А.П.Кузнецов

ФИЗИКИ ТОЖЕ ЛЮБЯТ МАТЕМАТИКУ

Саратов
Издательство «Научная книга»
2010

УДК 530.77

К89

Кузнецов А.П.

ФИЗИКИ ТОЖЕ ЛЮБЯТ МАТЕМАТИКУ – Саратов: изд-во «Научная книга», 2010, 36 с.
ISBN 978-5-9758-1230-8

В сборнике представлено около 200 задач по темам, составляющим основу рабочего математического инструментария физика. Задачи апробированы в Лицее прикладных наук и на Факультете нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. Будет полезна студентам младших курсов, учащимся старших классов и учителям, для более глубокого понимания приемов использования математических методов в решении физических задач.

Поддержана программой «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Мельников Л.А.

Оригинал-макет подготовлен автором

ISBN 978-5-9758-1230-8

…Любит ли он поросят или нет?
И КАК он их любит?…
А. Милн, «Винни Пух и все, все, все»

Вот так я завоевал репутацию человека, умеющего брать сложные
интегралы, только потому,
что мой набор инструментов отличался от всех других.
Р. Фейнман, «Вы конечно шутите, мистер Фейнман»

По-видимому, физики принадлежат к наиболее активным «потребителям» математики. Даже сложился определенный тип «математического» физика – физик-теоретик. Физики используют различный математический аппарат, который иногда становится составной частью физической теории. Бывает, что физики переоткрывают для себя тот или иной математический аппарат, когда в нем возникает потребность. Так, например, было с матричным формализмом в квантовой механике. С другой стороны, очень важно представлять математические идеи, пусть на популярном уровне. Замечательно, что иногда математика оказывается для физиков не просто инструментом, а открывает совершенно новые подходы, когда возникает новый способ построения теории, иной, чем в традиционной физике. Действительно, в физике изучают определенные типы явлений: механику, электричество, теплоту и т.д. Но вполне может случиться, что совершенно разные физические процессы приводятся к одинаковым уравнениям. Тогда возникает ситуация, когда, используя уже готовые наработки, готовые знания и готовую интуицию, можно решать совсем другие задачи из другой области физики. Соответствующий принцип очень лаконично и ясно сформулировал Р. Фейнман: «Одинаковые уравнения – одинаковые решения». Л. И. Мандельштам говорил об «интернациональном» языке теории колебаний, основанном на определенном виде дифференциальных уравнений. Сейчас таких «интернациональных» теорий стало много, к ним относятся, в частности, теория бифуркаций, теория динамических систем, теория динамического хаоса и т.д.

Большое количество из предложенных задач будет касаться использования математического анализа. Для всякого начинающего исследователя еще в школе встает вопрос, **КАК** этим инструментом овладеть. К сожалению, преобладает очевидная на первый взгляд точка зрения, состоящая в том, что пусть, прежде всего, математики на своих уроках изложат *строгим образом* математическую теорию. А тогда, на уроках физики, ученики без проблем смогут ее *применять*. К сожалению, такая методика хотя и «правильная», но на практике часто терпит фиаско. Применение математического анализа есть отдельная проблема, этому надо учить (или учиться самому). При этом иногда сам «строгий путь» становится не важным, на первый план выходят другие моменты и особенности. Поэтому полезными могут быть специальные уроки, или даже специальный курс, нацеленный именно на использование математического анализа в физике. Во многом он должен состоять из решения задач, так как, решая задачи, учишься применять математические понятия и приемы. Такой курс был реализован, в свое время, в лицее прикладных наук Саратова и его опыт использован в настоящей книжке.

Еще один очень характерный пример. Очень многие тригонометрические формулы легко выводятся с помощью комплексных чисел и формулы Эйлера. Однако, это математика «более высокого уровня», поскольку, с методической точки зрения формулу Эйлера надо сначала доказать, и только потом применять. Для физика же часто применение стоит на первом месте. При этом очень важно, что не нужно запоминать большое число тригонометрических формул, их легко «с ходу» вывести. Точно так же легко получить правило пересчета координат при повороте системы координат с помощью комплексных чисел и т.д. В этом плане часто обедненной оказывается теория цепей переменного тока, которая существенно проще в формализме комплексных чисел.

Наконец, в физике сформировался свой стиль и подход к решению задач, не всегда сразу «максимально строгий». Сначала используются оценки, приближенные или качественные методы. Этот подход часто распространяется и на математический аппарат, когда полезно оценить математическое выражение, построить график из качественных соображений и т.д.

В книжку вошли так же задачи, посвященные преобразованию Фурье и дельта-функции – очень популярных у физиков. Отметим, что даже современная, развивающаяся физика часто обращается к хорошо известной математике. Например, не так давно выяснена важная роль иррациональных чисел в картине явления синхронизации.

Отметим, наконец, что первые главы книжки доступны не только студентам младших курсов, но и школьникам, а заключительные – более ориентированы на студентов.

Автор

Числовые последовательности

1. Предложите “экспериментальный” способ построения числовой последовательности, составленной только из цифр 0, 1, 2, 3.

2. Средняя температура воздуха в течение недели сначала повысилась, а потом вернулась к начальному значению. Температуру измеряли каждый день рано утром в одно и то же время. Нарисуйте качественно зависимость температуры от времени и график полученной последовательности. Какие особенности реального процесса описывает график последовательности, а какие - нет?

3. На рис. 1 показан стробоскопический снимок тела, скользящего по наклонной плоскости. Каковы свойства последовательностей x_n и v_n? Вспышки стробоскопа происходят через равные интервалы времени.

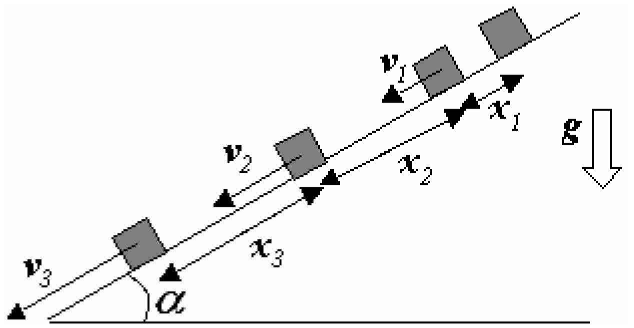


Рис.1

4. Тело бросили под углом 45 градусов к горизонту с некоторой начальной скоростью, и освещают его с помощью периодических вспышек стробоскопа. Изобразите возможные фотоснимки системы. Как они меняются при изменении времени следования вспышек T? Особое внимание обратите на возможные качественные изменения фотографий.

5. Корабль приближается к маяку со скоростью v, причем минимальное расстояние до маяка за время движения составляет h. Луч радара, следящего за кораблем, равномерно вращается с частотой ω. Радар измеряет расстояние до корабля через промежутки времени, равные периоду его развертки $T=2\pi/\omega$. Каковы свойства последовательности значений расстояний, зафиксированной радаром?

6. Интенсивность света, проходящего через некоторое вещество, изменяется по закону Бугера: $I=I_0e^{-\alpha x}$, где x – координата, отсчитываемая от границы воздуха и вещества. Имеется цепочка из пластин толщины d, изготовленных из такого вещества, пронизываемых световым лучом (рис. 2). Установите свойства последовательности I_0, I_1, I_2, I_3, ….Пройдет ли свет через такую бесконечную цепочку?

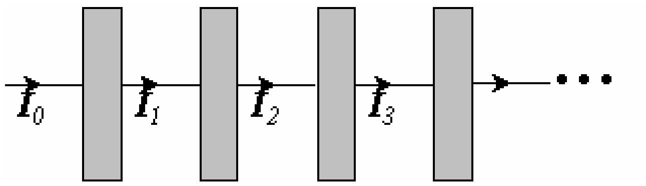


Рис.2

7. Имеется цепочка из пластин, толщина которых изменяется по закону геометрической прогрессии с показателем β. Установите свойства последовательности I_0, I_1, I_2, I_3,…. Пройдет ли свет через бесконечную цепочку таких пластин? Если да, то чему будет равна его интенсивность? Толщина первой пластины d.

8. Шарик движется между двух пластин, угол между которыми составляет β, рис.3. Укажите рекуррентную формулу для последовательности углов падения шарика на нижнюю поверхность. Оцените число возможных соударений, если угол β мал. Удары упругие, сила тяжести отсутствует.

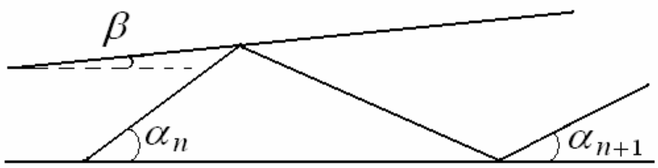


Рис.3

9. Шарик, брошенный без начальной скорости с высоты h на горизонтальную поверхность, подпрыгивает на высоту $h/2$. На каком расстоянии от точки броска шарик перестанет прыгать и начнет двигаться по поверхности, если его бросить с поверхности со скоростью 1 м/с под углом 45 градусов к горизонту (рис. 4)?

