схемы, которые будут рассмотрены, конструируются на базе другого подхода, подразумевающего по возможности точное воспроизведение динамических уравнений, с привлечением элементов, традиционных для техники аналогового моделирования, таких, как интеграторы, умножители, сумматоры и пр. Конечно, грань между обоими подходами несколько условна, и оба они указывают конкретные пути к построению реальных радиотехнических устройств, выступающих как генераторы структурно устойчивого хаоса. В методическом плане материал этой главы может быть интересен для обучения студентов и аспирантов, специализирующихся в области радиофизики и электроники, принципам построения и анализа систем со сложной динамикой.

## 19.1. Программный продукт Multisim

Удобным и популярным современным средством схемотехнического моделирования является программный продукт Multisim [Хернитер, 2006; Макаренко, 2008; Варзарев, 2008]. Его первоначальная версия была выпущена в 1995 г. канадской компанией Interactive Image Technologies под названием Electronics Workbench («Электронный верстак»). Начиная с 2005 г., усовершенствованные версии программного продукта создаются компанией National Instruments (куда первоначальная компания-разработчик вошла, как подразделение) под названием NI Multisim.

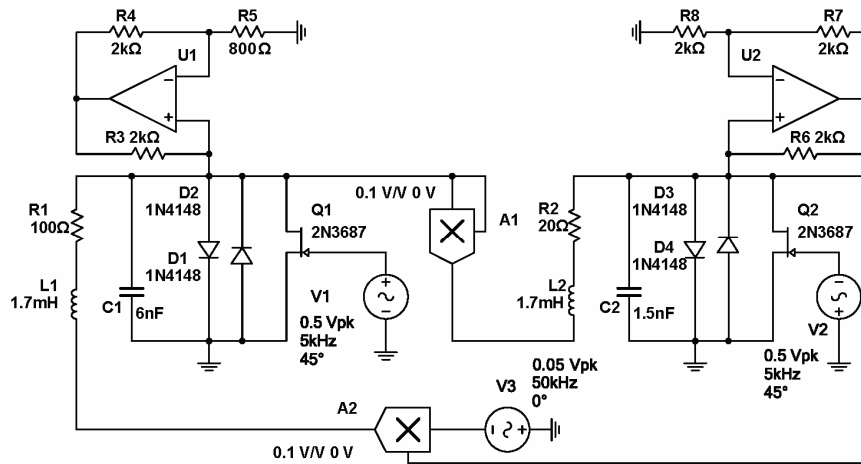
Работая с программой NI Multisim, пользователь составляет и изображает графически на экране компьютера электронную схему в обычном виде, следуя стандартным обозначениям, принятым в радиотехнике и электронике. Радиодетали берутся из имеющейся в распоряжении библиотеки электронных компонентов, содержащей резисторы, конденсаторы, индуктивности, полупроводниковые диоды и транзисторы, разнообразные элементы аналоговой техники – операционные усилители, сумматоры, умножители, цифровые и аналого-цифровые элементы. Предусмотрено использование обширного набора виртуальных приборов, позволяющих выполнять измерения или отслеживать изменение различных электрических величин, в том числе генераторы сигналов, осциллографы, анализатор спектра. Обращение с ними приближено к работе с реальными приборами в лаборатории: подключив виртуальный прибор к соответствующей точке схемы, можно получить информацию о характеристиках процессов, протекающих при функционировании схемы.

Представленные в настоящей главе результаты получены с использованием приобретенной Саратовским филиалом ИРЭ РАН лицензионной версии продукта NI Multisim 10.1.1.

## 19.2. Системы с аттрактором Смейла – Вильямса

### **19.2.1 Система на основе неавтономных осцилляторов ван дер Поля**

В разделе 7.2 обсуждалась система из двух осцилляторов ван дер Поля, возбуждающихся попеременно вследствие периодической модуляции параметра, обусловленной внешним воздействием, с аттрактором Смейла – Вильямса в четырехмерном отображении Пуанкаре. В лабораторном эксперименте подобное устройство было реализовано и исследовано в работе [Кузнецов и Селезнев, 2006]. Здесь мы воспроизведем эту схему и рассмотрим результаты ее моделирования в программной среде Multisim.



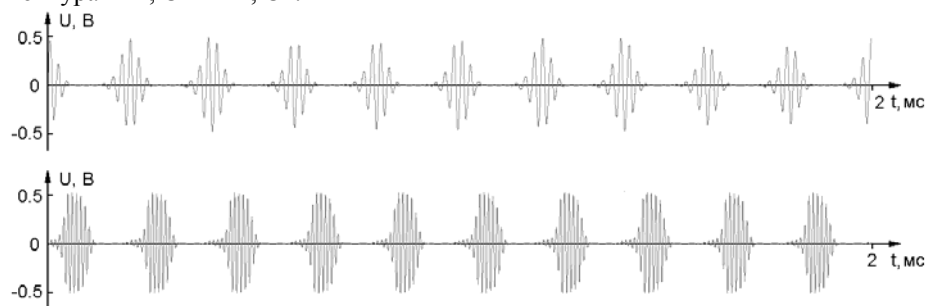
**Рис.19.1.** Принципиальная схема устройства, в котором в отображении за период модуляции ( $T=0.2$  мс) реализуется аттрактор Смейла – Вильямса.

Обратимся к показанной на рис.19.1 схеме, составленной из двух подсистем в виде автогенераторов на основе колебательных контуров, один из которых образован катушкой индуктивности  $L1$  и емкостью  $C1$ , а второй, соответственно, элементами  $L2$  и  $C2$ . Поскольку индуктивности одинаковы, а емкость во втором контуре в четыре раза меньше, собственные частоты находятся в отношении 1:2, и при указанных на схеме номиналах они равны приблизительно 50 кГц и 100 кГц. Отрицательное сопротивление в каждый контур вносится элементом на основе операционного усилителя (на схеме, соответственно,  $U1$  и  $U2$ ).<sup>1</sup> Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии в контурах с ростом амплитуды колебаний, вводится элементами из полупроводниковых диодов в виде параллельно соединенных ветвей с противоположным направлением пропускания тока ( $D1$ ,  $D2$  и  $D3$ ,  $D4$ ). Для модуляции параметра, ответственного за возникновение автоколебаний, в каждый контур включен полевой транзистор, проводимость которого в цепи сток – исток управляется подаваемым на затвор переменным напряжением на частоте 5 кГц. Для модуляции параметра в двух осцилляторах используются источники переменного напряжения  $V1$  и  $V2$  с противоположной полярностью мгновенного напряжения. На одном полупериоде модуляции первый осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а второй под порогом генерации. На следующем полупериоде они меняются ролями. Первый генератор действует на второй через средство умножите-

<sup>1</sup> Для получения сведений, касающихся схемотехнических вопросов, включая функционирование и типовое применение операционных усилителей, можно рекомендовать книги и пособия [Хоровиц и Хилл, 1986; Ремпен и др., 2004]

ля А1, выдающего на выходе квадрат входного сигнала. Порождаемая при этом вторая гармоника служит для стимуляции возбуждения второго осциллятора, когда приходит время его выхода за порог генерации. В свою очередь, второй генератор действует на первый через посредство элемента А2, осуществляющего смещение поступающего сигнала и вспомогательного сигнала на частоте 50 кГц от источника напряжения V3. При этом появляется составляющая на разностной частоте, которая действует на первый осциллятор и стимулирует в нем начало генерации.

На рис.19.2 показаны графики реализаций напряжения на конденсаторах С1 (верхняя зависимость) и С2 (нижняя зависимость), полученные при моделировании в среде Multisim с использованием виртуального двулучевого осциллографа. Как можно видеть, в соответствии с приведенным выше качественным описанием, имеет место поочередное возбуждение колебаний в контурах L1, C1 и L2, C2.

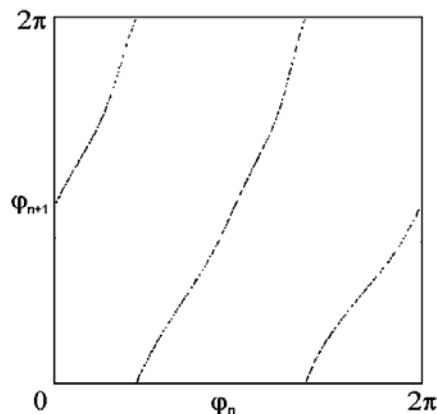


**Рис.19.2.** Реализации напряжения на конденсаторах С1 (верхняя зависимость) и С2 (нижняя зависимость).

Чтобы убедиться, что переход к каждой новой стадии активности сопровождается удвоением циклической переменной – фазы колебаний, поступим следующим образом. Подключим осциллограф так, чтобы один луч управлялся напряжением на конденсаторе С1, а второй – напряжением на резисторе R1. В среде Multisim с помощью приложения Grapher предусмотрена запись в файл данных, получаемых в процессе моделирования, что дает возможность для их последующей цифровой обработки. Шаг выборки по времени надо задать равным периоду модуляции ( $T=0.2$  мс). Чтобы моменты выборки отвечали стадиям активности первого осциллятора, можно подобрать фазовый параметр источников переменного напряжения V1 и V2. (На схеме рис.19.1 этот параметр задан равным  $45^\circ$ , что оказывается приемлемым.) Записанный файл обрабатывается внешней программой, составленной на удобном для пользователя языке (автор использовал Free Basic IDE). Сначала оба временных ряда – для напряжений на конденсаторе и резисторе  $U_C$  и  $U_R$  – нормируются так, чтобы сумма квадратов элементов была для них одинакова. Затем для каждой пары величин  $U_C^n, U_R^n$ , относящихся к одному

и тому же моменту времени  $nT$ , определяем фазу, как  $\varphi_n = \arg(U_C^n + iU_R^n)$  и приводим ее к интервалу от 0 до  $2\pi$ .

