

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов,  
А. В. Савин, Н. В. Станкевич

**ФИЗИКА:  
ОТ ОЦЕНОК  
К ИССЛЕДОВАНИЮ**



**R&C**  
*Dynamics*

Москва ♦ Ижевск

2009

...Как лететь с Земли до звезд,  
Как поймать лису за хвост,  
Как из камня сделать пар,  
Знает доктор наш Гаспар...  
*Ю. К. Олеша. «Три толстяка»*

**Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Савин А. В., Станкевич Н. В.**

Физика: от оценок к исследованию. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. — 336 с.

Книга вводит школьника и студента младшего курса в «творческую лабораторию» физика-исследователя, в форме задач знакомит с «неформальной» физикой, которая практически не представлена в «традиционных» школьных курсах, однако активно используется при проведении исследований: представлены задачи на оценки физических величин, методы размерностей и подобия, задачи для решения с помощью компьютера. Все эти задачи требуют не только получения формул, но и их анализа и исследования. Представлены также задачи исследовательского характера, которые могут быть использованы для постановки работ школьников и подготовки докладов в рамках школьной научной лаборатории. Книга будет полезна школьникам, интересующимся физикой и исследовательской работой, а также учителям физики и студентам младших курсов.

Табл.: 4. Ил.: 97.

**ISBN 978-5-00000-000-0**

© А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, А. В. Савин, Н. В. Станкевич, 2009

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

**Из нескольких таких увеличительных стекол Стекляшкин сделал большую подзорную трубу, в которую можно было смотреть на Луну и на звезды. Таким образом он сделался астрономом.**

***Н. Н. Носов.  
«Приключения Незнайки и его друзей»***

Физика — это не только дисциплина в учебном плане школы или вуза, но и наука, которая занимается исследованием окружающего мира и получением новых, неизвестных ранее знаний. Профессия ученого-исследователя очень увлекательна. Она посвящена раскрытию тайн и загадок природы. Как научиться исследовательской работе? Определенное представление о работе физика-исследователя дает решение физических задач. Но реальные задачи, конечно, отличаются от учебных.

Обычные задачи нацелены на «усвоение» учебного материала. Даже нестандартные (олимпиадные) задачи все равно ориентированы на применение известных закономерностей, изучаемых в школьном курсе и установленных уже очень давно. Но в реальной жизни исследователи сталкиваются с совершенно другой ситуацией — когда надо устанавливать новые законы и взаимосвязи. Это означает, что научные задачи по своему характеру существенно иные, чем учебные. В этой книге мы постарались подобрать такие задачи, которые вводят читателя в «творческую лабораторию» физика-исследователя.

В первую очередь это задачи на оценки (приближенное определение значений) физических величин, которые для своего решения требуют четкого понимания связи объекта исследования с окружающим миром. Далее, это задачи на методы размерностей и подобия, которые позволяют устанавливать физические закономерности, не решая соответствующих уравнений.

Во втором разделе представлены задачи, которые требуют не просто получения результата, а глубокого и всестороннего анализа. Сначала обсуждаются математические по форме задачи, привлечение к решению которых физических методов выявляет новые и интересные особенности. Далее обсуждаются задачи, допускающие анализ получающихся функций с физических позиций. Следующий шаг — задачи, для которых результат качественным образом зависит от параметра. В конце раздела даны физические задачи, связанные с качественными перестройками состояний равновесия (катастрофами или бифуркациями).

Современному читателю будут интересны задачи для решения с помощью компьютера, которые представлены в третьей части книги. Мы не ог-

раничиваемся вычислительными возможностями компьютера, а используем и информационные возможности сети Интернет.

Заключительную часть книжки составляют задачи, которые мы назвали исследовательскими. Они максимально приближены по своему характеру к тем научным задачам, которые встречаются в работе ученых. Для их решения нужно привлекать теорию, компьютерное моделирование, а зачастую и эксперимент. Эти задачи можно решать не одному, а вместе с товарищами, обсуждая решение друг с другом. Главное здесь — создать атмосферу поиска и исследований.

К каждому разделу мы даем небольшой вводный комментарий, который помогает восприятию использованных подходов и методов, а также приводим достаточно подробные решения большинства задач.

Книжка ориентирована как на школьников, так и на студентов младших курсов. В большинстве задач из разделов 1–3 мы не выходим за рамки школьной программы. Если это не так, то необходимые сведения (например, закон излучения Стефана–Больцмана) сообщаются в самом условии. При решении многих задач исследовательского характера тоже можно ограничиться этими рамками — ведь Вы сами выбираете метод решения. Однако в этом случае нам хотелось бы, чтобы Вы были смелее в выборе методов и подходов. Ведь в реальной исследовательской работе нет такого правила — используй только те знания, которым ты «официально» обучен! Оно во многом искусственно и «навязано» традиционной технологией обучения. Поэтому Вы можете смело выходить за рамки школьной (и вузовской) программы, используя учебники, справочники, Интернет и консультации. Особенно мы рекомендуем использовать возможности Интернета, например, если Вы сталкиваетесь с новым термином или понятием. При решении некоторых задач исследовательского характера как одна из «компонент» решения может выступать численный анализ дифференциальных уравнений. Обычно с соответствующими методами знакомят в вузе, после серьезной подготовки по аналитическим методам. Однако это совершенно не обязательно — численное решение дифференциальных уравнений по своей сути проще аналитических подходов.

К большинству задач даны решения либо определенные комментарии. Мы рекомендуем познакомиться с решениями в любом случае — даже если Вы уверены, что решили задачу, — ведь всегда могут быть определенные «тонкости», с которыми полезно познакомиться. Тем более это стоит сделать, если после приложенных усилий задачу решить не удалось. К задачам исследовательского характера мы даем некоторые подсказки, ознакомившись с которыми, Вы сможете продолжить решение. Решения также содержат новые полезные сведения, например, о «золотом» среднем, каустиках и сборках, овалах Кассини и т. д.

Это книжка в определенной мере опирается на опыт школьной научной лаборатории базовой кафедры динамических систем факультета нели-

нейных процессов Саратовского государственного университета и лаборатории теоретической нелинейной динамики Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. В течение ряда лет учащиеся разных лицеев и школ г. Саратова занимались исследовательской работой в школьной лаборатории. Их работы докладывались на различных конференциях, включая студенческую конференцию ФНП СГУ. Авторы хотели бы выразить благодарность научному руководителю ФНП СГУ, член-корр. РАН, проф. Д. И. Трубецкову и декану ФНП СГУ проф. Ю. И. Левину, поддержавших идею школьной научной лаборатории и исследовательской работы школьников. Мы также благодарны проф. В. С. Анищенко и Американскому фонду гражданских исследований и развития за материальную поддержку школьной лаборатории. Мы благодарим юных исследователей, в разные годы активно занимавшихся в ней исследовательской работой: Михаила Бурдейного, Наталью Иванову, Юлию Максименко, Евгения Новикова, Анастасию Подосинникову, Ирину Прохорову, Юлию Роман, Марию Рыскину, Ивана Фефера и других. Некоторые результаты, полученные ими, использованы в решениях к разделу «Исследовательские задачи». Мы благодарны преподавателям физико-технического лицея № 1 г. Саратова заслуженным учителям РФ Л. В. Правдиной и Н. А. Козыревой, активно стимулировавшим исследовательскую работу учащихся. Мы также благодарны коллегам из Института прикладной физики РАН, Нижегородского госуниверситета, Института прикладной математики РАН им. Келдыша, обмен идеями с которыми стимулировал наш интерес к исследовательским подходам в образовании.

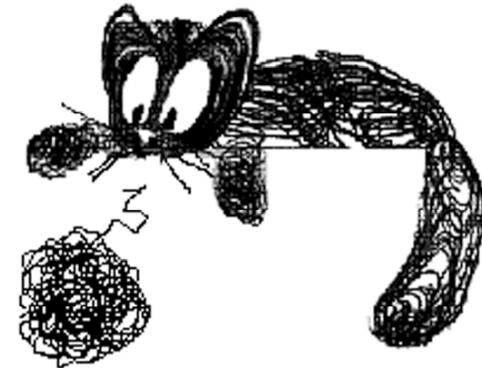
По нашему мнению, предлагаемые задачи будут полезны как старшеклассникам, так и студентам младших курсов. Часть из них использовалась авторами в качестве курсовых работ для студентов 1-2 курса Саратовского госуниверситета.

*Авторы*

# 1. «НЕФОРМАЛЬНАЯ» ФИЗИКА

При построении теории физика заменяет реальные объекты их идеализированными моделями...

*Д. В. Сивухин.  
«Общий курс физики. Механика»*



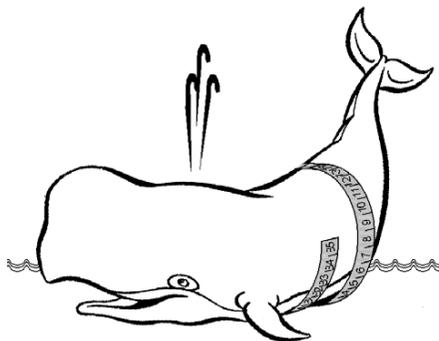
Реальные научные задачи бывают очень сложными. Иногда даже не ясно, какие факторы следует учесть, а какие отбросить, как выглядят исходные уравнения и как их решать. Иногда на построение точных теорий уходят годы и десятилетия. Тем не менее, в физике разработана определенная «технология» того, как поступать в таких случаях.

Один из известных наших физиков академик А. Б. Мигдал писал: «Решение большинства задач теоретической (от себя добавим: и экспериментальной) физики начинается с применения качественных методов, которые составляют наиболее привлекательную и красивую особенность этой науки. Под качественными методами мы понимаем размерные оценки и оценки с помощью простых моделей». Очень важно представлять себе примерные значения физических величин, как говорят, их порядок. Этому помогает метод оценок. В определенной мере связи и зависимости физических величин помогают установить метод размерностей и соображения, основанные на подобии физических процессов. Если овладеть этими методами, то можно зачастую «угадывать» ответ, «не решая» задачу в традиционном понимании. При этом следует делать смелые, но мотивированные предположения по выбору модели, «заменяя», например, кита — цилиндром и т. д.

Заметим, что навыки таких пионерских исследований составляют своего рода «фольклорную» часть науки. В учебниках обычно все выглядит строго и академично, так, как это установилось уже за многие годы после того, как сделаны соответствующие открытия. Наука же «переднего края» требует соответствующих навыков. Их вполне можно развить и на школьном уровне. Предлагаем вашему вниманию серию задач на оценки, методы размерностей и подобия, которые в высокой степени относятся к «неформальной физике».

Надеемся, что эти задачи окажутся не только полезны, но и интересны.

## ОЦЕНКИ



...Это всегда напоминает мне старую статью в ДАН СССР, ... в которой участвовала, при вычислении цилиндрического объема кита, формула, содержащая величину «пи» — «константу, которая для гренландских китов равна трем».

В. И. Арнольд

## Задачи

1. Оцените давление, оказываемое на землю кошкой. Сравните его с аналогичным показателем для человека.
  2. Оцените мощность электроснабжения современного жилого дома.
  3. Оцените ускорение, которое возникает, когда Вы сбегаете по лестничным пролетам. Сравните его с ускорением свободного падения. Сравните результат с Вашими собственными ощущениями.
  4. Оцените число домашних кошек в Вашем городе.
  5. За какое время муравей может обойти по периметру типичный дачный участок?
  6. Оцените «удаленность» горизонта для человека среднего роста.
  7. Оцените массу воды в океане.
  8. Согласно одной из средневековых моделей мира, Земля лежит на спине кита, плавающего в океане. Оцените характерные размеры этого кита. Землю считайте полусферой радиуса  $R = 6400$  км, плотность земных пород  $\rho_3 = 5,5$  г/см<sup>3</sup>, плотность кита —  $\rho_к = 0,9$  г/см<sup>3</sup>.
- Указание: кита можно представить в виде цилиндра, диаметр которого в несколько (например, в 10) раз меньше его длины.
9. Оцените время соударения футбольного мяча со стенкой.

10. Оцените размер водяных капель, имеющих круглую форму.
11. Оцените частоту звука, издаваемого комаром. На основе Вашей оценки обсудите отличия звука, издаваемого крупными и мелкими насекомыми.
12. Оцените диаметр купола парашюта, который обеспечивает приземление человека со скоростью, отвечающей прыжку с высоты 2 м.
13. Оцените ускорение, которое испытывает человек при прыжке в воду «солдатиком» с высоты 5 м.
14. Предложите простейший способ определения времени, за которое кубик льда из холодильника полностью растает при комнатной температуре.
15. Используя кастрюлю с водой и газовую плиту, оцените полезную мощность плиты.
16. Оцените ширину бороздки долгоиграющей виниловой пластинки.
17. Оцените скорость, до которой разгоняются электроны в кинескопе цветного телевизора.
18. Оцените температуру газа, при которой он превращается в плазму. Потенциал ионизации имеет порядок 10 В.
19. Оцените частоту вращения электрона в магнитном поле Земли. Сравните ее с радиодиапазоном.
20. Начиная с какого размера астероидов по ним можно ходить, не опасаясь улететь в космос?
21. Считая, что максимальная высота гор на Земле ограничена пределом прочности горных пород, оцените размер астероидов, начиная с которого они имеют приблизительно шарообразную форму. Считайте, что Земля и астероид сложены из одинаковых пород.
22. Ньютон был, по-видимому, первым, кто оценил расстояние до звезд. Он обратил внимание, что блеск некоторых звезд сравним с блеском Сатурна. Воспроизведите оценку Ньютона. Считайте известными расстояние от Сатурна до Солнца и радиус Сатурна.
23. Поднесите руку к горящей лампочке. Исходя из своих ощущений, оцените мощность излучения Солнца. Расстояние от Земли до Солнца считайте известным.
24. Считая известной скорость орбитального галактического движения Солнца (порядка 250 км/с) и расстояние до центра галактики (примерно 10 кпс), оцените суммарную массу звезд, расположенных внутри орбиты Солнца вокруг центра Галактики. Считая, что Солнце — типичная звезда Галактики, оцените число звезд в Галактике. Масса Солнца  $2 \cdot 10^{30}$  кг.

## РАЗМЕРНОСТЬ



...А в попугаях я все-таки длиннее!..  
Из мультфильма

### Задачи

1. В известном мультфильме длину Удава измеряют в попугаях. Какие параметры Попугая можно использовать в качестве эталона для введения основных единиц?
2. Тело брошено под углом к горизонту. Из соображений размерности получите формулу для дальности  $l$  полета тела.
3. Методом размерностей определите вид зависимости периода колебаний пружинного маятника от коэффициента жесткости пружины и массы тела.
4. Методом размерностей несложно установить, что период малых колебаний математического маятника зависит от его длины  $l$  и ускорения свободного падения  $g$  следующим образом:  $T = C\sqrt{l/g}$ . Как можно определить безразмерную константу  $C$ , входящую в эту формулу, не проводя строгого математического рассмотрения движения маятника?
5. Скорость звука в газе зависит от давления газа и его плотности. Установите вид этой зависимости. Используя табличные данные для скорости звука при нормальных условиях, найдите значение безразмерной константы в этой формуле.
6. Для того, чтобы оторвать змею от добычи, ее надо тянуть за хвост с силой  $F$ . Используйте метод размерностей, чтобы определить, за какое время змея, лежащая на гладкой горизонтальной поверхности вдоль прямой линии, может свернуться, образовав кольцо? Масса змеи  $M$ , ее длина  $l$ .
7. Период колебаний газового пузыря, образовавшегося в результате подводного взрыва, определяется энергией взрыва  $W$ , статическим давлением  $\rho$  и плотностью жидкости  $q$ . Найдите формулу для периода колебаний. Во сколько раз он изменится, если энергия взрыва возрастет в 10 раз?
8. Для планеты из несжимаемой жидкости массы  $M$  и объема  $V$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , получите формулу для давления в центре.

9. Скорость коротких волн на поверхности воды зависит от коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$ , длины волны  $\lambda$  и плотности жидкости  $\rho$ . Установите вид зависимости скорости волн от указанных параметров. Какие волны — длинные или короткие — бегут быстрее?
10. Для длинных волн на воде существенной является сила тяжести, а капиллярными явлениями можно пренебречь. С помощью метода размерностей получите зависимость скорости таких волн от их длины.
11. Оцените длину волн, которые нельзя считать ни чисто капиллярными, ни чисто гравитационными.
12. Площадь прямоугольного треугольника однозначно определяется величиной гипотенузы  $c$  и углом  $\alpha$ , прилежащим к гипотенузе. Из соображений размерности получите формулу для площади прямоугольного треугольника (с точностью до универсальной функции от угла  $\alpha$ ). Используя этот результат, докажите теорему Пифагора. (Такое решение дал одиннадцатилетний Эйнштейн, когда изучал геометрию.)
13. Имеется два разных по величине электрических заряда, находящихся на расстоянии  $h$  друг от друга. От скольких существенных параметров зависит конфигурация эквипотенциалов в системе?
14. В законе излучения Стефана–Больцмана  $S = \sigma T^4$ , дающем зависимость энергии, излучаемой единицей поверхности нагретого тела в единицу времени, от температуры, получите методом размерностей выражение для постоянной  $\sigma$  через фундаментальные физические постоянные — постоянную Планка  $h$ , скорость света  $c$  и постоянную Больцмана  $k$ .
15. Предложите закон, описывающий зависимость температуры поверхности планет от расстояния до Солнца.
16. Методом размерностей покажите, что величина  $\sigma T^4/c^3$  может быть интерпретирована как «плотность массы» равновесного теплового излучения. Оцените плотность, соответствующую реликтовому излучению, температура которого  $T = 3$  К.
17. Математический маятник длины  $l$  может совершать движения в вертикальной плоскости. Его уравнение движения имеет вид  $l \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \sin \varphi = 0$ , где  $\varphi$  — угол отклонения маятника от вертикали. Приведите это уравнение к безразмерному виду, наиболее удобному для анализа.

## ПОДОБИЕ



...на столе появился маленький Витька Корнеев, точная копия настоящего, но величиной с руку. Он щелкнул маленькими пальчиками и создал микродубля еще меньшего размера. Тот тоже щелкнул пальцами. Появился дубль величиной с авторучку. Потом величиной со спичечный коробок. Потом — с наперсток.

*А. Н. Стругацкий, Б. Н. Стругацкий.  
«Понедельник начинается в субботу»*

### Задачи

1. Предположим, что все размеры стальной проволоки изменили в  $n$  раз. Во сколько раз изменится: а) объем? б) масса? в) площадь поверхности? г) коэффициент жесткости? д) разрывное напряжение?
2. Кости ног некоторого животного в  $n$  раз прочнее костей другого, принадлежащего тому же семейству и имеющего ту же форму. Каково отношение ростов этих животных?
3. Великан и лилипут устроили соревнование: кто большее число раз подтянется на перекладине. Кто выиграет и почему?
4. Кто, великан или лилипут, глубже проваливается в рыхлую почву при ходьбе?
5. Почему бывают крупные морские животные, но не бывает столь же крупных птиц?
6. Оцените длину шкурки, которую снимают, почистив килограмм картошки. Во сколько раз изменится длина снятой шкурки, если линейный размер каждой картофелины станет в  $n$  раз меньше? Килограмм какой картошки можно быстрее почистить: крупной или мелкой? Отдельно рассмотрите предельный переход к случаю очень мелкой картошки.
7. После того, как человек вышел из воды после купания, на его коже осталось около 200 г воды. Оцените, какой процент веса Дюймовочки ростом 2,5 см составит вода после купания. Что на основе решения этой задачи можно сказать о свойствах смачивания поверхности тел маленьких существ, имеющих по ходу своей жизни контакт с водой?

8. Какие дождевые капли падают быстрее — крупные или мелкие?
9. Почему длинные волны на воде являются гравитационными, а короткие — капиллярными, а не наоборот?
10. После семи стирок линейные размеры куска мыла уменьшились вдвое, то есть вдвое уменьшились его ширина, длина и высота. На какое количество стирок его еще хватит?
11. Модель крана поднимает 10 бетонных плит, а с 11 плитами трос рвется. Сколько плит поднимет реальный кран, если все линейные размеры модели (включая, разумеется, и размер плит) увеличить в 10 раз?
12. Имеются два клубка, намотанные из одинаковой шерстяной нити. Радиус одного из них в  $n$  раз больше радиуса другого. Во сколько раз длиннее нить, из которой он намотан?
13. Имеются две геометрически подобные пружины, изготовленные из одинакового материала. Как соотносятся их коэффициенты жесткости? Упругость материала характеризуется модулем Юнга  $E$ , имеющим размерность  $\text{Н/м}^2$ .
14. Жидкость, не смачивающая стенки, налита в пробирку радиуса  $r$ . Найдите критерий, обеспечивающий подобие формы поверхности жидкости в двух пробирках.
15. Капли двух различных жидкостей лежат на несмачиваемой поверхности. Благодаря силе тяжести их форма не идеально круглая. Как соотносятся размеры капель, которые будут иметь одинаковую форму (т. е. будут подобны друг другу)? Коэффициенты поверхностного натяжения жидкостей известны.
16. Имеются два геометрически подобных соленоида, причем первый больше второго в 2 раза. Как соотносятся индуктивности этих соленоидов? Как соотносятся магнитные поля в соленоидах при одинаковом токе?
17. Имеются два подобных друг другу гальванических элемента, все размеры которых отличаются в 2 раза. Как соотносятся электрические характеристики этих элементов (ЭДС, емкость, внутреннее сопротивление)?
18. Источник, испускающий электроны с нулевой скоростью, помещен в однородное электрическое поле  $E$  и однородное магнитное поле  $B$ . Магнитное поле уменьшили в 2 раза. Будет ли траектория подобна исходной? Если да, найдите коэффициент подобия.
19. Все размеры солнечной системы изменились в  $N$  раз. Во сколько раз изменятся временные масштабы движения планет по своим орбитам? Рассмотрите два случая: а) не меняются массы планет, б) не меняется плотность планет.