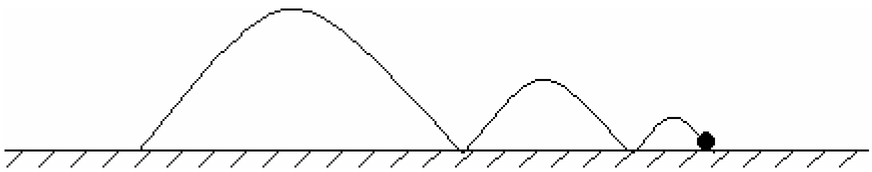


Рис.4

10. Шарик движется между двух пластин, из которых одна неподвижна, а вторая сама движется с постоянной скоростью V, рис.5.Найдите рекуррентное соотношение, определяющее скорость шарика после ($n+1$)-го удара через ее значения после n-го удара. Удар о движущуюся стенку упругий, при ударе о неподвижную стенку шарик теряет скорость в соответствии со множителем $\gamma < 1$. Найдите установившуюся скорость шарика, решение проиллюстрируйте итерационной диаграммой.

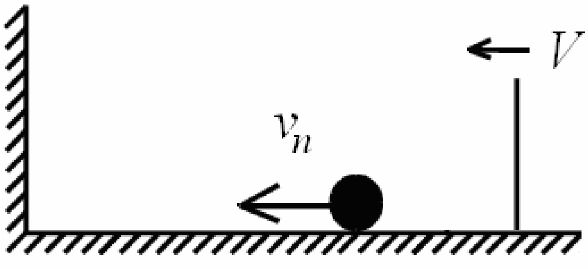


Рис.5

11. Шарик, привязанный к нитке, наматывается на цилиндрический карандаш, как показано на рисунке. Укажите свойства последовательности α_m, в случае, когда длина нити много больше радиуса карандаша. Дайте самую грубую оценку, а затем уточните ее.

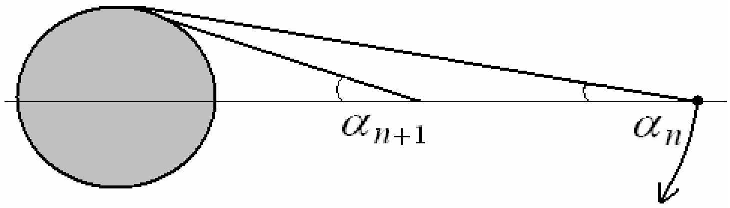


Рис.6

12. Бактерии имеют такой закон развития: каждая живет 1 час и каждые полчаса порождает одну новую (всего две за свою жизнь). Каково будет потомство одной бактерии через n часов после ее рождения?

13. Маленький шарик шарнирно укреплен на легком стержне длины l (рис 7.). Шарику сообщают некоторую скорость v_0 так, что он начинает вращаться вокруг точки О. В процессе его движения фиксируется последовательность значений скорости шарика в нижней точке его траектории. Постройте график этой последовательности (с учетом знака скорости) и опишите ее свойства. Имеет ли она предел? Учесть небольшое сопротивление воздуха.

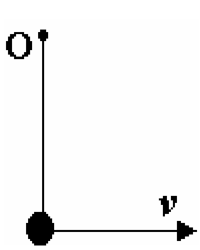


Рис.7.

14. Представьте себе клубок шерстяных ниток. Мысленно рассеките его плоскостью. Стартовав со свободного конца нити, пройдите мысленно вдоль нее, обозначая через x_n, y_n координаты каждого очередного пересечения нити с плоскостью. Имеют ли последовательности x_n и y_n пределы в “физическом” смысле? Оцените число членов такой последовательности для клубка радиуса R и толщины нити r.

15. Если положить на один кирпич сверху второй, то его можно сдвинуть на расстояние $x_1=l/2$ (рис. 8). На какое расстояние x_2 можно сдвинуть третий кирпич? Получите соответствующую последовательность x_n. Чему равна длина такой бесконечной стенки? Попробуйте экспериментально реализовать соответствующую ситуацию. Обсудите результаты эксперимента.

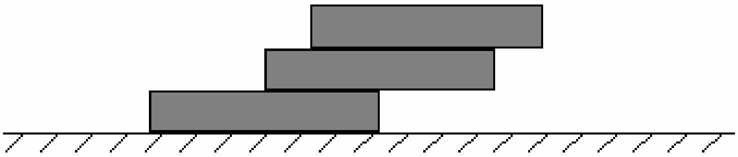


Рис.8

16. За три часа концентрация некоторого лекарства в крови пациента падает в два раза. Инъекции лекарства производят один раз в шесть часов. Получите разностное уравнение, описывающее динамику концентрации лекарства в крови непосредственно перед каждой очередной инъекцией. Составьте таблицу, иллюстрирующую динамику концентрации лекарства. Постройте итерационную диаграмму. Нарисуйте примерный график изменения концентрации лекарства в крови от времени. Во сколько раз отличаются концентрации перед инъекцией и сразу после нее через достаточно большой интервал времени?

17. Как установил Ньютон, температура остывающего тела изменяется по закону $T=T_c+(T_0-T_c)e^{-\alpha t}$, где T_0 - начальная температура тела, T_c – температура окружающей среды, α – некоторый коэффициент. Через равные интервалы времени телу сообщают количество тепла Q. Теплоемкость тела C. Получите разностное уравнение, описывающее изменение от раза к разу температуры тела сразу после получения очередной “порции” тепловой энергии. Каков характер соответствующей последовательности значений температуры: убывающий или нарастающий? От чего это зависит? Найдите предельное значение этой последовательности. Как будет изменяться температура тела в “реальном” времени? Нарисуйте примерный график. В каком интервале будет колебаться температура тела через достаточно большое время? Зависит ли асимптотический закон изменения температуры от ее начального значения?

18. Покажите, что разностное уравнение $x_{n+1} = x_n/2 + a/2x_n$ можно использовать для вычисления квадратного корня из числа а. (Такой способ применяли еще в древнем Вавилоне). Найдите первые десять членов последовательности x_n, порождаемой этим уравнением, в случае a=2. Величину x_0 положите равной единице. Сколько итераций надо сделать, чтобы получить значение $\sqrt{2}$ с точностью 1%? От чего зависит число итераций, которые необходимо совершить, чтобы получить заранее заданную точность? Проиллюстрируйте решение задачи с помощью итерационной диаграммы.

19. Студент вышел из дома в университет, но на полдороге он передумал и решил пойти в кино. Пройдя полдороги в кино, он передумал и снова пошел в университет т.д. Каким будет асимптотический характер движения студента? Все объекты расположены на открытой местности. Выполните сначала простое геометрическое построение и найдите точки поворота, а затем дайте строгое решение задачи. Зависит ли закон асимптотического движения ученика от начальной точки?

20. Решите предыдущую задачу в случае, когда студент циркулирует между университетом, кино и катком. Определите период установившегося движения студента, если эти три объекта находятся в вершинах прямоугольного треугольника с катетами 500м и 1000м. Скорость движения 5 км/ч.

21. Для моделирования численности динамики популяции иногда используют разностное уравнение $x_{n+1}=1-\lambda x_n^2$, где x_n – нормированная численность особей, λ – безразмерный параметр, определяемый условиями их жизни (наличие пищи и т.д.). Выполните несколько численных экспериментов на микрокалькуляторе или компьютере с разностным уравнением $x_{n+1}=1-\lambda x_n^2$. Постройте числовые последовательности, соответствующие значениям λ = 0,5; 1; 1,3, 1,5. Дайте описание полученных результатов компьютерного моделирования.

Производная

22. Тело движется по закону $x=t^3-12t$. (Все величины заданы в системе СИ). Определите начальные скорость и ускорение тела. Постройте графики зависимости координаты, скорости и ускорения тела от времени. В какой момент времени тело остановится? Чему равна его координата в этот момент времени?

23. Тело движется так, что его координата изменяется по закону $x=ct^4–bt^2$. В какой точке действие внешних сил на тело скомпенсировано?

24. Некоторая пружина характеризуется зависимостью потенциальной энергии от удлинения $U(x)=kx^2/2+ax^4$ ($k>0$, $a>0$). Определите зависимость силы упругости пружины от ее удлинения. При каком условии выполняется закон Гука?

25. Покажите, что формула для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух масс $U(R)=–GMm/R$ соответствует закону всемирного тяготения Ньютона.

26. По тонкому кольцу радиуса R равномерно распределен электрический заряд Q (рис. 9). Найдите зависимость электрического поля от координаты x, отсчитываемой вдоль оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости. Сделайте это двумя способами: с помощью закона Кулона и вычислив производную от зависимости потенциала от координаты x.

