

## 8.4 Минимальная модель с аттрактором Смейла – Вильямса

Отправляясь от результатов раздела 8.2, можно попытаться отыскать более простой вариант сходных по структуре дифференциальных уравнений, реализующих надстройку аттрактора Смейла – Вильямса.

Если взять за основу модель (8.8), но не стремиться к ее физической интерпретации, как построенной из связанных осцилляторов, то в уравнениях можно исключить члены, содержащие параметр частоты  $\omega_0$ . Далее, пересмотрев вид членов, определяющих связь двух подсистем, оказывается возможным устранить также и члены, содержащие четвертую степень амплитуды. В модели (8.8) они отвечали за ограничение колебаний первого парциального осциллятора; в модифицированной системе эту функцию будут выполнять по совместительству нелинейные члены, отвечающие за взаимодействие подсистем.

Дифференциальные уравнения в новом варианте запишем для комплексных переменных  $a$  и  $b$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= (1 + |a|^2 - |b|^2)a + \varepsilon b, \\ \dot{b} &= (|a|^2 - 1)b + a^2,\end{aligned}\tag{8.15}$$

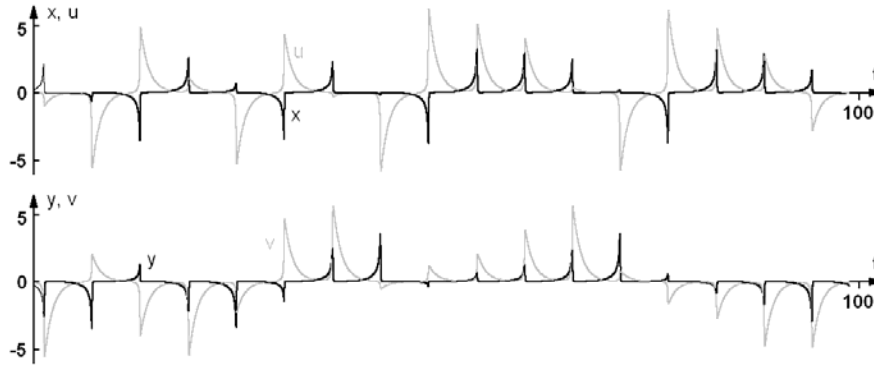
или, вводя вещественные переменные так, что  $a = x + iu$ ,  $b = y + iv$ , в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 + x^2 + u^2 - y^2 - v^2)x + \varepsilon y, \\ \dot{u} &= (1 + x^2 + u^2 - y^2 - v^2)u + \varepsilon v, \\ \dot{y} &= (x^2 + u^2 - 1)y + x^2 - u^2, \\ \dot{v} &= (x^2 + u^2 - 1)v + 2xu.\end{aligned}\tag{8.16}$$

Уравнения (8.16) с очевидностью проще, чем (8.8), содержат меньше нелинейных членов, и их степень ниже, что является несомненным достоинством с точки зрения возможной реализации системы, например, в виде электронного устройства. Динамика предлагаемой модели очень похожа на ту, что имеет место в системе (8.8), с той разницей, что удвоение циклической переменной осуществляется при передаче возбуждения от первой подсистемы ко второй, а не наоборот. Численное решение уравнений показывает, что в достаточно широком интервале по параметру  $\varepsilon$  модель характеризуется наличием аттрактора типа Смейла – Вильямса в сечении Пуанкаре.

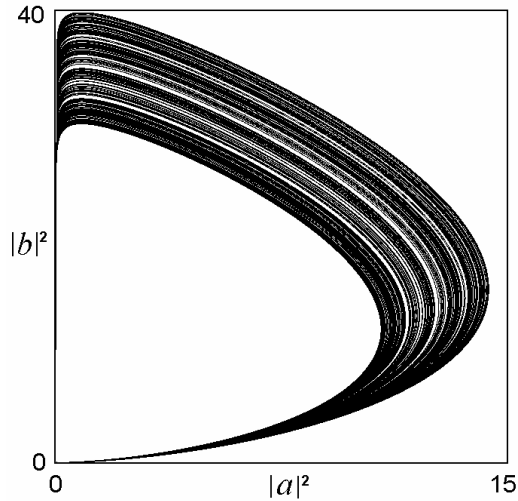
На рис. 8.16 приведены графики зависимости от времени динамических переменных, полученные при численном решении уравнений (8.16) для  $\varepsilon=0.02$ . Можно видеть, что стадии активности одной и другой подсистемы перемежаются со стадиями подавления. Согласно вычислениям, средний

временной период повторения стадий для данного режима равен  $\langle T \rangle = 5.811$ .



**Рис. 8.16.** Зависимости от времени динамических переменных, полученные при численном решении уравнений (8.16) для  $\varepsilon=0.02$ .