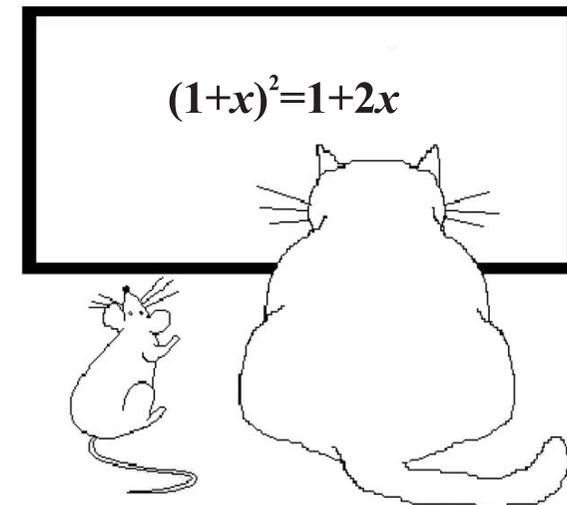
20. Покажите, что закон всемирного тяготения допускает геометрически подобные орбиты в поле массивной звезды. Установите, как меняются периоды движения планет по этим орбитам с ростом их пространственного масштаба.
21. Тело остывает за счет теплового излучения в соответствии с законом Стефана–Больцмана. Чем отличается закон изменения температуры во времени для тела, все размеры которого увеличены в 2 раза?
22. Для осциллятора, потенциальная энергия которого зависит от координаты по степенному закону  $U(x) = kx^{2N}$ , с помощью изменения временного и пространственного масштабов движения установите вид зависимости периода колебаний от амплитуды. Обсудите отдельно случаи  $N = 1$  (классический линейный осциллятор) и  $N = 2$ .
23. Атом водорода и однократно ионизированный атом гелия имеют подобные спектры. Во сколько раз отличаются частоты спектральных линий этих двух систем?
24. Как, имея график функции  $f(x) = x + x^3$ , получить решение кубического уравнения  $x^3 + px + q = 0$  ( $p > 0$ )?

## 2. АНАЛИЗ В ФИЗИКЕ

...Я переписал задачу по-своему,  
чтоб она выглядела попроще...

*Н. Н. Носов.*

*«Витя Малеев в школе и дома»*



## ФИЗИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Для физика, в отличие от математика, как параметры, так и переменные величины в математическом уравнении должны являться конкретными количествами.

*П. Л. Капица*

Как известно, физика тесно связана с математикой. Действительно, при решении физических задач появляются и подвергаются преобразованиям различные формулы и уравнения. Очень часто решение задачи сопровождается тем или иным геометрическим построением. При решении физической задачи устанавливаются функции, связывающие физические величины, и т. д.

Для физика-исследователя математическая и физическая «части» решения задачи не являются отдельными и независимыми. При использовании формул, геометрических построений и функций физик может привлекать для обсуждения их свойств различные физические приемы и соображения.

К таким приемам, прежде всего, относится использование приближенного характера решения. Замечательно, что физики научились использовать приближенные методы «на пользу» теории. Выпишем основные формулы «алгебры приближенных чисел». Во всех приведенных ниже формулах величина  $x$  считается малой по сравнению с единицей, т. е.  $x \ll 1$ .

$$(1+x)^2 \approx 1+2x$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$$

$$\frac{1}{(1+x)} \approx 1-x$$

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1-x^2/2$$

Подход к решению задач, основанный на использовании приведенных соотношений, не только приводит к своеобразной алгебраической технике, но и может быть использован при геометрических построениях. Например, при решении физических задач часто встречаются треугольники, стороны которых могут отличаться на порядок и больше. Именно такой треугольник возникает, если мы рассматриваем с Земли удаленные объекты, например, Солнце, Луну и т. д.

Ниже приведены примеры задач, которые сформулированы как математические, однако при их решении могут быть применены физические методы и приемы. Интересный пример физического анализа дает задача 5. Она иллюстрирует ситуацию, когда физиков интересует качественное поведение уравнения, а не формула для его решения.

### Задачи

1. В каком случае в соотношении  $x^3 + 0,001x$  можно пренебречь первым членом? Вторым членом? Нельзя отбросить ни тот, ни другой?
2. Найдите приближенно
  - а)  $\sin(1^\circ)$ , б)  $\sqrt{404}$ , в)  $\cos(44^\circ)$ .
3. Преобразуйте следующие выражения при малых  $x$ :
  - а)  $\sqrt{1+x} / (1-x)^2$ ; б)  $(1+x)^3 - 1 - \sin x$ ; в)  $\frac{1}{2}x \cdot \sin x - 1 + \cos x$ .
4. Решите уравнение  $\cos x = kx$  в области  $0 < x < \pi$ . Рассмотрите два случая:  $k \ll 1$  и  $k \gg 1$ .
5. Изобразите на плоскости параметров области, отвечающие разному числу действительных корней уравнений:
  - а)  $x^2 + px + q = 0$ , б)  $x^4 + px^2 + q = 0$ , в)  $x^3 + px + q = 0$ .
6. Найдите приближенно решение уравнения  $\varepsilon x^4 - x^2 + 3x - 2 = 0$  в случае, если положительный параметр  $\varepsilon$  — малая величина порядка 0,01.
7. Докажите, что в любом треугольнике хотя бы две стороны всегда одного порядка длины.
8. Оцените высоту равнобедренного треугольника, стороны которого равны 1,0001 и 2,0001.
9. В треугольнике ABC сторона AB намного больше стороны BC. Докажите, что сторона AC того же порядка длины, что и AB, а угол BAC мал. Может ли быть малым угол ACB?
10. Получите приближенную формулу для площади треугольника, у которого одна из сторон много меньше двух других. Рассмотрите сначала случай равнобедренного треугольника, а затем — произвольного. Оцените точность Вашей формулы.
11. Из вершины A прямоугольного треугольника ABC опущена высота AH. Проведена окружность с центром в точке B, проходящая через точку A. Докажите, что при малых значениях угла ABC окружность делит отрезок CH примерно пополам.

12. Докажите, что если в треугольнике все три стороны одного порядка длины, то возможны только две альтернативные ситуации:
  - а) все углы треугольника одного порядка;
  - б) два угла треугольника малы и их величины одного порядка.
13. Получите приближенную формулу для площади правильного  $N$ -угольника, применимую в случае, когда число  $N$  велико. В качестве характерного размера многоугольника используйте радиус описанного круга  $R$ . Получите приближенную формулу, дающую относительное отклонение площади этого многоугольника от площади круга  $\varepsilon_N = \frac{\Delta S_N}{S}$ , где  $S = \pi R^2$ , и изучите поведение величины  $\varepsilon_N$  с ростом  $N$ .
14. Докажите, что при малых  $x$  окружность  $x^2 + y^2 = R^2$  может быть аппроксимирована параболой.
15. Решите задачу, обратную предыдущей: покажите, что параболу вида  $y = a - bx^2$  вблизи вершины можно аппроксимировать окружностью, и найдите ее радиус и центр.
16. Аппроксимируйте параболу  $y = ax - bx^2$  в ее высшей точке окружностью из «физических соображений». Для этого воспользуйтесь тем, что тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе такого вида.
17. Аппроксимируйте функцию  $y = a \cos kx$  окружностью при малых  $x$ . В какой точке расположен центр этой окружности? Чему равен ее радиус?

## АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ

Функции, как и живые существа, характеризуются своими особенностями.

П. Монтель<sup>1</sup>

Результат решения физической задачи часто представляется некоторой функцией, определяющей искомую величину. В математике принято исследовать изучаемую функцию: выяснить ее асимптоты, установить свойства симметрии, наличие экстремумов и т. п. Такое исследование часто позволяет построить, как говорят, качественным образом график функции. Эти приемы и соответствующие навыки оказываются очень полезными при решении физических задач. Действительно, каждый «шаг» в математическом исследовании функции может иметь физическую интерпретацию, которая позволяет продвинуться в понимании физической задачи. Верно и обратное: те или иные физические приближения в исходной задаче позволяют выяснить асимптотический характер функции, даже если ее явный вид пока еще не известен. Приведем простейший пример: если имеется заряженное тело сложной конфигурации, то на больших расстояниях от него электрическое поле будет зависеть от координаты по тому же закону, что и для точечного заряда (см. задачи 2 и 3). Выяснив из подобных физических соображений поведение функции в тех или иных предельных ситуациях, можно делать заключения о наличии у функции экстремумов и т. п.

### Задачи

1. Маленький шарик шарнирно укреплен на легком стержне длины  $l$  (рис. 1.). Шарикку сообщают некоторую скорость  $v_0$ . Привлекая известные результаты и качественные соображения, обсудите вид зависимости периода колебаний от начальной скорости  $v_0$ . Угол отклонения маятника может быть любым.

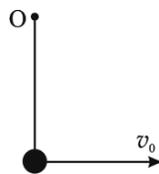


Рис. 1

2. По тонкому кольцу радиуса  $R$  равномерно распределен электрический заряд  $Q$ . С помощью физических соображений установите вид зависимости электрического поля от координаты  $x$ , отсчитываемой вдоль оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости (рис. 2): а) вблизи центра кольца, б) вдали от кольца. Опираясь на эти результаты,



Рис. 2

3. Имеется тонкий диск радиуса  $R$ , по которому равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Определите зависимость напряженности электрического поля на оси, проходящей через центр диска перпендикулярно плоскости диска (рис. 3), от расстояния до него в случаях, когда это расстояние мало и велико по сравнению с радиусом диска.

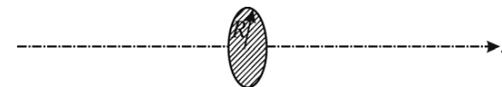


Рис. 3

4. Материальная точка движется по закону  $x = v_0 t + a \sin \omega t$  ( $v_0 > 0$ ,  $a > 0$ ). Установите, при каких значениях параметров точка все время движется только вперед, а при каких возможно ее движение как вперед, так и назад. Постройте качественно графики зависимости координаты тела от времени для первой и второй ситуаций. Придумайте физический пример, которому может соответствовать такой закон движения.
5. Сила взаимодействия двух молекул в некоторых случаях может быть описана потенциалом Ленарда–Джонса  $U(r) = 4a [-(b/r)^6 + (b/r)^{12}]$ . Обсудите вид зависимости потенциала от расстояния между молекулами. Покажите, что потенциал имеет минимум. Используя этот результат, оцените расстояние между молекулами вещества и величину энергии, необходимой, чтобы оторвать молекулы друг от друга. (Параметры  $a$  и  $b$  считайте известными.)
6. В круге радиуса  $R$  вырезали сектор с углом  $\alpha$  так, чтобы получить развертку конуса. Обоснуйте, что зависимость объема такого конуса  $V$  от угла  $\alpha$  обязательно имеет максимум. Покажите, что угол при вершине конуса максимального объема равен  $109^\circ 28'$ . (Известно, что для некоторых модификаций и соединений углерода валентные связи атомов углерода направлены к вершинам тетраэдра, причем угол между ними составляет как раз  $109^\circ 28'$ .)
7. Известно, что для балки прямоугольного сечения прочность на изгиб определяется выражением  $bh^2$ , где  $b$  — ширина балки,  $h$  — ее высота.

<sup>1</sup> Поль Антуан Аристид Монтель (1876–1975) — французский математик.

Из цилиндрического бревна диаметра  $d$  изготавливают балку. Найдите ширину и высоту балки максимальной прочности.

8. Лампу подвешивают над центром круглого стола. Обсудите, как зависит освещенность на краю стола от высоты  $h$ , на которой подвешена лампа. Обсудите сначала случаи очень малой и очень большой высоты. Найдите условие, при котором освещенность на краях стола максимальна.
9. Частица с массой  $m$  налетает на атомное ядро с массой  $M$ . После упругого удара ядро приобрело кинетическую энергию, составляющую  $n$ -ую часть кинетической энергии налетающей частицы. Постройте график зависимости величины  $n$  от отношения масс частиц  $k = m/M$ . При каком отношении масс доля переданной энергии максимальна?
10. В толстостенный цилиндрический сосуд массы  $M$  наливают жидкость с плотностью  $\rho$  (рис. 4). Обсудите свойства зависимости высоты центра масс системы от высоты  $h$  налитой в сосуд воды. Уровень воды отсчитывается от дна сосуда. Высота внутренней части цилиндра равна  $H$ , толщина стенок  $d$ , внутренний радиус  $R$ .

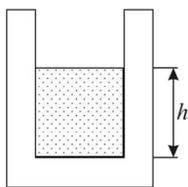


Рис. 4

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

...Внимание — в уравнении параметр!..

*Название математической статьи в журнале «Квант»*

Обычно решение физической задачи заканчивается получением численного значения искомой величины либо формулы, выражающей ее зависимость от других величин, «заданных по условию». Если посмотреть на полученные в результате такого решения уравнения (или неравенства), то может оказаться, что они зависят от каких-либо параметров. Численное значение получается при подстановке каких-либо конкретных значений этих параметров. Однако если параметры могут принимать разные значения, то может случиться так, что в зависимости от их величины реализуется качественно разное поведение системы. Пусть, например, система характеризуется некоторым параметром  $a$ . Тогда может случиться так, что при  $a$ , большем некоторого критического значения  $a_c$ , система будет себя вести одним образом, а при  $a < a_c$  — другим.

Поясним это на простом примере. Пусть с поверхности небесного тела стартует ракета. Если скорость ракеты больше второй космической, то ракета полностью преодолит силу тяготения и улетит (со временем) сколь угодно далеко, при этом ее траекторией будет гипербола. Если же скорость меньше второй космической, то ракета останется в ограниченной области пространства в окрестности небесного тела и будет двигаться по эллипсу. Интересно, что точно «критическому» значению скорости (второй космической) отвечает своя, особая траектория ракеты — парабола.

Может случиться и так, что существует несколько значений параметра, соответствующих качественным перестройкам поведения системы. Таким образом, за величиной параметра может скрываться «разная физика» задачи. Такие задачи интересны тем, что требуют не только «получения ответа», но и определенного исследования.

Еще более интересная ситуация возникает, если физическая система характеризуется двумя параметрами, например  $a$  и  $b$ . Количество возможных ситуаций существенно возрастает, и иногда не совсем ясно, как «перебрать» все возможные варианты решения. В этом случае помогает представление решения на плоскости параметров: можно изобразить плоскость  $(a, b)$  разбитой на характерные области, каждая из которых отвечает своему типу поведения системы. (См. в связи с этим задачу 5 из раздела «Анализ функций» и комментарии к ней.) Следует сказать, что такой подход к анализу поведения систем имеет очень глубокое содержание. Он может применяться к большому количеству физических (и математических) задач, особенно

в теории динамических систем, современной теории бифуркаций и др., когда количество возможных вариантов поведения системы велико и их трудно установить и исследовать. Мы познакомимся с таким подходом на примере «почти» традиционных физических задач.<sup>2</sup>

Скажем еще пару слов о выборе параметров. В приведенном выше примере он очевиден — это скорость ракеты. Однако если параметров несколько, то на самом деле поведение системы может зависеть не «отдельно» от каждого из них, а от некоторой их комбинации (или комбинаций), которые принято называть существенными параметрами. Например, если нас интересует движение тела у поверхности Земли, то, вообще говоря, оно зависит от радиуса Земли  $R$  и ее массы  $M$ , но единственным существенным параметром служит ускорение свободного падения  $g$ , которое является комбинацией массы и радиуса Земли  $g = G \frac{M}{R^2}$ . В данном случае существенный параметр выявить просто, но иногда это также требует определенного анализа. Полезным оказывается соображение о том, что часто существенные параметры являются безразмерными комбинациями исходных физических параметров. В случае, если проблема выбора существенных параметров непуста, мы указываем их в условии задачи.

### Задачи

1. В одинаковые сообщающиеся сосуды налита жидкость с плотностью  $\rho_T$  так, что ее высота равна  $H$ . В один из сосудов начинают очень медленно подливать другую, более легкую жидкость с плотностью  $\rho_L$ . Что будет происходить в системе? Будут ли иметься какие-то особенности в зависимости высоты заполнения второго сосуда от параметра — количества более легкой жидкости? Жидкости не перемешиваются.
2. На неподвижной полусфере радиуса  $R$  в верхней точке располагается небольшое тело. Телу ударом сообщают горизонтальную скорость  $v_0$ . Какие качественно различные варианты поведения тела возможны в зависимости от параметра — скорости  $v_0$ ? Трение отсутствует.
3. Шар радиуса 10 см, изготовленный из материала с плотностью  $0,1 \text{ г/см}^3$ , плавает в воде. Определите глубину погружения шара.

<sup>2</sup> Подход, основанный на разбиении пространства параметров (в общем случае многомерного) на характерные области с последовательным изучением поведения на разделительных поверхностях, линиях и характерных точках, восходит к выдающемуся математику и физiku А. Пуанкаре (1854–1912). Иногда такой подход называют стратегией Пуанкаре.

4. Два груза массы  $M$ , скрепленные пружиной жесткости  $k$ , покоятся на горизонтальной плоскости. На эту систему вдоль соединяющей грузы прямой налетает другой груз массы  $m$ . Произойдет ли повторное столкновение грузов? Исследование проведите в зависимости от параметра  $\frac{m}{M}$ . Все удары идеально упругие, трения нет, пружина невесома, удара грузов массы  $M$  друг о друга не происходит.
5. В теплоизолированный сосуд, содержащий воду массы  $M$  при температуре  $T^\circ\text{C}$ , бросили кусок льда массы  $m$  при температуре  $t^\circ\text{C}$ . Какие качественно различные состояния системы возможны после установления теплового равновесия? Изобразите на плоскости параметров  $(T, t)$  области, соответствующие каждому из этих состояний. Каким точкам на этой плоскости соответствует нулевая конечная температура?
6. На доске массы  $M$  лежит небольшой брусок массы  $m$  (рис. 5). Коэффициент трения между доской и бруском равен  $\mu_1$ , а между доской и поверхностью —  $\mu_2$ . К бруску приложена горизонтальная сила  $F$ . Укажите все возможные качественно различные варианты поведения системы и изобразите на плоскости параметров  $(\mu_1, \mu_2)$  соответствующие им области.

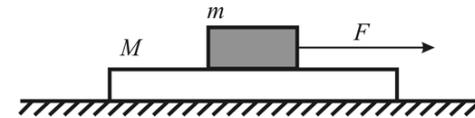


Рис. 5

7. Имеются три не растворяющие друг друга жидкости с одинаковой плотностью. В объеме, наполненном жидкостью 3, плавают две небольшие капельки из жидкостей 1 и 2. Капли соприкоснулись. Что с ними произойдет дальше? Коэффициенты поверхностного натяжения на соответствующих границах раздела  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$  и  $\sigma_{13}$ .
8. Поле имеет вид прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ , причем  $b < a$ . Человек может идти по дороге по краю поля со скоростью  $u$ , или по полю со скоростью  $v < u$ . По какому маршруту ему следует двигаться, чтобы попасть из вершины в противоположную за минимальное время? Представьте результат на плоскости безразмерных параметров  $\varepsilon = \frac{v}{u}$ ,  $\mu = \frac{b}{a}$ . В каких предельных случаях пешеходу проще всего выбрать маршрут? В каком случае он будет испытывать максимальные затруднения?

9. Мяч бросают с поверхности земли. На расстоянии  $l$  от точки броска стоит стена высоты  $h$  (рис. 6). Выясните, какие качественно различные варианты полета мяча возможны, и при каких условиях они реализуются?

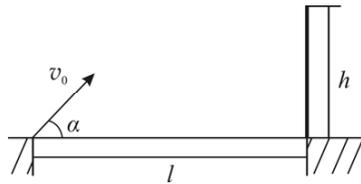


Рис. 6

10. Груз массы  $M$  подвешен на невесомой нити, а вторая невесомая нить прикреплена к его нижней части (рис. 7). Начиная с некоторого момента времени, нижнюю нить тянут с постоянной силой  $f$ . Какая нить порвется? Считайте, что разрыв нити наступает при натяжении  $T$ ; вплоть до разрыва нить имеет постоянный коэффициент жесткости  $k$ .
11. К вбитому в стену гвоздю на невесомой нерастяжимой нити длины  $L$  подвешен маленький тяжелый груз. Под гвоздем на расстоянии  $l$  от нижнего положения груза ( $l < L$ ) вбит еще один гвоздь. Груз отклоняют вправо так, что нить образует острый угол  $\alpha$  с вертикалью (рис. 8), и отпускают без начальной скорости. Перечислите все возможные качественно различные типы поведения этой системы и изобразите соответствующие им области на плоскости безразмерных параметров ( $l/L$ ,  $\cos \alpha$ ). Потерями энергии пренебречь.

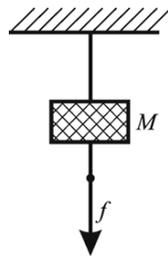


Рис. 7

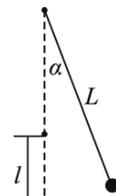


Рис. 8

## КАТАСТРОФЫ (БИФУРКАЦИИ)

...Братцы, вы знаете, какое солнце?  
Оно больше всей нашей Земли.  
Вот оно какое! И вот, братцы, от солнца  
оторвался кусок и летит прямо к нам...

*Н. Н. Носов.*

*«Приключения Незнайки и его друзей»*

Одним из интересных примеров «метаморфоз» функций при вариации параметра (параметров) является слияние и исчезновение экстремумов — максимумов и минимумов. На рис. 9 представлен простейший пример такого рода: при изменении параметра сливаются и исчезают минимум и максимум некоторой функции. Задача об исчезновении (рождении) экстремумов в общей математической постановке составляет предмет отдельной теории, которая известна как теория катастроф.

Можно дать простую физическую интерпретацию соответствующих ситуаций. Действительно, будем мыслить функцию как график зависимости потенциальной энергии некоторого тела от координаты. Понятно, что минимуму будет отвечать устойчивое положение равновесия тела. Соответственно, максимуму будет отвечать неустойчивое положение равновесия. Тогда ситуации слияния экстремумов на «физическом» языке отвечает слияние и исчезновение устойчивого и неустойчивого положений равновесия.

Эта интерпретация поясняет смысл термина «катастрофа». Действительно, пусть в «лунке» располагается шарик (рис. 9). При вариации параметра лунка меняет форму, но качественно состояние системы не меняется: шарик остается в лунке. Однако при достижении точки слияния экстремумов шарик «вываливается» из лунки и «скатывается» вниз. Состояние системы качественно изменилось, произошла «катастрофа».

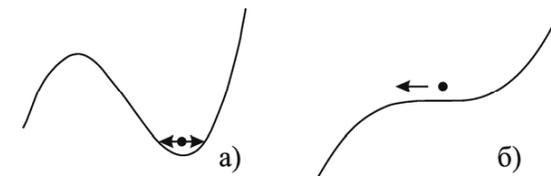


Рис. 9

В физике о ситуациях слияния (рождения) положений равновесия говорят как о бифуркациях. (Бифуркация — от латинского *bifurcus*, что означает разветвление.) Теория катастроф и теория бифуркаций — обширные области современной науки, которые нашли применение не только в физике, но и в химии, экономике и других отраслях знания.

Оказывается, можно выделить некоторые характерные и типичные ситуации исчезновения или рождения экстремумов или положений равновесия. Полезно познакомиться с соответствующей терминологией теории катастроф и бифуркаций. Так, слияние максимума и минимума функции называют часто катастрофой «складка». Ситуацию, когда минимум превращается в максимум и от него отделяются симметричным образом два новых минимума, называют бифуркацией «вилка» и т. д. Мы введем эти термины по ходу решения задач. Их знание очень полезно, поскольку позволяет при решении конкретных задач выявлять все характерные качественные ситуации.