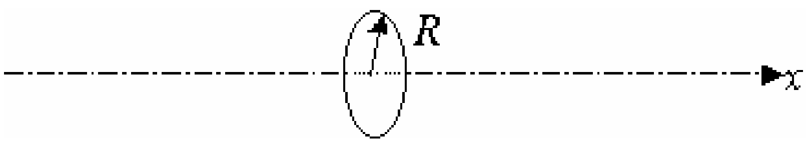


Рис.9

27. Найдите закон изменения электрического поля вдоль оси диполя с дипольным моментом p, вычислив производную от зависимости потенциала от координаты. Диполем называются два заряда противоположных знаков q и –q, расположенные на малом расстоянии l, дипольный момент $p=ql$.

28. Оцените максимальную скорость автомобиля, график движения которого показан на рис. 10.

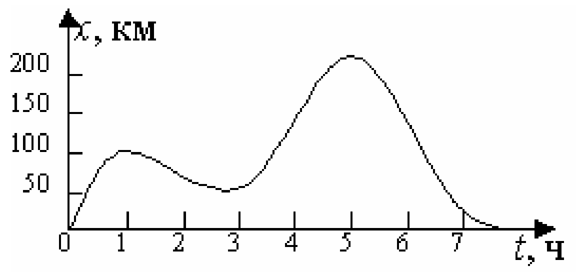


Рис. 10

29. Торпедный катер выходит на цель, двигаясь по параболе $y=–Cx^2$, где $C = 0{,}01$ м$^{–1}$. В какой точке следует выпустить торпеду, чтобы поразить неподвижную цель, имеющую координаты $x = 100$ м, $y = 300$ м. Сколько решений имеет задача? Дайте физическую интерпретацию каждому из них.

30. Расположенное над горизонтом под углом α солнце освещает холм. Определите координаты точки, в которой наступает тень. Рельеф местности хорошо описывается функцией $y = \frac{hl}{\sqrt{x^2 + l^2}}$, где h=200 м, l=100м. Рассмотрите случаи α = 45˚ и α = 30˚.

31. Материальная точка массой m движется под действием силы $f(x)$, зависящей от координаты x вблизи минимума потенциальной энергии x_0. Покажите, что период малых колебаний точки дается выражением $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{f'(x_0)}}$.

32. Найдите период возможных малых колебаний материальной точки массой m, движущейся вдоль оси x, если зависимость потенциальной энергии от координаты x дается следующими формулами:

а) $U(x) = U_0 \sin(2\pi x/l)$;

б) $U(x) = U_0 \operatorname{ch}(x/l)$;

в) $U(x) = U_0 [(x/l)^3 - 3x/l)]$.

33. Используя свойства дифференциала, найдите приближенно относительное изменение периода колебаний математического маятника при увеличении длины нити со 100 см до 101 см. С каким ускорением надо двигать в вертикальном направлении точку прикрепления маятника, чтобы скомпенсировать найденное изменение периода колебаний?

34. На рис. 11 показана зависимость силы упругости пружины от удлинения пружины. К пружине подвешен груз массой m=100 г. Определите период малых колебаний груза около положения равновесия.

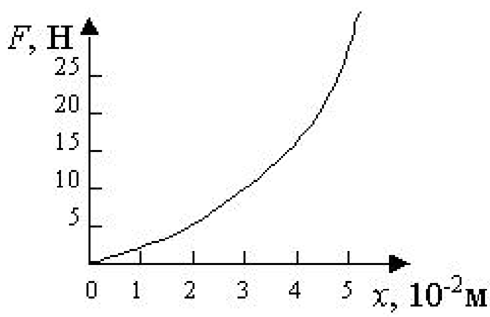


Рис.11

Задачи на максимум и минимум

35. Маленький кубик без трения скользит по поверхности со скоростью v_0, приближаясь к изгибу, профиль которого дается функцией $y=x/[(x/a)^2+1]$. Определите максимальную и минимальную скорости, которые кубик будет иметь в процессе движения. Ось x горизонтальна, ускорение свободного падения g.

36. На горизонтальной поверхности с коэффициентом трения μ лежит брусок массы m. К бруску приложена сила F, направленная под углом α к горизонту. При каком минимальном значении величины силы можно сдвинуть брусок с места? Под каким углом к горизонту для этого следует приложить усилие?

37. Один моль идеального газа расширяется так, что его давление зависит от объема газа по закону $P=a-bV^2$ ($a>0$, $b>0$). Определите максимальную температуру газа.

38.Сила взаимодействия двух молекул в некоторых случаях может быть описана потенциалом Ленарда-Джонса $U(r)=4a[-(b/r)^6+(b/r)^{12}]$. Обсудите вид зависимости потенциала от расстояния между молекулами. Покажите, что потенциал имеет минимум. Используя этот результат, оцените расстояние между молекулами вещества и величину энергии, необходимой, чтобы оторвать молекулы друг от друга. (Параметры a и b считайте известными.)

39. По кольцу радиуса R равномерно распределен электрический заряд Q (рис. 12). Вдоль оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости, может двигаться точечный заряд $-q$. При каком положении заряда на него действует максимальная сила?

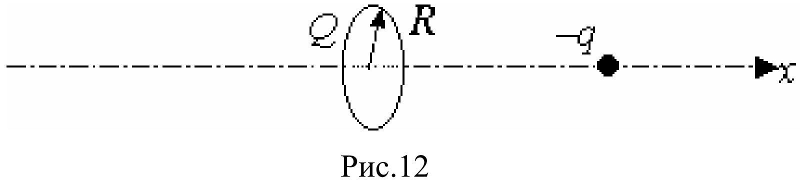


Рис.12

40. Частица с массой m налетает на первоначально покоящееся атомное ядро с массой M. После упругого удара ядро приобрело кинетическую энергию, составляющую n-ую часть кинетической энергии налетавшей частицы. Постройте график зависимости величины n от отношения масс частиц $k=m/M$. При каком отношении масс доля переданной энергии максимальна?

41. В толстостенный цилиндрический сосуд массы M наливают воду, плотность воды – ρ (рис.13). Обсудите свойства зависимости высоты центра масс системы от высоты h налитой в стакан воды. Уровень воды отсчитывается от дна сосуда. Высота внутренней части цилиндра равна H, толщина стенок d, внутренний радиус R.

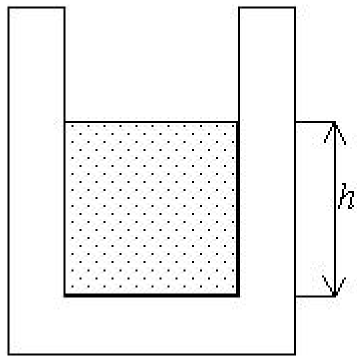


Рис. 13

42. Известно, что для некоторых модификаций и соединений углерода валентные связи атомов углерода направлены к вершинам тетраэдра, причем угол между ними составляет 109°28'. Покажите, что если в круге радиуса R вырезать сектор так, чтобы получить развертку конуса, объем которого максимален, то угол при вершине такого конуса равен 109°28'.

43. Известно, что прочность балки прямоугольного сечения определяется выражением bh^2 , где b – ширина балки, h – ее высота. Как из цилиндрического бревна радиуса R сделать балку наибольшей прочности?

44. На какой высоте следует поместить лампу над центром круглого стола, чтобы на его краях получить максимальную освещенность?

Экспонента

45. Радиоактивный элемент распадается по закону $N(t)=N_0e^{-t/T}$, где T – среднее время жизни. Определите период полураспада элемента. Для радия среднее время жизни T = 2400 лет. Определите период полураспада радия.

46. За время t=800 лет распалось Δm =10 г радия. Сколько его было в начальный момент времени?

47. Содержания радия на Земле в среднем составляет 10^{-12} (по атомам). Каково было содержания радия десять тысяч лет назад? Пять миллиардов лет назад?

48. Покажите, что производная от давления по вертикальной координате в изотермической атмосфере пропорциональна давлению. Получите закон изменения давления с высотой. Оцените, во сколько раз ниже атмосферного давление на вершине самой высокой горы?

49. Канат намотан на цилиндрическую тумбу так, что он делает N полных оборотов. Корабль натягивает трос с силой F. Какую силу должен приложить матрос, чтобы удержать корабль? Коэффициент трения троса о тумбу равен k.

50. Груз массы M подвешен на тросе. Как должна меняться толщина троса, чтобы в любом его сечении нагрузка на единицу площади сечения была одинаковой? Плотность материала троса ρ, площадь сечения в точке прикрепления груза S.

Интеграл

51. Материальная точка движется так, что ее ускорение меняется по линейному закону $a=ct$. Получите закон зависимости координаты тела от времени в следующих случаях:

а) в момент времени t=0 скорость и координата равны нулю;

б) в момент времени t=0 скорость равна v_0 , а координата x_0;

в) в момент времени $t=t_0$ скорость равна v_0, а в момент времени t=0 координата равна x_0.

52. Докажите, что объем шара равен $4\pi R^3/3$.

