Предисловие

Изучение сложной динамики и хаоса в нелинейных системах является одним из интенсивно развивающихся направлений научных исследований в течение нескольких последних десятилетий. (См., например, [Рабинович, Трубецков, 1984; Неймарк, Ланда, 1987; Шустер, 1988; Заславский, Сагдеев, 1988; Глас, Мэки, 1991; Argyris et al., 1994; Lorenz, 1995; Robertson and Combs, 1995; Alligood et al., 1996; Nakagawa, 1999; Hilborn, 2001; Strogatz, 2002; Райхл, 2008; Cencini et al., 2009].)

Мы рассматриваем объект как *динамическую систему*, если ее состояние в любой момент времени получается из начального состояния в соответствии с некоторым правилом, заданным для данной системы. Примечательно, что такое определение, хотя и представляет идеал детерминистского описания, не исключает возможность хаотического поведения объекта, когда зависимость состояния от времени выглядит как случайный процесс. Хаос встречается в системах различной природы, например в механике, гидродинамике, электронике, лазерной физике и нелинейной оптике, химической кинетике, в биомедицинских дисциплинах. Основным атрибутом динамического хаоса является чувствительность к малым возмущениям начальных условий, что делает невозможным предсказание будущего состояния на временах больше, чем некоторый характерный масштаб, который обычно зависит логарифмически от неточности начальных условий *("горизонт предсказуемости ")*.

Для диссипативных динамических систем хаос ассоциируется с присутствием в пространстве состояний замечательного объекта, называемого *странным аттрактором.* В настоящее время коллекция модельных систем, обладающих странным аттрактором, достаточно обширна; она включает искусственные математические примеры, а также модели физических, химических, биологических систем (см., например, [Rössler, 1979; Неймарк, Ланда, 1987; Scott, 1993; Sprott, 1994; Анищенко и др., 1999; Haefner, 2005; Fortuna et al., 2009; Спротт, 2012]).

Классическим примером хаотического аттрактора служит *аттрактор Лоренца* [Лоренц, 1981; Sparrow, 1982; Гукенхеймер, Холмс, 2002]. Он имеет место в системе трех дифференциальных уравнений первого порядка, моделирующих конвекцию в жидкости или динамику одномодового лазера. Модель Лоренца много лет оставалась предметом активных и тщательных исследований. Аккуратное математическое обоснование хаотической природы динамики модели Лоренца оказалось непростой и деликатной задачей. Она была анонсирована как 14-я проблема в списке трудных математических проблем, предложенном Стивеном Смейлом в качестве вызова математикам XXI века [Smale, 1998; 2000], подобно проблемам Гильберта, которые адресовались математикам XX века. Решение было дано В. Такером на основе комбинации техники доказательных вычислений (computer assisted proof) и аккуратного аналитического рассмотрения [Tucker, 2002; Stewart, 2000].

Можно посетовать об упущенной возможности для нелинейной науки отыскать иной, менее болезненный путь к открытию физически значимых и математически обоснованных примеров хаотического поведения.

Около 40 лет назад, в математических работах был введен в рассмотрение специальный тип хаотических аттракторов, а именно, *однородно гиперболические (или равномерно гиперболические) аттракторы*. Они относятся к классу так называемых *систем с аксиомой A* и рассматриваются в *гиперболической теории*, связанной с именами Аносова, Алексеева, Смейла, Вильямса, Синая, Плыкина, Рюэля, Песина, Ньюхауса и других. [Аносов, 1967; Аносов и др., 1991; Смейл, 1970; Williams, 1974; Синай, 1972; 1979; Плыкин, 1974; Ruelle, 1976; Песин, 1977; Newhouse et al., 1978]. Хаотическая природа динамики на однородно гиперболических аттракторах строго доказана. Они обладают свойством *структурной устойчивости*, т. е. устройство фазового пространства, характер динамики и ее статистические характеристики не чувствительны к изменению параметров и функций, присутствующих в уравнениях движения.