Мы предлагаем вам достаточно «традиционные» на вид физические задачи, при анализе которых, однако, выявляются определенные качественные перестройки или бифуркации. Эти задачи подобраны так, чтобы последовательно познакомить Вас с простейшими и наиболее распространенными бифуркациями и «технологией» соответствующего исследования.

### Задачи

1. Насколько сильно притянутся два жестких провода с током, из которых один удерживается упругой пружиной, а другой неподвижен (рис. 10)? Что произойдет при возрастании тока в одном из проводников? Величины токов  $I$  и  $i$ , коэффициент жесткости пружины  $k$ , расстояние между проводниками в отсутствие токов  $L$ , длины проводников  $l$ .

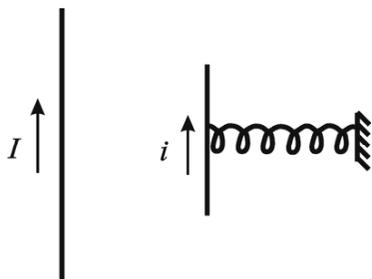


Рис. 10

2. В пробирке под невесомым поршнем находится идеальный газ, а поверх поршня налита ртуть (рис. 11). Газ очень медленно нагревают, при этом поршень поднимается, и ртуть начинает выливаться из пробирки. Что будет происходить при дальнейшем повышении температуры? Всегда ли реализуется единственный «сценарий» развития событий? Атмосферное давление  $p_0$ , масса поршня  $M$ , его площадь  $S$ , начальная температура газа  $T_0$ , длина пробирки  $l$ , первоначально газом занята часть пробирки  $l_0$ .

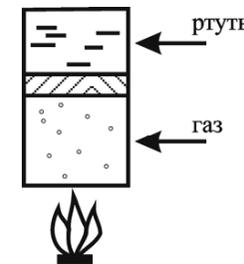


Рис. 11

3. Математический маятник в виде невесомого стержня длины  $l$  и маленького груза массы  $m$  может вращаться в вертикальной плоскости. К маятнику прикреплена спиралевидная пружина, при отклонении маятника от вертикали на угол  $\varphi$  создающая возвращающий момент  $M = \mu\varphi$ . В каком случае в системе возможно более одного положения равновесия? (Пружина может «закручиваться» на большие углы, в том числе большие  $2\pi$ .)
4. Математический маятник вблизи верхнего положения равновесия прикреплен к нелинейной пружине (рис. 12). Проанализируйте положения равновесия в системе. Считайте, что отклонение пружины от закона Гука описывается соотношением  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты, а угол отклонения маятника от вертикали мал. Длина стержня  $l$ , масса шарика  $m$ .

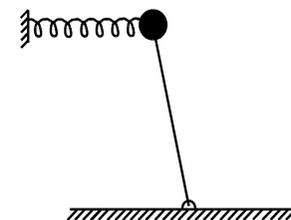


Рис. 12

5. Имеются два одинаковых кольца радиуса  $R$ , по каждому из которых равномерно распределен положительный электрический заряд  $Q$ . Вдоль оси, проходящей через центры колец, может скользить точечный отрицательный заряд  $-q$  (рис. 13). Обсудите вопрос об устойчивости состояний равновесия заряда в зависимости от расстояния между кольцами  $a$ .
6. Тонкая однородная палочка длины  $l$  и плотности  $\rho$  шарнирно укреплена за верхний конец так, что шарнир находится на расстоянии  $h$  от

верхности жидкости плотности  $\rho_{ж}$ . Какие качественно различные ситуации расположения палочки возможны? Рассмотрите два случая: точка прикрепления шарнира находится над поверхностью жидкости и точка прикрепления шарнира находится под поверхностью жидкости.

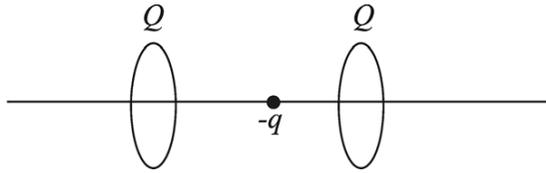


Рис. 13

7. Маленькая бусинка массы  $m$  может скользить без трения по тонкому проволочному кольцу радиуса  $R$  (рис. 14). Кольцо вращают с частотой  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии  $a$  от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Сначала исследуйте случай малых значений координаты  $x$ , отсчитываемой от оси вращения. Найдите в общем случае отвечающие качественным изменениям вида потенциала линии на плоскости безразмерных параметров  $\varepsilon = \frac{g}{\omega^2 R}$ ,  $\alpha = \frac{a}{R}$ . (При приближенном анализе можно использовать формулу  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$ )

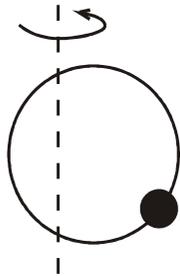


Рис. 14

8. Шарик массы  $m$  может скользить без трения по стержню, наклоненному под углом  $\alpha$  к горизонту. Шарик прикреплен к пружине жесткости  $k$ , второй конец которой неподвижно зафиксирован на расстоянии  $a$  от стержня в точке, принадлежащей проходящей через стержень вертикальной плоскости (рис. 15). Длина пружины в нерастянутом состоянии  $l_0$ . Как трансформируется при изменении параметров вид зависимости по-

тенциальной энергии от координаты шарика  $x$ , отсчитываемой вдоль стержня? Сначала рассмотрите случай  $\alpha = 0$ . Найдите отвечающие качественным изменениям вида потенциала линии на плоскости подходящих безразмерных параметров.

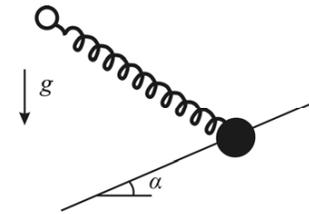


Рис. 15

9. Как модифицировать задачи 4 и 5, чтобы для них можно было зафиксировать такие же варианты изменения потенциала при вариации параметров, что и в задачах 7 и 8?
10. На рис. 16 показана вольтамперная характеристика полупроводникового радиотехнического элемента — туннельного диода. Считайте, что она задается кубическим полиномом  $I = a(U - U_0)^3 - b(U - U_0) + c$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — коэффициенты. Такой диод включен в цепь, содержащую регулируемую ЭДС  $E$  и резистор с регулируемым сопротивлением  $R$ . Определите напряжение на диоде. Укажите на плоскости введенных подходящим образом параметров область, в которой возможно единственное решение, а также область, где таких решений несколько.

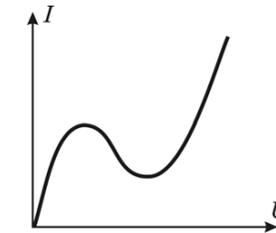
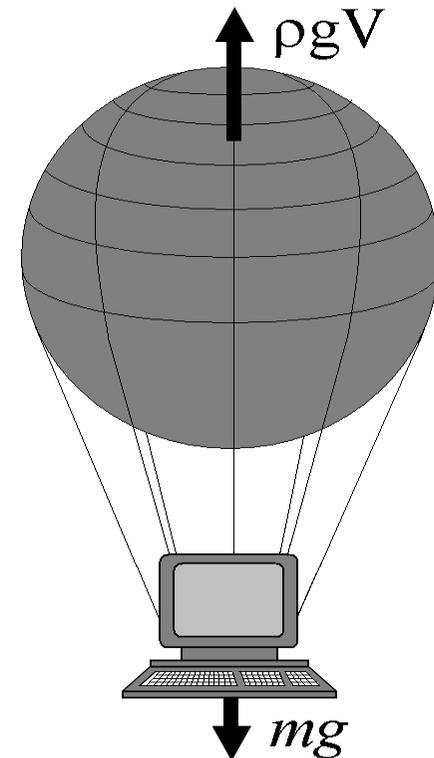


Рис. 16

### 3. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРА

... Янус Полуэктович... воспользовался  
машиной только один раз...

*А. Н. Стругацкий, Б. Н. Стругацкий*  
*«Понедельник начинается в субботу»*



**...Кристоваль Хунта, любивший во всем быть первым, взял за правило подключать по ночам машину к своей центральной нервной системе, так что на другой день у него в голове все время что-то явственно жужжало и щелкало...**

***А. Н. Стругацкий, Б. Н. Стругацкий  
«Понедельник начинается в субботу»***

Современный мир немислим без компьютеров. Сейчас физик основное время проводит за компьютером (может быть это и не так хорошо, но такова реальность). Компьютер — уникальный помощник исследователя. Но задачи для компьютера формулирует сам ученый, он сам корректирует выбранные параметры задачи, изменяет условия расчетов, выбирает способы иллюстрации и т. д. Таким образом, для ученого компьютер — не самодостаточная игрушка, а инструмент познания мира. Кроме того, компьютер — это и средство коммуникации и общения, и уникальная электронная библиотека, которую можно составить самому, используя как сканирование полезной литературы, так и возможности сети Интернет.

Но как медленно проникают компьютеры в систему школьного образования! Компьютеру обычно отведена отдельная «ячейка» в учебной деятельности — уроки информатики. А на уроках физики основным инструментом по-прежнему являются ручка, бумага и в лучшем случае калькулятор. Чтобы подготовить себя к исследовательской работе, нужно учиться пользоваться компьютером для решения задач. Предлагаем вашему вниманию несколько задач, для решения которых компьютер необходим. Некоторые из них относятся к поиску в сети Интернет.

## Задачи

1. Составьте программу, печатающую на экране треугольник Паскаля.
2. Нарисуйте на экране следующие кривые:
  - а) декартов лист  $x^3 + y^3 = 3axy$ , б) циссоиду Диоклеса  $y^2 = x^3/(a - x)$ ,
  - в) овал Кассини  $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = a^4 - 1$ .

Построение проведите для нескольких значений параметра  $a$ .

3. Ученик вышел из дома в школу, но на полпути он передумал и решил пойти в кино. Пройдя полпути в кино, он передумал и пошел на каток, затем на полпути снова пошел в школу и т. д. Создайте компьютерную модель, иллюстрирующую движение ученика. Каким будет в конечном итоге характер его движения? Чем он определяется? Определите период установившегося движения. Все объекты расположены на открытой местности. Обсудите возможные частные случаи и предельные переходы. Может быть, задача допускает какое-то обобщение?
4. Наклонная плоскость образует угол  $\alpha = 2^\circ$  с горизонтом. Из расположенной на ней точки бросают маленький шарик со скоростью  $v_0$  под углом  $\beta = 5^\circ$  к плоскости. Сколько ударов о плоскость совершит шарик, поднимаясь вверх по ней? На какую высоту он при этом поднимется? Напишите компьютерную программу, иллюстрирующую движение шарика. Проследите, как меняется с течением времени угол падения шарика на наклонную плоскость.
5. Напишите программу, моделирующую доску Гальтона.
6. Проведите численное моделирование задачи о случайном блуждании на двумерной решетке размера  $N \times N$ , считая, что на одном шаге по времени частица с равной вероятностью переходит в один из соседних (по вертикали и горизонтали) узлов или остается на месте.
7. Составьте программу, реализующую модель Винера–Розенблюта на двумерной решетке  $N \times N$ . Каждая клетка может находиться в одном из трех состояний: покой 0, рефрактерность 1 и возбуждение 2. На следующем временном шаге клетка переходит в возбужденное состояние, если в предыдущий момент она была в состоянии покоя и имела хотя бы одну соседнюю в возбужденном состоянии. (Соседними считаются клетки, расположенные рядом по горизонтали, вертикали и диагонали.) Из состояния возбуждения клетка всегда переходит в состояние рефрактерности, а из состояния рефрактерности в состояние покоя. Продемонстрируйте временную эволюцию модели на экране, кодируя состояние клеток цветом, для начального состояния решетки, заданного в виде, показанном на рис. 17.

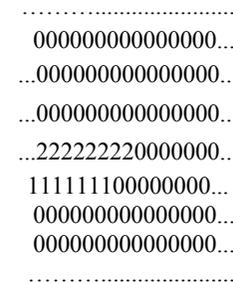


Рис. 17

8. Диполем называются два очень близко расположенных заряда противоположного знака. Разыщите в литературе (или выведите сами) формулу, позволяющую вычислять поле (потенциал) диполя. Исследуйте вопрос об эффективности этой формулы.
9. Напишите программу, моделирующую прохождение света через толстую линзу. При построении хода лучей пользуйтесь законами преломления, а не свойствами тонкой линзы. Рассмотрите прохождение пучка лучей через толстую линзу. Сравните полученную картину с известной из курса физики. Исследуйте, как зависит ход лучей от параметров линзы.
10. В цилиндрическом сосуде (например, в чашке с кофе) можно наблюдать яркую линию с еще более ярким острием. Эта линия — каустика — представляет собой огибающую световых лучей, отраженных от цилиндрической поверхности. С помощью компьютера постройте семейство лучей, падающих параллельно друг другу и отражающихся от окружности. Укажите на получившемся рисунке каустики.
11. Одно из известных устройств сверхвысокочастотной электроники — клистрон — содержит две металлические сетки, на которые подано переменное напряжение  $U(t) = U_0 \cos \omega t$ . Через сетки со скоростью  $v_0$  летит пучок электронов (рис. 18). Постройте на компьютере для нескольких электронов, движущихся на определенном расстоянии друг от друга, вид траекторий на плоскости параметров (время, координата). Координату отсчитывайте от сеток. Взаимодействием электронов друг с другом можно пренебречь, зазор между сетками считайте очень малым.

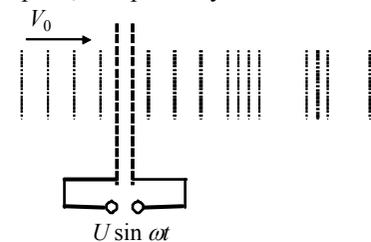


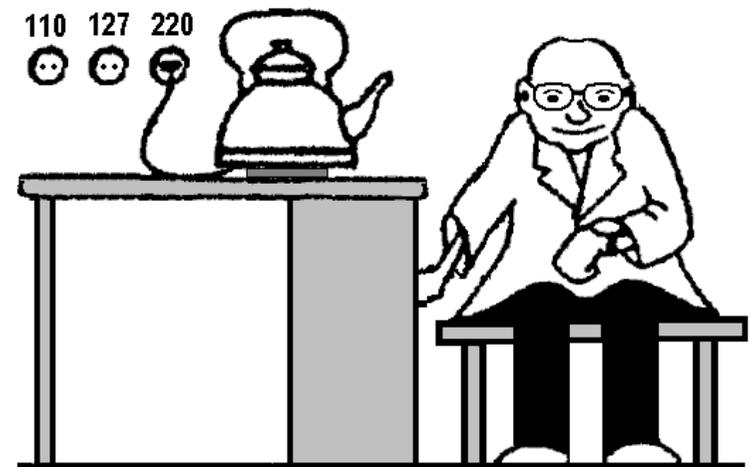
Рис. 18

12. Эволютой кривой называется огибающая ее семейства нормалей. Постройте систему нормалей к параболе и укажите на полученном рисунке эволюту. Проведите аналогичное построение для эллипса.
13. Постройте поверхности, представляющие собой огибающие семейства нормалей, для эллипсоида.
14. Принцип Гюйгенса состоит в том, что волновой фронт, испущенный поверхностью, можно найти как огибающую множества сферических (на плоскости круговых) фронтов, испущенных каждой точкой излучающей поверхности. Реализуйте компьютерную иллюстрацию принципа Гюйгенса для параболы.
15. Нарисуйте на экране картину, получающуюся при интерференции волн от двух источников, расположенных на расстоянии  $6\lambda$  друг от друга, где  $\lambda$  — длина волны. Величину интенсивности в различных точках кодируйте тонами серого цвета.
16. Напишите программу, которая строит зависимость от времени переменной и скорости колеблющегося математического маятника, описываемого уравнением  $\ddot{x} + \sin x = 0$ . С помощью полученных графиков обсудите вопрос о том, когда такую систему можно считать гармоническим осциллятором. Дополните программу так, чтобы можно было построить график зависимости периода колебаний от амплитуды.
17. Что изменится в предыдущей задаче, если задать большую начальную скорость маятника?
18. Синтезируйте на компьютере звуковое колебание, у которого частота уменьшается со временем, а в то же время высота тона растет.
19. Напишите программу, моделирующую движение шарика в замкнутой области, считая все удары о стенки абсолютно упругими. Рассмотрите движение в областях различной формы. (Квадрат, эллипс, прямоугольник и т. д.) Попробуйте выявить какие-то закономерности в динамике частицы. Организуйте поиск в сети Интернет по проблемам бильярдов. (Это весьма обширная область статистической физики и нелинейной динамики.)
20. Фракталы — это образования в природе (береговые линии, горные массивы, вихри, вихревая структура турбулентной жидкости) или геометрические объекты в математике, которые демонстрируют точное или приближенное подобие своих частей целому. Постройте на компьютере набор изображений таких фракталов, как снежинка Коха, салфетка и ковер Серпинского, дерево Пифагора, «дракон Хартера». Если вы не знакомы с правилами построения приведенных в условии фракталов, то следует обратиться к сети Интернет.
21. Разыщите в сети Интернет сайты, посвященные олимпиадным задачам по физике, и познакомьтесь с ними. Отдельно разыщите задачи Всероссийских олимпиад по физике.
22. Найдите сайт, на котором размещены статьи из журнала «Квант». Ознакомьтесь с его структурой, «скачайте» несколько статей, которые интересны для Вас. Посмотрите раздел журнала, касающийся абитуриентов.
23. Какие физико-математические школы есть в Саратове? Челябинске? Санкт-Петербурге? Москве? Долгопрудном? В чем их особенности?
24. Какие научные конференции для школьников проводятся (проводились) в России? Попытайтесь найти информацию о международных конференциях.
25. Используя возможности сети Интернет, познакомьтесь с биографиями и открытиями П. Л. Капицы, Л. Д. Ландау и Р. Фейнмана.
26. Используя возможности сети Интернет, соберите информацию на тему «Формула Кардано и ее история».
27. Используя возможности сети Интернет, соберите информацию на тему «Хаос и удвоения периода».

## 4. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ

...Но я был один, и я решил рискнуть,  
а заодно и попрактиковаться...

*А. Н. Стругацкий, Б. Н. Стругацкий  
«Понедельник начинается в субботу»*



В отличие от обычных школьных задач, исследовательская работа требует своего рода «погружения», постоянных размышлений. Она состоит из поиска, ошибок и открытий, больших и маленьких. В этом существенное отличие настоящей науки от олимпиад, где часто быстрота вытесняет глубину. Еще одна особенность реальных задач в том, что исследователю не только можно, но и нужно пользоваться учебниками, монографиями, статьями, консультациями, помощью коллег, возможностями сети Интернет. Ведь цель состоит именно в получении решения, а не в тренинге по решению задач с известным ответом! В школе же обычно все иначе. В школе никогда (за редким исключением) не учат технологии «мозгового штурма» задачи. А это один из существенных приемов, который ученые используют в своей работе.

Еще одно отличие школьных задач состоит в том, что их авторы точно знают, как эту задачу решать. (Трудно представить себе, чтоб творилось бы в школе на уроках в противоположном случае.) А вот задачи, которые решают ученые, как раз отличаются тем, что часто не ясно ни как их решать, ни что получится. (Кстати, иногда не получается ничего. Многие выдающиеся ученые, например физики Альберт Эйнштейн, Игорь Евгеньевич Тамм, химик Дмитрий Иванович Менделеев очень много времени потратили на задачи, которые решить не удалось.) Как не вспомнить здесь следующую цитату из известного произведения братьев Стругацких:

«Г-голубчики, — сказал Федор Симеонович озадаченно, разобравшись в почерках. — Это же п-проблема Бен Б-бецалея. К-калистро же доказал, что она н-не имеет р-решения. — Мы сами знаем, что она не имеет решения, сказал Хунта, немедленно ошестиниваясь. — Мы хотим знать, как ее решать...»

Задачи без заранее известного ее авторам ответа вообще не встречаются в школьных учебниках. Но именно такие задачи учат познавать окружающий мир, устанавливать новые закономерности. При этом важна не амбициозность темы, а характер исследования. Большим мастером составления таких задач был наш выдающийся соотечественник, Нобелевский лауреат Петр Леонидович Капица. Подобные задачи он часто давал на вступительных экзаменах в аспирантуру. По воспоминаниям, это «держало в форме» не только претендентов, но и их руководителей, поскольку к ним молодежь бегала за консультациями. (Советуем найти список задач П. Л. Капицы в сети Интернет!)

Можно и на школьном «уровне» сформулировать задачи, которые были бы близки к характеру работы ученого. Их можно назвать исследовательскими задачами. Некоторое их количество мы предложим здесь Вашему вниманию. Чтобы подчеркнуть их исследовательский характер, мы дали каждой задаче свое название.

Итак, из приведенных ниже задач для начала нужно выбрать всего одну — ту, которая Вам понравится. На ее решение придется потратить не час и даже не один день. Таким образом, значение имеет не число решенных задач, а глубина проработки решения. Такие задачи, можно надеяться, помогут Вам лучше понять науку как профессию, состоящую в получении новых результатов «своими руками». «Арсенал» Вашего исследования не фиксирован. Используйте теоретические соображения, эксперименты, компьютерное моделирование, по своим наклонностям и возможностям — в тексте даются лишь отдельные советы (впрочем, Вы можете им и не следовать). Используйте литературу — для решения некоторых задач это полезно, а решение некоторых из них без этого и невозможно — если необходимые Вам сведения выходят за рамки школьной программы. Используйте консультации своих учителей и ученых.

При решении некоторых задач из этого раздела понадобится численно решать дифференциальные уравнения. В этом нет каких-то особых трудностей. (В некотором смысле численное решение дифференциальных уравнений даже проще аналитического.) Первые необходимые сведения о численном решении дифференциальных уравнений содержатся в Приложении.

И еще одно замечание. Вы можете решать такие задачи не в одиночку — образуйте школьную научную лабораторию, — и вперед, к новым знаниям!

## Задачи

1. **Катастрофы мыльной пленки.** Имеются два проволочных кольца радиусов  $R$  и  $r$  (рис. 19). Выясните, при каких значениях расстояния  $h$  между кольцами может существовать мыльная пленка, натянутая одновременно на оба кольца и образующая некоторую фигуру вращения. Внутри колец пленок нет. Что произойдет с мыльной пленкой, если постепенно увеличивать  $h$ ? Проведите теоретическое рассмотрение и проделайте соответствующие эксперименты. Сначала рассмотрите случай колец одинакового радиуса.