53. Имеется тонкий диск радиуса R, по которому равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ (рис. 14). Определите зависимость потенциала и напряженности электрического поля от расстояния до диска вдоль оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости. Исследуйте случаи, когда это расстояние мало и велико по сравнению с радиусом диска.

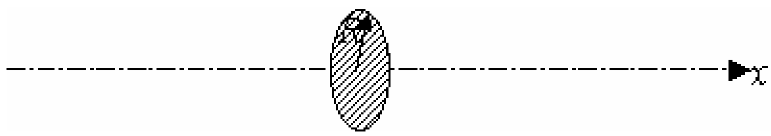


Рис.14

54. Определите положение центра масс тонкой пластинки, имеющей форму половины круга радиуса R.

55. Определите центр масс однородной полусферы радиуса R.

56. Найдите закон изменения потенциала внутри равномерно заряженного шара радиуса R. Потенциал на бесконечности примите равным нулю. Чему равен потенциал в центре шара?

57. Имеется два плоскопараллельных заряженных слоя толщины h, имеющих одну общую грань. Объемные плотности заряды равны соответственно

ρ_1 и ρ_2. Найдите закон распределения потенциала внутри слоев и постройте соответствующие графики.

58. Найдите энергию электрического поля, заключенного между двумя концентрическими сферами с радиусами R и r, несущими заряды Q и $-Q$ соответственно. Плотность энергии электромагнитного поля $W=\varepsilon_0 E^2/2$.

59. Идеальный газ массы m изотермически расширился от объема V_1 до объема V_2. Вычислите работу газа. Температура газа T, молярная масса μ.

60. Воду массой M=100 г нагрели от температуры t_1 =10°С до t_2=90°С. Определите изменение энтропии воды.

61. Получите выражение для энтропии идеального одноатомного газа.

62. Вычислите силу гравитационного взаимодействия материальной точки массы m и однородного тонкого цилиндра длины L и массы M. Цилиндр и точка лежат на одной линии так, что кратчайшее расстояние между ними равно R (рис. 15).

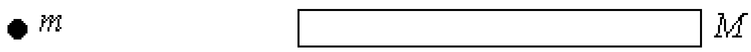


Рис.15

63. Решите аналогичную задачу для двух цилиндров.

64. Однородный диск радиуса R и массы M вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Определите кинетическую энергию диска.

65. Для атмосферы, удовлетворяющей закону распределения Больцмана, определите высоту центра масс некоторого выделенного столба воздуха. Чему равна эта высота для Земли, если считать среднюю температуру равной 10°С?

66. При вращении цилиндрического стакана с водой вокруг оси с угловой скоростью ω поверхность воды принимает форму параболоида вращения $y=\omega^2 r^2/2g$, где y – абсцисса точки поверхности, r – ее расстояние от оси. В стакан радиуса R налили объем воды V. При какой угловой скорости вращения стакана обнажится дно? Стенки стакана достаточно высоки.

Дифференциальные уравнения

67. Модели корабля сообщили начальную скорость v_0. Считая, что сила сопротивления пропорциональна скорости с известным коэффициентом k, определите зависимости скорости и координаты модели от времени. Постройте соответствующие графики. Какое расстояние пройдет модель до полной остановки? Оцените время движения модели. Предложите и реализуйте экспериментальный способ определения коэффициента k.

68. Лодка тормозится под действием силы, пропорциональной ее скорости. За 4 секунды скорость упала с 2 м/с до 1 м/с. Какое расстояние прошла при этом лодка?

69. Решите задачу 67 в предположении, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости модели.

70. В дне цилиндрического сосуда радиуса R имеется небольшое отверстие радиуса r. Начальный уровень воды в сосуде H. Установите закон, по которому изменяется во времени высота воды в сосуде. Через какое время вытечет вся вода? Сделайте численную оценку для случая R=5см, r=2мм, H=20см. По какому закону изменяется скорость вытекающей струи? Считайте, что скорость вытекания определяется формулой Торричелли $v=\sqrt{2gh}$, где h – уровень воды в сосуде.

71. Маленький шарик массы m и радиуса r отпущен без начальной скорости в среде с коэффициентом вязкости η и плотностью ρ. Ускорение силы тяжести g. Определите закон движения шарика, считая, что сопротивление среды описывается формулой Стокса. Силой Архимеда пренебречь. Определите предельную скорость падения шарика. Оцените время, за которое шарик достигнет этой скорости и расстояние, которое он при этом пройдет. Выполните численные оценки для глицерина и стального шарика радиуса r=1мм. Какой высоты надо взять сосуд, чтобы можно было наблюдать падение шарика с постоянной скоростью?

72. С поверхности планеты массы M и радиуса R вертикально вверх брошено тело с начальной скоростью v_0. Определите зависимость высоты подъема от времени. Покажите, что при небольшом значении начальной скорости получается обычная формула для движения в поле силы тяжести. Уточните понятие “небольшое значение скорости”. Атмосфера отсутствует.

73. Резиновый шнур имеет длину в недеформированном состоянии l и характеризуется коэффициентом жесткости k. На какую длину растянется шнур под действием собственного веса, если его подвесить за один из концов? Масса шнура M.

74. Используя первое начало термодинамики, получите дифференциальное уравнение для давления идеального газа в адиабатическом процессе. Теплоемкость газа при постоянном объеме равна C_V . Решив это уравнение, получите зависимость давления от объема, характерную для адиабатического процесса.

75. Давление P в изотермической атмосфере как функция высоты описывается дифференциальным уравнением $dP/dx=-(\mu g/RT)P$. Известно, что давление на высоте H равно P_H . Чему равно давление на поверхности планеты?

76. Температура воздуха T изменяется с высотой h по линейному закону $T=T_0+ah$. По какому закону изменяется давление воздуха? Воздух считайте идеальным газом с молярной массой μ.

77. В межзвездном пространстве летит тело. Определите закон изменения температуры тела во времени. Начальная температура тела T_0 К, теплоемкость тела C, площадь поверхности S. Считайте, что остывание тела происходит за счет теплового излучения.

78. Остывание тела за счет теплопроводности описывается дифференциальным уравнением $\dfrac{dT}{dt}=-\alpha(T-T_c)$. Здесь T – температура тела, T_c – температура окружающей среды. Получите закон изменения температуры со временем и постройте соответствующие графики. Какие две различные физические ситуации описывает полученное соотношение?

79. Конденсатор емкости C замкнут на резистор с сопротивлением R. В начальный момент времени ток в цепи равен I_0 . Определите закон изменения заряда на обкладках конденсатора. За какое время величина тока упадет в 2 раза?

80. Конденсатор емкости C замкнут на элемент, вольтамперная характеристика которого дается следующим соотношением: $I=a(e^{bU}-1)$, где a и b - положительные коэффициенты. Начальное напряжение на конденсаторе равно U_0. Определите закон изменения напряжения на конденсаторе от времени.

81. Маятник в виде массивного шарика на невесомом стержне отклонили на малый угол α_0 от неустойчивого положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Определите закон изменения угла α в случае, когда он остается малым. Сформулируйте ограничение на время движения, при выполнении которого угол остается малым. Оцените это время для $\alpha_0=1^0$ и l=1м.

82. Проволочка изогнута так, что ее профиль задан функцией $y(x)$. По проволочке без трения скользит маленькая бусинка. Получите дифференциальные уравнения, описывающее изменение координат бусинки.

83. Монете, лежащей на наклонной плоскости, сообщили скорость v_0 параллельно ребру плоскости. Найдите траекторию движения монеты.

Функции двух переменных и линии уровня

84. Две материальные точки массы m располагаются на расстоянии a друг от друга. Найдите приближенно потенциал, как функцию двух переменных, в окрестности точки равновесия. Изобразите качественно соответствующий потенциальный рельеф $U(x, y)$. Покажите, что равновесие будет неустойчивым.

85. Три материальных точки располагаются в вершинах равностороннего треугольника. Найдите приближенно потенциал, как функцию двух переменных, в окрестности середины треугольника.

86. Семейство кривых, определяемых тем свойством, что произведение расстояний от двух фиксированных точек до точек кривой является постоянной величиной C, называется овалами Кассини. Получите уравнение овалов Кассини в координатной форме. Покажите, что при большом положительном C овал Кассини представляет собой окружность, а при малых C – две окружности. Найдите значение параметра C, при котором овал Кассини превращается в восьмерку, и покажите, что соответствующая алгебраическая кривая является лемнискатой. Нарисуйте систему овалов Кассини при различных C.

87. Как выглядит рельеф местности, для которой линии постоянного уровня даются овалами Кассини?

88. Имеются две параллельные тонкие нити, по которым равномерно распределены электрические заряды противоположных знаков с равной по величине линейной плотностью заряда. Покажите, что в сечении, перпендикулярном к нитям, система эквипотенциалей дается овалами Кассини. Какой потенциал соответствует лемнискате? Расстояние между нитями a, линейная плотность заряда ρ.