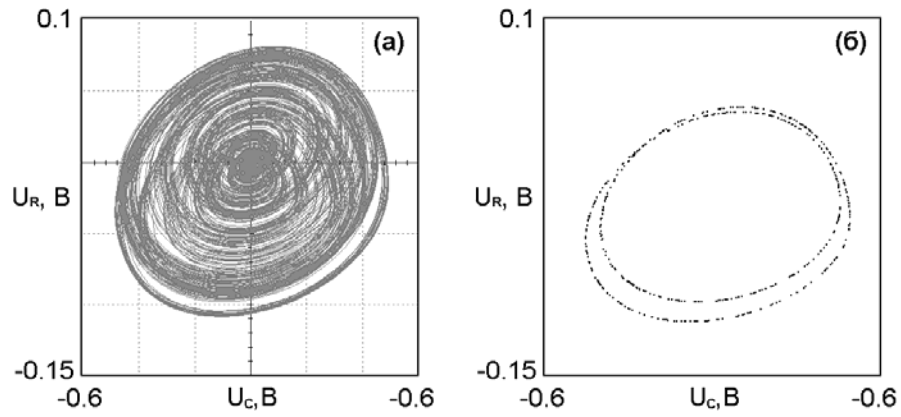
На рис.19.3 показан график, на котором обработанные данные представлены в виде зависимости  $\varphi_{n+1}$  от величин  $\varphi_n$ . Как можно видеть, он соответствует растягивающему отображению окружности типа Бернулли. В самом деле, один полный обход окружности для прообраза отвечает двум обходам для образа, т.е. требуемое для аттрактора Смейла – Вильямса условие выполняется.



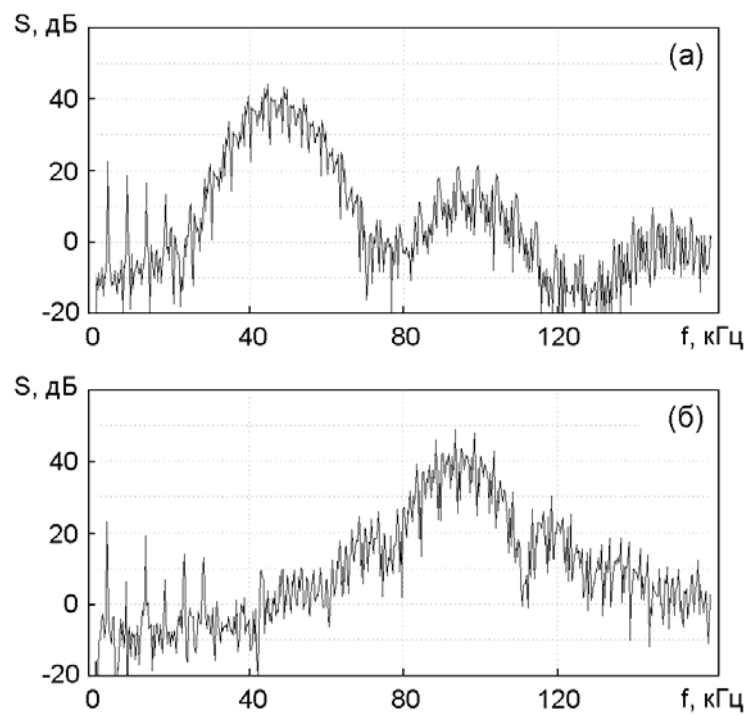
**Рис.19.3.** Эмпирическая итерационная диаграмма для фаз.

То же самое подключение осциллографа можно использовать для получения портрета аттрактора в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора, если переключить его в режим, в котором развертка по времени не производится, а отклонение луча по горизонтали и вертикали управляется входными напряжениями  $U_C$  и  $U_R$ . Полученный таким образом портрет аттрактора показан на рис.19.4а. Для построения аттрактора в стробоскопическом сечении можно воспользоваться записанными в файл данными, использованными при построении диаграммы для фаз, представив их графически в координатах  $U_C$ ,  $U_R$ , см. рис.19.4б. Здесь можно видеть объект, соответствующий соленоиду Смейла – Вильямса, с характерной образуемой его витками поперечной канторовой структурой.

Рис.19.5 иллюстрирует спектры сигналов, генерируемых обеими подсистемами в процессе функционирования схемы, которые получены с помощью доступного в среде Multisim виртуального прибора – анализатора спектра. При его использовании нужно правильно установить рабочий частотный диапазон и разрешающую способность анализа, линейный или логарифмический масштаб.



**Рис.19.4.** Портрет аттрактора в проекции из расширенного фазового пространства системы (а) и его стробоскопическое сечение (б). По горизонтальной и вертикальной оси отложены, соответственно, напряжение на конденсаторе  $C1$  и на резисторе  $R1$ .



**Рис.19.5.** Спектры колебаний напряжения на конденсаторах  $C1$  (а) и  $C2$  (б)

Спектры на рис.19.5 даны в логарифмическом масштабе: по оси ординат отложена спектральная плотность мощности в децибелах. Панель (а) отвечает спектру сигнала от первого осциллятора (напряжение на конденсаторе C1), а панель (б) – сигналу от второго осциллятора (напряжение на конденсаторе C2). Спектр, как можно видеть, сплошной, как это и должно быть для случайного сигнала. Для первого осциллятора он сосредоточен по большей части в окрестности его собственной частоты 50 кГц, а для второго – в окрестности удвоенной частоты 100 кГц. В низкочастотной части спектра заметны дискретные компоненты на частоте 5 кГц и ее гармоники, обусловленные присутствием периодической модуляции параметров с этой частотой.

### 19.2.2 Система на основе неавтономного осциллятора ван дер Поля с дополнительной цепью запаздывающей обратной связи

Как было показано в главе 17, растягивающее отображение окружности для фаз последовательных стадий колебательной активности можно реализовать в системе с запаздыванием, имея единственный осциллятор, попеременно демонстрирующий стадии возбуждения и затухания. Стимуляция возбуждения каждый раз производится сигналом, поступившим по цепи обратной связи от предыдущей стадии активности, с фазой, претерпевшей преобразование типа Бернулли. В лабораторном эксперименте такое устройство было реализовано и исследовано в работе [Кузнецов и Пономаренко, 2008]. Эту схему можно воспроизвести и в программной среде Multisim.

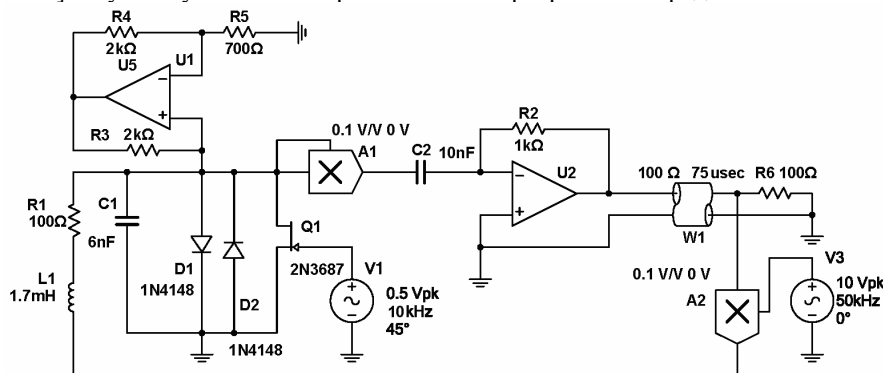


Рис.19.6. Принципиальная схема устройства с запаздывающей обратной связью

В схеме на рис.19.6 автогенератор реализован на основе колебательного контура, образованного катушкой индуктивности L1, и емкостью C1. При указанных на схеме номиналах, собственная частота приблизительно 50 кГц. Отрицательное сопротивление вносится элементом на основе операционного усилителя U1. Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии с ростом амплитуды колебаний, вводится элементом из полупроводниковых диодов D1 и D2. Для модуляции параметра в контур вклю-

чен полевой транзистор, проводимость которого в цепи сток – исток управляется подаваемым на затвор переменным напряжением от источника V1 с частотой 10 кГц. На одном полупериоде модуляции осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а на другом – под порогом генерации. Производимый им сигнал возводится в квадрат умножителем A1, подвергается преобразованию посредством дифференциатора на конденсаторе C2, резисторе R2 и операционном усилителе U2, и поступает в линию задержки W1. На ее выходе присутствует резистор R6, соответствующий по величине волновому сопротивлению линии задержки, что обеспечивает согласованную нагрузку и отсутствие отражений. С помощью умножителя A2 сигнал с выхода линии задержки смешивается со вспомогательным сигналом частоты 50 кГц от источника V3. Полученный сигнал используется для резонансной стимуляции возбуждения осциллятора на следующей стадии активности. Величина запаздывания в линии задержки  $\tau=75$  мкс составляет  $\frac{3}{4}$  периода модуляции. Этим обеспечивается поступление сигнала, испущенного на стадии активности, через цепь обратной связи в нужный момент, предшествующий наступлению очередной стадии активности.

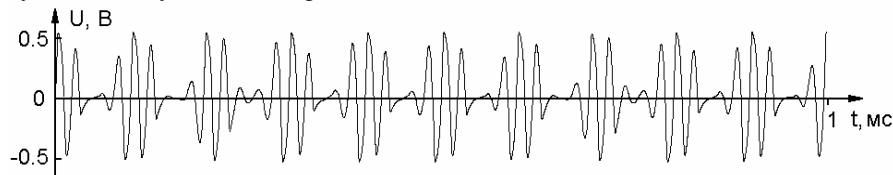


Рис.19.7. Реализации напряжения на конденсаторах C1.

На рис.19.7 показан график напряжения на конденсаторе C1 в зависимости от времени, полученный при моделировании в среде Multisim с использованием виртуального осциллографа. Как можно видеть, в контуре L1, C1 имеет место попеременное возбуждение и затухание колебаний. При этом фаза высокочастотного заполнения от одной эпохи активности к другой изменяется в соответствии с хаотическим отображением – растягивающим отображением окружности. Чтобы в этом убедиться, подключим осциллограф так, чтобы один луч управлялся напряжением на конденсаторе C1, а второй – напряжением на резисторе R1, и запишем данные в файл с шагом выборки по времени, равным периоду модуляции  $T=0.1$  мс. Затем файл обрабатывается внешней программой так же, как для предыдущей схемы. На рис.19.8 показан график зависимости значений  $\varphi_{n+1}$  от величин  $\varphi_n$ , соответствующий, как можно видеть отображению типа Бернулли.