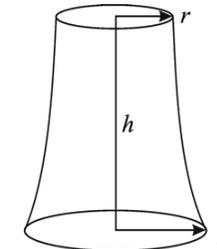


Рис. 19

2. **Цепочка сопротивлений.** Имеется бесконечная цепочка сопротивлений, показанная на рис. 20а. Получите разностное уравнение  $R_{n+1} = f(R_n)$ , позволяющее определить величину сопротивления  $R_{n+1}$  цепочки, составленной из  $n+1$  звеньев, по величине сопротивления  $R_n$  цепочки, составленной из  $n$  звеньев. Найдите неподвижную точку  $R_0$  этого уравнения. Проиллюстрируйте решение с помощью итерационной диаграммы типа показанной на рис. 20б. (Такие диаграммы популярны для иллюстрации решения разностных уравнений  $x_{n+1} = f(x_n)$ .) Сколько элементов должна содержать цепочка, чтобы ее сопротивление равнялось величине  $R_0$  с точностью до 1%? Установите связь Вашего рассмотрения с числами Фибоначчи и «золотым средним». Проведите эксперименты, подтверждающие (или опровергающие?) Ваши результаты.

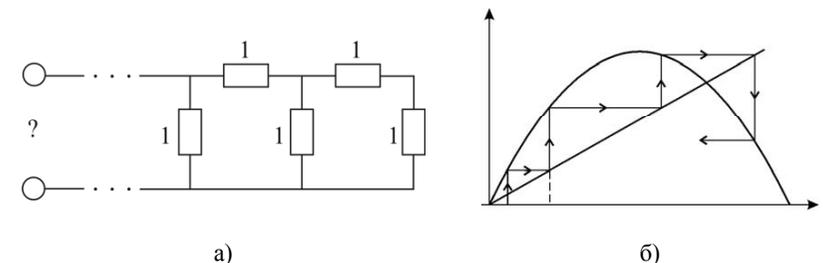


Рис. 20

3. **Искажение поверхности океана.** П. Л. Капица предложил такую задачу: над поверхностью океана помещена материальная точка массы  $m$ .

Точка располагается на высоте  $h$  над невозмущенным уровнем океана. Исследуйте вид возмущенной поверхности воды. Постройте соответствующие «профили» на компьютере. Все ли возможные конфигурации в такой системе можно наблюдать в реалистичных условиях на Земле? Рассмотрите возможные модификации этой задачи, например, случай расположения двух притягивающих центров над водой и т. п.

4. **Оптические каустики в цилиндрической чашке.** Проведите теоретическое, экспериментальное и компьютерное исследование каустики из задачи 10 из раздела «Задачи для компьютера».
5. **Форма изогнутой линейки.** Сожмите металлическую линейку, приложив к ее концам некоторое усилие. Какую форму примет слегка изогнутая линейка? Проверьте предположения, что форма линейки задается: а) синусоидой, б) параболой.
6. **Цепочка с грузиками.** Как надо распределить по цепочке систему грузиков разного размера, чтобы она приняла в поле силы тяжести форму полуокружности? Изготовьте такую цепочку и проведите эксперименты.
7. **Монета на наклонной плоскости.** Монету, лежащую на наклонной плоскости, толкают параллельно ребру этой плоскости. Исследуйте, как трансформируется траектория скольжения монеты в зависимости от угла наклона, коэффициента трения, начальной скорости. Проведите также компьютерное исследование и соответствующие эксперименты. Попробуйте провести классификацию возможных траекторий.
8. **Случайное блуждание на компьютере.** Проведите исследование задачи о случайном блуждании точки на двумерной решетке размера  $N \times N$  (задача 6 из раздела «Задачи для компьютера»).
9. **Плавающий шар.** Исследуйте вопрос о глубине погружения шара в жидкость. Проведите эксперименты с разными шариками и жидкостями разной плотности. Результаты экспериментов удобно представить в подходящих безразмерных переменных, в качестве которых могут выступать соответствующие комбинации размерных величин, характеризующих задачу. (Плотность жидкости можно менять, подсыпая в воду соль.) Изучите возможные колебания шара на поверхности воды. Как зависит период от введенных безразмерных параметров? Оцените роль диссипации в системе. Линейны или нет колебания шара?
10. **Статические и колебательные свойства висящей цепочки.** Говорят, что если цепочку подвесить за концы, то она примет форму цепной линии. Проверьте это утверждение. Если слегка толкнуть цепочку за концы в горизонтальном направлении и снова зафиксировать их, то возникнут колебания. Попробуйте исследовать эти колебания.
11. **Вращающаяся цепочка.** Исследуйте устойчивые конфигурации, которые может принимать массивная цепочка, если ее вращать за один конец. Проведите предварительно эксперименты, изготовив цепочку из скрепок. Попытайтесь реализовать соответствующую компьютерную модель.

12. **Изохронный маятник.** Гюйгенс показал, что материальная точка, скользящая по циклоиде, совершает изохронные колебания, т. е. колебания, период которых не зависит от амплитуды. Изготовьте циклоиду из жести и изучите колебания шарика, катающегося по циклоиде. Изготовьте и изучите маятник с направляющими в виде циклоиды. Попробуйте провести компьютерное моделирование движения материальной точки, скользящей по циклоиде, и проверьте в численном эксперименте результат Гюйгенса.
13. **Неизохронный маятник.** Какую форму следует придать поверхности в предыдущей задаче, чтобы колебания шарика соответствовали «потенциальной яме» не с квадратичным минимумом, а с минимумом четвертой степени? Выясните, как зависит от амплитуды период колебаний такого маятника.
14. **Радуга.** Найдите в справочнике данные по коэффициенту преломления света в воде в диапазоне от красного цвета до фиолетового и воспроизведите в цветной графике на компьютере расчет траекторий лучей света в капле воды (теория радуги Декарта). Определите, под какими углами по отношению к направлению на солнце наблюдатель увидит красное и фиолетовое кольца радуги. Попробуйте провести аналогичное исследование для капли несферической формы.
15. **Поющая бутылка.** Известно, что если дуть в горло бутылки, то бутылка будет издавать звук определенной частоты («гудеть»). Определите, от каких параметров бутылки зависит высота издаваемого тона (т. е. частота звука). Проведите эксперименты с различными бутылками и пузырьками. Проверьте найденную зависимость экспериментально.

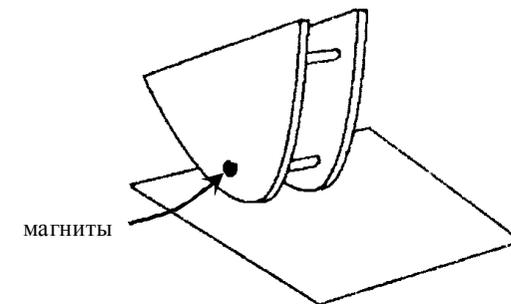


Рис. 21

16. **Качалка.** В теории катастроф очень популярна модель, известная как качалка (рис. 21). Рассмотрите параболическую качалку, форма нижней поверхности которой задана уравнением  $y = x^2$ . Исследуйте проблему устойчивости такой системы. Ознакомьтесь с теорией качалки (Т. Постон, И. Стюарт. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир), связывающей проблему ее устойчивости с построением огибающей семейства норма-

лей. Проведите компьютерное моделирование семейства нормалей. Изготовьте качалку из картона, проведите эксперименты с ней и сравните с результатами компьютерного моделирования. Реализуйте ту же программу исследований для качалки в форме эллипса.

17. **Прыжок с гирями.** Известно, что древнегреческие атлеты прыгали в длину с гирями. Бросая их в определенный момент, они увеличивали дальность прыжка. Попробуйте определить, в какой момент и как нужно отбросить гири, чтобы максимально увеличить дальность прыжка.
18. **Неваляшка (Ванька-Встанька).** Рассмотрим «модель» этой известной игрушки в виде цилиндра со смещенным центром тяжести. Если такой цилиндр положить на плоскую поверхность, то он имеет два положения равновесия: устойчивое (центр тяжести занимает наинизшее положение) и неустойчивое (центр тяжести занимает наивысшее положение). Исследуйте, какие положения равновесия будет иметь этот цилиндр, если его положить на выпуклый (или вогнутый) полуцилиндр большего радиуса. Что будет происходить при выведении цилиндра из положений равновесия?
19. **Математический ряд и физический эксперимент.** Если положить на один кирпич сверху второй, то его можно сдвинуть на максимальное расстояние  $x_1 = l/2$ . Такую конструкцию можно положить на третий кирпич. Найдите максимальное расстояние  $x_2$ , на которое ее можно сдвинуть относительно третьего кирпича. Получите соответствующую последовательность  $x_n$ . Чему равна длина такой стенки из бесконечно большого числа кирпичей? Попробуйте экспериментально реализовать соответствующую ситуацию. (Рекомендуем использовать костяшки домино, спичечные коробки и др.) Обсудите результаты эксперимента и их соответствие с теорией. Попробуйте придумать и реализовать в эксперименте другую стратегию, нацеленную на получение наиболее длинной стенки. Стенку какой длины Вам удастся создать?
20. **Маятник с переменной массой.** Изготовьте маятник из сосуда, в который можно наливать воду (например, из бутылки). Изучите зависимость периода колебаний маятника от массы налитой в бутылку воды. Попробуйте построить такой график теоретически. Сначала считайте маятник математическим с длиной, равной расстоянию до центра масс системы, затем — физическим. Сравните результаты двух теорий и эксперимента.
21. **Волновой фронт.** Волновой фронт, испущенный некоторой поверхностью (линией), можно найти, если отложить отрезки равной длины на системе нормалей к испускающей поверхности. Проведите компьютерное исследование распространения волновых фронтов, испущенных параболой, эллипсом и другими линиями или поверхностями.
22. **Теннисный мячик на лестнице.** Постройте и исследуйте модель, описывающую, как маленький мячик скачет по лестнице. Изучите возмож-

ные варианты движений в зависимости от параметров задачи. В каком случае мячик будет разгоняться сколь угодно сильно?

23. **Поле решетки зарядов.** С помощью компьютера получите график зависимости потенциала, созданного квадратной решеткой из  $N \times N$  зарядов величины  $q$ , от расстояния  $x$  от плоскости решетки, отсчитываемого от ее геометрического центра (рис. 22). Расстояния между зарядами  $a$ , а число  $N$  достаточно велико. Выделите на полученном графике те или иные участки, отвечающие приближенным моделям, которые можно использовать в данной задаче. Используя трехмерную графику, постройте профили потенциала как функции координат  $y, z$  для различных значений  $x$ .

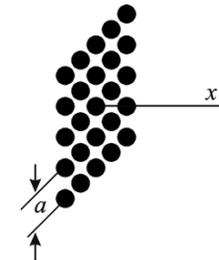


Рис. 22

24. **Бифуркации в осцилляторе.** Изучите, как зависит от времени координата  $x$  осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

в котором потенциал задан выражением  $U(x) = U_0(x) - \varepsilon x$ . Функция  $U_0(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$  выбрана так, что в точке  $x = 1$  она имеет кубическую точку перегиба ( $U_0'(1) = 0, U_0''(1) = 0$ ). Изучите, как меняется вид зависимости  $x(t)$  при изменении параметра  $\varepsilon$ , и объясните полученные результаты. (В качестве первого шага постройте график зависимости потенциальной энергии от координаты  $x$  и изучите его трансформацию при вариации  $\varepsilon$ .)

25. **Двумерный маятник в поле трех притягивающих центров.** Изучите движение маятника, колеблющегося над горизонтальной плоскостью, на которой в вершинах равностороннего треугольника располагаются три одинаковых магнита. Положение равновесия маятника лежит на малой высоте точно над центром треугольника. В качестве простейшей модели для компьютерного исследования рассмотрите материальную точку, которая может двигаться в плоскости трех притягивающих центров (приближение длинной нити маятника). Силу притяжения вычисляйте по закону обратных квадратов. Рассмотрите случаи отсутствия затухания и затухания, пропорционального скорости.

26. **Камнепад.** По наклонной плоскости спускается, подпрыгивая, камень. Постройте и изучите модель этого процесса. Учтите неупругий характер удара и трение о плоскость.
27. **Оптимальный бросок.** Как известно, максимальная дальность полета тела достигается при броске под углом 45 градусов к горизонту. Что изменится в этом утверждении, если учесть сопротивление воздуха?
28. **Траектория брошенного тела.** Известно, что тело, брошенное под углом к горизонту, летит по параболе. Но по закону Кеплера это же тело должно двигаться по ...эллипсу. Обсудите, как совместить (или не совместить) эти утверждения на примере астероида шарообразной формы.
29. **Ваза Тантала**<sup>3</sup>. Система работает так: сначала вода наполняет резервуар, отводная трубка наполнена воздухом, и вода не вытекает (рис. 23).

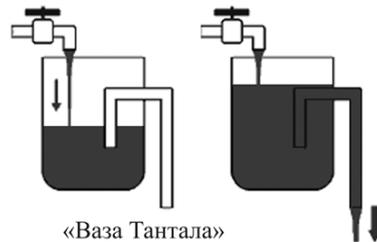


Рис. 23

Когда вода покрывает трубку, она начинает вытекать. При этом действует эффект сифона — вытекание прекратится только тогда, когда уровень воды в резервуаре упадет до нижнего обреза трубки и в нее попадет воздух. Скорость вытекания через трубку должна быть больше, чем скорость поступления воды в резервуар из крана. Изготовьте вазу Тантала и изучите зависимость периода возникающих автоколебаний от параметров системы. Попробуйте построить элементарную теорию.

30. **Сообщающиеся сосуды и уравнения.** Имеются два сообщающихся сосуда, один из которых имеет форму цилиндра, а другой — усеченного перевернутого конуса. В них влили определенный объем воды. Исследуйте вопрос о том, каков будет уровень воды в сосудах. Рассмотрите аналогичную задачу для сообщающихся сосудов шарообразной и цилиндрической формы. Обсудите возможность использования таких систем для экспериментального решения некоторых типов уравнений. Попробуйте рассмотреть какие-либо другие варианты сообщающихся сосудов.
31. **Гигантские мыльные пузыри.** Предложите способ изготовления мыльных пузырей максимального размера. Опишите Ваш способ и представьте фотоснимки. Проведите какие-либо эксперименты с гигантскими пузырями.

<sup>3</sup> Тантал — наказанный богами персонаж древнегреческого мифа, который не мог пить, стоя в воде: когда он наклонялся, вода уходила.

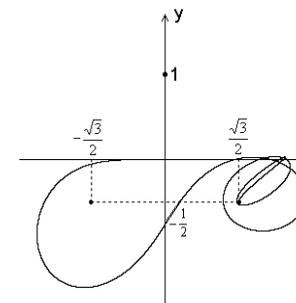
## 5. РЕШЕНИЯ, КОММЕНТАРИИ

И вот Знайка стал думать. Думал он три дня и три ночи и придумал...

Н. Н. Носов.

«Приключения Незнайки»

### Земля–Луна



$$F=Ma$$

$$U = -\gamma m \sum_{i=1}^3 \frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}}$$

$$V \approx 12 \text{ км/с}$$



## Оценки

1. Диаметр лапки у кошки около 2,5 см, т. е. ее площадь около  $6 \text{ см}^2$ . Массу кошки примем 3 кг. С учетом 4-х лап получаем оценку давления  $1,2 \cdot 10^4 \text{ Па}$ . Массу человека примем примерно 70 кг. Продольный размер ступни около 25 см, а поперечный — в среднем около 8 см. Таким образом, площадь одной ступни — примерно  $200 \text{ см}^2$ . Соответственно, для давления получаем значение около  $1,7 \cdot 10^4 \text{ Па}$ . Как это ни неожиданно, оказывается, что давление человека и кошки на землю примерно одинаково. Следует иметь в виду, однако, что из-за формы ступни давление распределяется неравномерно и может зависеть от характера грунта при хождении босиком.

2. Такую оценку можно провести разными способами, приведем один из них. Используя данные по ежемесячному платежу за электричество, можно определить расход электроэнергии за месяц примерно в 150 кВт·час. Это отвечает ежесуточному потреблению 5 кВт·час. Поскольку в сутках 24 часа, то средняя мощность составляет около 200 Вт. В качестве «типичного» дома возьмем 5-ти этажное здание с 6 подъездами. В каждом подъезде 20 квартир, а всего — 120 квартир. Таким образом, суммарная мощность составляет примерно 25 кВт. Ясно, что в 10-ти этажном доме мощность будет в 2 раза больше. Отметим также, что это среднее значение мощности. В течение же дня мощность, вообще говоря, будет меняться. Рекомендуем оценить пиковую мощность самостоятельно.

3. При сбегании по лестнице максимальное ускорение будет достигаться при поворотах на следующий пролет. Действительно, пусть человек движется по лестнице с постоянным ускорением  $a$ . Тогда, пробежав пролет, он наберет скорость  $v^2 = 2al$ . В свою очередь, выполняя поворот, человек будет испытывать центростремительное ускорение  $a_{цс} = v^2/R$ , где  $R$  — радиус поворота. Таким образом,

$$a_{цс}/a = 2l/R.$$

Поскольку для лестницы  $2l \gg R$ , то центростремительное ускорение действительно превалирует. Сделаем численную оценку. Полагая скорость равной примерно 3 м/с, а радиус поворота 1 м (например, в случае, когда бегающий человек держится за перила лестницы рукой) получаем  $a \approx 9 \text{ м/с}^2$ . Таким образом, ускорение сравнимо с ускорением свободного падения.

4. Проведем оценку для Саратова. В Саратове проживает порядка  $10^6$  человек. В каждой семье около 4–5 человек. Значит, в Саратове порядка  $2 \cdot 10^5$  семей. Проведя опрос, например, в классе, можно быстро подсчитать долю семей, в которых есть кошки. Это число колеблется от 1/4 до 1/2. Таким образом, в Саратове около  $5 \cdot 10^4$ – $10^5$  домашних кошек.

5. Как показывают эксперименты, за 5 секунд муравей пробегает примерно 5–10 см. Типичный дачный участок имеет площадь 6 соток, т. е. 600 квадратных метров. Значит его сторона около 25 м, а периметр — примерно 100 м. Таким образом, муравей обойдет участок по периметру примерно за 6600 секунд, или 2 часа. Следует иметь в виду, что эта оценка предполагает, что муравей будет двигаться прямолинейно. Опыт показывает, что движение муравьев на самом деле имеет выраженную хаотическую компоненту.

6. Пусть высота человека  $h$  примерно 1,7 м. Если считать Землю идеально круглой, то точка горизонта будет отвечать касательной к поверхности Земли, проведенной с высоты  $h$ . Тогда по теореме Пифагора легко находим

$$r = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2} \approx \sqrt{2Rh}.$$

Здесь  $R$  — радиус Земли. Мы воспользовались также тем, что рост человека много меньше радиуса Земли. Подставляя  $h \approx 1,7$  м и  $R \approx 6400$  км, получаем  $r \approx 4,5$  км, что вполне согласуется с жизненным опытом. Обратите внимание, что удаленность горизонта растет как корень квадратный из высоты объекта. Таким образом, если человек поднимется на высоту в 100 раз превышающую его рост, горизонт отодвинется в 10 раз и составит около 45 км. На таких расстояниях, однако, видимость будет ограничена за счет «дымки» атмосферы.

7. Как известно, радиус Земли составляет  $R \approx 6400$  км. Таким образом, площадь поверхности земного шара  $S = 4\pi R^2 \approx 520 \cdot 10^6$  км<sup>2</sup>. Океан покрывает примерно две трети земной поверхности. Тогда площадь океана будет примерно  $350 \cdot 10^6$  км<sup>2</sup>. Полагая среднюю глубину океана 3 км, находим объем воды  $10^9$  км<sup>3</sup>. Используя известное значение для плотности воды, получаем  $10^{21}$  кг.

8. Обозначим длину Кита  $L$ , тогда, в соответствии с предположением, его радиус  $r = L/20$ . В соответствии с представлениями того времени предположим, что Кит и Земля находятся в однородном гравитационном поле (как объяснить возникновение этого поля, в рамках данной задачи нас не интересует). Тогда существование описанной конструкции возможно, если суммарная масса Кита и Земли не больше массы воды в объеме Кита, что можно выразить следующим условием:

$$\frac{2}{3}\pi\rho_3 R_3^3 + 20r\pi r^2 \rho_K \leq 20r\pi r^2 \rho_B,$$

откуда несложно получить  $r \geq \sqrt[3]{\frac{\rho_3}{30(\rho_B - \rho_K)} R_3} \approx 8700$  км. Тогда длина Кита

должна быть не меньше 174000 км. В действительности эта оценка несколько занижена, т. к. для устойчивого плавания необходимо, чтобы Кит не полностью погрязался в воду.

9. Выберем модель процесса столкновения. Будем считать, что мяч деформируется незначительно, сохраняя в целом форму шара, и лишь в области контакта со стенкой его оболочка становится плоской (рис. 24).

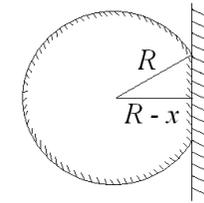


Рис. 24

Пусть мяч деформировался на величину  $x$ , малую по сравнению с радиусом мяча  $R$ . Радиус области контакта мяча со стенкой можно вычислить по формуле

$$r = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} = \sqrt{2Rx - x^2} \approx \sqrt{2Rx}.$$

(Мы воспользовались тем, что  $x$  много меньше  $R$ .) Объем мяча меняется незначительно, следовательно, давление внутри мяча также практически не меняется. Поэтому сила, действующая на мяч со стороны стенки, равна

$$F \approx (P - P_0)S \approx (P - P_0)\pi r^2 \approx 2\pi R(P - P_0)x,$$

где  $P$  — давление воздуха в мяче,  $P_0$  — атмосферное давление,  $S$  — площадь контакта мяча со стенкой. Таким образом, сила пропорциональна величине деформации. Это закон Гука с эффективным коэффициентом жесткости  $k = 2\pi R(P - P_0)$ . Следовательно, мяч сожмется, остановится и «оттолкнется» от стенки за время  $\tau$ , равное половине периода колебаний:

$$\tau = T/2 = \pi\sqrt{m/k} \approx \pi\sqrt{m/2\pi R(P - P_0)}.$$

Сделаем численные оценки. Будем считать, что мяч «накачан» так, что избыточное давление внутри него равно одной атмосфере, т. е.  $10^5$  Па. Массу мяча примем  $m \approx 0,4$  кг, радиус  $R \approx 0,15$  м. Подставляя эти значения в полученную формулу, находим  $\tau \approx 6,4 \cdot 10^{-3}$  с. Таким образом, время соударения мяча со стенкой действительно мало.

10. Пусть капля имеет радиус  $r$  и лежит на несмачиваемой поверхности. Поверхностное натяжение стремится придать ей сферическую форму, а сила притяжения к Земле — «сплющить». Поверхностное натяжение создает давление, которое можно оценить как  $\sigma/r$ . Аналогичная оценка для силы тяжести —  $\rho gr$ . Ясно, что поверхностное натяжение будет доминировать при условии

$$\rho gr \ll \sigma/r.$$

Отсюда получаем, что радиус капли сферической формы удовлетворяет неравенству

$$r \ll \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Используя табличные данные, получаем для воды  $r \ll 2,7$  см. Таким образом, сферические капли воды имеют размер около 3 мм и менее, что согласуется с нашим жизненным опытом.