89. Над поверхностью океана помещена материальная точка массы m. Точка располагается на высоте h над невозмущенным уровнем океана. Получите уравнение поверхности океана. Исследуйте вид возмущенной поверхности в зависимости от безразмерного параметра $\varepsilon = Gm/gh^2$. Покажите, что при увеличении ε при значении $\varepsilon = 1/4$ происходит качественное изменение вида поверхности. Нарисуйте профиль поверхности океана до и после перестройки.

Указание. Расположите систему координат так, чтобы ось x совпала с поверхностью невозмущенного океана, а материальная точка имела координаты $x=0$, $y=h$. Примите уровень $y=0$ за нуль отсчета потенциала гравитационного поля Земли. Найдите эквипотенциальную линию, для которой суммарный потенциал поля Земли и материальной точки равен нулю. Эта линия и даст искомую поверхность возмущенного океана.

Зависимость от параметров

90. Материальная точка движется по закону $x = v_0 t + a\sin\omega t$ ($v_0 > 0$, $a > 0$). Установите, при каких значениях параметров точка все время движется только вперед, а при каких возможно ее движение как вперед, так и назад. Постройте качественно графики зависимости координаты тела от времени для первой и второй ситуаций. Придумайте физический пример, которому может соответствовать такой закон движения.

91. Отклонения свойств газов от идеального описываются уравнением Ван-дер-Ваальса $(P + a/V^2)(V - b) = RT$, где V – объем одного моля газа, a, b – некоторые положительные постоянные. Изобразите семейство изотерм газа Ван-дер-Ваальса, отвечающих различным значениям температуры. Покажите, что при уменьшении температуры при переходе через критическое значение $T_к = 8a/(27Rb)$ происходит качественное изменение вида изотерм. Определите критические значения давления и объема одного моля, которые соответствуют точке с равной нулю второй производной давления от объема, лежащей на критической изотерме.

92. Имеются два одинаковых кольца радиуса R, по которым равномерно распределен положительный электрический заряд Q. Кольца расположены на расстоянии a. Вдоль оси, проходящей через центры колец, может скользить точечный отрицательный заряд. При каких значениях расстояния a заряд может находиться в устойчивом равновесии?

93. Между двумя горками высоты h и H помещен маленький шарик. Шарику сообщают поступательную горизонтальную скорость v_0 (рис. 16). Какие возможны качественно разные случаи поведения шарика. Изобразите соответствующие области на плоскости параметров $x=h/H$, $y=v_0^2/2gH$. Трение отсутствует.

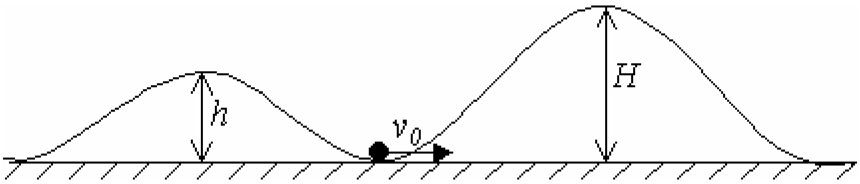


Рис.16

94. Посередине сосуда длины l расположен поршень, прикрепленный к пружине жесткости k (рис. 17). Первоначально температура газа внутри и вне сосуда T_0, давление P_0, пружина не деформирована. Газ в сосуде медленно нагревают до температуры T. Изобразите области, которым отвечают качественно разные конечные состояния системы, на плоскости подходящих безразмерных параметров.

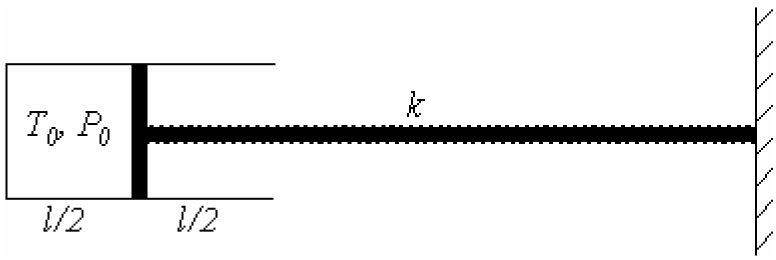


Рис. 17.

95. Маятник представляет собой легкий стержень длины l, шарнирно закрепленный в точке O с грузом массы m на другом конце. Предельное значение растягивающей силы, которую выдерживает стержень, равно T. Грузику сообщают горизонтально направленную скорость v. Какие возможны качественно разные случаи поведения системы? Изобразите соответствующие области на плоскости параметров $x=v_0^2/lg$, $y=T/mg$.

96. Поле имеет вид прямоугольника со сторонами a и b, причем $b < a$. Человек может идти по дороге по краю поля со скоростью u, или по полю со скоростью $v<u$. По какому маршруту ему следует двигаться, чтобы попасть из вершины в противоположную за минимальное время? Представьте результат на плоскости безразмерных параметров $\varepsilon = \frac{v}{u}$, $\mu = \frac{b}{a}$. В каких предельных случаях пешеходу проще всего выбрать маршрут? В каком случае он будет испытывать максимальные затруднения?

97. С земли в некоторый момент времени $t = 0$ вертикально вверх бросают первый камень со скоростью V, в момент времени $t=T$ – второй камень со скоростью v, а также в момент $t=\tau$ стартует шар-зонд, движущийся с постоянной скоростью u. Классифицируйте возможные качественно разные ситуации взаимного полета тел в зависимости от параметров задачи. Камни могут пролетать мимо зонда, не повреждая его. Сопротивлением воздуха пренебречь. Порядок старта тел заранее не определен, соответственно, величины T и τ могут быть любыми, в частности, и отрицательными

98. Гантелька, представляющая собой два небольших шарика одинакового радиуса, скрепленных тонким стержнем, брошена в жидкость. Плотности материалов шариков равны ρ_1 и ρ_2, плотность жидкости ρ_3. Изобразите области, которым отвечают качественно разные конечные состояния системы, на плоскости подходящих безразмерных параметров.

Оценки математических выражений

99. Найдите приближенно

а) $\sin(1^0)$, б) $\sqrt{404}$, в) $\cos(44^0)$.

100. Преобразуйте следующие выражения при малых x:

а) $\sqrt{1+x}/(1-x)^2$; б) $(1+x)^3-1-\sin x$; в) $\frac{1}{2}x\cdot\sin x-1+\cos x$.

101. Докажите, что в любом треугольнике хотя бы две стороны всегда одного порядка длины.

102. Оцените высоту равнобедренного треугольника, стороны которого равны 1,0001 и 2,0001.

103. Докажите, что если в треугольнике все три стороны одного порядка длины, то возможны только две альтернативные ситуации: а) все углы треугольника одного порядка; б) два угла треугольника малы и их величины одного порядка.

104. Получите выражение для интеграла

$$\int_0^1 x^3\exp(-ax)dx$$

в виде нескольких членов ряда по малому параметру a.

105. Оцените интегралы

а) $I(a,b)=\int_0^\infty \sin bx^2\exp(-ax^2)dx$, б) $I(a,b)=\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}\exp(-ax^2)dx$,

в случаях $a>>b$ и $a<<b$. Сравните полученные оценки с точными значениями.

Уравнения. Качественный анализ и оценки

106. Получите оценку для корней уравнения $tgx=x$ в области $x>0$. Получите сначала самую грубую оценку, а затем уточните ее с использованием приближенных формул для tgx. Решение проиллюстрируйте графиками. Сравните с найденными численно решениями для первых трех корней

107. Оцените число корней уравнения $x=1000\sin x$.

108. Используя разложение синуса в ряд Тейлора, получите приближенное решение уравнения $kx=\sin x$. Получите выражения для корней, используя один, два, три члена ряда и сравните их точность при $k=0{,}5$.

109. Решите приближенно уравнение $\cos x=kx$ в области $0<x<2\pi$. Рассмотрите два случая: $|k|>>1$ и $|k|<<1$.

110. Найдите приближенно решение уравнения $\varepsilon x^4-x^2+3x-2=0$ в случае, если положительный параметр ε – малая величина порядка 0,01.

111. Изобразите на плоскости параметров области, отвечающие разному числу действительных корней уравнений:

а) $x^2+px+q=0$, б) $x^4+px^2+q=0$, в) $x^3+px+q=0$,

г) $px+q+\sin x=0$.

В последней задаче сначала постройте приближенное решение, отвечающее малым x.

112. Представьте систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=ax+by,$$
$$\dot{y}=cx+dy,$$

в виде уравнения второго порядка относительно переменной x. Укажите возможную физическую интерпретацию такого уравнения и определите основные возможные типы поведения системы в зависимости от параметров.