На рис.19.9 показаны портреты аттрактора в проекции из бесконечномерного пространства состояний системы с запаздыванием на плоскость переменных  $U_R, U_C$ . Портрет на диаграмме (а) получается переключением осциллографа в режим, в котором эти напряжения управляют отклонением луча по горизонтали и вертикали. Для изображения аттрактора в стробоско-



пическом сечении привлекается файл данных, использованный при построении диаграммы для фаз: с помощью внешней программы данные представляются графически в координатах  $U_C$ ,  $U_R$ . Полученный объект, показанный на диаграмме (б), соответствует по виду соленоиду Смейла – Вильямса.

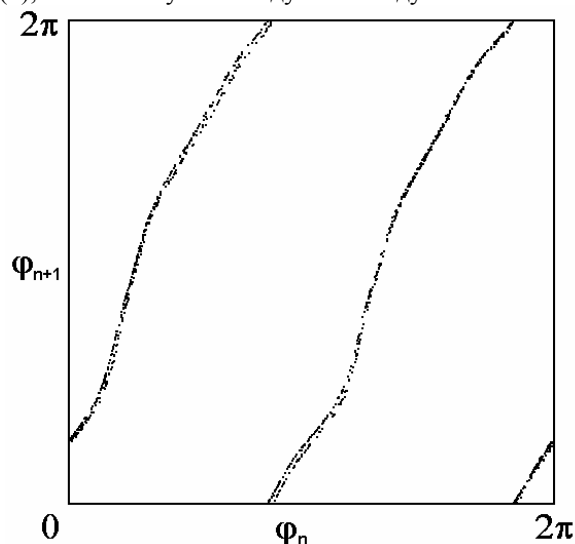


Рис.19.8. Эмпирическая итерационная диаграмма для фаз.

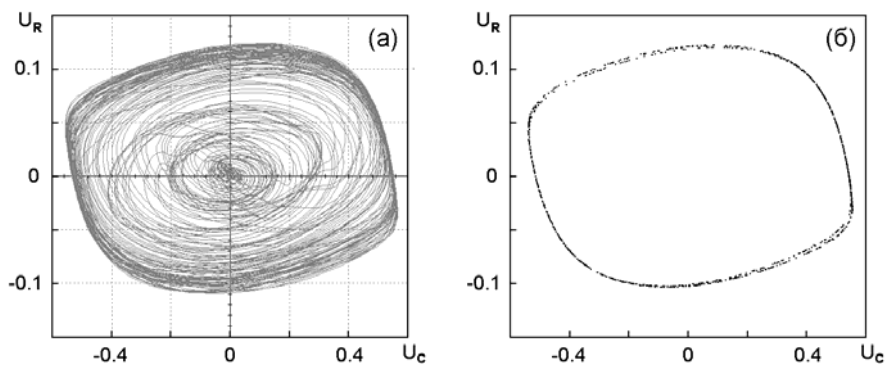


Рис.19.9. Портрет аттрактора в проекции из расширенного фазового пространства системы (а) и в стробоскопическом сечении (б). По горизонтальной и вертикальной оси отложены, соответственно, напряжение на конденсаторе С1 и на резисторе R1.

На рис.19.10 показан спектр сигнала в логарифмическом масштабе, построенный с помощью анализатора спектра, для сигнала, представляющего собой напряжение на конденсаторе С1. Спектр является сплошным и сосредоточен по большей части в окрестности собственной частоты осциллятора 50 кГц. В низкочастотной части спектра заметны дискретные компоненты на

частоте 5 кГц и ее гармониках, обусловленные присутствием периодической модуляции параметров с этой частотой.

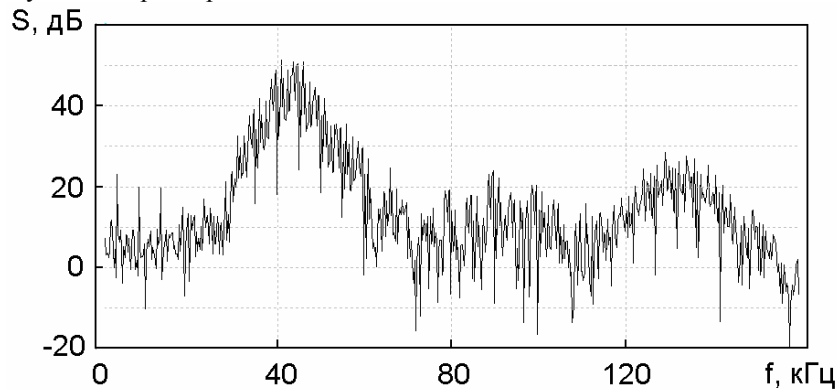


Рис.19.10. Спектр колебаний напряжения на конденсаторе C1.

### 19.2.3. Аналоговое устройство с аттрактором Смейла – Вильямса. Неавтономная система

Рассмотрим теперь аналоговое устройство, динамика которого специально организована так, чтобы получить соответствие с геометрической конструкцией соленоида Смейла – Вильямса, подразумевающей определенного вида деформацию тороидальной области в фазовом пространстве, как описано в главе 2. Отправным пунктом служит система, обсуждавшаяся в разделе 6.1, но здесь будет предпринята определенная ее модификация с целью упрощения схемотехнической реализации. Отметим, что это система с минимальной размерностью фазового пространства, при которой вообще возможно присутствие аттрактора Смейла – Вильямса.

В конструируемой неавтономной системе мгновенное состояние будет даваться вектором  $(x,y,z)$ , и на каждом периоде внешнего воздействия присутствует три этапа динамической эволюции. На первом этапе обеспечивается затухание переменной  $z$  к нулю и эволюция переменных  $x, y$  к единичной окружности. Область в форме тора отвечает окрестности этой единичной окружности. На втором этапе в пространстве  $(x, y, z)$  осуществляется дифференциальное вращение вокруг оси  $x$ , с угловой скоростью, линейно зависящей от  $x$  и обращающейся в ноль при  $x=0$ . При этом на краях угловая скорость должна быть такой, чтобы область, располагавшаяся изначально около единичной окружности, приняла в проекции на плоскость  $(x,y)$  форму восьмерки. На последней третьей стадии плоскость, где лежала «восьмерка», претерпевает перегиб, и благодаря поперечному сплющиванию по  $z$  и смещению по  $x$ , обе половинки «восьмерки» занимают положение, обеспечивающее на следующем периоде вложение деформированной фигуры в исходную область в виде двойной петли.

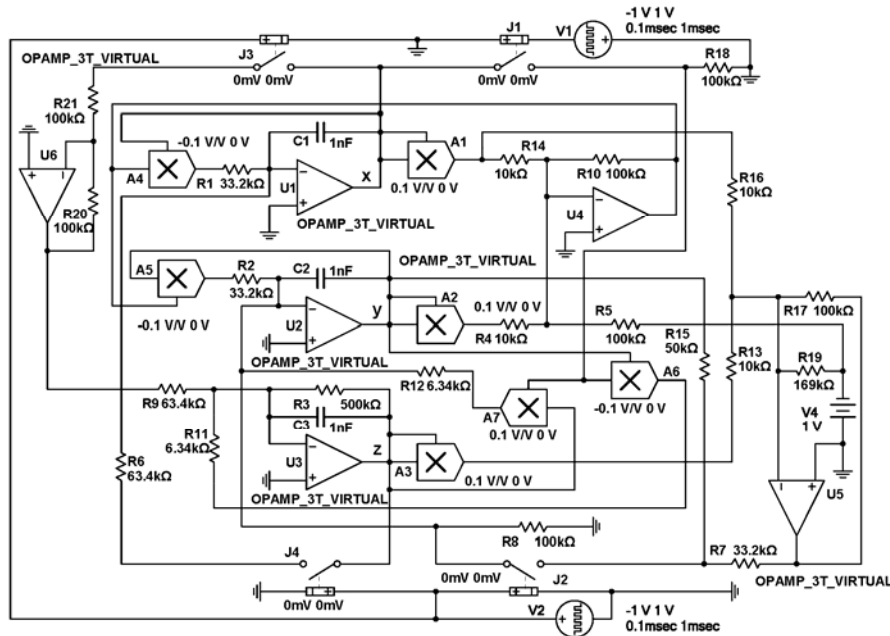
Уравнения системы, имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x(1 - x^2 - y^2) - \frac{\pi}{2} \xi_2(t) z, \\ \dot{y} &= \mu y(1 - x^2 - y^2) - \frac{\pi}{2} \pi \xi_1(t) x z - \xi_2(t) [2y - 3(x^2 + z^2) + b], \\ \dot{z} &= -\gamma z + \frac{\pi}{2} \xi_1(t) x y + \frac{\pi}{2} \xi_2(t) x,\end{aligned}\quad (19.1)$$

где  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  – периодические функции времени, осуществляющие включение и выключение процессов, которые отвечают за динамику на второй и третьей стадиях. Период  $T$  примем равным 10, полагая, что функция  $\xi_2(t)$  равна 1 в конце каждого периода на интервале времени единичной протяженности и нулю на остальной части периода. Функция  $\xi_1(t)$  равна 1 на предшествующем единичном временном интервале и нулю на остальной части периода. Остальные параметры  $\mu=0.3$ ,  $a=1.5$ ,  $b=0.9$ ,  $\gamma=0.2$ , что обеспечивает желаемый тип динамики.

Схема устройства показана на рис.19.11. Динамические переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  отвечают выходным сигналам интеграторов на операционных усилителях U1, U2, U3 и представляют собой напряжения на конденсаторах  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , измеренные в вольтах. За единицу времени принят интервал  $\Delta t = RC = 0.1$  мс, где  $C$  – значение емкостей  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , а  $R=100$  кОм. Период  $T$  составляет 10 единиц, т.е. 1 мс. Схема содержит ключи J1, J2, J3, J4, которые открываются и закрываются с периодом  $T$  благодаря импульсным сигналам от источников V1 и V2. На первом этапе, занимающем 80% полного периода, все ключи разомкнуты. На втором этапе, составляющем 10% периода, открыт ключ J1, а на третьем этапе, тоже занимающем 10 % периода, открыты ключи J2, J3, J4.