11. Предположим, что звук возникает от периодического взмахивания крылышек комара. Конечно, на самом деле физика полета комара сложнее, но мы воспользуемся грубой моделью. Пусть сила тяжести, действующая на комара, компенсируется изменением импульса воздуха в единицу времени, которое создается взмахами крылышек, т. е.  $\Delta p/\Delta t = mg$ ,  $\Delta p$  — изменение импульса воздуха,  $\Delta t$  — время движения крылышек,  $m$  — масса комара,  $g$  — ускорение свободного падения. Масса воздуха с плотностью  $\rho_B$ , отбрасываемая вниз за время  $\Delta t$  движения крылышек площадью  $S$  со скоростью  $v$ , может быть выражена формулой:

$$\Delta m = \rho_B v \Delta t S.$$

При этом массе сообщается импульс

$$\Delta p = \Delta m v = \rho_B v^2 \Delta t S,$$

что создает силу

$$F \sim \Delta p/\Delta t \sim \rho_B v^2 S,$$

действующую на крылышко вверх. В качестве характерного размера комара введем его длину  $l$  (1–4 мм) и будем считать, что размах его крыльев порядка длины. Тогда площадь пары крыльев  $S \sim l^2$ . Так как поперечные размеры комара без крылышек существенно меньше его длины, оценим его объем как  $1/10 l^3$ . Плотность комара примем равной плотности воды  $\rho_B$ . Если частота взмаха крылышек  $f$ , то скорость крыла  $v \sim lf$ . Из условия равновесия комара  $F \sim mg$ , используя полученные оценочные соотношения, находим:

$$F \sim \rho_B v^2 l^2 \sim \rho_B l^2 f^2 l^4, \quad mg \sim \rho_B l^3 g/10.$$

А поскольку  $F \sim mg$ , получаем

$$f \sim (\rho_B g/10 \rho_B)^{1/2} l^{-1/2}.$$

Если подставить сюда численные значения всех величин, то найдем  $f \sim 400$  Гц. Получился вполне разумный порядок величины частоты. Из нашей формулы следует, что частота обратно пропорциональна корню квадратному из размера насекомого  $l$ . Это значит, что чем крупнее насекомое, тем ниже издаваемый им звук. Действительно, вас раздражает тонкий зве-

нящий звук (писк) комара, но вы уважительно прислуживаетесь к жужжанию пчелы или гудению шмеля.

12. Для оценки положим, что сила сопротивления определяется формулой Ньютона:

$$F = \rho v^2 S/2.$$

Здесь  $S$  — площадь купола парашюта,  $\rho$  — плотность воздуха. В установившемся режиме  $F = mg$ . При прыжке с высоты  $h$  для скорости имеем  $v^2 = 2gh$ . Таким образом,

$$S \approx m/\rho h.$$

Подставляя значения  $m \approx 70$  кг,  $h \approx 2$  м,  $\rho \approx 1,3$  кг/м<sup>3</sup>, получаем оценку  $S \approx 30$  м<sup>2</sup>, а значит диаметр купола примерно 6 м.

13. При прыжке с высоты  $h$  человек набирает скорость, определяемую соотношением  $v^2 = 2gh$ . При вхождении в воду ускорение будет определяться силой сопротивления со стороны воды. Ее оценим по формуле Ньютона

$$F = \rho v^2 S/2.$$

Здесь  $S$  — площадь контакта с водой,  $\rho$  — плотность воды. Таким образом,

$$a/g \approx \rho h S/m.$$

Используя значения массы человека  $m \approx 70$  кг, высоты прыжка  $h \approx 5$  м, плотности воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, площади ступней  $S \approx 0,04$  м<sup>2</sup>, получаем:

$$a/g \approx 3.$$

Это достаточно ощутимая перегрузка.

14. Простейший (и наиболее достоверный) способ — экспериментальный. Нужно изготовить кубик в холодильнике, а затем просто измерить время его таяния. В нашем эксперименте для кубика с ребром в 1 см время таяния оказалось 20 мин.

15. Можно залить в кастрюлю определенное количество воды, например,  $m = 500$  г (0,5 литра). Затем довести ее до кипения и заметить, за какое время  $t$  эта вода выкипит полностью. Рекомендуем заливать уже нагретую воду, так как иначе при нагревании до точки кипения часть ее испарится. Зная теплоту парообразования воды  $\lambda = 2250$  кДж/кг, легко определить полезную мощность как  $P = \lambda m/t$ . В проведенном эксперименте оказалось  $t = 38$  минут. Таким образом, получаем оценку для полезной мощности  $P \approx 500$  Вт. Интересно сравнить ее с мощностью лампочки накаливания — 100 Вт. Как видим, плита «греет» заметно сильнее. Отметим также, что электрический чайник мощностью 1,5 кВт вскипятит воду быстрее, чем плита, в 3 раза, что вполне согласуется с жизненным опытом.

16. Скорость проигрывания для таких пластинок составляла 33 оборота в минуту. Время звучания можно найти на обложке пластинки, среднее значение его около 15 минут. Таким образом, пластинка совершала около 500 оборотов. Радиус «играющей» части виниловой пластинки заключен в интервале примерно от 6 до 15 см, т. е. ширина этой части около 10 см. Поделив эту цифру на число оборотов, получаем оценку для ширины бороздки 0,2 мм.

17. Напряжение  $U$  в электронно-лучевой трубке составляет около десятка киловольт. Так как  $mv^2 = 2eU$ , то, используя табличные данные для массы и заряда электрона, легко находим, что скорость порядка  $6 \cdot 10^7$  м/с или  $6 \cdot 10^4$  км/с. Любопытно, что полученная величина всего в 5 раз меньше скорости света.

18. При прохождении разности потенциалов  $U$  электрон получает энергию  $mv^2/2 = eU$ . С другой стороны, по законам молекулярно-кинетической теории  $mv^2/2 = 3kT/2$ , где  $k$  — постоянная Больцмана, а  $T$  — температура плазмы. Таким образом,  $T \approx 2eU/3k$ . Используя табличное значение постоянной Больцмана, находим, что  $T \approx 8 \cdot 10^4$  К.

19. При движении в магнитном поле центростремительное ускорение создается силой Лоренца. Поэтому

$$V^2/R = eVB.$$

В свою очередь для периода вращения  $T = 2\pi R/V$ , а для частоты  $\nu = 1/T$ . Таким образом,  $\nu = eB/2\pi m$ . Величину магнитного поля Земли находим по справочнику, она составляет примерно 0,4 Гс на экваторе и 0,7 Гс на полюсе. Будем использовать среднее значение 0,6 Гс или  $6 \cdot 10^{-5}$  Тл в системе СИ. Тогда для частоты получаем оценку  $\nu \approx 1,5 \cdot 10^6$  Гц. Это значение частоты отвечает диапазону радиоволн длиной примерно 200 м и соответствует средним волнам.

20. С астероида можно улететь, если скорость подскока превысит вторую космическую. Как известно, вторая космическая скорость находится из соотношения

$$V^2 = 2\gamma M_a/R_a.$$

Здесь  $M_a$  — масса астероида,  $R_a$  — его радиус. Используя известное выражение для ускорения свободного падения из закона всемирного тяготения  $g = \gamma M/R^2$ , можно записать:

$$V^2 = 2g_a R_a.$$

Начальную скорость при прыжке оценим, используя тот факт, что высота прыжка «на месте» на Земле составляет  $h_3 \approx 1$  м. Тогда

$$V^2 = 2g_3 h_3.$$

У планет с одинаковой плотностью ускорение свободного падения у поверхности пропорционально радиусу планеты. Тогда  $g_3/R_3 = g_a/R_a$ . Комбинируя полученные соотношения, находим, что

$$R_a \approx (h_3 R_3)^{1/2}.$$

Подставляя численные значения  $R_3 \approx 6400$  км и  $h_3 \approx 1$  м, получаем  $R_a \approx 2,5$  км.

21. Как следует из закона всемирного тяготения, у планет с одинаковой средней плотностью ускорение свободного падения на поверхности пропорционально радиусу планеты. Тогда справедливо равенство

$$g_3/R_3 = g_a/R_a.$$

(Здесь и далее индекс «3» относится к Земле, а индекс «a» — к астероиду). Давление в толще пород у подножья горы на Земле и на астероиде должно быть одинаково по порядку величины, поскольку прочность пород одинакова. Отсюда следует, что

$$\rho g_3 h_3 = \rho g_a h_a,$$

где  $h_3$  — высота горы на Земле, а  $h_a$  — на астероиде. Астероид можно считать шарообразным, если отношение высоты гор к радиусу астероида мало, т. е.  $h_a/R_a \ll 1$ . Используя предыдущие соотношения, легко получаем:

$$h_a/R_a \approx h_3 R_3/R_a^2 \ll 1.$$

Подставляя  $h_3 \approx 10$  км и  $R_3 \approx 6400$  км, находим  $R_a \geq 50$  км. Заметим, что относительная высота гор убывает с ростом радиуса планеты обратно пропорционально квадрату ее радиуса. Проведенная оценка согласуется с результатами фотографирования спутников Марса, Юпитера и Сатурна с космических аппаратов. (Рекомендуем убедиться в этом, используя возможности сети Интернет.)

22. Расстояние от Солнца до Сатурна  $R \approx 1,5 \cdot 10^9$  км, а его радиус  $r \approx 6 \cdot 10^4$  км. Доля излучения Солнца, попадающая на диск Сатурна, составляет  $\pi r^2/4\pi R^2 \approx 4 \cdot 10^{-10}$ . Пусть Сатурн отражает  $1/4$  часть солнечного излучения. Тогда доля излучения Солнца, отражаемая Сатурном, составит  $10^{-10}$ . С расстоянием интенсивность спадает по закону обратных квадратов. Поэтому, чтобы блеск Сатурна сравнялся с блеском звезды, равной по светимости Солнцу, звезда должна быть расположена на расстоянии в  $10^5$  раз дальше, чем Сатурн от Солнца. Таким образом, расстояние до звезды составит примерно  $1,5 \cdot 10^{14}$  км. Световой год равен примерно  $9,5 \cdot 10^{12}$  км. Таким образом, расстояние до звезды в рамках этой оценки около 16 световых лет.

23. Когда мы подносим руку к лампочке на расстояние около 10 см, то ощущаем тепло, сравнимое с получаемым от Солнца в ясный день. Мощность лампочки  $P = 100$  Вт. Таким образом, плотность светового излучения можно оценить как  $P/4\pi R^2 \approx 0,08$  Вт/см<sup>2</sup>. (Табличное значение — 0,14 Вт/см<sup>2</sup> на высоте 65 км. Оценка дает неплохой результат, особенно учитывая погло-

щение света атмосферой.) Считая известным расстояние от Земли до Солнца 150 млн. км, получаем оценку для мощности излучения Солнца  $2 \cdot 10^{26}$  Вт. (Табличное значение  $3,86 \cdot 10^{26}$  Вт.)

24. Будем считать, что Солнце движется по круговой орбите вокруг центра с массой  $M$ . Тогда, используя второй закон Ньютона, получаем

$$v^2/R = \gamma M/R^2.$$

Значит,  $M = v^2 R / \gamma$ . Поскольку  $10 \text{ кпс} \approx 3 \cdot 10^{17}$  км, то, используя табличное значение гравитационной постоянной  $\gamma$ , получаем  $M \approx 3 \cdot 10^{41}$  кг. Разделив эту величину на массу Солнца, оценим число звезд как  $1,5 \cdot 10^{11}$ .

## Размерность

1. В качестве основных единиц нужно выбрать величины, характеризующие длину, массу и время. Поэтому если использовать Попугая как эталон, можно выбрать следующие параметры:

- высоту Попугая (размерность [м]),
- массу Попугая (размерность [кг]),
- частоту взмаха крыльями (размерность [1/с]).

2. Ясно, что дальность полета тела  $l$ , размерность которой [l] = м, должна зависеть от

- начальной скорости  $v$ ,  $[v] = \text{м/с}$ ,
- ускорения свободного падения  $g$ ,  $[g] = \text{м/с}^2$ ,
- угла  $\alpha$ , под которым брошено тело, безразмерная величина.

Тогда из соображений размерности легко получаем, что дальность полета должна быть пропорциональна комбинации  $\frac{v^2}{g}$ . Поскольку угол является

безразмерной величиной, то результат должен зависеть от некоторой функции угла. Таким образом, окончательно:

$$l = \frac{v^2}{g} f(\alpha),$$

где  $f(\alpha)$  — универсальная функция угла, которую нельзя найти методом размерностей.

3. Период колебаний  $T$ , размерность которого [T] = с, в рамках этой задачи должен зависеть от

- коэффициента жесткости пружины  $k$ ,  $[k] = \text{Н/м} = \text{кг/с}^2$ ,
- массы тела  $m$ ,  $[m] = \text{кг}$ .

(Здесь и далее мы используем, что  $\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2$ , что легко запомнить из закона Ньютона, согласно которому сила есть масса, умноженная на ускорение:  $F = ma$ . Подобным образом легко «восстанавливаются» и другие раз-

мерности, например, из известного соотношения для работы  $A = FS$  легко получаем, что Дж = Н·м и т. д.)

Из приведенных выше соотношений находим:

$$T = C \sqrt{\frac{m}{k}},$$

где  $C$  — безразмерная константа, которую нельзя найти методом размерности.

4. Самый простой и «естественный» метод определения константы в формуле — из эксперимента. Так, для маятника длиной  $l \approx 1$  м период колебаний составляет  $T \approx 2$  с. Отсюда  $C \approx 6$ .

5. По условию скорость звука  $v$ ,  $[v] = \text{м/с}$ , зависит от

- давления газа  $p$ ,  $[p] = \text{Н/м}^2 = \text{кг/м} \cdot \text{с}^2$ ,
- плотности газа  $\rho$ ,  $[\rho] = \text{кг/м}^3$ .

Поэтому методом размерности находим:

$$v = C \sqrt{\frac{p}{\rho}}.$$

Для безразмерного коэффициента  $C$  можно получить следующую оценку: для воздуха при нормальных условиях ( $p = 10^5$  Па,  $t = 20^\circ\text{C}$ ) плотность  $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$ , а скорость звуковых волн  $330 \text{ м/с}$ . Тогда  $C \approx 1,2$ .

6. Искомая формула должна иметь вид соотношения, в котором в левой части стоит время  $t$  с размерностью [t] = с, а в правой — некоторая функция от

- длины  $l$ , [l] = м,
- массы  $M$ , [M] = кг,
- силы  $F$ , [F] = кг·м·с<sup>-2</sup>.

Поскольку размерности величин выражаются через основные размерности степенным образом, то и искомая формула должна иметь степенной вид. В общем случае можно записать

$$t = C \cdot l^\alpha \cdot M^\beta \cdot F^\gamma.$$

Здесь  $C$  — безразмерная константа. Тогда, приравняв размерности левой и правой частей, получим:

$$0 = \alpha + \gamma(\text{м}),$$

$$0 = \beta + \gamma(\text{кг}),$$

$$1 = -2\gamma(\text{с}).$$

Решая эту систему, находим  $\alpha = \beta = 1/2$ ,  $\gamma = -1/2$ .

7. Выпишем размерности исходных величин, выраженные через основные, т. е. кг, м, с:

- энергия взрыва  $W$ ,  $[W] = \text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ ,
- статическое давление  $p$ ,  $[p] = \text{Н/м}^2 = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ ,
- плотность  $\rho$ ,  $[\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$ .

Очевидно, искомая формула имеет вид

$$T = C \cdot W^\alpha \cdot p^\beta \cdot \rho^\gamma.$$

Приравняв размерности левой и правой частей, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta + \gamma, \\ 0 &= 2\alpha - \beta - 3\gamma, \\ 1 &= -2\alpha - 2\beta. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, находим:  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = -5/6$ ,  $\gamma = 1/2$ . Окончательно имеем:

$$T = C \cdot W^{1/3} \cdot p^{-5/6} \cdot \rho^{1/2}.$$

Интересно, что если энергия взрыва возрастет в 10 раз, то период колебаний увеличится в  $\sqrt[3]{10} \approx 2,15$  раза.

8. Выпишем величины, от которых зависит давление  $p$ ,  $[p] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ :

- масса планеты  $M$ ,  $[M] = \text{кг}$ ,
- объем планеты  $V$ ,  $[V] = \text{м}^3$ ,
- ее угловая скорость вращения  $\omega$ ,  $[\omega] = \text{с}^{-1}$ ,
- универсальная гравитационная постоянная  $\gamma$ ,  $[\gamma] = \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ .

Без труда составляем величину с размерностью давления:

$$\gamma M^2 / V^{4/3}.$$

Однако из приведенных величин можно составить и одну безразмерную комбинацию, например,  $\frac{\omega^2 V}{\gamma M}$ . Поэтому в ответ войдет некоторая функция этого безразмерного параметра. Таким образом,

$$p = \frac{\gamma M^2}{V^{4/3}} f\left(\frac{\omega^2 V}{\gamma M}\right),$$

где  $f$  — универсальная безразмерная функция.

Если планета не вращается, то

$$p = C \cdot \gamma M^2 / V^{4/3},$$

где  $C$  — безразмерная константа. Условие применимости этой формулы имеет,

очевидно, вид  $\frac{\omega^2 V}{\gamma M} \ll 1$ .

9. Скорость капиллярных волн зависит от

- коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$ ,  $[\sigma] = \text{Н/м} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$ ,
- плотности жидкости  $\rho$ ,  $[\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ,
- длины волны  $\lambda$ ,  $[\lambda] = \text{м}$ .

Отсюда следует, что

$$v = C \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \lambda}}.$$

Из полученного соотношения следует, что более короткие капиллярные волны бегут быстрее.

10. Скорость гравитационных волн может зависеть от

- ускорения свободного падения  $g$ ,  $[g] = \text{м/с}^2$ ,
- плотности жидкости  $\rho$ ,  $[\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ,
- длины волны  $\lambda$ ,  $[\lambda] = \text{м}$ .

Отсюда следует, что

$$v = C \sqrt{g \lambda}.$$

Из полученного соотношения следует, что более длинные гравитационные волны, наоборот, бегут быстрее более коротких. Интересно также, что плотность жидкости не вошла в окончательный ответ. Таким образом, метод размерности позволяет обосновать, что скорость гравитационных волн от плотности не зависит.

11. Из решения двух предыдущих задач разумно предположить, что волны будут капиллярно-гравитационными, если выполняется соотношение  $\frac{\sigma}{\rho \lambda_0} \sim g \lambda_0$ , откуда

$$\lambda_0 \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Для воды, используя табличные данные для коэффициента поверхностного натяжения и плотности, получаем оценку длины волны  $\lambda_0 \sim 1$  см и скорости таких волн  $v \sim \sqrt[4]{\sigma g / \rho} \sim 30$  см/с. Таким образом, волны, бегущие за катером, — гравитационные, а за скользящими по поверхности воды насекомыми — капиллярные.

12. Из соображений размерности очевидно, что площадь прямоугольного треугольника выражается формулой  $S = c^2 f(\alpha)$ , где  $c$  — гипотенуза, а  $f$  — некоторая универсальная функция угла  $\alpha$ , прилежащего к гипотенузе. Применяя эту формулу ко всем трем треугольникам, изображенным на рис. 25, получим

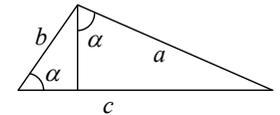


Рис. 25

$$b^2 f(\alpha) + a^2 f(\alpha) = c^2 f(\alpha),$$

откуда и следует теорема Пифагора.

13. Совместим начало координат с одним зарядом, а ось абсцисс направим ко второму. Тогда потенциал системы в соответствии с законом Кулона и теоремой Пифагора задается соотношением

$$\varphi(X, Y) = \frac{q}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + \frac{Q}{\sqrt{X^2 + (Y - h)^2}}.$$

Формально в это уравнение входят три параметра: величины зарядов и расстояние между ними. Введем, однако, безразмерные координаты  $x = X/h$ ,  $y = Y/h$  и безразмерный потенциал  $\psi = \varphi h/q$ . Тогда

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{Q/q}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}.$$

Таким образом, конфигурация эквипотенциалов зависит от единственного существенного параметра  $Q/q$  — отношения зарядов. От величины других параметров зависит лишь «частота», с которой проведены эквипотенциалы, и пространственный масштаб рисунка.

14. Найдем размерность постоянной  $\sigma$ . По закону излучения

$$E = \sigma T^4 S t,$$

где  $E$  — излученная энергия,  $S$  — площадь поверхности,  $t$  — время. Так как  $[E] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ , то из этого соотношения следует, что

$$[\sigma] = \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}.$$

Для основных фундаментальных констант имеем

$$\begin{aligned} [\hbar] &= \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}, \\ [k] &= \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}, \\ [c] &= \text{м} \cdot \text{с}^{-1}. \end{aligned}$$

Предполагая, что искомое соотношение имеет вид  $\sigma \sim \hbar^\alpha k^\beta c^\gamma$ , находим

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta, \\ 0 &= 2\alpha + 2\beta + \gamma, \\ 3 &= \alpha + 2\beta + \gamma, \\ 4 &= \beta. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\alpha = -3$ ,  $\beta = 4$ ,  $\gamma = -2$ . (Хотя неизвестных три, а соотношений четыре, все они при таких значениях удовлетворяются.) Окончательно получаем

$$\sigma \sim \frac{k^4}{\hbar^3 c^2}.$$

15. Будем считать, что все излучение Солнца, падающее на планету, переизлучается ею в космос. Очевидно, ответ к задаче не будет зависеть от радиуса планеты: как падающее, так и переизлучаемое излучение пропорциональны его квадрату. Таким образом, температура зависит от расстояния от планеты до Солнца  $R$ , мощности излучения Солнца  $P$  и постоянной Стефана–Больцмана  $\sigma$ . Из соображений размерности легко получаем

$$P = C \cdot \sigma T^4 R^2,$$

Здесь  $C$  — безразмерная константа, одинаковая для всех планет. Таким образом, температура планет спадает обратно пропорционально корню из ее

расстояния от Солнца. Приняв среднюю температуру поверхности Земли за 280 К (т. е. около 10°C), можно записать

$$T \approx \frac{280}{\sqrt{r}} \text{ К},$$

где  $r$  — расстояние от Солнца до планеты в астрономических единицах. Например, для Марса  $r \approx 1,52$  и, соответственно,  $T \approx 230$  К или примерно  $-40$  °C. Такая оценка работает удовлетворительно для большинства планет за исключением Венеры, температура которой значительно выше за счет парникового эффекта.

16. Из известного соотношения  $E = mc^2$  для плотности «массы» излучения получаем  $\rho \sim \frac{m}{l^3} \sim \frac{E}{c^2 l^3}$ , где  $l$  — характерный пространственный размер. Из закона Стефана–Больцмана получаем:

$$E \sim \sigma T^4 S t \sim \sigma T^4 l^2 t \sim \frac{\sigma T^4 l^3}{c},$$

(здесь мы полагали, что  $S \sim l^2$  и  $l \sim ct$ ). Из полученных соотношений следует, что  $\rho \sim \frac{\sigma T^4}{c^3}$ . Численная оценка для  $T = 3$  К дает  $\rho \sim 10^{-31}$  кг/м<sup>3</sup>.