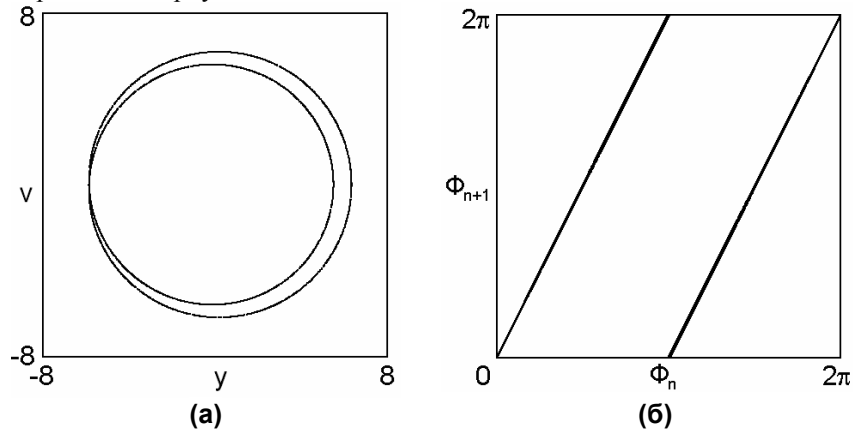
На рис.8.17 показан портрет аттрактора в проекции на плоскость амплитудных переменных подсистем  $(|a|^2, |b|^2) = (x^2 + u^2, y^2 + v^2)$ . Возбуждение первой подсистемы соответствует уходу траектории от начала координат вправо, возбуждение второй – уходу вверх, с последующим подавлением сначала первой, а затем второй подсистемы, и новым возвращением в окрестность начала координат.



**Рис.8.17.** Портрет аттрактора системы (8.16) при  $\varepsilon=0.02$  в проекции на плоскость амплитудных переменных первой и второй подсистемы

Для задания секущей Пуанкаре используем соотношение  $|a|^2 = c_0^2$ ,  $c_0 = 0.8$ , учитывая проходы траекторий в направлении уменьшения амплитуды  $|a|$ .

На рис. 8.18 показаны портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных второй подсистемы и диаграмма, иллюстрирующая преобразование циклической переменной – аргумента комплексной амплитуды второй подсистемы при последовательных проходах секущей Пуанкаре. Как можно видеть, оно с замечательной точностью соответствует отображению Бернулли.



**Рис. 8.18.** Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных второй подсистемы (а) и диаграмма, иллюстрирующая преобразование циклической переменной – аргумента комплексной амплитуды второй подсистемы при последовательных проходах секущей Пуанкаре (б) для системы (8.16) при  $\varepsilon=0.02$ .

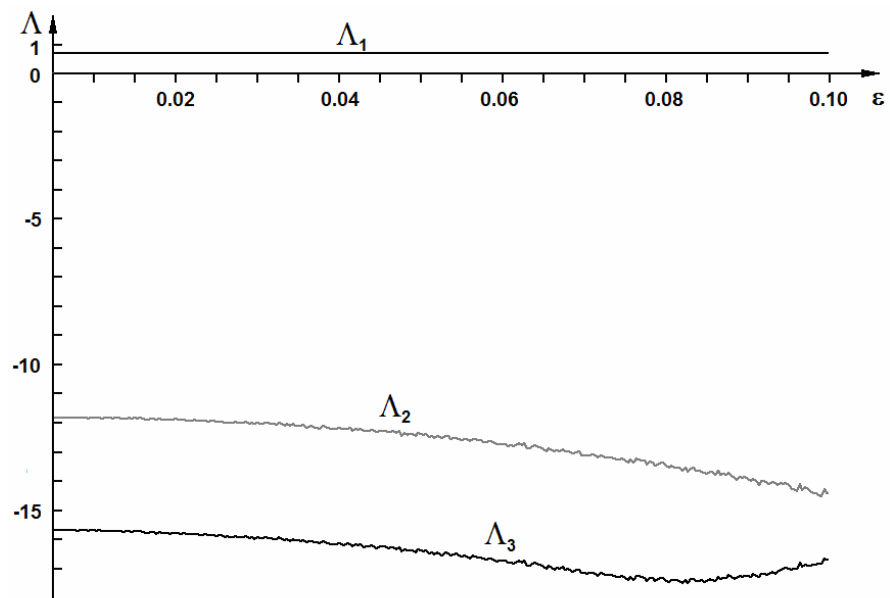
Показатели Ляпунова, рассчитанные для данного аттрактора, составляют

$$\lambda_1 = 0.11928, \lambda_2 = 0.00000, \lambda_3 = -2.0449, \lambda_4 = -2.7150. \quad (8.17)$$

Учитывая, что средний период прохода секущей Пуанкаре  $\langle T \rangle = 5.811$ , для старшего показателя отображения Пуанкаре получаем  $\Lambda_1 = \lambda_1 \langle T \rangle = 0.6931$ , что прекрасно согласуется с ожидаемым значением  $\ln 2 = 0.69314\dots$ . Вторым показателем нулевой, с точностью до погрешности вычислений, и должен интерпретироваться как связанный с вектором возмущения типа сдвига вдоль опорной траектории. Остальные показатели отрицательные. Размерность Каплана – Йорке  $D_{KY} \approx 1.06$ .

На рис.8.19 показан график зависимости показателей Ляпунова, рассчитанных для отображения Пуанкаре, от параметра  $\varepsilon$ . Старший показатель остается практически постоянным и близким к величине  $\ln 2$  в широком диапазоне по параметру.

Представленные численные результаты аналогичны тем, которые получены для других систем с аттрактором типа Смейла – Вильямса в отображении Пуанкаре, что говорит о наличии такого аттрактора также и у предложенной простой автономной системы (8.16).



**Рис.8.19.** Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (8.16) в зависимости от параметра  $\epsilon$ .