Через посредство умножителей  $A_1$ ,  $A_2$ , инвертирующего сумматора на операционном усилителе U4, и умножителей  $A_4$ ,  $A_5$  вырабатывается сигнал, обеспечивающий эволюцию переменных  $x$  и  $y$  к ситуации  $x^2 + y^2 = 1$ , тогда как наличие резистора R3 обеспечивает затухание переменной  $z$  к нулю. Когда замкнут ключ J1, сигналы, пропорциональные, соответственно,  $xz$  и  $-xy$  (для их формирования используются умножители  $A_6$  и  $A_7$ ), поступают на интеграторы, ассоциирующиеся с переменными  $y$  и  $z$ . Этим обеспечивается дифференциальное вращение в фазовом пространстве вокруг оси  $x$ . Когда замкнуты ключи J2, J3, J4, на интеграторы  $x$  и  $z$  подаются сигналы, пропорциональные, соответственно,  $z$  и  $-x$ , что обеспечивает требуемый поворот половинок «восьмерки» вокруг оси  $y$ , а на интегратор  $y$  – сигнал, содержащий сумму квадратов переменных  $x$  и  $z$ , постоянное слагаемое и добавку, пропорциональную  $y$ .



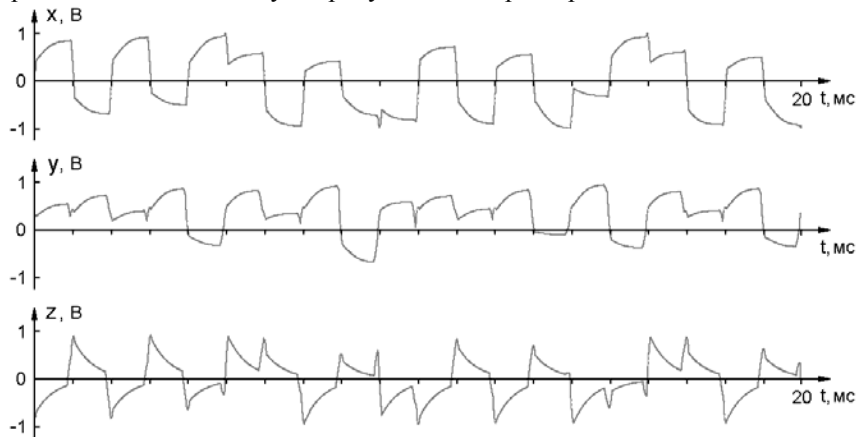
**Рис.19.11.** Схема аналогового устройства, в котором аттрактор Смейла – Вильямса реализуется в отображении за период  $T=1$  мс. Динамические переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  отвечают напряжениям на конденсаторах  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Заметим, что умножители  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  имеют положительный коэффициент преобразования произведения входных напряжений в выходные, а умножители  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $A_6$  отрицательный, при этом абсолютная величина коэффициентов одинакова и составляет 0.1.

Как можно показать, динамика схемы описывается уравнениями (19.1). Номиналы элементов, обозначенные на рис. 19.11, соответствуют приведенным выше параметрам.

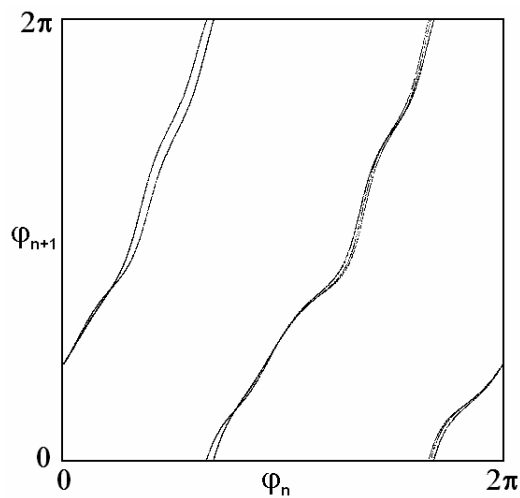
На рис.19.12 показаны графики реализаций напряжений на конденсаторах  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , полученные при моделировании в среде Multisim с использованием виртуального многоканального осциллографа. Отметим, что временные зависимости выглядят, как непериодический процесс.

Чтобы выявить динамическую природу наблюдаемого поведения, как ассоциирующегося с аттрактором Смейла – Вильямса, полученные при моделировании реализации записываются в файл в виде временных рядов с шагом выборки, равным периоду модуляции  $T=1$  мс. Затем временные ряды  $x_n$  и  $y_n$  обрабатываются внешней программой, и для каждого шага  $n$  определяется угловая координата на плоскости  $(x, y)$ :  $\varphi_n = \arg(x_n + iy_n)$ . Как видно из графика, показывающего значения  $\varphi_{n+1}$  в зависимости от предыдущих величин  $\varphi_n$ , на каждом периоде модуляции динамика согласуется в топологическом смысле с растягивающим отображением окружности типа Бернулли

(рис. 19.13). Благодаря сжатию по остальным направлениям, в фазовом пространстве это соответствует присутствию аттрактора Смейла – Вильямса.<sup>2</sup>

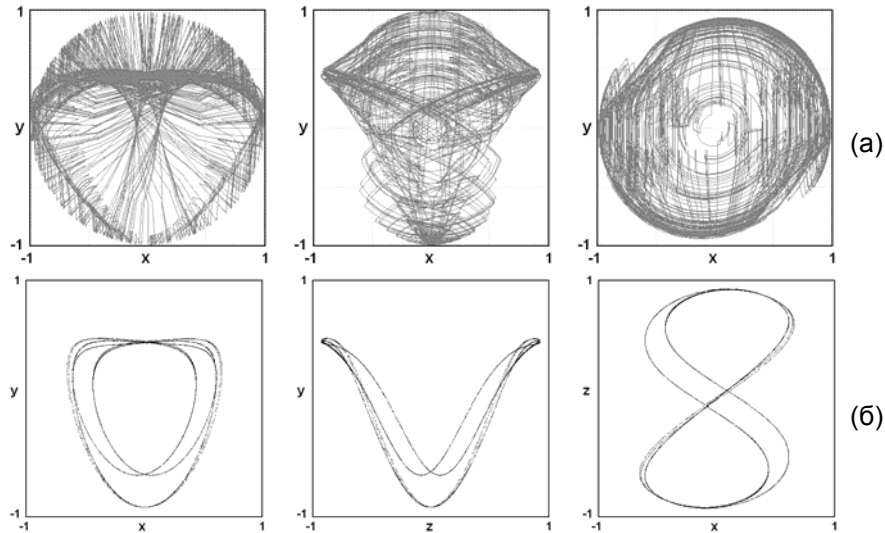


**Рис.19.12.** Графики реализаций напряжений на конденсаторах С1, С2, С3, полученные при функционировании схемы аналогового устройства на рис.19.10.



**Рис.19.13.** Эмпирическая итерационная диаграмма для угловой переменной  $\varphi_n = \arg(x + iy)$ .

<sup>2</sup> Выполнить другие тестовые процедуры (расчет спектра показателей Ляпунова, проверка трансверсальности пересечения многообразий, проверка критерия конусов и др.) в среде Multisim затруднительно. Соответствующие расчеты были проведены на основе решения уравнений (19.1) конечно-разностным методом, и подтверждение гиперболической природы аттрактора было получено.

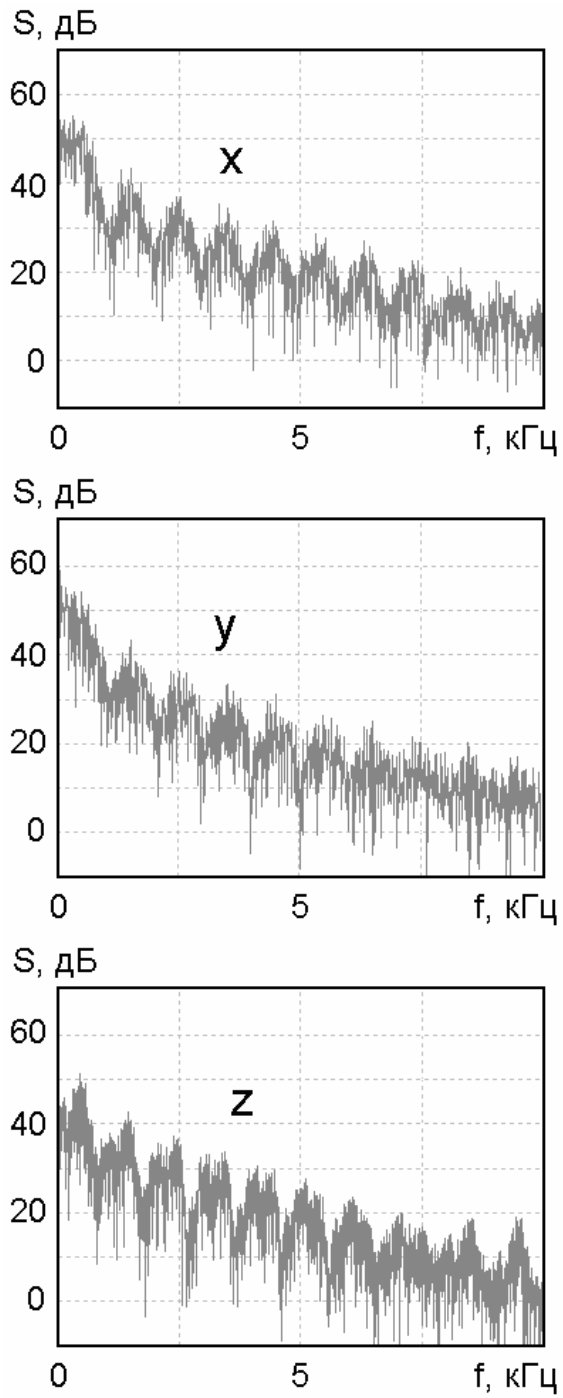


**Рис.19.14.** Портреты аттрактора в трех проекциях из расширенного фазового пространства системы (а) и в стробоскопическом сечении (б).

На рис.19.14 в верхнем ряду показаны портреты аттрактора в трех проекциях из четырехмерного расширенного фазового пространства системы, полученные непосредственно при моделировании динамики в среде Multisim с помощью виртуального осциллографа. Его подключение к схеме производится так, что отклонение луча по горизонтали и вертикали управляется напряжениями на конденсаторах  $C1$  и  $C2$ ,  $C3$  и  $C2$ ,  $C1$  и  $C3$ , соответственно, для получения первого, второго и третьего изображений.