Первоначально ожидалось, что однородно гиперболические аттракторы будет соответствовать многим физическим ситуациям возникновения динамического хаоса [Рюэль, Такенс, 1981; Синай, 1979]. Однако с течением времени, по мере того как было предложено и изучено много примеров хаотических систем различной природы, стало ясно, что эти примеры не вписываются в узкие рамки ранней гиперболической теории. Поэтому однородно гиперболические аттракторы стали рассматриваться лишь как рафинированный абстрактный образ хаоса, не имеющий прямого отношения к реальным системам. Усилия математиков оказались перенаправлены на развитие обобщений, применимых к более широким классам систем. Например, были введены квазигиперболические (сингулярно гиперболические) аттракторы, неоднородно гиперболические аттракторы, частично гиперболические аттракторы, квазиаттракторы, и в их исследовании был достигнут определенный прогресс [Benedicks and Carleson, 1991; Shilnikov, 1997; Pesin, 2004; Bonatti et al., 2005].

Заброшенным на долгие годы и не проясненным до последнего времени оставался вопрос о возможности возникновения динамического поведения, связанного с однородно гиперболическими аттракторами в реальных системах в природе или, по крайней мере, в специально разработанных системах физики и техники.

В учебниках и обзорах по нелинейной динамике однородно гиперболические аттракторы представлены обычно искусственными моделями с дискретным временем, в основе которых лежат определенные геометрические построения, зачастую объясняемые качественно на словах, или с помощью графических образов. Конечно же, для физика это не более чем исходный пункт работы.

Прежде всего, в дополнение к геометрическим конструкциям желательно иметь примеры явно выписанных уравнений, допускающих применение компьютерных методов для анализа динамики и расчета количественных характеристик, интересных для возможных приложений.

Для некоторых физических систем описание в дискретном времени оказывается весьма естественным, и стоило бы рассмотреть возможность возникновения гиперболических аттракторов для отображений, отвечающих таким системам.

Далее, важно обратиться к системам с непрерывным временем, поскольку именно они имеют первостепенное значение в физике и технике.

Желательно иметь четкое представление, как реализовать динамику на однородно гиперболических аттракторах, используя комбинации структурных элементов, известных в контексте теории колебаний и в приложениях (осцилляторы, связанные системы, цепи обратной связи).

Наконец, предлагаемые модели должны быть построены в виде реально функционирующих устройств, например, в электронике, механике, нелинейной оптике, и должны быть указаны технические приложения таких систем с разъяснением их преимуществ по сравнению с альтернативными возможными решениями.

В теории колебаний, начиная с классических работ Андронова и его школы [Andronov and Pontrjagin, 1937; Андронов и др., 1959], грубые, или структурно устойчивые системы рассматриваются как подлежащие первоочередному теоретическому исследованию и как наиболее важные для практики [Рабинович, Трубецков, 1984; Ланда, 2010; Шильников и др., 2003, 2009]. Казалось бы, то же самое должно относиться естественным образом к системам со структурно устойчивыми однородно гиперболическими аттракторами. Отсутствие физических примеров в этой связи выглядит непонятным и неприемлемым. С методологической точки зрения, ситуация подобна той, какая имела место в начале XX века в отношении предельных циклов, которые уже были известны, как математические объекты, но до того, как была установлена их роль, как образа автоколебаний. По аналогии, можно думать, что однородно гиперболические аттракторы должны найти свое место, как математические образы определенных феноменов в реальных системах. Это содействовало бы соединению абстрактной гиперболической теории, развитой математиками, с описанием реального мира и наполнению этой теории физическим содержанием.

Настоящая книга посвящена обзору современного состояния проблемы и состоит из пяти частей.

Часть I служит вводной и содержит четыре главы. В **главе 1** излагаются необходимые основные концепции, включая понятие динамической системы, аттрактора, отображения Пуанкаре, показателей Ляпунова. В **главе 2** вводятся в рассмотрение и обсуждаются классические примеры однородно гиперболических аттракторов: соленоид Смейла – Вильямса, DA-аттрактор Смейла, аттракторы типа Плыкина. В **главе 3** представлен обзор содержательной части гиперболической теории (критерий конусов, структурная устойчивость, марковские разбиения и символическая динамика, меры Синая – Рюэля – Боуэна и т.д.). **Глава 4** имеет содержанием обзор работ, касающихся различных возможных ситуаций появления однородно гиперболических аттракторов в динамических системах.