113. Посередине резинового жгута жесткости k прикрепили маленький груз массы m. Длина жгута в нерастянутом состоянии равна l_0. Жгут закрепили так, что расстояние между его концами равно h (рис. 18). Необходимо определить равновесное положение грузика. Для этого получите уравнение относительно угла α, соответствующего равновесию грузика. Минимизируйте число параметров в полученном уравнении, введя удобные безразмерные параметры. Постройте графики зависимости угла α от одного из параметров, фиксируя остальные параметры. Каковы особенности полученных графиков? Как они связаны с физическими особенностями задачи?

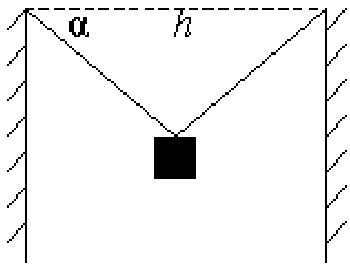


Рис.18

114. Над горизонтальной поверхностью на высоте h в точке O прикреплен резиновый жгут, на противоположном конце которого имеется маленький грузик массы m (рис. 19). Жгут подчиняется закону Гука, его длина в нерастянутом состоянии l_0, коэффициент жесткости k. Коэффициент трения грузика о поверхность μ. Получите уравнения для определения предельных значений угла α, при которых система может находиться в покое. Исследуйте полученное уравнение. Постройте графики зависимости ширины x области устойчивости от параметров задачи.

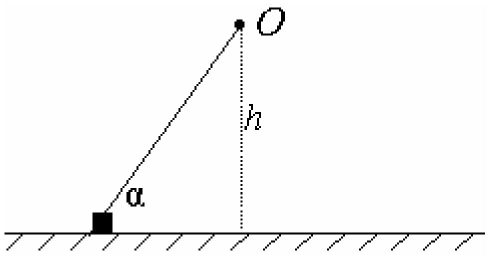


Рис.19

Комплексные числа

115. Вычислите $(1+i)^{2010}$.

116. В задаче об интерференции волн от множества источников, расположенных на равном расстоянии вдоль одной линии встречается следующая сумма: $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin N\alpha$. Используя формулу Эйлера, вычислите эту сумму.

117. С помощью формулы Эйлера получите тригонометрические формулы для синуса и косинуса а) двойного угла, б) тройного угла.

118. С помощью формулы Эйлера вычислите интеграл

$$I(a,b) = \int_0^\infty \sin bx \cdot \exp(ax)dx$$

119. С помощью формулы Эйлера получите выражения для производных синуса и косинуса

120. Используя метод комплексных амплитуд, покажите, что сумма двух гармонических колебаний $x_1=a\cos(\omega t+\varphi_1)$ и $x_2=b\cos(\omega t+\varphi_2)$ тоже является гармоническим колебанием. Определите амплитуду и фазу суммарного сигнала. Рассмотрите частный случай, когда $x_1=a\sin\omega t$ и $x_2=b\cos\omega t$.

121. Материальная точка движется по окружности радиуса r с угловой скоростью ω против часовой стрелки. Введите комплексную координату точки z и получите закон ее изменения со временем. Рассмотрите частные случаи, когда начальные координаты точки (1,0), (0,–1), (2,2). Покажите, что комплексная координата удовлетворяет уравнению $\ddot{z} = i\omega \cdot \dot{z}$

122. По дороге со скоростью v без проскальзывания катится колесо радиуса R (рис. 20). Задайте закон изменения во времени координаты точки А с помощью комплексных чисел. Пунктир – начальное положение колеса.

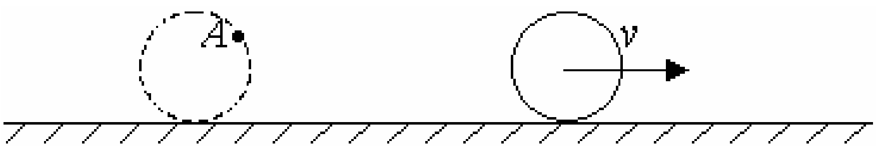


Рис.20

123. Чем отличаются законы движения $z=re^{i\omega t}$ и $z=re^{-i\omega t}$?

124.Повороту вектора на какой угол отвечает умножение комплексного числа на $-i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, e^i?

125. На какую величину необходимо умножить комплексное число, чтобы соответствующий ему вектор был повернут на угол π/2? 7π/3? arctg2?

126. Частица с зарядом e и массой m движется в плоскости xy. Магнитное поле B перпендикулярно этой плоскости. Получите выражение для комплексной силы через комплексную скорость точки. Покажите, что комплексная координата точки удовлетворяет уравнению $\ddot{z} + i\omega \cdot \dot{z} = 0$. Покажите, что решение этого уравнения имеет вид $z=re^{i\omega t}$ и определите ω.

127. Рассмотрите движение частицы из задачи 126 в случае, когда, кроме того, имеется электрическое поле E, напряженность которого лежит в плоскости xy. Покажите, что комплексная координата точки удовлетворяет уравнению $\ddot{z} + i\omega \cdot \dot{z} = E/m$, где E – комплексное электрическое поле. Покажите, что решение этого уравнения имеет вид $z=Vt+re^{i\omega t}$, где величина ω та же, что и в предыдущем случае, и определите V. По какой траектории движется частица?

128. С помощью формулы Эйлера установите выражение для ускорения в полярной системе координат. Дайте физическую интерпретацию каждого члена в получившемся соотношении.

129. На конденсатор с электрической емкостью C подано напряжение $U=U_0\cos\omega t$. Покажите, что комплексная амплитуда тока дается соотношением $I=U/Z$, где U - комплексная амплитуда напряжения, Z - комплексный импеданс емкости $Z=1/i\omega C$.

130. На катушку с индуктивностью L подано напряжение $U=U_0 cos\omega t$. Покажите, что комплексная амплитуда тока дается соотношением $I=U/Z$, где U – комплексная амплитуда напряжения, Z – комплексный импеданс индуктивности $Z=i\omega L$.

131. На электрическую цепь в виде последовательно соединенных емкости C, индуктивности L и сопротивления R подано напряжение $U=U_0\cos\omega t$. Чему равна амплитуда тока в цепи? При каком значении частоты ω амплитуда тока максимальна? Чему равен сдвиг фаз между током и напряжением? При каком значении частоты ω сдвиг фаз между током и напряжением отсутствует?

132. Придумайте электрическую схему, для которой ток опережал бы напряжение на π/4.

133. Представьте тригонометрическое выражение $(1+\varepsilon\cos\Omega t)\cos\omega t$ в виде действительной части комплексного числа.

134. К цепи, показанной на рис. 21, приложено напряжение, изменяющееся во времени по закону $U=V(1+\varepsilon\cos\Omega t)\cos\omega t$. Найдите ток в цепи I.

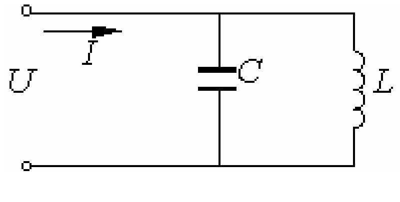


Рис.21

135. Покажите, что собственная частота колебательного контура без потерь может быть найдена из условия равенства нулю его комплексного импеданса.

136. Определите частоту собственных колебаний электрической схемы, показанной на рис. 22.

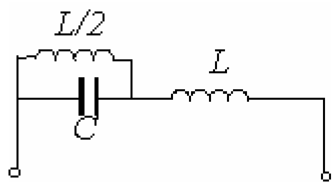


Рис. 22.

137. Покажите, что среднее значение произведения двух гармонических сигналов $x_1 = a\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = b\cos(\omega t + \varphi_2)$ можно вычислять по формуле $ReAB^*/2$ или $(AB^* + A^*B)/2$ где A и B – соответствующие комплексные амплитуды.

138. Определите мощность джоулевых потерь в цепи из задачи 131.

δ-функция Дирака и ступенчатая функция Хевисайда

139. Балка массы M лежит на двух симметрично расположенных узких опорах (рис. 23). Напишите формулу для давления, оказываемого на нижнюю поверхность балки как функцию координаты x. Ширина балки a.

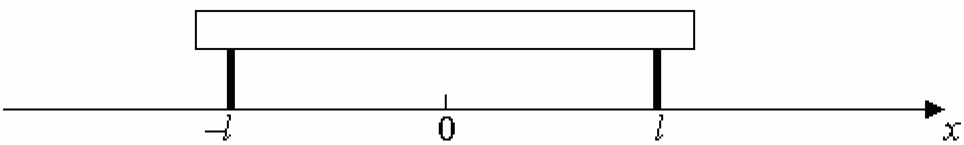


Рис.23

140. Напишите выражение для электрического поля как функции координаты x вдоль оси, перпендикулярной плоскому конденсатору с очень узким зазором. Емкость конденсатора C, заряд на его пластинах q.

141. Два одинаковых шара с массами m движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2, упруго сталкиваются и разлетаются. Напишите формулу для силы взаимодействия $F(t)$. Координаты шаров в момент времени t=0 равны x_1 и x_2.

