

## Приложение В Кельтский камень

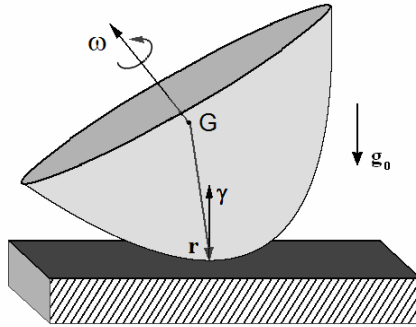
В механике помимо систем, допускающих описание в рамках формализма Лагранжа и Гамильтона, рассматривают *неголономные системы*, к которым относятся многие задачи, например, в механике передвижных и летательных аппаратов, робототехнике. Класс неголономных систем очень широк: в нем имеет место иерархия динамического поведения от интегрируемых до не интегрируемых систем, в зависимости от количества присутствующих задачи инвариантов и симметрий [Borisov and Mamaev, 2002].

Крайней ситуации сложной динамики отвечает задача о «кельтском камне», состоящая в изучении движения твердого тела с выпуклой гладкой поверхностью на шероховатой плоскости, когда расположение главных осей, определяющих геометрические свойства тела и его динамические свойства, различается. Происхождение необычного названия – «кельтский камень» связано с находками при изучении кельтских гробниц археологами в виде полукруглых каменных артефактов, очевидно, орудий труда, которые, если их запустить волчком на горизонтальной поверхности, демонстрировали необычное поведение. Обычно вращение в одну сторону происходит устойчиво и без проблем, а при запуске в противоположную сторону вращение сначала замедляется, потом возникают колебаний (покачивания) камня, и затем он начинает вращаться в противоположную сторону! Бывают и такие камни, у которых смена направления вращения происходит многократно.

В неголономных системах типа кельтского камня механическая энергия сохраняется, но сохранения фазового объема нет: элемент объема по ходу эволюции во времени может претерпевать в одних местах сжатие, а в других растяжение. Рассматривая движение на гиперповерхности постоянной энергии, оказывается возможным наблюдать феномены, специфические, казалось бы, только для диссипативной динамики: притягивающие неподвижные точки, предельные циклы [Карапетян, 1981; 1985; Борисов, Мамаев, 2002]. В работе [Борисов, Мамаев, 2003], была указана возможность реализации также и странных аттракторов.

Таким образом, кельтский камень – интереснейший объект для приложения методик, наработанных в теории динамических систем, в том числе из-за специфического сочетания свойств диссипативной и консервативной динамики. В фазовом пространстве этой системы для каждого притягивающего множества имеется симметричный партнер – объект, составленный из траекторий с точно таким же поведением, но в обратном времени. Кроме того, возможны динамические режимы, симметричные по отношению к обращению времени, в том числе *квазиконсервативный хаос* (в литературе используется также термин «смешанная динамика» [Гонченко и др., 2012]).

Материалы, изложенные ниже, нацелены на выявление феноменов диссипативной нелинейной динамики в модели кельтского камня в сопоставлении с моделями, обсуждавшимися в Приложении А. Хаотические аттракторы, которые удалось пока наблюдать в численных расчетах для кельтских камней, не относятся к однородно гиперболическим. Вопрос о реализации гиперболического хаоса в этой и других моделях неголономной механики, а также о возможных его приложениях, интересен, но пока не исследован.



**Рис.В.1.** Модель «кельтского камня»:  $G$  – центр масс,  $\boldsymbol{\gamma}$  – орт нормали к поверхности,  $\mathbf{r}$  – вектор, соединяющий центр масс и точку контакта,  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости.

Рассмотрим твердое тело массы  $m = 1$  с гладкой поверхностью выпуклой формы, совершающее механическое движение на плоскости (рис.В.1). Сила тяжести перпендикулярна к плоскости и характеризуется ускорением свободного падения  $g_0$ . Движение таково, что в каждый момент имеет место единственная точка контакта с плоскостью, причем скорость этой точки всегда остается нулевой. Предполагается, что в области, где может располагаться точка контакта, поверхность имеет вид эллиптического параболоида, причем два главных радиуса кривизны заданы константами  $a_1$  и  $a_2$ . Расстояние центра масс от вершины параболоида дается параметром  $h$ . Уравнения движения формулируются для составляющих момента импульса  $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$  и ортогонального к плоскости вектора  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , определенных в системе координат, фиксированной относительно твердого тела, и имеют вид [Борисов, Мамаев, 2002; 2003; Гонченко, 2012]