17. Введем безразмерное время с помощью соотношения  $t = \alpha \tau$ , где  $\alpha$  некоторый коэффициент. Подставляем это соотношение в дифференциальное уравнение маятника

$$l \frac{d^2 \varphi}{\alpha^2 d\tau^2} + g \sin \varphi = 0.$$

Отсюда видно, что удобно положить  $\alpha^2 = l/g$ . В этом случае имеем безразмерное уравнение маятника

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \sin \varphi = 0.$$

Это уравнение наиболее удобно для исследования. Его решение не зависит от параметров маятника (т. е. длины, ускорения свободного падения). От них зависит лишь масштаб времени.

## Подобие

1. Объем и масса проволоки увеличатся в  $n^3$  раз, площадь поверхности в  $n^2$  раз, коэффициент жесткости в  $n$  раз, разрывное напряжение в  $n^2$  раз.

2. Поскольку животные геометрически подобны, то площадь сечения костей  $S$  у них отличается в  $N^2$  раз, где  $N$  — коэффициент подобия, а масса —

в  $N^3$  раз. Нагрузка на кости определяется величиной  $mg/S$ . По условию, кости ног одного из них (очевидно, более крупного) прочнее в  $n$  раз. Тогда

$$\frac{m_2}{S_2} = n \frac{m_1}{S_1}. \text{ Откуда следует, что размеры животных отличаются в } N = n \text{ раз.}$$

3. Сила мышц пропорциональна их поперечному сечению, а масса тела — его объему. При увеличении размеров в  $n$  раз первый фактор растет как  $n^2$ , а второй — как  $n^3$ . Поэтому лилипут будет «сильнее» в  $n$  раз и выиграет соревнование. (Обсудите с этой точки зрения, почему маленькие насекомые, например, кузнечики, более прыгучи, чем кенгуру.)

4. Решение задачи аналогично предыдущей. Более глубоко провалится великан.

5. Сила мышц растет пропорционально квадрату размера животного, а вес — кубу, поэтому чем крупнее птица, тем труднее ей летать. В воде же вес животного компенсируется силой Архимеда.

6. Пусть картофелины имеют форму шаров радиуса  $R$  и плотности  $\rho$ , а ширина снимаемой шкурки равна  $h$ . Тогда длина шкурки, снимаемой с одной картофелины, определится как  $L_0 = 4\pi R^2/h$ , а с одного килограмма картофеля как

$$L = \frac{1\text{кг}}{(4/3)\rho\pi R^3} L_0 = \frac{3}{\rho R h}.$$

(Здесь плотность нужно брать в  $\text{кг/м}^3$ , а  $R$  и  $h$  — в метрах, тогда длина также получится в метрах.) Видно, что длина снимаемой с 1 кг картофеля шкурки обратно пропорциональна радиусу (т. е. характерному размеру) картофеля, поэтому килограмм мелкой картошки очистить дольше, чем крупной. Из этой же формулы следует, что в случае очень мелкой картошки длина снимаемой шкурки должна становиться бесконечно большой. Следует, правда, заметить, что при очень мелкой картошке приведенный анализ становится некорректным, поскольку, во-первых, ширина снимаемой шкурки начинает зависеть от радиуса картошки, а во-вторых, становится сравнимой с радиусом картофеля толщина шкурки. Для оценки длины шкурки можно использовать следующие численные значения:  $\rho \approx 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $R \approx 3 \text{ см}$ ,  $h \approx 1 \text{ см}$ . Тогда получаем  $L \approx 10 \text{ м}$ .

7. При среднем росте человека 170 см коэффициент подобия человека и Дюймовочки составляет примерно  $n = 70$ . Соответственно, площадь поверхности тела Дюймовочки в  $70^2 \approx 5000$  раз меньше, чем у человека. Это значит, что у Дюймовочки масса удержанной воды будет в 5000 раз меньше, чем у человека, т. е. примерно 0,04 г. Однако масса самой Дюймовочки в  $70^3 \approx 340000$  раз меньше, чем у человека, т. е. примерно 0,2 г (при массе человека около 70 кг). Таким образом, «прилипшая» вода составит около

20% массы Дюймовочки. Проведенное рассмотрение позволяет понять, почему маленькие существа имеют несмачиваемую водой поверхность.

8. Установившаяся скорость падения капли определяется балансом силы тяжести и силы сопротивления воздуха. Капли разного размера падают с разной скоростью, поскольку сила тяжести зависит от размера капли, а сила сопротивления воздуха зависит от размера капли и ее скорости. Очевидно, однако, что сила сопротивления пропорциональна площади поверхности капли, т. е.  $R^2$ , где  $R$  — радиус капли. Масса же капли пропорциональна ее объему, т. е.  $R^3$ . Таким образом, с ростом размера  $R$  объем капли растет быстрее, чем ее поперечное сечение, следовательно, сила тяжести растет быстрее силы сопротивления, а значит, крупные капли падают быстрее.

9. Сравним какие-либо характерные для двух типов волн величины, например, давление. Для гравитационных волн из соображений размерности получим  $p_{gp} \sim \rho g \lambda$ , где  $\lambda$  — характерный пространственный масштаб волны, в качестве которого естественно выбрать ее длину. Для капиллярных волн аналогично получаем  $p_{кан} \sim \frac{\sigma}{\lambda}$ . Хорошо видно, что эти соотношения имеют разную асимптотику. Поэтому с ростом  $\lambda$  гравитационные волны должны доминировать, а с уменьшением  $\lambda$  будут доминировать капиллярные волны.

10. Пусть масса куска мыла  $m$ . Тогда на семь стирок ушла масса мыла  $m - \frac{m}{2^3} = \frac{7}{8}m$ . Значит, на одну стирку уходит масса мыла  $m/8$ . Следовательно, оставшегося мыла хватит ровно на одну стирку.

11. Для предельной силы натяжения троса  $T$  по условию имеем:

$$10mg < T < 11mg.$$

При изменении всех размеров в 10 раз масса плиты возрастет в  $10^3$  раз, а прочность троса — в  $10^2$  раз, поскольку последняя пропорциональна площади его сечения. Тогда  $T_{нов} = 10^2 T$ ,  $m_{нов} = 10^3 m$ . Из нашего неравенства получаем

$$m_{нов}g < T_{нов} < 1,1m_{нов}g.$$

Таким образом, кран поднимет всего одну плиту.

12. Пусть нить «упакована» достаточно плотно. Тогда ее длина может быть оценена как  $l \sim \frac{V}{S}$ , где  $V$  — объем клубка,  $S$  — сечение нити. Значит, при увеличении размера клубка в  $n$  раз длина нити возрастет в  $n^3$  раз. Рекомендуем попробовать проверить этот закон экспериментально.

13. Геометрически подобные пружины характеризуются единственным размером (например, длиной  $l$ ). Тогда из соображений размерности для геометрически подобных пружин получаем  $k = CE/l$ , поскольку  $[k] = \text{Н/м}$ ,  $[E] = \text{Н/м}^2$ ,  $[l] = \text{м}$ , где  $C$  — безразмерная константа. Отметим, что конкретная

геометрия пружины (плотность «намотки», соотношение толщины проволоки и длины пружины и т. д.) сказываются лишь на конкретном значении константы  $C$ . Для геометрически подобных пружин, следовательно,  $k_1 = nk_2$ , где  $n$  — коэффициент подобия.

14. Выпишем характерные для данной задачи величины:

- коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ ,
- радиус пробирки  $r$ ,
- плотность жидкости  $\rho$ ,
- ускорение свободного падения  $g$ .

Из этих величин можно составить единственную безразмерную комбинацию  $\frac{\rho g r^2}{\sigma}$ . Равенство этих комбинаций для двух пробирок и обеспечит

подобие:  $\frac{\rho_1 r_1^2}{\sigma_1} = \frac{\rho_2 r_2^2}{\sigma_2}$ . Таким образом, подобными могут быть формы только разных жидкостей, для которых

$$\frac{\rho_1 \sigma_2}{\rho_2 \sigma_1} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2.$$

15. Критерий подобия в этом случае такой же, как и в предыдущей задаче, только  $r$  теперь характеризует размер капли. Таким образом,

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1 \rho_2}{\sigma_2 \rho_1}}.$$

Например, для ртути и воды численно можно получить  $\frac{r_1}{r_2} = 0,71$ . Под-

черкнем, что этот критерий обеспечивает подобие капель, а форма их может быть разнообразной: как сферической, так и «сплюснутой» за счет силы тяжести. (См. также задачу 10 из раздела «оценки».)

16. Индуктивность первого соленоида в 2 раза больше, а магнитное поле при одинаковом токе — в 2 раза меньше.

17. НДС источника определяется химическими свойствами электродов и электролита и будет одинакова. Емкость элемента пропорциональна объему электролита, а значит, будет отличаться в  $n^3$  раз и существенно больше у большего элемента. Для установления зависимости от размера внутреннего сопротивления воспользуемся соображениями размерности. Свойства электролита характеризуются удельным сопротивлением  $\rho$  с размерностью  $[\rho] = \text{Ом/м}$ . Таким образом, для внутреннего сопротивления  $R$  имеем  $R = C\rho l$ , где  $C$  — безразмерный коэффициент, а  $l$  — характерный размер элемента. Это означает, что у большего элемента внутреннее сопротивление больше в  $n$  раз.

18. Уравнение движения электрона имеет вид

$$m\vec{a} = e\vec{E} + e[\vec{V}\vec{B}],$$

где  $e$  и  $m$  — заряд электрона и его масса,  $\vec{a}$  — ускорение,  $\vec{V}$  — скорость. По условию, магнитное поле уменьшилось в 2 раза. Чтобы движение электрона было подобным, все пространственные размеры должны измениться в  $\alpha$  раз.

Предположим далее, что характерное время изменится в  $\beta$  раз. Тогда  $V \sim \frac{\alpha}{\beta}$

и  $a \sim \frac{\alpha}{\beta^2}$ . (Хотя бы из соображений размерности:  $[V] = \text{м/с}$ ,  $[a] = \text{м/с}^2$ .) Тогда из исходного уравнения имеем:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} m\vec{a} = e\vec{E} + e\left[ \frac{\alpha\vec{V}}{\beta} \frac{\vec{B}}{2} \right].$$

Значит, движение подобно, если  $\frac{\alpha}{\beta^2} = 1$  и  $\frac{\alpha}{2\beta} = 1$ . Отсюда следует, что  $\beta = 2$ ,  $\alpha = 4$ . Таким образом, коэффициент подобия равен 4. При этом масштабы времени изменяются в 2 раза.

19. Решение задачи можно выполнить аналогично предыдущей, записав уравнение движения одной планеты в поле остальных  $\vec{a} = \sum_i \gamma M_i \vec{r}_i / r_i^3$ .

Из этого без труда получаем, что при неизменных массах движение будет подобным, но масштабы времени изменятся в  $N^{3/2}$  раз. Если же плотности не меняются, то движение будет подобным при неизменных масштабах времени.

20. В соотношении  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_i \gamma M_i \vec{r}_i / r_i^3$ , изменяя пространственный масштаб в  $\alpha$  раз, а временной — в  $\beta$  раз, получаем условие существования подобных решений  $\alpha^3 = \beta^2$ . Отсюда следует, что отношение куба геометрического размера орбиты к квадрату периода  $l^3 / T^2$  является константой для всех подобных орбит. Для эллиптических орбит с постоянным эксцентриситетом это представляет соответствующий закон Кеплера.

21. По закону Стефана–Больцмана тело излучает в единицу времени энергию  $E = \sigma T^4 S$ . Энергия, запасенная телом, зависит от его массы, удельной теплоемкости и температуры  $Q = cmT$ . Таким образом, температура подчиняется дифференциальному уравнению

$$cm \frac{dT}{dt} = -\sigma T^4 S.$$

Оно допускает аналитическое решение, но чтобы дать ответ к задаче, решать его не обязательно. Действительно, можно ввести безразмерное время  $t = \alpha\tau$ , для которого

$$\frac{dT}{d\tau} = -T^4.$$

Причем  $\alpha = S\sigma / cm$ . Таким образом, зависимости температуры отличаются лишь масштабом времени. При увеличении размера в 2 раза масса тела возрастает в 8 раз, а площадь — в 4 раза. Поэтому масштаб времени изменится точно в 2 раза, и крупное тело будет остывать медленнее.

22. Запишем закон сохранения энергии осциллятора:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + kx^N.$$

Изменим пространственный масштаб в  $\alpha$  раз, а временной — в  $\beta$  раз. Тогда получим:

$$E = \frac{\alpha^2 m \dot{x}^2}{2\beta^2} + \alpha^N k x^N = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left( \frac{m \dot{x}^2}{2} + \alpha^{N-2} \beta^2 k x^N \right).$$

Отсюда следует, что при соотношении геометрического и временного масштаба  $\alpha^{N-2} \beta^2 = 1$  движение будет подобным. Поэтому амплитуда колебаний и период связаны соотношением:

$$T = C \cdot A^{\frac{2-N}{2}}.$$

Из полученного выражения вытекает, что при  $N = 2$  справедливо  $T = C$ . Таким образом, период колебаний для квадратичного потенциала не зависит от амплитуды — известное свойство линейного осциллятора. Интересно, что это свойство уникально: оно выполняется только для квадратичного потенциала. А например, при  $N = 4$  получаем:

$$T = \frac{C}{A}.$$

Период зависит от амплитуды, причем увеличивается неограниченно при стремлении амплитуды к нулю. С физической точки зрения это понятно: потенциальная яма четвертой степени очень «плоская».

23. В соответствии с правилами квантования энергия электрона на  $n$ -ой круговой орбите в атоме с зарядом ядра  $Ne$  выражается формулой

$$W_n = -\frac{1}{2} \frac{mN^2 e^4}{\hbar^2 n^2},$$

где  $m$  — масса электрона. Поскольку для атома водорода  $N = 1$ , а для однократно ионизированного атома гелия  $N = 2$ , то в атоме гелия энергии на всех

орбитах в 4 раза больше. Следовательно, в 4 раза больше и частота излучения, соответствующая переходу между орбитами.

24. Выполним в кубическом уравнении  $x^3 + px + q = 0$  замену переменной  $x = \alpha X$ :

$$\alpha^3 X^3 + \alpha p X + q = 0.$$

Положим далее  $\alpha^2 = p$ . Тогда приходим к уравнению

$$X^3 + X = Q,$$

где  $Q = -\frac{q}{p^{3/2}}$ . Таким образом, чтобы решить уравнение  $x^3 + px + q = 0$ , нуж-

но рассчитать коэффициент  $Q = -\frac{q}{p^{3/2}}$ . Затем решить графически уравнение

$f(X) = Q$  и получить искомый корень  $x = p^{1/2} X$ . Из сказанного вытекает, что решения кубического уравнения определяются единственным существенным параметром. (Правда, в общей постановке нужно иметь решения двух типов уравнений:  $x^3 + x + q = 0$  и  $x^3 - x + q = 0$ .)

## Физический анализ математических задач

1. Особенность этого соотношения в том, что в него входит малая величина — 0,001, а также разные степени величины  $x$ . Поэтому возможны три разных варианта: когда первое слагаемое много меньше второго, второе много меньше первого, и, наконец, когда они одного порядка. Первая ситуация реализуется, если  $x^3 \ll 0,001x$ . Соответственно, получаем<sup>1</sup>  $x^2 \ll 0,001$ , или  $|x| \ll 0,03$ . Если  $|x| \gg 0,03$ , то, напротив, первое слагаемое много больше второго. При условии, что  $x$  порядка 0,03, слагаемые в исходном соотношении будут одного порядка.

2. а) Для вычисления  $\sin(1^\circ)$  воспользуемся тем, что при малых (в радианах) значениях аргумента  $\sin x \approx x$ . Переводя  $1^\circ$  в радианы, получаем  $x = \frac{\pi}{180} = 0,01745329\dots$  Точное значение, которое можно найти, например, с помощью микрокалькулятора, составляет 0,0174524\dots Мы видим, что точность приближенного вычисления в этом случае очень высока.

б) Для приближенного вычисления  $\sqrt{404}$  представим его в виде  $\sqrt{400(1 + \frac{4}{400})} = 20\sqrt{1 + \frac{1}{100}}$  и воспользуемся соотношением  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ,

<sup>1</sup> Поскольку нас интересует сравнение абсолютных значений слагаемых, то справедливо считать  $x$  положительной величиной. В этом случае можно преобразовать неравенство указанным образом.

справедливым при малых  $x$ . Тогда  $\sqrt{404} \approx 20\left(1 + \frac{1}{200}\right) = 20,1$ . Точное значение  $\sqrt{404} = 20,09975\dots$ , следовательно, погрешность составляет около одной тысячной процента.

в) Для приближенного вычисления  $\cos(44^\circ)$  заметим, что малым является отклонение аргумента от величины  $45^\circ$ . Тогда удобно выразить эту величину через косинус двойного угла:  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$ . Полагая  $\alpha = \frac{\pi}{4} - x$  (в радианах), в силу малости  $x$  получим  $\cos 2\alpha = \sin 2x \approx 2x$ . Тогда  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + 2x}{2}} \approx \frac{1 + x}{\sqrt{2}}$ , где мы снова воспользовались соотношением  $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ . Переводя  $1^\circ$  в радианы, получаем численную оценку  $\cos(44^\circ) \approx 0,719448\dots$  при точном значении  $0,719339\dots$

3. а) Воспользуемся приближенными равенствами  $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ,  $(1 - x)^2 \approx 1 - 2x$ ,  $\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x$ , и далее осуществим преобразования, отбрасывая малые (квадратичные по  $x$ ) члены:

$$\frac{\sqrt{1 + x}}{(1 - x)^2} \approx \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - 2x} \approx \left(1 + \frac{x}{2}\right)(1 + 2x) \approx 1 + \frac{x}{2} + 2x = 1 + \frac{5}{2}x.$$

б) Аналогичным образом получаем

$$(1 + x)^3 - 1 - \sin x \approx 1 + 3x - 1 - x \approx 2x.$$

в) Учтем сначала члены порядка  $x$  и  $x^2$ , тогда  $\sin x \approx x$  и  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ :

$$\frac{1}{2}x \cdot \sin x - 1 + \cos x \approx \frac{1}{2}x^2 - 1 + \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Это означает, что в указанном приближении искомая величина оказывается очень малой, и необходимо учесть поправки более высокого порядка. В справочнике находим, что  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ , а для косинуса следующая поправка имеет четвертый порядок:  $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ . Следовательно,

$$\frac{1}{2}x \cdot \sin x - 1 + \cos x \approx -\frac{1}{24}x^4.$$

4. Полезно предварительно получить представление о характере решения графически. На рис. 25 показаны в области  $0 < x < \pi$  график косинуса

$y = \cos x$  и прямая  $y = kx$ , пересечение которых и дает искомое решение уравнения. В случае  $k \gg 1$  прямая очень круто идет вверх (рис. 25а). Из рисунка видно, что в этом случае пересечение графиков располагается вблизи точки  $x = 0$ .

Для самой грубой оценки можно положить  $\cos x \approx 1$ . Тогда из  $\cos x \approx kx$  получаем  $x \approx \frac{1}{k}$ . Можно уточнить это решение, полагая  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ .

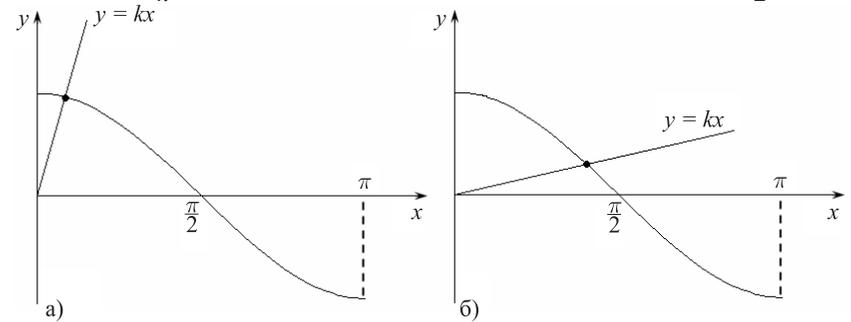


Рис. 25

Тогда после некоторых преобразований приходим к квадратному уравнению

$$x^2 + 2kx - 2 = 0.$$

Решая его и оставляя близкий к нулю корень, получаем:

$$x = -k + \sqrt{k^2 + 2}.$$

Заметим, что это решение согласуется с полученным выше. Действительно, преобразуя соответствующим образом квадратный корень с учетом малости величины  $\frac{1}{k}$ :  $\sqrt{k^2 + 2} = k\sqrt{1 + \frac{2}{k^2}} \approx k\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ , получаем также  $x \approx \frac{1}{k}$ .

Пусть теперь  $k \ll 1$ . В этом случае наклон прямой очень мал (рис. 25б), и корень уравнения близок к  $\frac{\pi}{2}$ . Тогда естественно положить  $x = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая величина. Соответственно,  $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \sin \varepsilon \approx \varepsilon$ . Тогда из  $\cos x \approx kx$  находим  $\frac{\pi}{2} - x = kx$ . Отсюда, в свою очередь, получаем искомое решение  $x \approx \frac{\pi/2}{1 + k}$ . В силу малости  $k$  его можно переписать в виде  $x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}$ .

5. а) Квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет решения

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Соответственно, если  $q > \frac{p^2}{4}$ , то действительных корней нет вообще, если

$q < \frac{p^2}{4}$ , то имеется два действительных корня, а если  $q = \frac{p^2}{4}$ , то один. На

плоскости параметров  $(q, p)$  можно выделить, таким образом, две области — где есть два корня и где их нет вообще (рис. 26). Разделительной линией

служит парабола  $q = \frac{p^2}{4}$ , которая отвечает ситуации единственного корня.

Две первых ситуации (два корня и нет корней) отвечают, как говорят, случаям общего положения. Иногда говорят еще, что это типичные ситуации, вкладывая в это понятие следующий смысл. Пусть мы случайным образом выбрали два числа  $(q, p)$  — коэффициенты квадратного уравнения. Тогда скорее всего (т. е. с вероятностью 1) на плоскости параметров мы попадем

именно в одну из этих областей. Линии же на плоскости параметров  $q = \frac{p^2}{4}$

отвечает, как говорят, вырожденная ситуация. Таким образом, наличие двух или отсутствие корней в квадратном уравнении — это случаи общего положения, наличие единственного корня — вырожденная ситуация.