Для построения портретов в стробоскопическом сечении, показанных в нижнем ряду, использован файл данных, записанных при моделировании динамики с помощью многолучевого осциллографа с временным шагом в один период  $T$ , и обработанных для построения диаграмм с применением внешней программы. Их можно интерпретировать как изображение в трех проекциях солениода Смейла – Вильямса, вложенного в трехмерное пространство состояний стробоскопического отображения.

На рис.19.15 показаны спектры мощности, построенные с помощью анализатора спектра в логарифмическом масштабе для сигналов, представляющих собой напряжение на конденсаторах  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$ . Спектры сплошные и занимают достаточно широкий интервал частот. Можно отметить изрезанность с характерным интервалом по частоте 1 кГц, что, очевидно, связано с присутствием внешней модуляции параметров системы с периодом  $T=1$  мс.

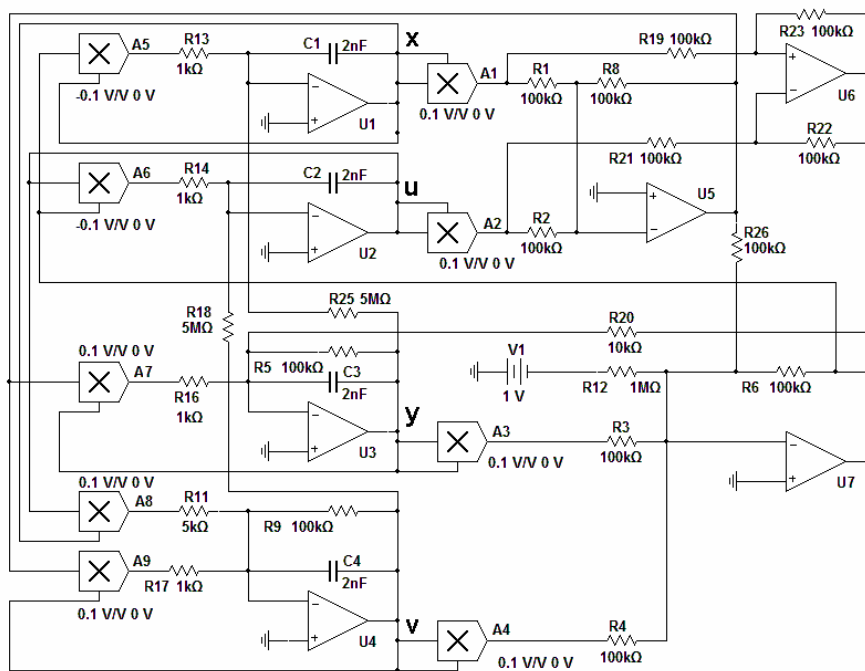


**Рис.19.15.** Спектры колебаний напряжения на конденсаторах C1 (x), C2 (y) и C3 (z).

### 19.2.4. Аналоговое устройство с аттрактором Смейла – Вильямса. Автономная система

Все рассмотренные до этого момента схемы отвечали *неавтономным* системам, функционирующим в присутствии внешнего периодического воздействия. Было бы интересно иметь пример *автономного* генератора гиперболического хаоса. Его можно построить, как аналоговое устройство, воспроизводящее минимальную модель с аттрактором типа Смейла – Вильямса (8.16), обсуждавшуюся в конце главы 8.

Схема устройства показана на рис.19.16. Динамические переменные  $x$ ,  $u$ ,  $y$ ,  $v$  отвечают напряжениям на конденсаторах  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ , измеренным в вольтах. За единицу времени принят интервал  $\Delta t = RC = 0.2$  мс, где  $C = 2$  нФ – значение емкостей  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ , а  $R = 10$  кОм – значение сопротивлений  $R_5$  и  $R_9$ . Умножители  $A1$ ,  $A2$ ,  $A3$ ,  $A4$  осуществляют возведение в квадрат переменных  $x$ ,  $u$ ,  $y$ ,  $v$ .



**Рис.19.16.** Схема аналогового устройства, в котором в отображении Пуанкаре реализуется аттрактор Смейла – Вильямса. Динамические переменные  $x$ ,  $u$ ,  $y$ ,  $v$  отвечают напряжениям на конденсаторах  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ . Умножители  $A5$ ,  $A6$  имеют отрицательный коэффициент преобразования произведения входных напряжений в выходные, а остальные умножители – положительный, при этом абсолютная величина всех этих коэффициентов одинакова и составляет 0.1.

Первая пара уравнений (8.16) реализована следующим образом. С использованием инвертирующих сумматоров на операционных усилителях  $U5$

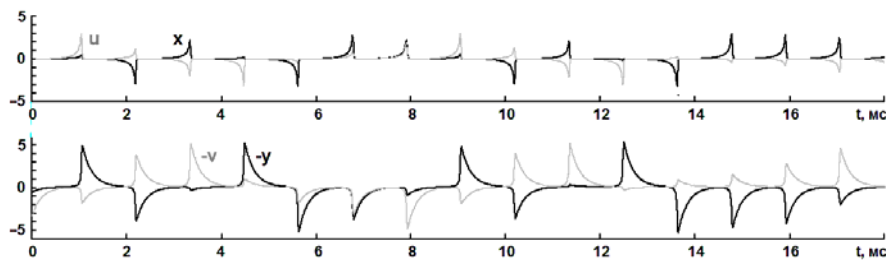


и  $U_7$ , с участием постоянного напряжения от источника  $V_1$ , формируется сигнал, пропорциональный  $1 + x^2 + u^2 - y^2 - v^2$ , что отвечает нелинейному коэффициенту в уравнениях. Этот сигнал поступает на вход умножителей  $A_5$  и  $A_6$ , на другой вход которых поданы, соответственно, сигналы  $x$  и  $u$ . Результирующие напряжения служат входными сигналами для интеграторов на операционных усилителях  $U_1$  и  $U_2$  и конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ , кроме того, добавляются сигналы, отвечающие за связь со второй подсистемой, поступающие через резисторы  $R_{18}$  и  $R_{25}$ .

Вторая пара уравнений обеспечивается двумя блоками, один из которых включает операционный усилитель  $U_3$  и RC-цепочку из резистора  $R_5$  и конденсатора  $C_3$ , а второй составлен из элементов  $U_4$ ,  $R_9$  и  $C_4$ . Сигнал, пропорциональный сумме квадратов переменных  $x$  и  $u$ , поступая с выхода операционного усилителя  $U_5$ , умножается элементами  $A_7$  и  $A_9$ , соответственно, на  $u$  и  $v$  и подводится к упомянутым двум блокам. К первому из них подается также сигнал с выхода дифференциального усилителя на элементе  $U_6$ , пропорциональный разности квадратов переменных  $x$  и  $u$ , а ко второму – сигнал с выхода умножителя  $A_8$ , пропорциональный произведению  $x$  и  $u$ .

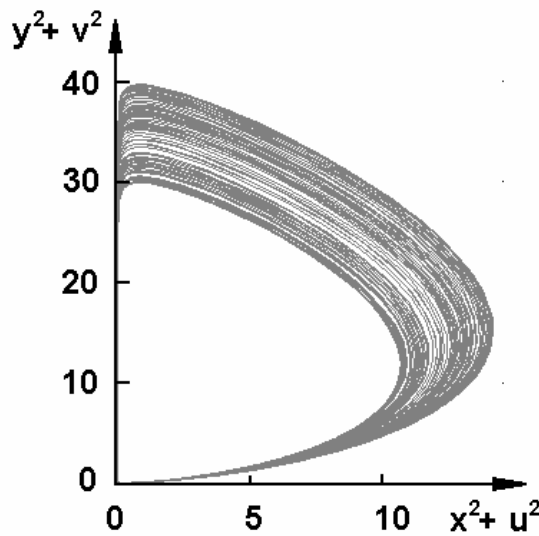
При указанных на схеме номиналах динамические уравнения, которые получаются для напряжений  $x$ ,  $u$ ,  $y$ ,  $v$  совпадают с уравнениями (8.16) для случая  $\varepsilon=0.02$ . Заметим, что параметром  $\varepsilon$  можно управлять, изменяя одновременно сопротивления  $R_{18}$  и  $R_{25}$ , которые должны оставаться равными друг другу, и он обратно пропорционален величине этих сопротивлений.

На рис. 9.17 приведены осциллограммы напряжений  $x$ ,  $u$ ,  $y$ ,  $v$ , полученные при моделировании динамики в среде Multisim с использованием многоканального осциллографа, четыре входа которого подключены к соответствующим узлам схемы на рис. 9.16. Как показывает сравнение с рисунком 8.16, вид зависимостей качественно такой же, как для уравнений (8.16). Средний период повторения стадий возбуждения и подавления подсистем, как можно оценить из рис.9.17, составляет примерно 1.13 мс, т.е. 5.65 единиц, что неплохо согласуется с приведенным в главе 8 численным результатом  $\langle T \rangle \approx 5.81$ .



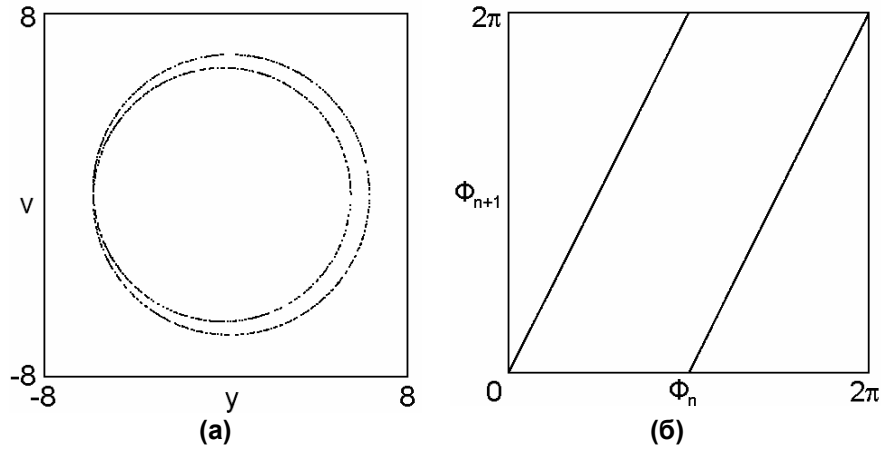
**Рис. 19.17.** Зависимости от времени динамических переменных, полученные с помощью многолучевого осциллографа при моделировании схемы рис.19.16 в среде Multisim.