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_1 &= M_2 \omega_3 - M_3 \omega_2 + \omega_1 \rho - r_1 \omega_r + g_0 (r_2 \gamma_3 - \gamma_3 r_2), \\
 \dot{M}_2 &= M_3 \omega_1 - M_1 \omega_3 + \omega_2 \rho - r_2 \omega_r + g_0 (r_3 \gamma_1 - \gamma_1 r_3), \\
 \dot{M}_3 &= M_1 \omega_2 - M_2 \omega_1 + \omega_3 \rho - r_3 \omega_r + g_0 (r_1 \gamma_2 - \gamma_2 r_1), \\
 \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2 \omega_3 - \gamma_3 \omega_2, \\
 \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 \omega_1 - \gamma_1 \omega_3, \\
 \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1.
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Кроме динамических переменных, относительно которых записаны уравнения, в правых частях использованы выражающиеся через них координаты центра масс тела  $G$  относительно точки контакта

$$r_1 = -a_1\gamma_1/\gamma_3, r_2 = -a_2\gamma_2/\gamma_3, r_3 = -h + \frac{1}{2}(a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2)/\gamma_3^2, \quad (\text{B.2})$$

и компоненты угловой скорости  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , определяемые через составляющие вектора  $\mathbf{M}$  и вектора  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$  из решения системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta + r_2^2 + r_3^2 & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta - r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta - r_2 r_1 & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta + r_3^2 + r_1^2 & -r_2 r_3 \\ -r_3 r_1 & -r_3 r_2 & I_3 + r_1^2 + r_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

где  $\delta$  имеет смысл угла между динамическими и геометрическими главными осями. Кроме того, в правых частях присутствуют величины

$$\begin{aligned} \rho &= r_1 \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2 + r_3 \dot{r}_3 \\ \dot{r}_1 &= -a_1[(\gamma_2 \omega_3 - \gamma_3 \omega_2)\gamma_3 - (\gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1)\gamma_1]/\gamma_3^2, \\ \dot{r}_2 &= -a_2[(\gamma_3 \omega_1 - \gamma_1 \omega_3)\gamma_3 - (\gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1)\gamma_2]/\gamma_3^2, \\ \dot{r}_3 &= [a_1\gamma_1(\gamma_2 \omega_3 - \gamma_3 \omega_2) + a_2\gamma_2(\gamma_3 \omega_1 - \gamma_1 \omega_3)]/\gamma_3^2 - (a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2)(\gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1)/\gamma_3^3. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

В силу наличия у системы интеграла энергии

$$E = \frac{1}{2}(M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3) - g_0(r_1 \gamma_1 + r_2 \gamma_2 + r_3 \gamma_3) \quad (\text{B.5})$$

и геометрического интеграла

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad (\text{B.6})$$

динамика в шестимерном пространстве состояний  $(M_1, M_2, M_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  осуществляется на четырехмерной гиперповерхности. При описании с помощью сечения Пуанкаре задача сводится к анализу трехмерного отображения [Борисов, Мамаев, 2002; 2003; Гонченко, 2012].

Система обладает симметрией относительно обращения времени

$$t \leftrightarrow -t, M_1 \leftrightarrow -M_1, M_2 \leftrightarrow -M_2, M_3 \leftrightarrow -M_3, \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_1, \gamma_2 \leftrightarrow \gamma_2, \gamma_3 \leftrightarrow \gamma_3, \quad (\text{B.7})$$

а также относительно замены

$$t \leftrightarrow t, M_1 \leftrightarrow -M_1, M_2 \leftrightarrow -M_2, M_3 \leftrightarrow M_3, \gamma_1 \leftrightarrow -\gamma_1, \gamma_2 \leftrightarrow -\gamma_2, \gamma_3 \leftrightarrow \gamma_3, \quad (\text{B.8})$$

что полезно учитывать при анализе.

Система дифференциальных уравнений (B.1) решается численно методом Рунге – Кутты четвертого порядка [Калиткин, 1978]. На каждом шаге для вычисления правых частей применяются соотношения (B.2), производится решение линейной системы алгебраических уравнений (B.3) относительно составляющих вектора угловой скорости и вычисление дополнительных величин (B.4). В некоторых случаях (например, при вычислении показателей Ляпунова, см. ниже) полезно предусмотреть приведение вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  к единичной норме, а составляющих вектора момента импульса  $\mathbf{M}$  к величинам, обеспечивающим фиксированное заданное значение энергии  $E$ . Для этого используются формулы

$$\gamma_i := \frac{\gamma_i}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}}, \quad k = i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.9})$$

и

$$M_i := M_i \sqrt{2 \frac{E + g_0(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2 + r_3\gamma_3)}{M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + M_3\omega_3}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{B.10})$$

Вычисление отображения Пуанкаре реализовано в виде специальной подпрограммы, использующей метод Эно [Henon, 1982; Кузнецов, 2001]. А именно, при обнаружении в процессе вычислений такой ситуации, что перед очередным шагом  $q = M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2 > 0$ , а после него  $q < 0$ , с помощью того же разностного метода делается дополнительный шаг, на котором за независимую переменную принимается  $q$ , а величина шага дается полученным перед этим значением  $q$  с обратным знаком. Это обеспечивает возвращение изображающей точки на текущую Пуанкаре, притом согласованное по точности с используемой разностной схемой.