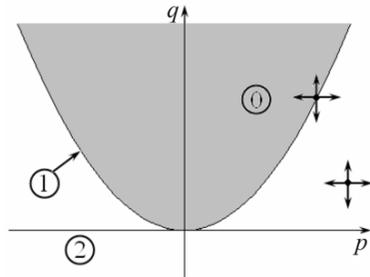


Рис. 26

Еще одним полезным способом рассуждений является метод малых шевелений. Он состоит в следующем. Пусть точка находится внутри одной из областей на рис. 26. Слегка пошевелим (изменим) параметры  $(q, p)$ . Очевидно, что всегда можно выбрать такую величину малых добавок к параметрам, что мы останемся внутри этой же области при любом направлении шевеления. Если же имеется вырождение, то ситуация иная. Действительно, если точка лежит на разделительной линии, то обязательно существует такое направление, что даже бесконечно малое шевеление вдоль него может привести либо в одну, либо в другую область (рис. 26).

Представления о случаях общего положения и вырожденных случаях являются очень общими и могут применяться при обсуждении самых разных физических и математических задач. Они являются очень удобными

для физиков, поскольку при исследовании различных сложных ситуаций можно в первую очередь изучать наиболее типичные явления (в определенном смысле, наиболее вероятные). Мы будем использовать физический анализ, основанный на разбиении плоскости параметров на области, при решении задач из следующих разделов.

б) Уравнение  $x^4 + px^2 + q = 0$  является биквадратным. Для него

$$x_{1,2}^2 = y_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_{3,4}^2 = y_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Так же как и в предыдущем случае, если  $q > \frac{p^2}{4}$ , то корней нет вообще. Пусть

$q < \frac{p^2}{4}$ . Тогда удобно провести анализ для всех четырех четвертей плоскости

$(q, p)$  с учетом того, что величина  $y$  должна быть положительной.

Если  $p > 0, q > 0$ , то  $y_1 < 0$  и  $y_2 < 0$ . В этом случае действительных корней нет вообще.

Если  $p > 0, q < 0$ , то  $y_1 > 0$  и  $y_2 < 0$ . В этом случае есть два действительных корня.

Если  $p < 0, q > 0$ , то  $y_1 > 0$  и  $y_2 > 0$ . В этом случае есть четыре действительных корня.

Если  $p < 0, q < 0$ , то  $y_1 > 0$  и  $y_2 < 0$ . В этом случае есть два действительных корня.

Окончательно разбиение плоскости параметров  $(q, p)$  на характерные области показано на рис. 27. Видно, что число случаев общего положения возросло — их три и, соответственно, на рис. 27 показаны три характерные области. Имеются три линии вырожденных ситуаций (рекомендуем самостоятельно обсудить, что происходит с корнями на этих линиях).

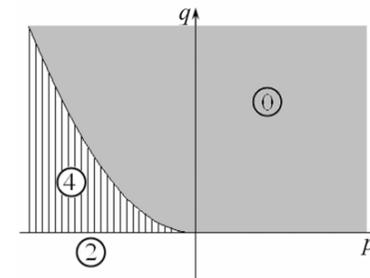


Рис. 27

Особенность полученного рисунка — наличие вырождения большего порядка, которому отвечает точка, в которой сходятся все три разграничительные линии ( $p = 0, q = 0$ ). «Шевеля» параметры в окрестности этой точки, можно попасть уже в любую из трех характерных областей.

в) Кубическое уравнение  $x^3 + px + q = 0$  в случае общего положения может иметь либо три, либо один действительный корень, что иллюстрирует рис. 28а,б.

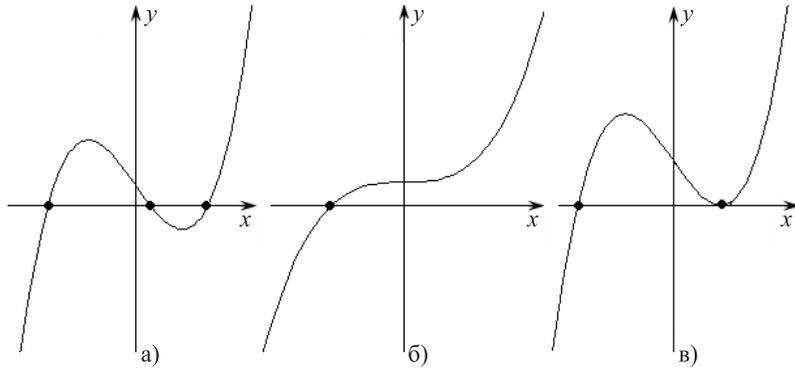


Рис. 28

Нетрудно понять, что разграничительным линиям на плоскости параметров, соответствующим рождению (исчезновению) корней, будет отвечать ситуация касания графиком кубической параболы оси абсцисс (рис. 28в). Поэтому для этих линий справедливо как уравнение  $x^3 + px + q = 0$ , так и продифференцированное соотношение  $3x^2 + p = 0$ .

Но тогда  $x = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}$ , и, подставляя в исходное кубическое уравнение, получаем уравнения линий, разграничивающих области существования одного и трех корней:

$$q = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{3/2}.$$

Эти линии на плоскости параметров показаны на рис. 29. Они имеют вид характерного «полуострия», отвечающего степенному закону «три вторых» в формуле. Линии сходятся в начале координат, которое является, таким образом, точкой более высокого вырождения: ей отвечает слияние всех трех корней кубического уравнения. Следует заметить, что особая точка такого типа с подходящими по закону «три вторых» линиями имеет большое значение в теории особенностей, в математической теории, известной как теория катастроф, а также в теории бифуркаций. Она носит специальное название «сборка».

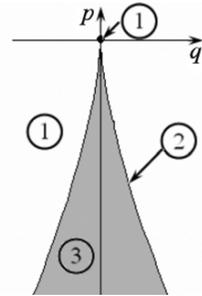


Рис. 29

6. Предположим сначала, что неизвестная величина  $x$  порядка единицы (или меньше). Тогда в соотношении  $\varepsilon x^4 - x^2 + 3x - 2 = 0$  первый член  $\varepsilon x^4$

в силу малости  $\varepsilon$  существенно меньше остальных, и им можно пренебречь. Тогда просто  $-x^2 + 3x - 2 = 0$ , откуда легко находим  $x_1 \approx 1$  и  $x_2 \approx 2$ .

Однако исходное уравнение имеет четвертую степень, а значит, может иметь еще два действительных корня. Будем теперь считать, что  $|x| \gg 1$ . Тогда наличие большого коэффициента  $x^4$  может скомпенсировать малость  $\varepsilon$ . В этом случае вполне может оказаться, что  $\varepsilon x^4$  и  $x^2$  будут одного порядка, однако тогда остальные члены уравнения будут малы по сравнению с ними, то есть  $\varepsilon x^4 - x^2 \approx 0$ . Отсюда находим  $x_3 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  и  $x_4 \approx -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ . (Корень  $x = 0$  нас не устраивает, т. к. мы предположили  $x \gg 1$ ). Если параметр  $\varepsilon$  порядка 0,01, то  $x_3$  и  $x_4$  будут порядка 10, т. е. действительно  $x \gg 1$ . Мы оценили все четыре корня этого уравнения.

Их значения можно уточнить, опираясь на малость параметра  $\varepsilon$ . Для первых двух корней можно положить  $x = x_{1,2} + \mu$ , где  $\mu$  — малая добавка. Тогда после подстановки в исходное уравнение, получаем

$$\varepsilon(x_{1,2} + \mu)^4 - (x_{1,2} + \mu)^2 + 3(x_{1,2} + \mu) - 2 = 0.$$

Учтем теперь малость  $\mu$ . В первом члене за счет малости параметра  $\varepsilon$  можно просто положить  $\varepsilon(x_{1,2} + \mu)^4 \approx \varepsilon x_{1,2}^4$ . Во втором члене положим  $(x_{1,2} + \mu)^2 \approx x_{1,2}^2 + 2\mu x_{1,2}$ . Собирая эти соотношения вместе, с учетом  $x_{1,2}^2 - 3x_{1,2} + 2 = 0$  после некоторых преобразований получаем

$$\mu = \frac{\varepsilon x_{1,2}^4}{2x_{1,2} - 3}.$$

С учетом  $x_1 \approx 1$  и  $x_2 \approx 2$ , получаем  $\mu_1 = -\varepsilon$  и  $\mu_2 = 16\varepsilon$ . Таким образом, уточненные значения корней суть

$$x_1 \approx 1 - \varepsilon, \quad x_2 \approx 2 + 16\varepsilon.$$

Мы видим, что если  $\varepsilon$  порядка 0,01, то добавки к корням являются малыми (для первого корня это условие выполняется лучше, чем для второго).

Найдем теперь поправки к корню  $x_3 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ . (Для  $x_4 \approx -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  можно поступить аналогично.) Положим  $x = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(1 + \mu)$ . После подстановки в исходное уравнение, получаем:

$$(1 + \mu)^4 - (1 + \mu)^2 + 3\sqrt{\varepsilon}(1 + \mu) - 2\varepsilon = 0.$$

Полагая далее  $(1 + \mu)^4 \approx 1 + 4\mu$  и  $(1 + \mu)^2 \approx 1 + 2\mu$ , находим

$$\mu \approx \frac{2\varepsilon - 3\sqrt{\varepsilon}}{2 + 3\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{2\sqrt{\varepsilon} - 3}{2 + 3\sqrt{\varepsilon}}.$$

Поскольку  $\varepsilon$  порядка 0,01, то вполне удачной будет оценка  $\mu \approx -\frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon}$ . Та-

ким образом, получаем  $x_3 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3}{2}$ . Обратите внимание, что добавка является малой по отношению к самому корню, но «сама по себе» порядка единицы.

7. Проведем доказательство от противного. Обозначим стороны треугольника через  $a, b, c$  (рис. 30). Пусть все три стороны треугольника разного порядка длины, т. е.  $c \gg b \gg a$ . В любом треугольнике сумма двух сторон больше третьей. Выберем в качестве этой третьей сторону максимальной длины  $c$ . Но тогда должно быть  $c < a + b$ . В силу условия  $b \gg a$  правая часть этого неравенства порядка  $b$ . Это значит, что величина  $c$  тоже порядка  $b$ . Но это вступает в противоречие с тем, что  $c \gg b$ . Таким образом, все три стороны не могут быть разного порядка длины, а это значит, что, по крайней мере, две из них (либо все три) одного порядка длины.

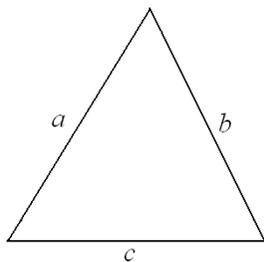


Рис. 30

8. Если основание треугольника равно  $a$ , а боковая сторона —  $b$ , то по теореме Пифагора его высота  $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ . Возможны две различные

конфигурации такого треугольника, качественно показанные на рис. 31.

В первом случае  $a = 1,0001$ ,  $b = 2,0001$ , при этом величины  $b$  и  $a/2$  существенно различаются, поэтому малым отклонением длин сторон от 1 и 2 можно пренебречь и получить для высоты треугольника

$$h \approx \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2} \approx 1,93\dots$$

Если говорить о порядке длины, то  $h \approx 2$ , т. е. по порядку высота совпадает с боковыми сторонами треугольника.

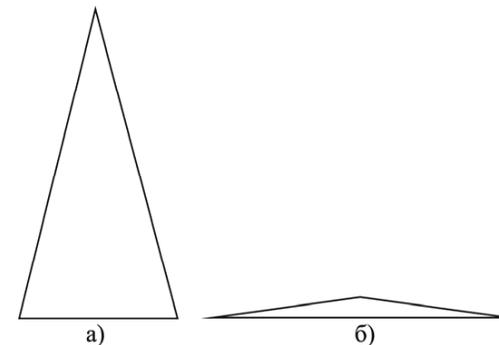


Рис. 31

Во втором случае (рис. 31б)  $b$  и  $a/2$  являются примерно равными величинами, поэтому малые добавки к значениям 1 и 2 существенны (если ими пренебречь, то длина высоты окажется равной нулю, что, очевидно, является слишком грубым приближением). Обозначим эту добавку через  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Тогда

$$h = \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - \left(\frac{2 + \varepsilon}{2}\right)^2}.$$

Отбрасывая в этом соотношении члены порядка  $\varepsilon^2$ , получаем:  $h \approx \sqrt{\varepsilon} = 0,01$ .

9. Отложим наибольшую сторону АВ, длину которой обозначим через  $c$ . Из точки В опишем окружность радиуса  $a$ , равного стороне ВС (рис. 32).

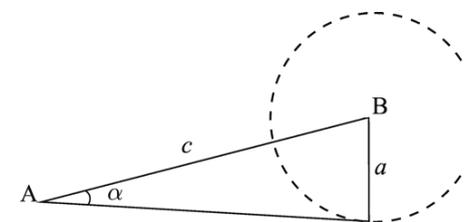


Рис. 32

Точки окружности дают множество возможных вершин С треугольника. Из рисунка видно, что угол САВ, обозначенный  $\alpha$ , будет максимальным, если сторона АС касается окружности. Таким образом, для максимального угла  $\alpha$  справедливо соотношение

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

По условию задачи  $c \gg a$ . Это значит, что угол  $\alpha$  мал, причем для его величины в радианах имеет место оценка  $\alpha \leq \frac{a}{c}$ .

Угол же  $\angle ACB$  может быть сколь угодно малым, для этого точка  $C$  должна быть расположена сколь угодно близко к точке пересечения продолжения отрезка  $AB$  с окружностью.

10. Равнобедренный треугольник, у которого две стороны много больше третьей ( $b = c \gg a$ ), показан на рис. 33а. Из рисунка хорошо видно, что для такого треугольника высоту, опущенную на основание, можно считать примерно равной боковой стороне  $h \approx c$ , а для основания считать, что  $a \approx \alpha c$ . Таким образом, для площади получаем приближенную формулу

$$S \approx \frac{c^2}{2} \alpha.$$

Обсудим ее точность. Для этого сравним ее с точной формулой  $S = \frac{c^2 \sin \alpha}{2}$ .

Мы видим, что точность полученной приближенной формулы определяется эффективностью уже использованного нами равенства  $\sin x \approx x$ .

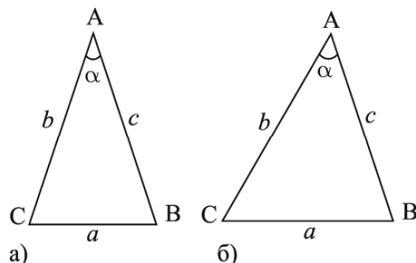


Рис. 33

Обобщим ее на случай треугольника с двумя сторонами одного порядка длины, которые много больше третьей стороны:  $c, b \gg a$ . Пусть  $b < c$ . Как видно из соответствующего рисунка (рис. 33б), для высоты треугольника, опущенной на сторону  $c$ , можно получить оценку  $h \approx ba$ . Тогда для площади имеем

$$S \approx \frac{cb}{2} \alpha.$$

Если  $b \approx c$ , что естественно в случае  $c, b \gg a$  (см. задачу 7), приходим к предыдущей формуле.

11. Соответствующее геометрическое построение показано на рис. 34.

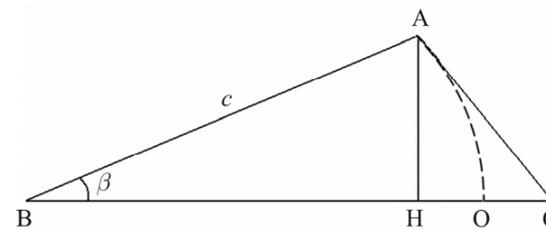


Рис. 34

Нетрудно видеть, что отрезок  $BC = \frac{c}{\cos \beta}$ , а отрезок  $BH = c \cos \beta$ . Тогда

$$CH = BC - BH = \frac{c}{\cos \beta} - c \cos \beta.$$

Используя приближенные выражения  $\cos \beta \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}$  и  $\frac{1}{\cos \beta} \approx \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{2}} \approx$

$\approx 1 + \frac{\beta^2}{2}$ , получаем  $CH \approx c\beta^2$ . В свою очередь,  $BO = c$  в силу того, что точка  $O$  лежит на окружности радиуса  $c$ . Тогда

$$OH = c - BH = c - c \cos \beta \approx c - c \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) = \frac{c\beta^2}{2}.$$

Сопоставляя два последних соотношения, приходим к выводу, что  $OH$  составляет примерно половину отрезка  $CH$ .

12. Множество треугольников первого типа, очевидно, не пусто, поскольку к нему относится, например, равнобедренный треугольник. Действительно, у такого треугольника все стороны равны, а значит, одного порядка длины, и все углы по  $60^\circ$ , т. е. не малые. Очевидно, что к этому классу относятся и все слабо возмущенные равнобедренные треугольники (рис. 35а).

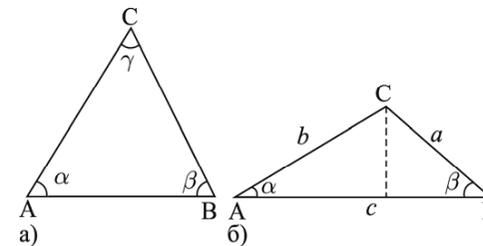


Рис. 35

Пусть теперь хотя бы один из углов треугольника, который обозначим через  $\alpha$ , мал (рис. 35б). Опустим из вершины С треугольника высоту на сторону длины  $c$ . Тогда будет справедливо равенство  $h = b \sin \alpha = a \sin \beta$ . Поскольку угол  $\alpha$  мал (в радианах  $\alpha \ll 1$ ), то  $\sin \alpha \approx \alpha$ , и, таким образом,

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} \approx \frac{b\alpha}{a}.$$

Поскольку, по условию, все стороны одного порядка длины, то  $b$  и  $a$  — величины одного порядка, а значит, в силу малости  $\alpha$ , малым является и  $\sin \beta$ .

Это, в свою очередь, означает, что  $\sin \beta \approx \beta$  и  $\beta \approx \frac{b\alpha}{a}$ .

Опять же в силу того, что все стороны одного порядка, приходим к выводу, что углы  $\beta$  и  $\alpha$  малы и одного порядка по величине. Очевидно, что третий угол такого треугольника будет близок к  $180^\circ$ . Примером треугольника такого типа является, например, треугольник на рис. 35б.

13. Для правильного  $N$ -угольника легко получить, что

$$S_N = N \frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{N}.$$

При больших  $N$  величина  $\frac{2\pi}{N}$  (угол, под которым сторона  $N$ -угольника видна из центра описанной окружности) является малой. Используя соотношение  $\sin x \approx x$ , получаем, что

$$S_N \approx \pi R^2.$$

Таким образом, в этом приближении площадь многоугольника равна площади описанного вокруг него круга. Оценим теперь отличие площади многоугольника от площади круга. Для этого следует использовать более точную формулу для синуса  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ . Тогда легко находим

$$S_N = \pi R^2 - \frac{2R^2 \pi^3}{3N^2}.$$

Теперь нетрудно оценить относительное отклонение площади многоугольника от площади круга  $\varepsilon_N = \frac{\Delta S_N}{S} = \frac{2\pi^2}{3N^2}$ .

Эта величина падает с ростом  $N$ , причем по закону  $\frac{1}{N^2}$ . Проверим наши оценки для квадрата, правильных шести-, десяти- и стоугольника. В таблице в верхней строке приведены оценки величины  $\varepsilon_N$  с помощью по-

лученной формулы, а в нижней строке — соответствующие точные значения. Мы видим, что уже для десятиугольника оценка получается достаточно точной.

$N$	4	6	10	100
$\varepsilon_N$ , оценка	0,4112	0,1828	0,0658	0,0066
$\varepsilon_N$ , точное	0,3634	0,1730	0,0645	0,0066

14. Очевидно, что

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = R \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \approx R \left(1 - \frac{x^2}{2R^2}\right) = R - \frac{1}{2R} x^2.$$

Таким образом, действительно, окружность у своей высшей точки аппроксимируется параболой (рис. 36).

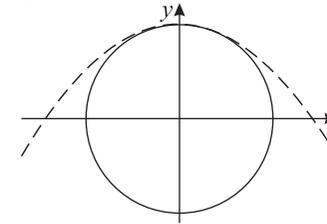


Рис. 36

15. В силу симметрии ясно, что центр окружности лежит на оси ординат. Пусть его координата равна  $C$ . Тогда  $(y - C)^2 + x^2 = R^2$ . По аналогии с предыдущей задачей, легко находим  $y \approx C + R - \frac{1}{2R} x^2$ .

Сравнивая с заданной по условию параболой  $y = a - bx^2$ , приходим к выводу, что  $a = C + R$ ,  $b = \frac{1}{2R}$ . Отсюда следует, что  $R = \frac{1}{2b}$ ,  $C = a - \frac{1}{2b}$ .

16. Для тела, брошенного под углом к горизонту, из кинематики известно выражение для траектории:

$$y = \text{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2u^2} x^2,$$

где  $u = v_0 \cos \alpha$  — горизонтальная скорость тела. Сравнивая с заданным по

условию уравнением параболы  $y = ax - bx^2$ , получаем  $a = \text{tg} \alpha$ ,  $b = \frac{g}{2u^2}$ .

В высшей точке траектории полная скорость равна горизонтальной, а ускорение свободного падения  $g$  перпендикулярно к ней, и служит, таким образом, центростремительным. По известной формуле кинематики

$$a_{\text{ч.с.}} = g = \frac{u^2}{R},$$

откуда получаем  $R = \frac{u^2}{g}$ . Подставляя сюда  $b = \frac{g}{2u^2}$ , получаем  $b = \frac{1}{2R}$ . Отметим, что этот результат согласуется с решением предыдущей задачи.

17. Очевидно, что при малых  $x$

$$a \cos kx \approx a - \frac{ak^2 x^2}{2}.$$

Используя результат задачи 15, приходим к выводу, что радиус аппроксимирующей окружности  $R = \frac{1}{ak^2}$ , а ее центр  $C = a - \frac{1}{ak^2}$ . Нетрудно видеть, что чем больше амплитуда косинусоиды, тем меньше радиус аппроксимирующей окружности.

## Анализ функций

1. Если начальная скорость мала, то маятник будет совершать малые колебания с периодом  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , не зависящим от амплитуды. Таким образом, период колебаний в области малых скоростей почти не зависит от ее величины. Если же скорость равна пороговому значению  $2\sqrt{lg}$ , то маятник примет вертикальное положение и останется в верхней точке сколько угодно долго. Это значит, что период колебаний стремится к бесконечности.

2. Установим сначала вид зависимости  $E(x)$  вблизи центра кольца. Разобьем кольцо на маленькие отрезки с зарядом  $dq$  каждый. Суммарное поле, создаваемое вдоль оси  $x$ , представляет собой сумму вкладов от всех отрезков. Каждый отрезок, заряженный зарядом  $dq$ , создает в этом направлении поле

$$dE(x) \approx \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \alpha \approx \frac{dqx}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

(Мы воспользовались тем, что при малых  $x$  можно считать, что  $\sin \alpha \approx \frac{x}{R}$ .)