Часть II является основной. Здесь вводится ряд примеров систем, которые допускают физическую реализацию и обладают однородно гиперболическими аттракторами с одномерным неустойчивым многообразием (одним положительным показателем Ляпунова). В **главе 5** обсуждаются системы, функционирующие под действием периодических импульсных толчков. В **главе 6** рассматриваются системы, динамика которых составлена из периодически чередующихся стадий, отвечающих той или иной форме правых частей дифференциальных уравнений. В **главе 7** конструируются и исследуются модели на базе двух автоколебательных элементов, которые возбуждаются по очереди благодаря обусловленной внешним воздействием модуляции параметров и передают колебательное возбуждение друг другу так, что фаза преобразуется в соответствии с растягивающим отображением окружности. **Глава 8** посвящена автономным системам, функционирующим по тому же принципу. В **главе 9** рассмотрены схемы параметрических генераторов хаоса с гиперболическими аттракторами. В **главе 10** рассматриваются системы, в которых растягивающему отображению окружности подчиняется не фаза, а специальная угловая переменная, характеризующая распределение амплитуд между двумя автоколебательными элементами.

Часть III посвящена обсуждению методов компьютерной проверки гиперболической природы аттракторов и иллюстрациям применения этих методов с использованием примеров из части II. В **главе 11** рассматривается техника визуализации взаимного расположения устойчивых и неустойчивых многообразий принадлежащих аттрактору траекторий, а также метод, основанный на статистическом анализе распределения углов их пересечения. В **главе 12** обсуждается визуализация распределений естественной инвариантной меры на аттракторах. В **главе 13** излагается в деталях содержание процедуры компьютерной проверки критерий конусов, и приводятся примеры его использования.

Часть IV содержит материал, относящийся к модельным системам, для которых математическое обоснование гиперболической природы аттракторов является более проблематичным из-за высокой размерности. С физической точки зрения, эти модели представляются аналогичными рассмотренным в части II, для которых гиперболичность проверена на уровне компьютерных расчетов. В **главе 14** рассматриваются неавтономные системы на основе четырех попеременно возбуждающихся осцилляторов. Среди них присутствует модель, в которой преобразование фаз за период модуляции параметров подчиняется отображению Аносова на торе, и модель, описываемая отображением на торе с динамикой типа гиперхаоса (имеется два положительных показателя Ляпунова). В **главе 15** рассмотрена система, составленная из двух связанных элементов, каждый из которых характеризуется присутствием гиперболического аттрактора. Применительно к этому случаю исследованы некоторые детали перехода к полной хаотической синхронизации. В **главе 16** рассмотрено несколько вариантов автономных систем, функционирующих благодаря динамике вблизи гетероклинического цикла амплитудных уравнений. На этой основе обеспечивается присутствие аттрактора типа Смейла – Вильямса в отображении Пуанкаре, а также аттрактора с циклическими (фазовыми) переменными, подчиняющимися отображению Аносова, и аттрактора, реализующего гиперхаос. **Глава 17** посвящена системам с запаздывающей обратной связью, в которых хаотическое отображение для фаз последовательно генерируемых цугов колебаний обеспечивается благодаря передаче возбуждения от предыдущих стадий активности одиночного автоколебательного или параметрически возбуждаемого элемента к последующим стадиям активности. В **главе 18** рассмотрена распределенная система с периодической модуляцией параметра, в которой пространственная фаза чередующихся длинноволновых и коротковолновых структур типа Тьюринга описывается хаотическим отображением.