Для построения карты динамических режимов производится сканирование плоскости параметров перебором узлов сетки с некоторым шагом по двум параметрам. В каждой точке выполняется порядка  $10^3$  итераций отображения Пуанкаре, и по результатам последних итераций проводится анализ на предмет наличия периода от 1 до 14 (с некоторым заданным уровнем допустимой погрешности). При обнаружении периодичности соответствующий пиксель на диаграмме обозначается определенным тоном серого цвета, и производится переход к анализу следующей точки на плоскости параметров. Обычно в качестве начальных условий в новой точке разумно за-

давать состояние, полученное в предыдущей точке («сканирование с наследованием»), что в большинстве случаев способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики.

Обсудим процедуру вычисления спектра показателей Ляпунова.

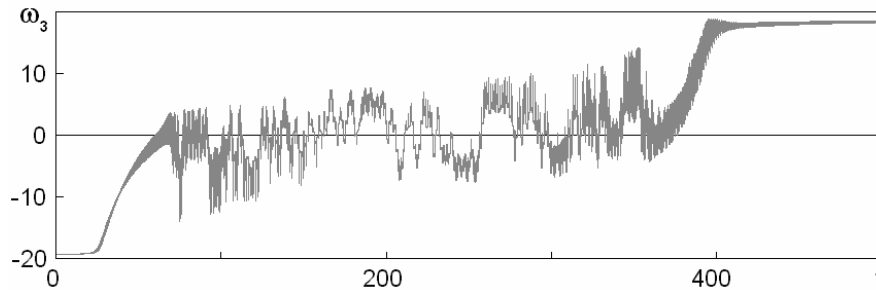
Если говорить об исходной системе (В.1), то у нее шесть показателей Ляпунова, три из которых нулевые. Один нулевой показатель отвечает возмущению сдвига вдоль опорной траектории, а два других – возмущениям сдвига по энергии и по норме вектора  $\gamma$ . Остается три подлежащих вычислению нетривиальных показателя.

Для отображения Пуанкаре один нулевой показатель исключается сразу. Два других можно устранить, если при обращении к вычислению отображения каждый раз использовать нормировку вектора  $\gamma$  на единицу и вектора момента к величине, обеспечивающей заданное значение механической энергии.

Сложность исходных уравнений делает предпочтительным вариант методики расчета показателей Ляпунова, не использующий линеаризованных уравнений в вариациях. А именно, при заданных параметрах и начальных условиях с применением подпрограммы вычисления отображения Пуанкаре выполняем совместно итерации для четырех состояний с одинаковой энергией, одно из которых отвечает опорной траектории, а три других – слабо возмущенным относительно него состояниям. После каждой итерации для трех векторов возмущения производится ортогонализация по Граму – Шмидту и приведение к заданной малой фиксированной норме, после чего для продолжения используются переопределенные векторы возмущения.

Наличие положительного показателя Ляпунова свидетельствует о хаотической природе динамического режима. Если сумма всех трех показателей отрицательная, то речь идет о странном хаотическом аттракторе, а если она нулевая, с точностью до погрешности вычислений, то это указывает на присутствие квазиконсервативного хаоса.

Рис.В.2 иллюстрирует один из интригующих феноменов динамики кельтского камня – явление реверса. Здесь приводятся полученные в расчетах зависимости от времени одной из составляющих вектора угловой скорости, причем начальное состояние соответствует вращению вокруг вертикальной оси в «неподходящем» направлении. Малые возмущения исходного состояния дают начало развитию сложного переходного процесса, в ходе которого возникают колебания относительно других координатных осей. В дальнейшем эти колебания трансформируют движение так, что направление вращения изменяется на противоположное, что отвечает смене знака  $\omega_3$ .