142. На тело, находящееся в покое, начинает действовать сила в виде периодической последовательности дельта-функций:

$$\ddot{x} = C\sum_{n=0}\delta(t - nT) .$$

Нарисуйте график зависимости скорости тела от времени.

143. На тело действует сила $F(t)=p_0[\delta(t-T)-\frac{1}{2}\delta(t-2T)-\frac{1}{2}\delta(t-3T)]$. Найдите положение тела при $t>3T$. Масса тела m. Начальная скорость и координата равны нулю.

144. На тело массы m действует сила $F(t)=p_0\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$ Постройте график зависимости скорости от времени. Найдите зависимость координаты от времени. Начальная скорость и координата равны нулю.

145. На гармонический осциллятор действует последовательность дельта-функций

$$\ddot{x}+\omega^2 x = C\sum\delta(t-nT).$$

Получите итерационную формулу (отображение), связывающее значение координаты и скорости осциллятора сразу после (n+1)-го и n-го ударов.

146. В вершинах квадрата со стороной a расположены точечные заряды величины q (рис. 24). Напишите выражение для поверхностной плотности заряда σ и объемной плотности заряда ρ.

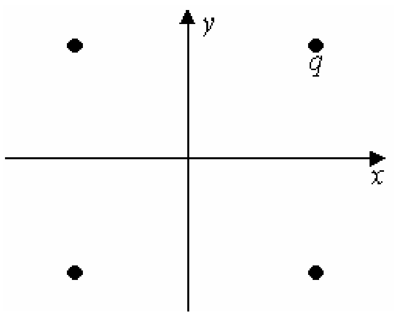


Рис.24

147. Установите вид функции Хевисайда $\theta(t)$ и постройте ее график:

$$\theta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau.$$

148. Постройте графики функций: $y=|x|$, $y=[x]$, $y=\{x\}$, две последние записи означают целую и дробную части переменной. Вычислите производные от этих функций.

149. Груз массы m, прикрепленный к вертикально расположенной пружине жесткости k, удерживают руками. Груз отпускают в момент времени τ. Использую функцию Хевисайда, запишите уравнение движения груза в виде одной формулы так, чтобы оно было справедливо до момента τ и после него.

150. Представьте прямоугольный импульс

$$f(t)=\begin{cases}0, t<0, t>T,\\ f, 0<t<T;\end{cases}$$

в виде комбинации двух функций $\theta(t)$.

151. На шарик массы m, прикрепленный к пружине жесткости k, действует сила, зависящая от времени по закону, представленному в предыдущей задаче. Найдите амплитуду колебаний шарика.

Спектры, ряд Фурье и интеграл Фурье

152. Найдите преобразование Фурье для следующих функций:

а) $f(t)=\exp(-at)$, $t\geq 0$; $f(t)=0$, $t<0$;

б) $f(t)=t\exp(-at)$, $t\geq 0$; $f(t)=0$, $t<0$;

в) $f(t)=a$, $|t|\leq\tau$; $f(t)=0$, $|t|>\tau$.

153. Покажите, что если функция $f(t)$ имеет Фурье-образ $F(\omega)$, то функция $f(at)$ имеет Фурье-образ $\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$, $a>0$.

154. Покажите, что

$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega t)dt$$

Используйте для этого, что по определению дельта-функции $\int_{-\infty}^{\tau}\delta(t)dt=1$ для любых $\tau>0$ и, кроме того, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\pi$.

155. Используя результат предыдущей задачи, получите формулы обратного преобразования Фурье.

156. Даны следующие варианты прямого преобразования Фурье:

а) $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-i\omega t)dt$, б) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(i\omega t)dt$, г) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-i\omega t)dt$

Напишите соответствующие им формулы обратного преобразования Фурье.

157. Найдите Фурье-образы для функций

а) $\exp(i\omega t)$, б) $\cos\Omega t$, в) $\cos^2\Omega t$.

158. Найдите Фурье-образ для функции $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(t-nT)$.

159. Найдите функцию $f(t)$, которой отвечает Фурье-образ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\Omega)$. Покажите, что функция $f(t)$ периодична и найдите коэффициенты ее разложения в комплексный ряд Фурье.

160. Сколько членов ряда Тейлора содержит функции: а) $\sin\Omega t$, в) $\cos^2\Omega t$, г) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(t-nT)$.

161. Разложите в комплексный ряд Фурье и ряды Фурье по синусам и косинусам последовательности прямоугольных и треугольных импульсов.

162. Функция $f(t)$ равна нулю вне отрезка $0<t<T$ и ее Фурье-образ есть $F(\omega)$. Найдите коэффициенты ряда Фурье функции $\bar{f}(t)$, полученной периодическим продолжением $f(t)$.

163. Докажите, что если *n*-ая производная функции $f(t)$ имеет разрыв, то Фурье-образ этой функции спадает с ростом частоты, как $1/\omega^{n+1}$. Проверьте этот результат для представленных выше примеров.

Матрицы

164. Представьте решение уравнения гармонического осциллятора $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ в виде матрицы, действующий на вектор-столбец, задающий начальное состояние осциллятора:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Найдите якобиан матрицы и дайте физическую интерпретацию полученному результату.

165. Декартову систему координат на плоскости повернули на угол θ. Получите матрицу, определяющую координаты в новой системе координат через старые. Сравните ее с матрицей гармонического осциллятора.

166. Покажите, что для матрицы 2×2 собственные числа можно найти из уравнения

$$\mu^2 - S\mu + J = 0,$$

где S – след, а J – якобиан матрицы.

167. Для модели, известной как Брюселятор

$$\frac{dx}{dt} = a - (b+1)x + x^2 y,$$
$$\frac{dy}{dt} = bx - x^2 y,$$

найдите положение равновесия и матрицу, описывающее динамику двух переменных вблизи точки равновесия. Найдите след и якобиан этой матрицы и ее собственные числа.

168. Для электрической цепи, показанной на рис.25, получите матрицу, связывающие вектор-столбец из напряжения и тока на выходе, через соответствующий вектор-столбец на входе.

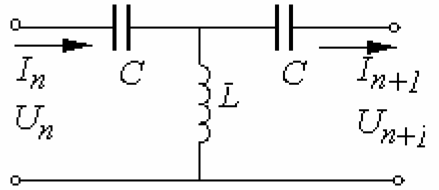


Рис.25

169. Для матрицы 3×3 получите выражение для трех ее инвариантов через собственные числа.

Иррациональные числа

170. Выпишите последовательности рациональных чисел, отвечающее ряду Фарея порядка n=1, 2, 3, 4, используя «правило двоечника»: $\frac{p'}{q'} = \frac{p + p''}{q + q''}$. «Стартуем» с последовательности двух чисел $\frac{p}{q} = \frac{0}{1}$ и $\frac{p''}{q''} = \frac{1}{1}$.

171. Разложите в цепную дробь 157/225.

172. Разложите в цепную дробь: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$. Попробуйте самостоятельно подумать о свойствах цепных дробей, которые получаются при разложении $\sqrt{n}$, где n – натуральное число, не являющееся квадратом натурального числа.

173. Найдите значения периодических цепных дробей: $[0;a,a,a\ldots]$, $[0;a,b,a,b,\ldots]$.

174. Имеется бесконечная цепочка сопротивлений, показанная на рис. 26. Получите разностное уравнение, позволяющее определить величину сопротивления R_{n+1} цепочки, составленной из n+1 звеньев, по величине сопротивления R_n цепочки, составленной из n звеньев. Найдите первые пять членов соответствующей последовательности и покажите, что они связаны с числами Фибоначчи и аппроксимантами золотого сечения $w = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

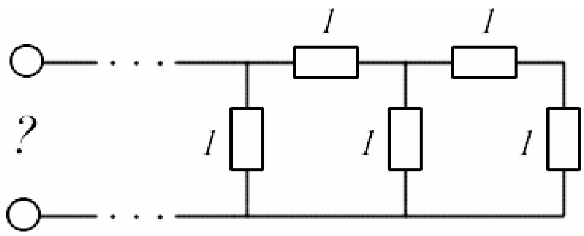


Рис.26

175. Предложите вариант развития схемы из задачи 174, приводящий к другим цепным дробям.

176. Постройте на компьютере фигуры Лиссажу, отвечающие движениям: $x(t)=\cos\omega t$ и $y(t)=\cos\Omega t$ в случаях, когда частоты заданы числами Фибоначчи, так что $\omega=F_n$ и $\Omega=F_{n+1}$. Изучите, как меняется вид фигур при увеличении n. Что происходит с ростом n, когда отношение частот стремится к золотому среднему: $\dfrac{\omega}{\Omega} = \dfrac{F_n}{F_{n+1}} \to \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$? В чем отличие траекторий, отвечающих рациональным и иррациональным $\dfrac{\omega}{\Omega}$?