На рис.19.18 показан портрет аттрактора в проекции на плоскость амплитудных переменных подсистем  $(x^2 + u^2, y^2 + v^2)$ , полученный на экране виртуального осциллографа. Один вход осциллографа, управляющий горизонтальной разверткой луча, подключался к выходу операционного усилителя U5, где напряжение пропорционально  $-(x^2 + u^2)$ , а второй – к выходу специально добавленного сумматора (на схеме не показан), на два входа которого были поданы напряжения от умножителей A3 и A4. Вид аттрактора находится в прекрасном соответствии с рис.8.17.



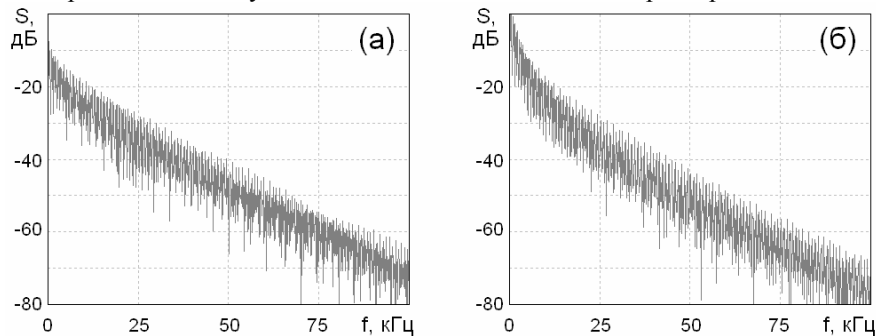
**Рис.19.18.** Портрет аттрактора, полученный на экране виртуального осциллографа при моделировании схемы рис.19.16 в среде Multisim в проекции на плоскость квадратичных амплитуд первой и второй подсистемы

Чтобы построить портрет аттрактора в сечении Пуанкаре и диаграмму, иллюстрирующую преобразование циклической переменной, требуемое для аттрактора Смейла – Вильямса, приходится обратиться к записи данных моделирования в среде Multisim в файл с последующей их обработкой специально составленной программой. Для этого используем такое же подключение многоканального осциллографа, как при анализе временных зависимостей, и инструмент Grapher, обеспечивающий возможность записи данных в файл. Выборка делается с шагом по времени, на два – три порядка меньше характерного периода  $\langle T \rangle$ . Затем файл обрабатывается программой, которая, считывая шаг за шагом записанные данные, вычисляет величину  $\sqrt{x^2 + u^2}$ . В момент  $t_n$ , когда эта величина, изменяясь в сторону уменьшения, проходит уровень  $c_0 = 0.8$ , определяются значения  $y_n$  и  $v_n$ . Представляя их в координатах  $(y, v)$ , строим портрет аттрактора в сечении Пуанкаре, показанный на рис.19.19 слева, а с помощью набора значений угловой переменной  $\Phi_n = \arg(y(t_n) + iv(t_n))$  в координатах  $(\Phi_n, \Phi_{n+1})$  получаем график отображения на диаграмме справа. Сравнение рис.19.19 и 8.18 показывает, что визуально они практически не отличаются.



**Рис. 19.19.** Построенные обработкой данных моделирования в среде Multisim для схемы на рис.19.16 портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных второй подсистемы (а) и диаграмма, иллюстрирующая преобразование циклической переменной  $\arg(y+iv)$  при последовательных проходах секущей Пуанкаре (б).

На рис. 19.20 показаны спектры генерируемых системой сигналов, полученные в Multisim с помощью виртуального анализатора спектра, при соответствующих установках рабочего диапазона частот и разрешения анализа. Спектры приведены в логарифмическом масштабе. Левая панель отвечает сигналу  $x$  (для переменной  $u$  спектр выглядит точно так же), а правая – сигналу  $y$  (для переменной  $v$  спектр выглядит так же). Непрерывный характер спектра свидетельствует о хаотической динамике на аттракторе.



**Рис.19.20.** Спектры колебаний напряжения на конденсаторах C1 (а) и C3 (б), полученные с помощью виртуального анализатора спектра при моделировании схемы рис.19.11 в среде Multisim.

### 19.3. Аттрактор типа Плыкина в электронном устройстве, моделируемом в программной среде Multisim

Рассмотрим теперь схему и результаты моделирования неавтономной системы, у которой аттрактор стробоскопического отображения представляет собой аттрактор типа Плыкина (см. главу 2 и, конкретно, рис. 2.6). Идея конструирования системы дифференциальных уравнений, где присутствовал бы такой аттрактор, излагалась в главе 6. Рассматриваемая ниже версия модели имеет некоторые специфические особенности, введенные для упрощения схемотехнической реализации [Kuznetsov, 2011].

#### 19.3.1. Основные уравнения

Как и в главе 6, построим вначале динамику на сфере единичного радиуса, задавая координаты переменными  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , подчиненными условию  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Постулируем, что на первой стадии временной эволюции, в течение времени  $T$  происходит движение изображающих точек на сфере, описываемое выражениями вида  $\dot{x} \sim -xy^2$ ,  $\dot{y} \sim x^2y$ , в то время как координата  $z$  остается постоянной. На заключительной части этого временного интервала, имеющей продолжительность  $\tau$ , дополнительно включается дифференциальное вращение вокруг оси  $z$ , так что с учетом обеих составляющих движения можно записать дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = K[-\varepsilon xy^2 + \xi(t)(z + D)y], \quad \dot{y} = K[\varepsilon x^2y - \xi(t)(z + D)x], \quad \dot{z} = 0. \quad (19.2)$$

Здесь введена функция  $\xi(t) = 0$  при  $t < T - \tau$ , и  $\xi(t) = 1$  при  $T - \tau \leq t < T$ , и предполагается, что выполнены (хотя бы приближенно) соотношения  $K\tau = \pi/\sqrt{2}$ ,  $D = 1/\sqrt{2}$ .

На следующем интервале времени  $T$  полагаем, что осуществляются аналогичные движения на сфере, но координатные оси  $x$  и  $z$  меняются ролями.

Такие стадии эволюции, на которых затрагиваются по очереди пары переменных  $(x, y)$  и  $(y, z)$ , повторяются периодически.

Завершая формулировку задачи, дополним уравнение для переменной  $y$  членом с коэффициентом  $\gamma$ , который обеспечивает приближение фазовых траекторий к единичной сфере, и получим следующую систему уравнений:

**Первый полупериод**  $2nT \leq t < (2n+1)T$  :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= K[-\varepsilon xy + \xi(t)(z + D)]y, \\ \dot{y} &= K[\varepsilon xy - \xi(t)(z + D)]x + \gamma(1 - x^2 - y^2 - z^2), \\ \dot{z} &= 0.\end{aligned}\quad (19.3a)$$

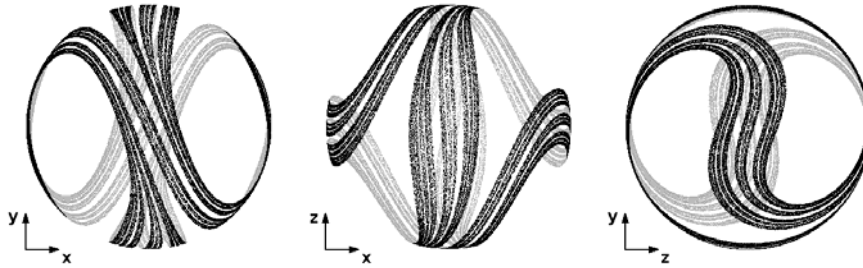
**Второй полупериод**  $(2n+1)T \leq t < 2(n+1)T$  :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= K[\varepsilon yz - \xi(t)(x + D)]z + \gamma(1 - x^2 - y^2 - z^2), \\ \dot{z} &= K[-\varepsilon yz + \xi(t)(x + D)]y.\end{aligned}\quad (19.3b)$$

Здесь  $\xi(t) = 0$  при  $t < T - \tau$ ,  $\xi(t) = 1$  при  $T - \tau \leq t < T$ , и  $\xi(t+T) = \xi(t)$ .

На рис.19.21 показаны фазовые портреты аттрактора в стробоскопическом сечении, отвечающем последовательности моментов времени  $t_n = nT$ , в проекции на плоскости  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  и  $(z, y)$ , которые построены по результатам численного решения уравнений (19.3) конечно-разностным методом. Значения параметров заданы такими:

$$K = 1.1, \varepsilon = 0.1, T = 10, \tau = 2, \gamma = 0.25. \quad (19.4)$$

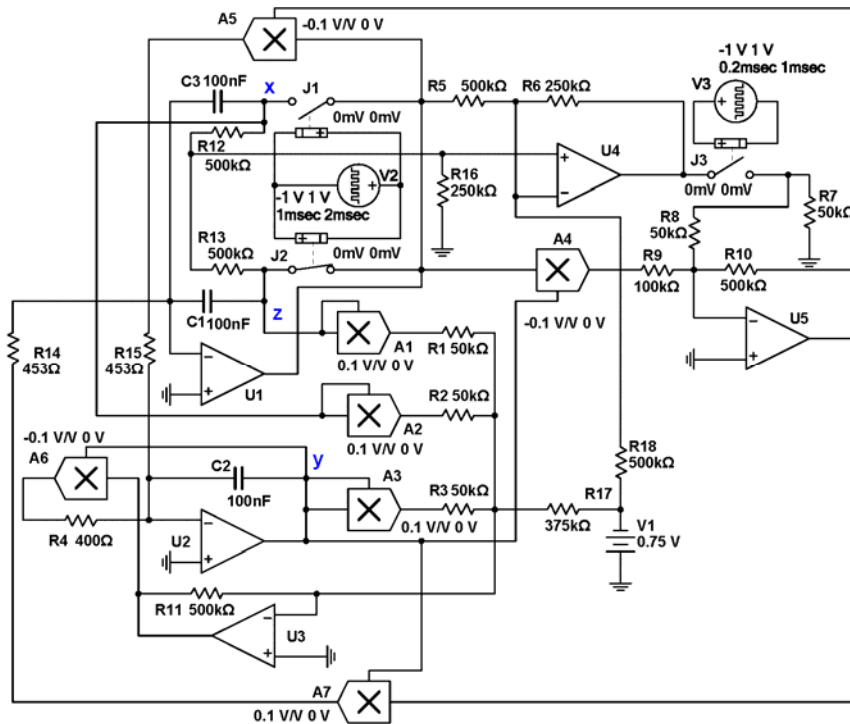


**Рис.19.21.** Портреты аттрактора в стробоскопическом сечении в трех проекциях, построенные по результатам численного решения дифференциальных уравнений (19.3). Параметры заданы согласно (19.4).