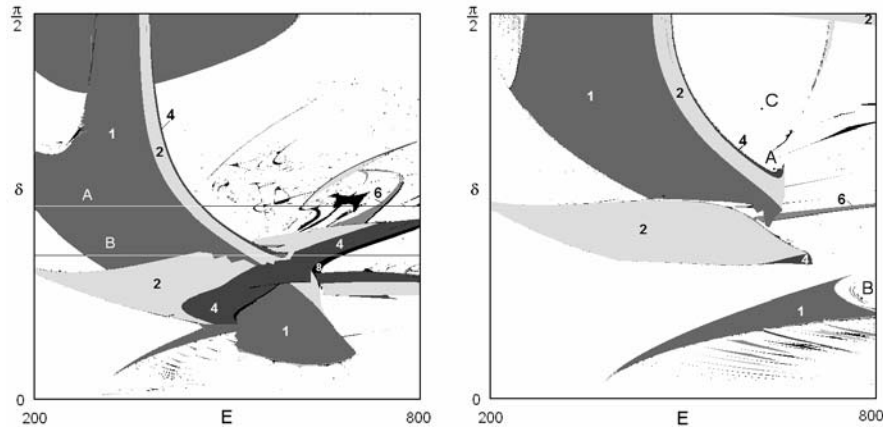
**Рис.В.2.** Зависимости компоненты угловой скорости  $\omega_3$  от времени, иллюстрирующие эффект реверса: после переходного процесса направление вращения меняет знак. Параметр энергии  $E=1380$ , остальные параметры  $I_1=5$ ,  $I_2=6$ ,  $I_3=7$ ,  $g_0=100$ ,  $a_1=9$ ,  $a_2=4$ ,  $h=1$ ,  $\delta=0.2$ .

На рис.В.3 показаны карты режимов на плоскости параметров энергии  $E$  и угла поворота осей инерции относительно геометрических осей  $\delta$  для двух случаев,  $I_1=1$  и 2, когда остальные параметры фиксированы:  $I_2=6$ ,  $I_3=7$ ,  $g_0=100$ ,  $a_1=9$ ,  $a_2=4$ ,  $h=1$ .<sup>1</sup> При построении карт использованы результаты сканирования с наследованием слева направо и снизу вверх. Различные тона серого цвета обозначают динамику того или иного периода, причем период определялся для переменной  $M_3$ . Белый цвет означает отсутствие идентифицированного с определенностью периода; эти области могут отвечать хаотическим или квазипериодическим режимам динамики.

Обширные области, идентифицированные, как зоны периода 1 для  $M_3$ , с точки зрения динамики полного состояния системы  $(\mathbf{M}, \gamma)$ , отвечают режиму периода 2, но это цикл симметричный относительно замены (В.8). Таким образом, переход через границу из темно-серой в светло-серую область отвечает фактически не удвоению периода, а бифуркации потери симметрии.

Характерное окаймление белых хаотических областей сужающимися полосами разного серого тона отвечает последовательности бифуркаций удвоения периода, накапливающихся к границе хаоса. Внутри белой области, занимающей центральную часть карт, можно видеть множество характерных небольших по размерам областей, «креветок», как в отображениях Эно и Икеды в Приложении А. Наличие этих областей — признак негиперболической природы хаоса. Область в нижней части той и другой карты, где видна система отделенных друг от друга полосок периодичности, отвечает квазипериодической динамике, а полосы, или «языки» — режимам синхронизации колебательных составляющих с рациональными отношениями частот.

<sup>1</sup> Вариант с  $I_1=1$ ,  $I_2=6$ ,  $I_3=7$  отвечает особой ситуации, когда «тяжелая» часть кельтского камня имеет вид тонкой пластины, прикрепленной к невесомому телу выпуклой формы, обеспечивающему нужные геометрические свойства; «неравенство треугольника», которому должны удовлетворять компоненты матрицы момента инерции в диагональном представлении, в этом случае вырождается в равенство.



**Рис.В.3.** Карты динамических режимов модели кельтского камня на плоскости параметров для отображения Пуанкаре при  $I_1=1$  (а) и  $I_1=2$  (б), с остальными параметрами  $I_2=6$ ,  $I_3=7$ ,  $g_0=100$ ,  $a_1=9$ ,  $a_2=4$ ,  $h=1$ . По горизонтальной оси отложена энергия  $E$ , а по вертикальной угол поворота осей инерции относительно геометрических осей  $\delta$ . Горизонтальные линии А и В отвечают движению по параметру  $E$  при построении диаграмм на рис.В.4 и В.5. Точки А ( $E=642$ ,  $\delta=0.922$ ), В ( $E=770$ ,  $\delta=0.405$ ), С ( $E=620$ ,  $\delta=3\pi/8=1.178\dots$ ) соответствуют портретам аттракторов на рис.В.5.