177. Некоторые восточные народы пользуются смешанным солнечно-лунным календарем. Месяцы у них имеют то 29, то 30 дней. Месяцы из 29 дней называются ”пустыми”, а из 30 дней “полными”. Календарный год состоит то из двенадцати, то из тринадцати месяцев. Греческий математик Метон (433 г. до н.э.) предложил замечательное решение проблемы лунно-солнечного календаря. По Метону из каждых 19 лет семь имеют по тринадцать месяцев, а остальные двенадцать лет – по двенадцать месяцев. Из общего числа 235 лунных месяцев, помещающихся в “золотом” девятнадцатилетнем периоде, 110 пустых и 125 полных. Здесь люди столкнулись с более сложной задачей одновременного приближения к отношениям трех величин – длины суток, длины лунного месяца и длины солнечного года. С достаточно хорошим приближением 1 солнечный год=365.2422 суток, 1 лунный месяц=29.5306 суток. Разложите в цепную дробь отношение (1 солнечный год) / (1 лунный месяц) и получите объяснение удачи изобретения Метона. Разложите в цепную дробь и отношение длины лунного месяца к суткам.

Разное

178. Автомобиль движется с постоянной по величине скоростью v по мосту в форме синусоиды $y=a\ \sin(2\pi\, x/l)$. При какой скорости он пройдет верхнюю точку моста, не оторвавшись от его поверхности?

179. Изобразите качественно, как могут располагаться друг относительного друга кривая и касающейся круг? Какая из этих ситуаций более типична?

180. Исходя из определения второй космической скорости, ответьте на вопрос, какие из кривых – эллипс, парабола и гипербола – отвечают случаям общего положения, а какие вырожденным?

181. Почему говорят, что камень, брошенный под углом к горизонту, движется по параболе, хотя по закону Кеплера он должен двигаться по эллипсу?

182. Проведите эксперименты, освещая мяч лучом от фонарика, меняя угол θ, рис.27. Как меняется форма тени от мяча? Какие кривые – края тени – можно последовательно наблюдать в таком эксперименте? Угол θ может быть и больше 90 градусов.

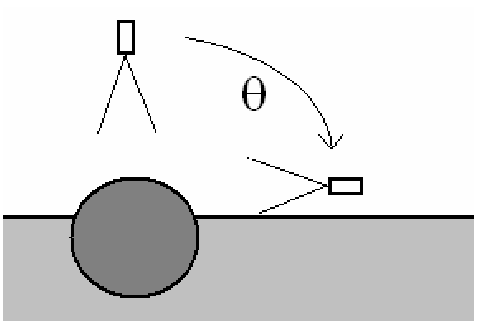


Рис.27

183. Используя изменение масштабов, получите формулу для площади эллипса, считая известной формулу площади круга.

184. Покажите, что если две стеклянные пластины, образующие между собой малый угол, опустить в воду, то высота поднявшейся по законам капиллярности поверхности жидкости, образует гиперболу.

185. На столе стоит качалка, форма которой задана уравнением $y = x^2$ (рис.28). На качалке закреплен грузик (например, два магнита). Если качал-

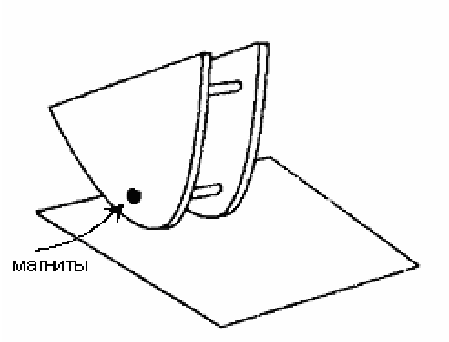


рис.28

ка очень легкая по сравнению с грузиком, то положению равновесия отвечает ситуация, когда грузик лежит на нормали к параболе, проведенной в точке ее контакта с поверхностью стола. Постройте семейство нормалей к параболе. Это можно сделать качественно на графике, а затем – с помощью компьютера и уравнения нормали. Укажите на графике огибающую семейства нормалей. Обсудите возможные варианты положений равновесия такой качалки. Изготовьте качалку и приведите с ней эксперименты.

186. Эволютой кривой называется кривая, представляющая собой геометрическое место центров кривизны для исходной кривой. Найдите эволюту параболы. Сравните с результатом предыдущей задачи и обсудите связь эволюты с огибающей семейства нормалей.

187. В момент времени $t=0$ волновой фронт имеет форму параболы $y=x^2$. Получите уравнение линии, задающей положение волнового фронта в момент времени t. Скорость распространения волны c. Постройте волновые фронты в разные моменты времени, сначала качественно, а затем на компьютере. Какие особенности, и в какой момент времени появляются на волновом фронте?

188. Палка, прислоненная к стенке, начинает падать, скользя вдоль нее, рис.29. По какой траектории будет двигаться центр палки?

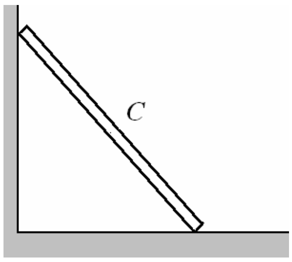


Рис.29

188. Покажите, что острия циклоиды и астроиды имеют полукубическую форму (т.е. отвечают степенному закону «трех вторых»).

189. Докажите, что эволютой циклоиды является циклоида и получите ее уравнение.

190. Постройте на компьютере семейство нормалей к циклоиде и сравните с результатами предыдущей задачи.

191. Покажите, что для маятника, отвечающего скольжению материальной точки по циклоиде, справедливо свойство изохронности – его период не зависит от амплитуды колебаний.

192. Найдите уравнение луча, отраженного от цилиндрической чашки. В качестве параметра используйте угол θ, под которым видна из центра точка падения луча на поверхность, рис.30. Продифференцируйте полученное соотношение по θ и получите уравнение для огибающей системы лучей. Покажите, что это нефроида - кривая, которую описывает точка на ободе колесика радиуса 1/2, катящегося по кругу диаметра 1. Изобразите эту кривую. Пронаблюдайте каустику в чашке экспериментально.

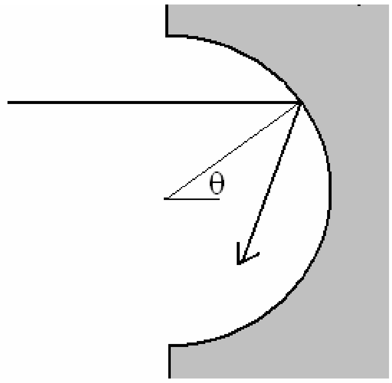


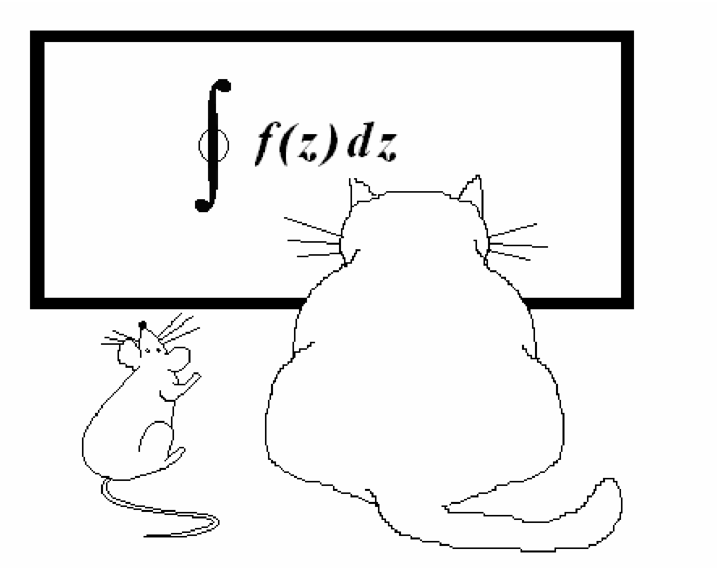
рис.30

193. Изобразите проекции тора на плоскость, невидимые контуры покажите пунктиром. Обратите внимание на появление особых точек (они являются полукубическими остриями – точками сборки) у проекций.

194. Найдите в справочнике количество вершин V, ребер E и граней F для правильных многогранников. Продемонстрируйте справедливость соотношения Эйлера $V–E+F=2$.

Оглавление

В электронном виде данная книга, а также сборники оригинальных олимпиадных задач, задач исследовательского характера и другие материалы доступны на сайте Саратовской группы теоретической нелинейной динамики **«Окно в науку» www.sgtnd.narod.ru/wts/rus**



Учебно-методическое пособие

Кузнецов Александр Петрович

ФИЗИКИ ТОЖЕ ЛЮБЯТ МАТЕМАТИКУ

Пособие издано в авторской редакции

Ответственный за выпуск А.В. Савин

Подписано в печать 22.03.2010 г.

Формат 60x84 1/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman.

Усл.-печ. л. 2,27. Тираж 100 экз.

Издательство «Научная книга» 410054, г. Саратов, ул. Б. Садовая, 127