Отметим присутствие фрактальной поперечной структуры аттрактора: объект выглядит, как состоящий из полос, каждая из которых составлена из более узких полосок, и так далее. (В действительности этот аттрактор топологически эквивалентен конструкции, поясняемой на рис.2.6, что будет специально обсуждаться в параграфе 19.3.3.)

### 19.3.2. Схема аналогового устройства и моделирование в среде Multisim

В схеме, приведенной на рис.19.22, динамические переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответствуют напряжениям на конденсаторах  $C3$ ,  $C2$  и  $C1$ . Интегратор на операционном усилителе  $U1$  отвечает за динамику переменных  $z$  и  $x$ , в зависимости от состояния переключателей  $J1$  и  $J2$ , а интегратор на усилителе  $U2$  отвечает за динамику переменной  $y$ . С помощью умножителей  $A1$ ,  $A2$ ,  $A3$  и  $A6$ , и с приложением постоянного напряжения от источника  $V1$  через резистор  $R17$ , изменение во времени переменной  $y$  управляется таким образом, что сумма квадратов всех переменных в ходе динамической эволюции стремится к 1. Это позволяет интерпретировать динамику на аттракторе, как имеющую место на единичной сфере в пространстве состояний.

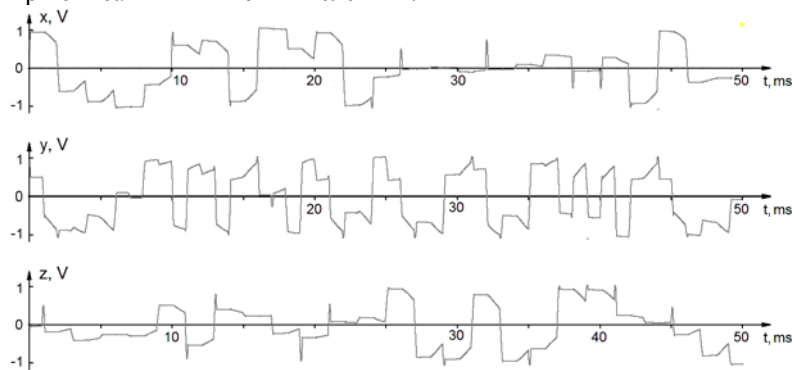


**Рис.19.22.** Схема устройства. Динамические переменные, задающие положение точки в фазовом пространстве на единичной сфере, отвечают напряжениям на конденсаторах  $C1$ ,  $C2$  и  $C3$ , соответственно,  $z$ ,  $y$ ,  $x$ . Умножители  $A1$ ,  $A2$ ,  $A3$ ,  $A7$  имеют положительный коэффициент преобразования входных напряжений в выходные, а для умножителей  $A4$ ,  $A5$ ,  $A6$  он отрицательный; абсолютные величины коэффициентов преобразования составляют 0.1.

В ходе работы схемы ключи  $J1$  и  $J2$  открываются и закрываются поочередно, так что на последовательных полупериодах в динамический процесс

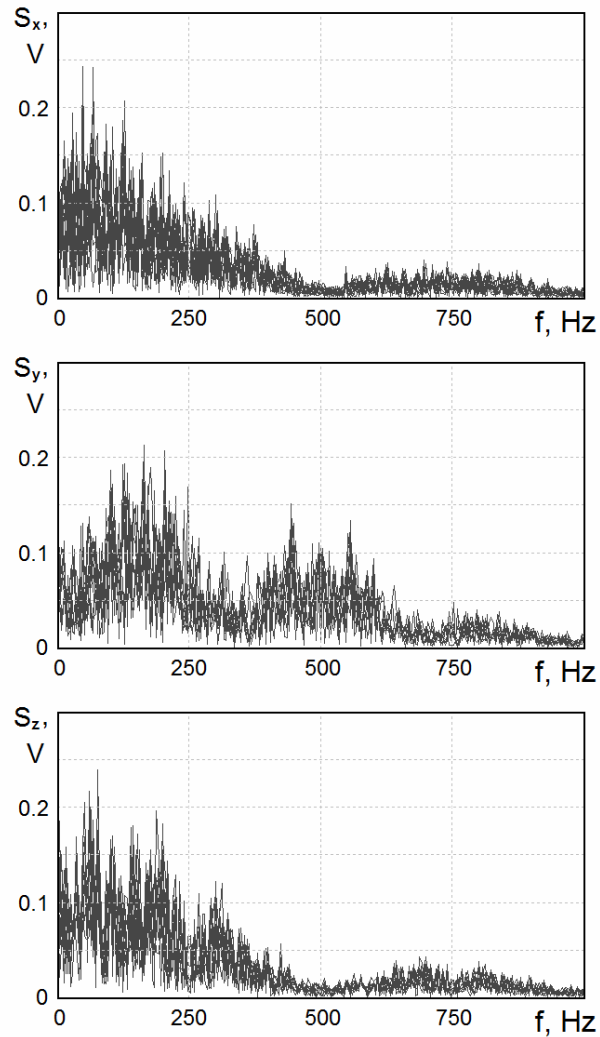
вовлечена пара переменных,  $(x, y)$  или  $(z, y)$ , а оставшаяся переменная,  $z$  или  $x$ , остается практически неизменной, поскольку отвечает напряжению на открытом конденсаторе,  $C1$  или  $C3$ . С использованием операционного усилителя  $U4$  это напряжение подается на умножители  $A5$  и  $A7$  и управляет частотой колебаний для пары других переменных. Это сделано таким образом, что частота зависит от напряжения линейно с добавлением константы, определяемой источником постоянного напряжения  $V1$ . Все это происходит при включенном переключателе  $J3$  на некотором интервале времени в конце каждой половины цикла переключения для  $J1$  и  $J2$ . Диссипативная природа динамики на сфере обеспечивается с помощью сигнала от умножителя  $A4$ , подаваемого через инвертирующий усилитель  $U5$ .

Динамика описывается уравнениями (19.3), где за единицу времени принята величина  $\tau_0 = R_0 C_0 = 0.1$  мс, представляющая собой произведение емкости, используемой в интеграторах  $C1=C2=C3=C_0=100$  нФ, и характеристического сопротивления  $R_0=1$  кОм. Заметим, что состояния включения и выключения переключателей  $J1$  и  $J2$  занимают интервалы времени 10 единиц, т.е.  $T=1$  мс. Та же величина  $T$  определяет период открытия и закрытия ключа  $J3$ . Временной интервал, на котором он включен, – это финальная часть каждого периода продолжительностью  $\tau=0.2$  мс. Параметр  $K$  можно подстроить одновременным изменением сопротивлений  $R14$  и  $R15$ . Параметр  $\varepsilon$  варьируется изменением сопротивления  $R9$ , параметр  $D$  – сопротивлением  $R18$ , а параметр  $\gamma$  – сопротивлением  $R4$ . Все эти параметры зависят от сопротивлений обратно пропорционально их величинам. При номиналах, указанных на схеме, параметры  $K$ ,  $\varepsilon$ ,  $D$  и  $\gamma$  соответствуют значениям, принятым при описанных выше вычислениях.



**Рис.19.23.** Зависимости от времени для трех переменных  $x, y, z$ , полученные при моделировании в среде Multisim с использованием многоканального осциллографа.

На рис.19.23 показаны образцы временных зависимостей для трех переменных при моделировании в Multisim с использованием многоканального осциллографа, три входа которого соединены с узлами на схеме, помеченными буквами  $x, y, z$ .



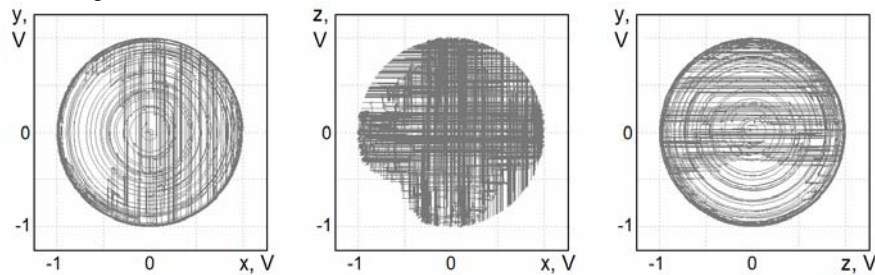
**Рис.19.24.** Спектры сигналов, соответствующих переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Разрешающая способность анализа 4 Гц.

Рис. 19.24 иллюстрирует спектры сигналов, генерируемых в процессе функционирования системы. Эти изображения получены в Multisim с помощью виртуального анализатора спектра при соответствующих установках рабочего диапазона частот и разрешения анализа. Спектры приведены в линейном масштабе. Верхняя, средняя и нижняя панели соответствуют сигналам  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Непрерывный характер спектра свидетельствует о хаотической динамике на аттракторе. Следует отметить, что первый и третий спектры визуально идентичны (с точностью до статистической погрешности), а спектр

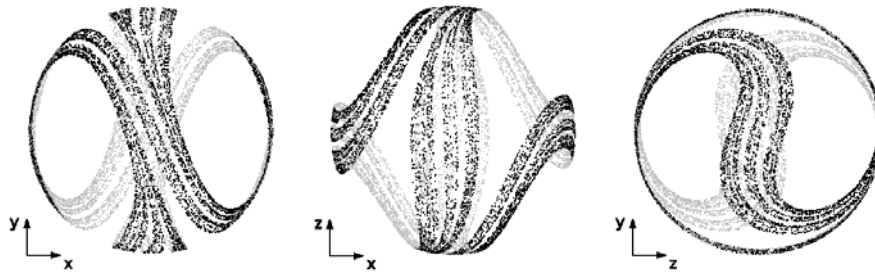


сигнала  $y$  выглядит иначе, демонстрируя два выраженных максимума при 200 и 500 Гц. Это не удивительно, поскольку участие переменных  $x$  и  $z$  в динамике системы симметрично.