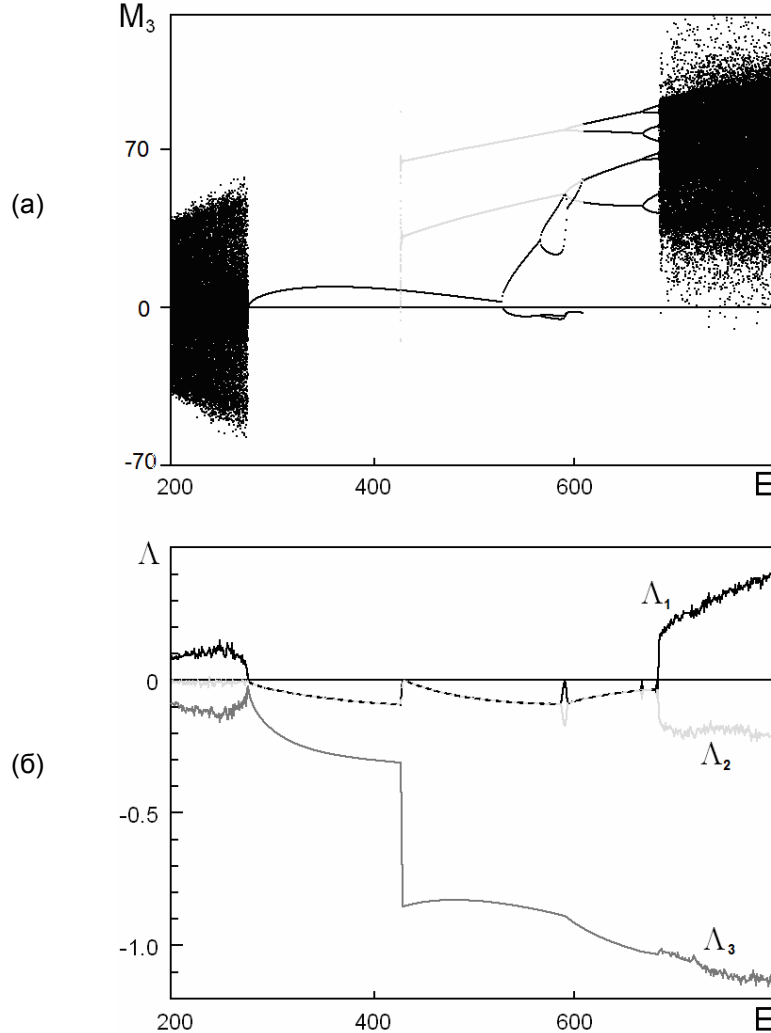
Две горизонтальные линии А и В на левой карте отвечают однопараметрическим бифуркационным диаграммам и графикам зависимости показателей Ляпунова от параметра  $E$  на рис.В.4 и В.5.

На верхних диаграммах по вертикальной оси отложены значения составляющей момента импульса  $M_3$  в момент прохождения секущей Пуанкаре при каждом заданном значении энергии  $E$ , которая отложена по горизонтальной оси. При проведении вычислений параметр энергии изменяется шаг за шагом, и при новом ее значении начальные условия для итераций задаются состоянием, получаемом из состояния при предыдущем значении пропорциональным пересчетом момента импульса (см. (В.10)). Данные, полученные при сканировании слева направо, даны черным цветом, а справа налево серым цветом. Несовпадение режимов, наблюдаемых в одном и другом случае, свидетельствует о мультистабильности, когда при одних и тех же параметрах системы могут возникать два (или более) аттракторов в зависимости от конкретных начальных условий.

В левой части диаграммы на рис.В.4 реализуется хаотическая динамика, о чем свидетельствует наличие положительного показателя Ляпунова. Второй показатель близок к нулю, а третий, отрицательный, близок по абсолютной величине к первому показателю. Такой спектр показателей Ляпунова говорит о близости к квазиконсервативному хаосу.

На рис.В.5 в левой части диаграммы и на рис.В.4 в центральной части имеют место области периодической динамики, которым отвечает количест-

во ветвей, определяемое периодом данного режима при итерациях отображения Пуанкаре.