Последняя **часть V** посвящена рассмотрению примеров гиперболических (или гипотетически гиперболических) аттракторов в электронных схемах. В **главе 19** обсуждается конструирование схем и представлены результат моделирования нескольких вариантов генераторов хаоса с аттракторами типа Смейла – Вильямса и Плыкина в программной среде Multisim. В **главе 20** обсуждаются результаты имеющихся к настоящему времени экспериментальных исследований неавтономной системы на основе двух попеременно возбуждающихся автоколебательных элементов с аттрактором типа Смейла – Вильямса и двух вариантов систем с запаздывающей обратной связью.

Приложения включают ряд вопросов, которые существенны для проводимого рассмотрения и иллюстраций, но выпадают из основной структуры изложения данной книги. Рассмотрен вывод отображений Эно и Икеды в для модельных физических систем с импульсными толчками. Обсуждается механическая система со сложной динамикой – «кельтский камень». Излагается математическая конструкция подковы Смейла, доставляющая нетривиальный пример сложного не притягивающего инвариантного множества. Дается введение в теорию размерностей в контексте ее применения для характеристики фрактальных свойств хаотических аттракторов, выводится и поясняется формула Каплана – Йорке, связывающая показатели Ляпунова и оценку фрактальной размерности. Воспроизводится формальное построение модели, предложенной Хантом, которая доставляет пример аттрактора типа Плыкина.

Автор старался представить материал в стиле доступном для студентов и аспирантов нематематических специальностей и, насколько возможно, сделать изложение самосогласованным, чтобы книга допускала изучение без обращения к другим источникам. Изложение по возможности обходит определения и формулировки, использующие специальную математическую символику, предпочтение отдается интуитивной аргументации на качественном уровне. Возможно, часть математически ориентированных читателей сочтет это недостаточным; им можно рекомендовать обратиться к существующей обширной литературе по математической теории динамических систем. Автор должен предупредить, что изложение общего содержания нелинейной динамики ограничено здесь минимумом, требуемым для понимания содержания книги. Поэтому ее материал не следует рассматривать как замену систематического изложения в рамках общих курсов теории динамических систем, к которым читателю имеет смысл обратиться для этой цели.

Книга может представлять интерес для физиков и инженеров, заинтересованных в практических приложениях динамического хаоса, в особенности в плане получения грубого хаоса, нечувствительного к флуктуациям, помехам, вариациям параметров и характеристик элементов, из которых собирается устройство. Такого рода приложения могут относиться к разным дисциплинам – механике, гидродинамике, электронике, лазерной физике и нелинейной оптике, нейродинамике.

Можно надеяться, что книга будет полезна математикам, заинтересованным в приложениях гиперболической теории. Для них может оказаться полезным посмотреть, как математические концепции преломляются с позиций прикладных дисциплин.

Автор благодарен за полезные дискуссии, помощь и конструктивную критику многим коллегам, в том числе В.С. Анищенко, В.С. Афраймовичу, Б.П. Безручко, В.Н. Белых, И.В. Белых, А.В. Борисову, Е.И. Волкову, А.С. Дмитриеву, А.Ю. Жалнину, А.Ю. Жирову, О.Б. Исаевой, А.П. Кузнецову, П.В. Купцову, Ю. Курцу (J. Kurths), А.Ю. Лоскутову, Р. МакКэю (R. MacKay), Л.А. Мельникову, Э. Мозекилде (E. Mosekilde), В.И. Некоркину, А.С. Пиковскому, В.И. Пономаренко, А.Г. Рожнёву, М.Г. Розенблюму, Н.М. Рыскину, И.Р. Сатаеву, Е.П. Селезнёву, В. Такеру (W. Tucker), Д.В. Трещёву, Д.И. Трубецкову, Л.В. Тюрюкиной, А.Л. Шильникову.

Выражаю признательность коллегам по работе и администрации Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН за многолетнее дружеское сотрудничество, поддержку и творческую атмосферу, способствующую научной деятельности.

Исследования, положенные в основу этой книги, поддержаны грантами РФФИ 06-02-16619, 09-02-00426, 09-02-00707, 12-02-00342 и РФФИ-ННИО 04-02-04011, 08-02-91963, 11-02-91334. Дополнительно автор отмечает помощь со стороны гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих учёных в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039.