Чтобы получить изображение аттрактора в проекции на плоскости  $(x, y)$ ,  $(x, z)$ , и  $(z, y)$ , соединяем два входа осциллографа с соответствующими узлами схемы и задаем режим, в котором входные напряжения управляют горизонтальным и вертикальным отклонением луча. Полученные портреты показаны на рис. 19.25.



**Рис.19.25.** Портреты аттрактора в трех проекциях на плоскости  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  и  $(z, y)$ , полученные при моделировании в среде Multisim, как снимки с экрана осциллографа.



**Рис.19.26.** Портреты аттрактора в проекции на плоскости  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  и  $(z, y)$  в стробоскопическом сечении, полученные обработкой результатов моделирования в среде Multisim, записанных в виде временных рядов для переменных  $x, y, z$  с шагом выборки 2 мс.

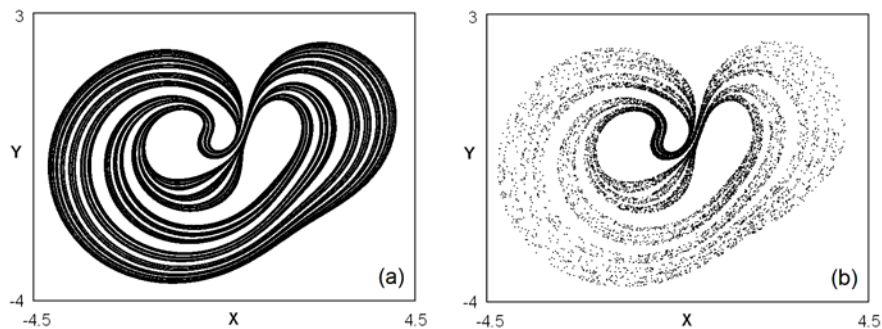
Чтобы проверить соответствие результатов моделирования с изображением на рис. 19.21, надо построить стробоскопическое сечение аттрактора. Используя такое же подключение многоканального осциллографа, как при анализе временных зависимостей, проводим моделирование на достаточно длительном интервале времени, скажем,  $10^5$  периодов переключения. Затем используем инструмент Grapher и записываем данные в файл. Временной шаг выборки устанавливается равным периоду модуляции ( $2T=2$  мс). Затем файл обрабатывается внешней программой, и результаты представляются на графике в виде набора точек, визуализирующих стробоскопическое сечение аттрактора. На рисунке 19.26 показаны полученные таким образом изображения в координатах  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  и  $(z, y)$ . Их сравнение с рис.19.21 наглядно

демонстрирует, что здесь и там мы имеем дело фактически с одним и тем же объектом; степень соответствия действительно очень хорошая.

### 19.3.3. Выявление природы аттрактора

Обсудим природу наблюдаемого аттрактора. Как видно из уравнения, единичная сфера является инвариантным множеством, и аттрактор принадлежит этому множеству. Таким образом, имеет смысл рассмотреть редукцию динамической системы (19.3) на единичную сферу. После этого перейдем к представлению аттрактора на плоскости, используя замену переменных:

$$X = \frac{z-x}{x+z+\sqrt{2}}, Y = \frac{y\sqrt{2}}{x+z+\sqrt{2}}. \quad (19.5)$$



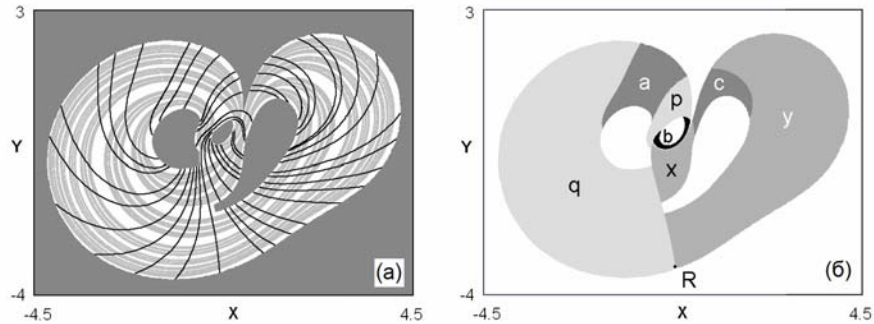
**Рис.19.27.** Стробоскопические портреты аттрактора на плоскости, один из которых получен в результате численного решения дифференциальных уравнений (19.3) (а), а второй – обработкой записанных в файл данных моделирования схемы в среде Multisim (б).

При стробоскопическом описании редуцированная система задается двумерным отображением, и плоскость  $(X, Y)$  служит фазовым пространством этого отображения. На рис.19.27 показаны портреты аттракторов на плоскости в стробоскопическом представлении. Один построен по результатам численного интегрирования уравнений (19.3), а другой – обработкой записанных в файл данных моделирования в среде Multisim.

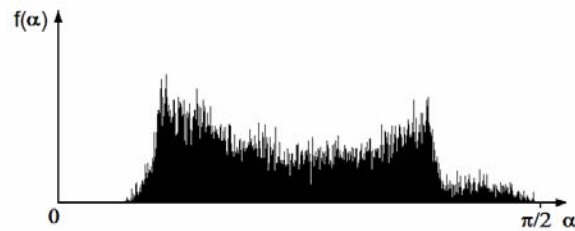
Для редуцированной на единичную сферу системы (19.3) можно обратиться к графическому представлению устойчивого и неустойчивого слоев на плоскости в соответствии с заменой (19.5). На рис. 19.28(а) аттрактор показан светло-серым цветом, а семейство кривых устойчивого слоя, полученное с помощью процедуры, изложенной в разделе 11.1, изображено черным цветом. Заметим, что взаимное расположение одного и другого семейства кривых таково, что касания, безусловно, исключены.

Одна из кривых, задающих устойчивое слое, представляет собой устойчивое многообразие седловой неподвижной точки  $R$  (рис.19.28б), имею-

шей при параметрах (19.4) координаты  $X=0$  и  $Y = -3.3758$ . Будучи продолжена до достаточно большой длины, эта кривая разделяет содержащую аттрактор область на семь участков, соответствующих элементам марковского разбиения. Картина можно сравнить с марковским разбиением для аттрактора типа Плыкена на рис.3.5(б), что выявляет очевидную топологическую эквивалентность.



**Рис.19.28.** Визуализация устойчивого и неустойчивого слоения (а) и марковского разбиения области, содержащей аттрактор (б), для двумерной версии уравнений (19.3), редуцированных на единичную сферу.



**Рис.19.29.** Гистограмма распределения углов  $\alpha$  между подпространствами векторов возмущения, отвечающих неустойчивости в прямом и обратном времени, для орбиты на аттракторе системы (19.3) при параметрах, заданных согласно (19.4).

Вернемся теперь к нередуцированной системе уравнений (19.3) и применим для тестирования гиперболичности анализ статистического распределения углов пересечения устойчивых и неустойчивых подпространств на аттракторе. В данном случае подпространство, отвечающее неустойчивости в прямом времени, одномерное, а в обратном времени двумерное. На рис.19.29 показана гистограмма углов  $\alpha_n$  для системы (19.3), построенная по методике, описанной в разделе 11.2. На графике ясно видно, что распределение не включает область близких к нулю углов, так что тест свидетельствует в пользу гиперболической природы аттрактора.

Для аттрактора системы (19.3) при параметрах, заданных согласно (19.4), была предпринята компьютерная проверка критерия конусов для трехмерно-

го отображения, соответствующего двум периодам переключений в системе  $4T$ . Для представительного множества точек на аттракторе было проверено (i) наличие конусов из векторов, растягивающихся и сжимающихся при действии отображения с коэффициентом  $\Gamma^2 > 1$  для квадрата нормы, и (ii) инвариантность конусов. Проверка критерия проводилась для представительного множества точек на аттракторе, полученных последовательными итерациями стробоскопического отображения. Расчеты показывают, что требуемые условия выполняются, по крайней мере, при  $\Gamma^2 = 2$ , что подтверждает однородно гиперболическую природу аттрактора.

Были проведены расчеты показателей Ляпунова трехмерной неавтономной системы (19.3). При параметрах (19.4) их значения таковы:  $\lambda_1 = 0.0478$ ,  $\lambda_2 = -0.0611$ ,  $\lambda_3 = -0.197$ . Наибольший показатель Ляпунова положительный, что указывает на хаотический характер динамики. Умножив его на коэффициент  $2T$ , получаем показатель Ляпунова для стробоскопического отображения  $\Lambda_1 = 2T\lambda_1 = 0.956$ . Это близко к величине  $\ln(3 + \sqrt{5}) \approx 0.9624$ , которая служит показателем Ляпунова для идеализированной конструкции данной разновидности аттрактора типа Плькина [Hunt, 2000; Айдарова и Кузнецов, 2008]. Второй показатель отрицательный, он существенен для оценки фрактальной размерности аттрактора по формуле Каплана – Йорке (приложение D):  $D = 1 + \lambda_1 / |\lambda_2| \approx 1.78$ . Дробная часть размерности указывает на наличие фрактальной поперечной структуры аттрактора. Третий показатель Ляпунова, отрицательный и самый большой по абсолютной величине, не является существенным с точки зрения структуры аттрактора. Он отвечает за подход орбит в фазовом пространстве к инвариантной сфере, на которой располагается аттрактор. Как можно проверить, величина  $\lambda_3$  контролируется параметром  $\gamma$  (см. (19.3)), в то время как другие показатели Ляпунова не демонстрируют заметной зависимости от него. Это отражает наличие избыточного измерения фазового пространства нашей системы: его размерность на единицу больше в сравнении с минимальной размерностью, необходимой для существования аттрактора Плькина. Это цена, которую приходится уплатить за возможность организовать этот объект в относительно простом электронном устройстве.

Поскольку указана конкретная принципиальная схема устройства со всеми характеристиками элементов, представляется не столь сложным собрать эту схему, как реальное электронное устройство, и изучить его в эксперименте. В силу структурной устойчивости, ее функционирование будет, как можно ожидать, нечувствительным по отношению к помехам, шумам и, по крайней мере, небольшим вариациям характеристик используемых деталей. В частности, переключения, обеспечивающие работу системы, можно заменить гладкими переходами между состояниями включения и выключения соответствующих элементов без нарушения однородной гиперболичности хаотического режима (ср. [Кузнецов, 2009; Kuznetsov, 2009]).