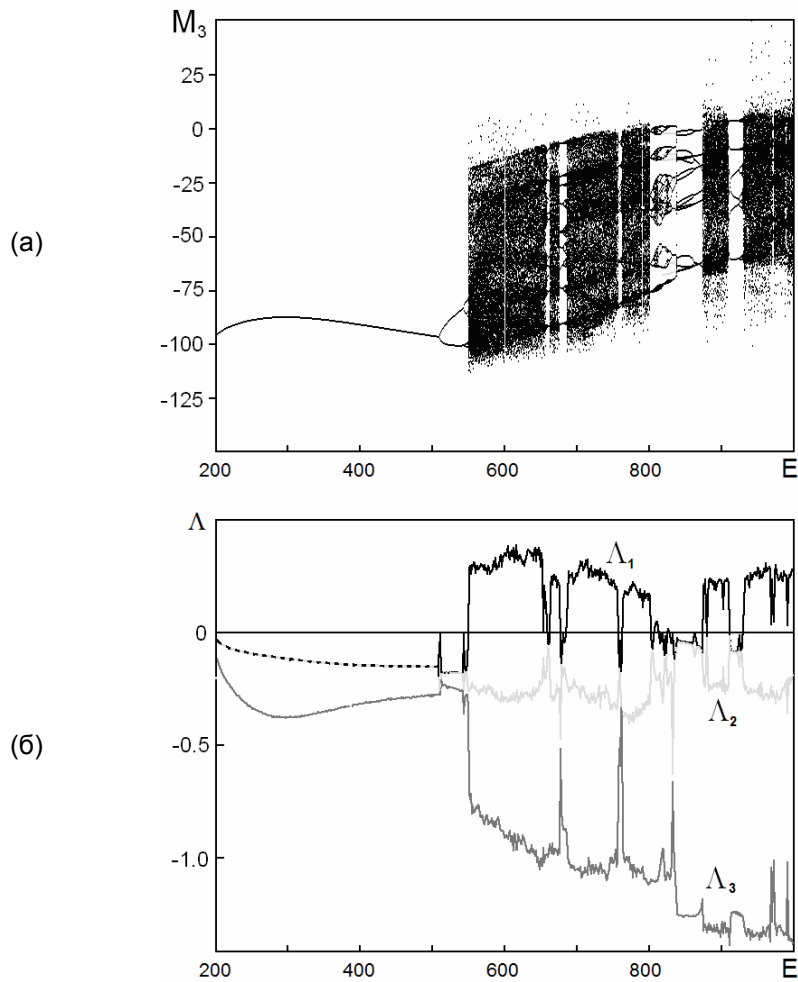


**Рис.В.4.** Бифуркационное дерево (а,б) и график трех показателей Ляпунова (в) для трехмерного отображения Пуанкаре системы (В.1) при параметрах:  $I_1=1$ ,  $I_2=6$ ,  $I_3=7$ ,  $g_0=100$ ,  $a_1=9$ ,  $a_2=4$ ,  $h=1$ ,  $\delta=3\pi/16$ . Сканирование по параметру энергии  $E$  справа налево с наследованием начальных условий, за исключением показанных серым цветом ветвей дерева, которые получаются сканированием справа налево.

В области периодической динамики можно отметить мультистабильность и эффект гистерезиса – зависимость финального состояния системы от пути, которым к нему пришли (слева направо или справа налево), что выражается в несовпадении черных и серых линий. Можно видеть бифуркации



удвоения периода, когда каждая ветвь раздваивается, с возникновением периода 4 и 8. В момент бифуркации старший показатель Ляпунова обращается в ноль. Переход к хаосу, по крайней мере, на показанных диаграммах, не такой, как для одномерных отображений: вместо постепенного нарастания нерегулярной составляющей возникает сразу интенсивный хаос (возможность такой ситуации отмечена в работе [Гонченко и др., 2012]).

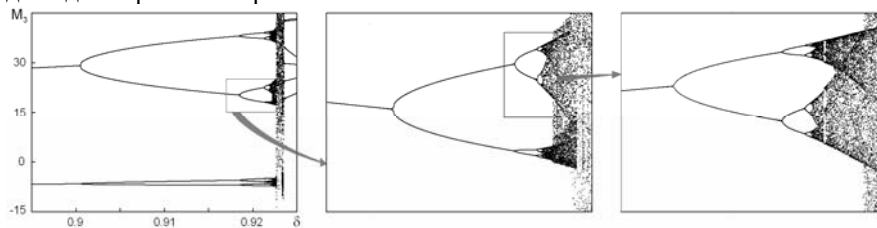


**Рис.В.5.** Бифуркационное дерево (а) и график трех показателей Ляпунова (б) для трехмерного отображения Пуанкаре системы (В.1) при параметрах:  $I_1=1$ ,  $I_2=6$ ,  $I_3=7$ ,  $g_0=100$ ,  $a_1=9$ ,  $a_2=4$ ,  $h=1$ ,  $\delta=\pi/4$ . Сканирование по параметру энергии  $E$  справа налево с наследованием начальных условий, за исключением показанных серым цветом ветвей на среднем графике, которые получают сканированием справа налево.

В правой части диаграмм хаотический режим не близок к квазиконсервативному хаосу и должен интерпретироваться как ассоциирующийся со странному аттрактором. Имеется один положительный и два отрицательных показателя Ляпунова, и хорошо определена размерность аттрактора по Каплану – Йорке. Аттрактор не гиперболический: можно наблюдать изрезанность зависимости показателя Ляпунова от параметра (особенно на рис.В.5), с «провалами», отвечающими окнам периодичности, подобную той, что имеет место в отображении Эно. На карте динамических режимов эти окна соответствуют тому, что маршрут движения по параметру пересекает образования в виде «креветок».

Рассмотрим более подробно аттракторы, которые на карте, показанной на рис.В.3 справа, реализуются в точках А, В, С.

Если двигаться на плоскости параметров снизу вверх по вертикальной линии, проходящей через точку А, то можно наблюдать переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Это иллюстрируется древовидной диаграммой на рис.В.6, где можно видеть характерную картину ветвей, раздваивающихся в точках бифуркаций, и заполненную точками «крону», отвечающую области хаоса. На вставках показаны фрагменты картины в увеличенном виде, которые с увеличением масштаба становятся все в большей степени похожими на классическую картину «дерева Фейгенбаума» для одномерных отображений.



**Рис.В.6.** Бифуркационные деревья в области перехода к хаосу через удвоения периода по Фейгенбауму при параметрах:  $I_1=2$ ,  $I_2=6$ ,  $I_3=7$ ,  $g_0=100$ ,  $a_1=9$ ,  $a_2=4$ ,  $h=1$ ,  $E=642$ . Сканирование ведется в сторону увеличения параметра  $\delta$  с наследованием начальных условий.

Измеряя на диаграмме расщепление ветвей по горизонтали, и вычисляя их отношения для последовательных уровней удвоения, получаем первую строку таблицы В.1. Аналогичным образом, определив отношения размеров расщепления ветвей по вертикальной координате, заполним вторую строку. Для перехода, относящегося к классу универсальности Фейгенбаума [Фейгенбаум, 1983; Шустер, 1988; Кузнецов, 2001], отношения должны сходиться к универсальным константам  $\delta_F=4.6692\dots$  и  $\alpha_F=-2.5029\dots$ . Из таблицы видно, что это подтверждается. Тот факт, что на первых уровнях удвоений оценки констант по абсолютной величине больше, связан с *эффектом кроссовера* [Reick, 1992]. При малой эффективной диссипации (понимаемой, как характеристика сжатия трехмерного фазового объема в данной области фазового пространства), константы на низких уровнях близки к тем, которые

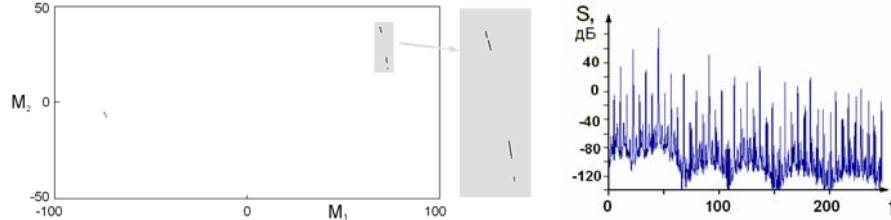
характерны для удвоений в консервативных системах,  $\delta_H=8.721\dots$  и  $\alpha_H=-4.018\dots$  [Райхл, 2008; Kuznetsov et al., 2005]. При каждой очередной бифуркации уровень диссипации за характерный период удваивается, и величины асимптотически приближаются к универсальным константам  $\delta_F$  и  $\alpha_F$ .

**Таблица В.1**

Результаты оценки констант Фейгенбаума

	(2,4)/(4,8)	(4,8)/(8,16)	(8,16)/(16,32)	(32,64)/(64,128)	Константы Фейгенбаума
$\delta_F$	6.52	5.29	4.70	4.62	4.6692
$\alpha_F$	-3.79	-2.82	-2.64	-2.54	-2.5029

Аттрактор трехмерного отображения Пуанкаре в проекции на плоскость переменных  $(M_1, M_2)$ , возникший в результате каскада удвоений периода, показан на рис.В.7 для точки А ( $E=642$ ,  $\delta=0.922$ ). Визуально он похож на аттракторы диссипативных отображений, наблюдаемые сразу за порогом перехода к хаосу через удвоения периода. На рисунке показан также спектр колебаний переменной  $M_3$  при динамике на аттракторе. Он имеет вид, характерный для аттрактора, возникшего через каскад Фейгенбаума, в виде набора пиков с иерархической структурой [Фейгенбаум, 1983; Шустер, 1988; Кузнецов, 2001]. По Фейгенбауму, пики каждого следующего уровня должны быть в среднем на 13.4 дБ ниже предыдущего уровня, что разумно согласуется с наблюдаемой картиной. На глубоких уровнях пики разрушены, и имеет место сплошной спектр, т.е. динамика хаотическая.



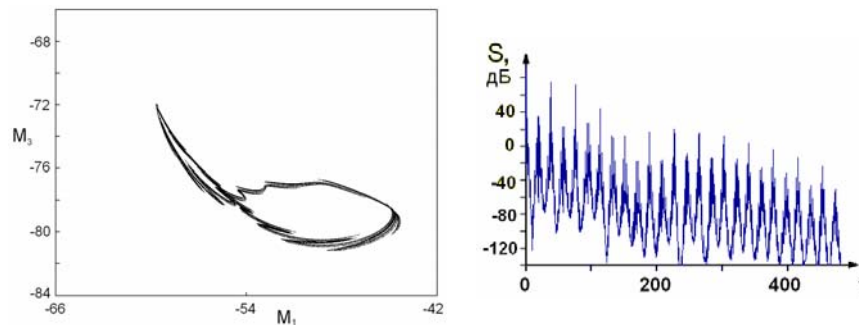
**Рис.В.7.** Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость двух составляющих момента импульса и спектр Фурье составляющей  $M_3$  для параметров  $I_1=2$ ,  $I_2=6$ ,  $I_3=7$ ,  $g_0=100$ ,  $a_1=9$ ,  $a_2=4$ ,  $h=1$ , и  $E=642$ ,  $\delta=0.922$ .

Рассчитанный для отображения Пуанкаре спектр показателей Ляпунова данного аттрактора:  $\Lambda_1 = 0.0453$ ,  $\Lambda_2 = -0.0845$ ,  $\Lambda_3 = -0.3112$ . Имеется один положительный показатель и два превышающих его по абсолютной величине отрицательных показателя. Оценка размерности по формуле Каплана – Йорке (приложение D) дает  $D = m + \left( \sum_{i=1}^m \Lambda_i \right) / \left| \Lambda_{m+1} \right| = 1 + \frac{\Lambda_1}{|\Lambda_2|} \approx 1.53$ .

Поскольку результаты указывают на принадлежность перехода к классу универсальности Фейгенбаума, можно полагать, что на больших характерных временах описание динамики в этой области сводится к одномерному

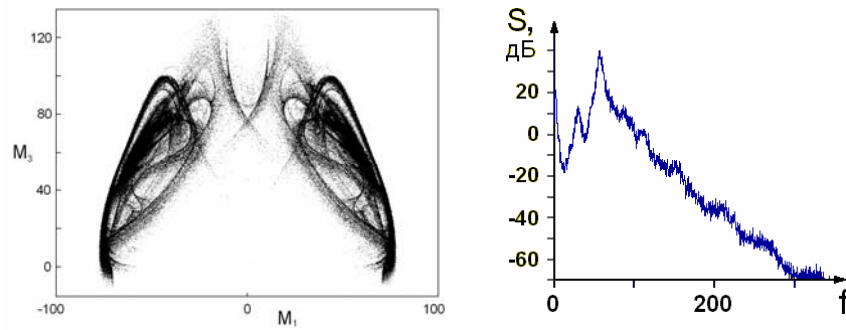
отображению с квадратичным экстремумом (из-за сильного сжатия в области фазового пространства трехмерного отображения, где расположен аттрактор). Соответственно, около критической точки должны иметь место феномены, характерные для одномерных отображений. В частности, за критической точкой, реализуется странный аттрактор, подобный аттрактору отображения Эно при сильной диссипации [Benedicks and Carleson, 1991].

На рис.В.8 показан портрет хаотического аттрактора в точке В ( $E=770$ ,  $\delta=0.405$ ) и спектр Фурье сигнала, порожденного динамикой на этом аттракторе. Спектр весьма изрезанный, но с определенностью идентифицируется как сплошной, то есть отвечающий хаотической динамике. Как можно предположить на основании визуальной оценки аттрактора и вида спектра, это аттрактор, образовавшийся в результате разрушения инвариантного тора (замкнутой инвариантной кривой в сечении Пуанкаре). Показатели Ляпунова данного аттрактора трехмерного отображения  $\Lambda_1 = 0.077$ ,  $\Lambda_2 = -0.100$ ,  $\Lambda_3 = -0.128$ , а его размерность по формуле Каплана – Йорке  $D = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.76$ .



**Рис.В.8.** Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость двух составляющих момента импульса и спектр Фурье составляющей  $M_3$  на аттракторе для параметров  $I_1=2$ ,  $I_2=6$ ,  $I_3=7$ ,  $g_0=100$ ,  $a_1=9$ ,  $a_2=4$ ,  $h=1$ ,  $E=770$ ,  $\delta=0.405$ .

На рис.В.9 показан аттрактор в точке С ( $E=620$ ,  $\delta=3\pi/8$ ) и спектр Фурье, который определенно отвечает развитому хаосу. Его изрезанность, в отличие от спектров на рисунках В.7 и В.8, невелика, что свидетельствует об отсутствии каких-либо заметных периодических составляющих движения. Показатели Ляпунова  $\Lambda_1 = 0.282$ ,  $\Lambda_2 = -0.093$ ,  $\Lambda_3 = -0.686$ . Здесь первый показатель Ляпунова положительный, а второй отрицательный, но по абсолютной величине меньше первого. Поэтому размерность по формуле Каплана – Йорке больше 2:  $D = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2)/|\Lambda_3| \approx 2.26$ .



**Рис.В.9.** Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость двух составляющих момента импульса и спектр Фурье составляющей  $M_3$  при динамике на аттракторе для параметров  $I_1=2$ ,  $I_2=6$ ,  $I_3=7$ ,  $g_0=100$ ,  $a_1=9$ ,  $a_2=4$ ,  $h=1$ , и  $E=620$ ,  $\delta=1.178$ .