Суммируя по всем отрезкам, получаем

$$E(x) \approx \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Таким образом, точно в центре кольца поле равно нулю и растет линейно при удалении от центра.

На больших расстояниях от кольца ( $x \gg R$ ) оно будет восприниматься как точечный заряд величины  $Q$  и создавать поле

$$E(x) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}.$$

Видно, что вдали от кольца электрическое поле спадает с ростом координаты. В совокупности с полученным ранее результатом это означает, что зависимость  $E(x)$  обязательно должна иметь максимум. Используя найденные асимптотики, можно изобразить качественным образом искомый график (рис. 37).

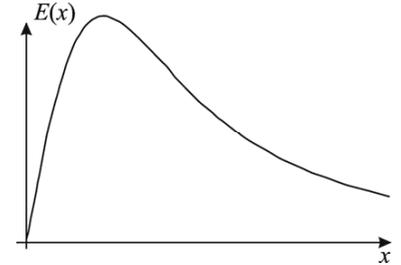


Рис. 37

Можно оценить координату и величину максимума. Для этого приравняем оба асимптотических выражения:

$$\frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}.$$

Отсюда получаем  $x \approx R$ , и, соответственно,  $E(x) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ .

Полезно привести точную формулу:

$$E(x) = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Нетрудно видеть, что при малых и больших  $x$  эта формула дает найденные нами из физических соображений асимптотики. Можно убедиться строгим образом, что полученная функция имеет максимум. Дифференцируя  $E(x)$  и приравнявая производную нулю, получаем уравнение

$$\frac{dE}{dx} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R^2 + x^2)^{3/2} - 3x^2(R^2 + x^2)^{1/2}}{(R^2 + x^2)^3} = 0.$$

Отсюда находим:  $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$  и  $E = \frac{Q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}$ . Наши качественные соображения

подтвердились, а оценки оказались эффективными с точностью до численных множителей, имеющих величину порядка единицы.

3. Непосредственно вблизи диска поле можно вычислить как поле бесконечной заряженной пластины:

$$E \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Вдали от диска (на расстояниях  $x \gg R$ ) он будет восприниматься как точечный заряд величины  $q = \sigma S = \pi\sigma R^2$  и создавать поле  $E(x) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 x^2}$ .

Приведем для информации точную формулу:  $E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$ .

Нетрудно видеть, что она демонстрирует обе установленные из физических соображений асимптотики. (Рекомендуем показать это самостоятельно.)

4. Чтобы точка двигалась только вперед, ее скорость должна совпадать по направлению с осью  $x$ . Дифференцируя, получим:

$$V = \frac{dx}{dt} = V_0 + a\omega \cos \omega t.$$

Скорость будет всегда иметь нужное направление, если  $V \geq 0$ . С учетом того, что косинус по модулю не превышает единицы, положительные значения скорости обеспечиваются при выполнении условия

$$\frac{V_0}{a\omega} \geq 1.$$

Полезно дать графическую интерпретацию данной задачи. Из условия очевидно, что тело участвует одновременно в двух движениях вдоль оси  $x$ : равномерном со скоростью  $V_0$  и гармоническом колебании с амплитудой  $a$  и круговой частотой  $\omega$ .

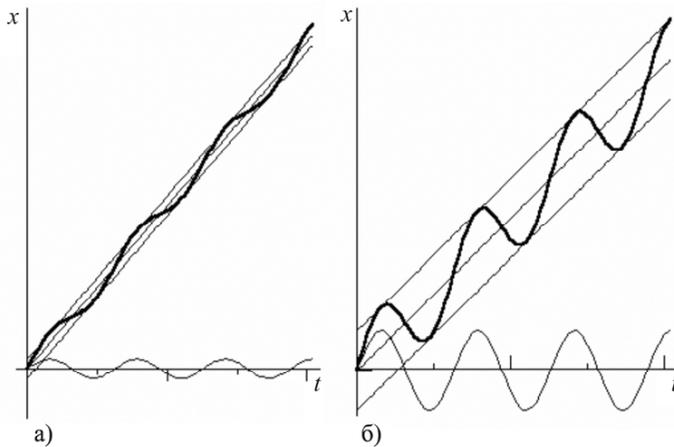


Рис. 38

Поэтому результирующая координата тела в любой момент времени определяется суммой двух координат его «частных» движений. Примерные графики зависимости  $x(t)$  даны на рис. 38. График на рис. 38а соответствует случаю, когда полученное условие выполняется, а на рис. 38б — не выполняется.

Физически условие задачи можно реализовать, если поместить пружинный или математический маятник на тележку, которая может двигаться с постоянной скоростью.

5. Удобно представить потенциал в виде  $U = 4a \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$ , где  $x = \left( \frac{r}{b} \right)^6$ .

Проанализируем вид потенциала на больших и малых расстояниях между молекулами. В случае малых расстояний начинает доминировать первый член, так что  $U \approx 4a \frac{1}{x^2}$  и потенциал стремится к «плюс» бесконечности.

В свою очередь, при больших расстояниях доминирует второй член и  $U \approx -4a \frac{1}{x}$ . Таким образом, потенциал стремится к нулю, причем со стороны отрицательных значений функции. Эти две асимптотики совместимы только при условии, что зависимость потенциала от расстояния имеет минимум. Найдем его. Для этого приравняем нулю производную

$$\frac{dU}{dx} = 4a \left( \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = 0.$$

Отсюда находим  $x = 2$ . Это значение и определяет расстояние между молекулами  $r = \sqrt[6]{2}b \approx 1,122b$  в случае отсутствия внешних сил. В свою очередь, на больших расстояниях потенциал, как мы видели, обращается в нуль. Это означает, что энергия, необходимая на разделение молекул, дается величиной  $E = -U(2) = a$ .

6. Прежде всего обоснуем, что зависимость объема конуса от угла  $\alpha$  имеет максимум. Это легко сделать из следующих соображений. Если угол вырезанного сектора стремится к нулю, то высота конуса конечна (совпадает с радиусом  $R$ ), а площадь основания стремится к нулю. Значит, объем конуса также стремится к нулю. Пусть теперь угол стремится к  $2\pi$ . Тогда площадь основания конечна и стремится к величине  $\pi R^2$ . Высота же конуса в этом случае стремится к нулю, а значит, и объем конуса также стремится к нулю. Таким образом, функция  $V(\alpha)$  на отрезке от 0 до  $2\pi$  должна иметь максимум.

Проведем более детальные вычисления. Длина окружности основания конуса, очевидно, равна  $R\alpha$ . Тогда радиус основания оставляет  $r = \frac{R\alpha}{2\pi}$ . Для

высоты конуса находим  $h = \sqrt{R^2 - r^2}$ . Объем конуса

$$V(\alpha) = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{R^3}{24\pi^2} \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

Это выражение имеет установленные нами асимптотики. Его максимум находим, дифференцируя по  $\alpha$  определяющее зависимость от угла выражение  $\alpha^2(4\pi^2 - \alpha^2)$  и приравнявая производную нулю:

$$2\alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} = 0.$$

Отсюда получаем, что  $\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi$ . Найдем теперь угол при вершине конуса

$\varphi$ . Для него очевидно  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{R} = \frac{\alpha}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Отсюда и определяем значение угла  $\varphi = 109^\circ 28'$ , указанное в условии.

7. По условию прочность балки определяется выражением  $P = bh^2$ . Пусть толщина балки  $h$  стремится к нулю. Тогда, очевидно, ее ширина  $b$  стремится к диаметру бревна. И наоборот, если к нулю стремится ширина балки, то ее толщина стремится к диаметру. Таким образом, для этих двух предельных случаев прочность балки стремится к нулю. Поэтому должна существовать такая конфигурация балки, что ее прочность максимальна. Найдем ее. Очевидно, что  $h^2 + b^2 = d^2$ . Но тогда  $P = b(d^2 - b^2)$ . Условию экстремума отвечает  $\frac{dP}{db} = d^2 - 3b^2 = 0$ , откуда получаем  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}d$  и, соответственно,  $h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$ .

8. Освещенность на краю стола дается формулой  $I = \frac{c}{d^2} \cos \theta$ , где  $d$  — расстояние от точки подвеса лампы до края стола, а  $\cos \theta = \frac{h}{d}$  — угол, под которым виден край стола из этой точки. Используя теорему Пифагора, без труда получаем:  $I = \frac{ch}{(h^2 + R^2)^{3/2}}$ , где  $R$  — радиус стола. Нетрудно видеть, что асимптотики  $h \rightarrow 0$  и  $h \rightarrow \infty$  приводят к  $I \rightarrow 0$ . Таким образом, искомая интенсивность как функция высоты подвеса лампы  $h$  действительно имеет максимум. Приравнявая нулю производную, по аналогии с задачей 2, получаем  $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$ .

9. Обозначим скорость налетающей частицы массы  $m$  через  $v$ . Происходит упругий удар с ядром массы  $M$ . Используя известные результаты анализа задачи об упругом ударе двух тел, находим скорость ядра  $V$  после удара:  $V = \frac{2mv}{m + M}$ .

По условию кинетическая энергия ядра после удара составляет  $n$ -ую часть кинетической энергии налетающей частицы. Поэтому

$$n = \frac{MV^2}{mv^2} = \frac{4mM}{(m + M)^2} = \frac{k}{(1 + k)^2},$$

где  $k = m/M$  — отношение масс частицы и ядра. Полученная функция  $n = n(k)$  при малых  $k$  ведет себя как  $n(k) \approx k$ .

Таким образом, доля переданной энергии растет с ростом относительной массы налетающей частицы. В то же время, при больших  $k$  имеем оценку  $n(k) \approx \frac{1}{k}$ .

В этом случае доля переданной энергии падает — очень тяжелая налетающая частица почти не передает энергии легкому ядру.<sup>2</sup> Из установленных асимптотик вытекает, что зависимость  $n = n(k)$  должна иметь максимум. Его можно найти, дифференцируя  $n(k)$  и приравнявая производную нулю:

$$\frac{dn}{dk} = \frac{1 - k^2}{(1 + k)^4} = 0.$$

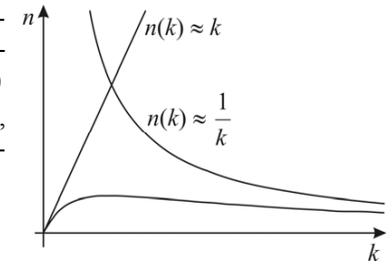


Рис. 39

Отсюда находим, что  $k = 1$ . Таким образом, доля переданной энергии максимальна, когда массы частицы и ядра равны. При этом передается четвертая часть энергии налетающей частицы, поскольку при  $k = 1$

$$n = \frac{k}{(1 + k)^2} = \frac{1}{4}.$$

График функции  $n(k)$  и найденные асимптотики показаны на рис. 39.

10. Для начала определим положение центра масс пустого сосуда  $h_0$ . Разделим мысленно сосуд на две части — стенки массой  $m_1$  и дно массой  $m_2$ . Для простоты будем считать, что толщина стенок мала по сравнению с диаметром сосуда. В этом случае  $m_1 = 2\pi R d H \rho_0$ ,  $m_2 = \pi R^2 d \rho_0$ , где  $\rho_0$  — плотность материала стенок. Тогда координата центра масс пустого сосуда, отсчитываемая от уровня дна, определяется выражением  $h_0 = \frac{1}{2} \frac{m_1 H - m_2 d}{m_1 + m_2}$ .

<sup>2</sup> Этот вывод может показаться неверным, ведь очевидно, что после соударения с очень тяжелой частицей («стенкой») легкая полетит с достаточно большой скоростью. Между тем парадокса здесь нет: энергия легкой частицы мала лишь по сравнению с энергией тяжелой, а не «сама по себе».

(Знак минус в числителе связан с тем, что дно расположено ниже выбранного нулевого уровня.) Используя выражения для масс стенок и дна, находим

$$h_0 = \frac{1}{2} \frac{2H^2 - Rd}{2H + R}.$$

Таким образом, возможны две качественно различные ситуации. Если  $H > \sqrt{\frac{Rd}{2}}$ , то  $h_0 > 0$ , и центр масс пустого сосуда лежит выше уровня дна. Этот случай имеет место при достаточно высоких стенках, и его естественно назвать «стакан».

Если же неравенство выполняется в противоположную сторону,  $H < \sqrt{\frac{Rd}{2}}$ , то центр масс лежит ниже уровня дна. Эта ситуация имеет место, если стенки невысоки, и ее будем условно называть «тарелка».

Отметим также, что из полученной формулы следует, что  $h_0 < \frac{H}{2}$ . Это понятно — центр масс стенок лежит точно на высоте  $\frac{H}{2}$ , а добавка дна может только понизить его положение.

Пусть теперь в сосуд подлили воду до уровня  $h$ . Тогда высота центра масс сосуда с водой будет определяться формулой  $l = \frac{Mh_0 + \frac{1}{2}\rho Sh^2}{M + \rho Sh}$ , или

$$l = \frac{h_0 \varepsilon + \frac{1}{2}h^2}{\varepsilon + h}.$$

Здесь введен параметр  $\varepsilon = \frac{M}{\rho S}$  с размерностью длины. Он имеет физический смысл высоты столба жидкости, масса которого равна массе стакана.

Обсудим теперь, как зависит положение центра масс от уровня налитой воды  $h$ . Из полученной формулы видно, что при больших  $h$  квадратичный член будет доминировать, и положение центра масс можно оценить как  $l \approx \frac{1}{2}h$ . Эта оценка физически понятна: если налито много воды, то стакан по сравнению с жидкостью весит мало, а значит, центр масс определяется положением центра масс столба жидкости.

Если же налито немного жидкости, наоборот, можно пренебречь квадратичным членом по сравнению с линейным, и получить:

$$l \approx \frac{h_0 \varepsilon}{\varepsilon + h} = \frac{h_0}{1 + h/\varepsilon} \approx h_0 - \frac{h_0}{\varepsilon} h.$$

Анализ этой формулы выявляет два различных случая. Пусть сначала мы имеем «тарелку», для которой центр масс находится ниже дна и  $h_0 < 0$ . В этом случае высота центра масс системы возрастает с ростом  $h$ . Физически это вполне понятно — подливаемая вода заведомо лежит выше центра масс пустой тарелки.

Иная ситуация имеет место для стакана. Действительно, для стакана  $h_0 > 0$ , и при малом количестве подлитой воды центр масс начинает понижаться. Физически это также ясно: при малом количестве жидкости она целиком располагается ниже центра масс пустого сосуда.

Эта два случая разделяются особой, выделенной ситуацией, когда  $h_0 = 0$ . Это случай, когда центр масс пустого сосуда точно совпадает с его дном. Для него из исходного анализируемого соотношения имеем

$$l = \frac{\frac{1}{2}h^2}{\varepsilon + h},$$

то есть уровень центра масс при изменении уровня жидкости меняется очень слабо, квадратичным образом.

Обсудим теперь случай «стакана» более подробно. Как мы видели, положение центра масс при малом количестве подлитой жидкости уменьшается. С другой стороны, при большом количестве подлитой жидкости оно растет. Таким образом, исследуемая зависимость должна иметь минимум. Убедимся в этом. Удобно ввести безразмерный уровень жидкости  $x = \frac{h}{\varepsilon}$ .

Тогда

$$l = \frac{h_0 + \frac{1}{2}\varepsilon x^2}{1 + x}.$$

Найдем минимум этой функции. Дифференцируя по  $x$  и приравняв производную  $\frac{dl}{dx}$  нулю, находим

$$\varepsilon x(1 + x) - h_0 + \frac{1}{2}\varepsilon x^2 = 0,$$

откуда получаем квадратное уравнение для координаты:

$$x^2 + 2x - \frac{2h_0}{\varepsilon} = 0.$$

Решая его, получаем искомое значение

$$x_{\min} = -1 + \sqrt{1 + \frac{2h_0}{\varepsilon}}.$$

Соответственно, высота наимизшего положения центра масс дается выражением

$$l_{\min} = l(x_{\min}) = \varepsilon \left( \sqrt{1 + \frac{2h_0}{\varepsilon}} - 1 \right).$$

После прохождения этой точки центр масс начинает подниматься. Интересно, что можно добиться такой ситуации, когда центр масс стакана с водой будет точно совпадать с положением центра масс пустого стакана.

Действительно, приравнявая  $l = h_0$ , получаем:  $x = \frac{2h_0}{\varepsilon}$ . Или, переходя к раз-

мерным переменным,  $\frac{h}{2} = h_0$ . Это условие имеет простую физическую ин-

терпретацию: центр масс стакана с водой совпадает с центром масс пустого стакана в том случае, если центр масс налитой воды также совпадает с центром масс пустого стакана. Отметим, что мы

установили, что  $h_0 < \frac{H}{2}$ . Это означает, что

найденная ситуация соответствует  $h < H$ . А это, в свою очередь, означает, что наиболее высокое положение центра масс будет в полностью заполненном водой стакане, после прохождения условия совпадения центра масс, что вполне очевидно из физических соображений.

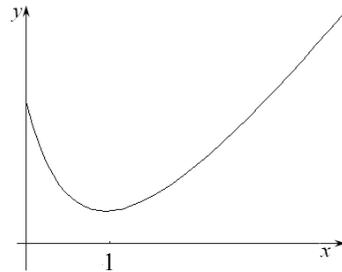


Рис. 40

Для частного случая  $\frac{h_0}{\varepsilon} = \frac{3}{2}$  график функции  $y(x) = \frac{l}{h_0}(x) = \frac{1 + \frac{1}{3}x^2}{1 + x}$  показан на рис. 40. Минимум в этом случае достигается при  $x_m = 1$ .

## Параметрический анализ

1. Пусть высота столба тяжелой жидкости в первом сосуде составляет  $l_1$ , а во втором —  $l_2$ . Очевидно, что  $l_1 + l_2 = 2H$ . Условие равенства давлений в соединяющей трубке дает  $\rho_l l + \rho_r l_1 = \rho_r l_2$ , где  $l$  — «количество»<sup>3</sup> подлитой легкой жидкости. Из этих двух соотношений легко находим

$$l_2 = H + \frac{\rho_l l}{2\rho_r}.$$

<sup>3</sup> Чтобы избежать введения лишних величин, количество жидкости в этой задаче будем характеризовать высотой ее столба в сосуде данного диаметра.

Однако это соотношение будет выполняться лишь до тех пор, пока легкая жидкость не вытеснит тяжелую во второй сосуд, т. е. до  $l_2 = 2H$ , или

$$l = \frac{2\rho_r}{\rho_l} H.$$

Начиная с этого момента, часть легкой жидкости будет перетекать из первого сосуда во второй и всплывать наверх, поскольку жидкости не перемешиваются. В этом случае

$$\rho_l(l - x) = 2\rho_r H + \rho_l x,$$

где  $x$  — количество легкой жидкости, перетекшей во второй сосуд. Тогда легко получаем

$$l_2 = 2H + x = 2H + \frac{\rho_l l - 2\rho_r H}{2\rho_l} = \frac{1}{2}l + H \left( 2 - \frac{\rho_r}{\rho_l} \right).$$

Нетрудно видеть, что в первом случае наклон графика зависимости уровня во втором сосуде от количества подлитой жидкости определяется коэффициентом  $\frac{\rho_l}{2\rho_r}$ , а во втором —  $\frac{1}{2}$ . Таким образом, соответствующий гра-

фик имеет в точке  $l = \frac{2\rho_r}{\rho_l} H$  излом.

2. Тело будет набирать скорость, соскальзывая с полусферы, и может оторваться от нее. Найдем момент отрыва. Пусть радиус, проведенный к телу, составляет угол  $\alpha$  с вертикалью. По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha),$$

где  $m$  — масса тела. С другой стороны, условием движения тела по окружности радиуса  $R$  является соотношение

$$mg \cos \alpha - N = \frac{mv^2}{R},$$

где  $N$  — сила реакции опоры. В момент отрыва  $N = 0$ . Комбинируя все эти соотношения, получаем:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} + \frac{mv_0^2}{3Rg}.$$

В частном случае, когда начальная скорость равна нулю, получаем для условия отрыва  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ . Следует отметить, однако, что косинус не может

превышать единицу. Поэтому найденное решение существует лишь при  $\frac{mv_0^2}{Rg} < 1$ . Следовательно, имеется критическая скорость, при превышении которой отрыв тела происходит сразу, и оно совершает свободный полет по параболе.

3. В этой задаче, на первый взгляд, нет параметра, поскольку все численные значения заданы. Однако она представляет собой пример, когда такой параметр удобно ввести искусственным образом. Действительно, обсудим сначала задачу в общем виде, полагая плотность материала шара  $\rho$ , а плотность воды —  $\rho_e$ . Пусть шар погрузился в воду на глубину  $h$ . Объем погруженной части находим как объем шарового сегмента:  $\pi h^2(R - \frac{h}{3})$ . Тогда по закону Архимеда получаем

$$\pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right) \rho_e = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

где  $\frac{4}{3} \pi R^3$  — объем шара. Введем далее безразмерную глубину погружения  $x = \frac{h}{R}$ . Тогда наше уравнение можно привести к виду

$$x^2 \left( 1 - \frac{x}{3} \right) = \varepsilon,$$

где  $\varepsilon = \frac{4\rho}{3\rho_e}$  и есть соответствующий параметр. В случае, отвечающем  $\rho = 0,1 \text{ г/см}^3$ , имеем  $\varepsilon = 0,133\dots$ . Итак, задача свелась к решению кубического уравнения, которое можно решить численно. Однако можно аналитически получить очень хорошее приближенное решение, используя малость параметра  $\varepsilon$ .

В силу малости  $\varepsilon$ , малой является и искомая величина  $x$ . (Шар очень легкий и, следовательно, мало погружен в жидкость.) Поэтому можно пренебречь величиной  $\frac{x}{3}$  по сравнению с единицей. Тогда получаем  $x \approx \sqrt{\varepsilon}$ .

В нашем случае  $x \approx \sqrt{0,1333} \approx 0,365$ . Эффективность нашего приближения определяется малостью величины  $\frac{x}{3} \approx 0,121$  по сравнению с единицей.

Мы можем улучшить полученное приближение. Для этого положим  $x = \sqrt{\varepsilon} + \delta$ , где  $\delta$  — маленькая добавка. Тогда

$$x^2 = \left( \sqrt{\varepsilon} + \delta \right)^2 \approx \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}\delta,$$

$$x^3 = \left( \sqrt{\varepsilon} + \delta \right)^3 \approx (\sqrt{\varepsilon})^3 + 3\varepsilon\delta$$

в силу малости  $\delta$ . Подставляя эти соотношения в исследуемое уравнение, получим

$$\delta \approx \frac{\varepsilon}{3(2 - \sqrt{\varepsilon})}.$$

В нашем случае  $\varepsilon = 0,133\dots$ , откуда находим  $\delta \approx 0,027\dots$ . Окончательно  $x = \sqrt{\varepsilon} + \delta \approx 0,365 + 0,027 = 0,392$ . Возвращаясь к размерным переменным, получаем, что шар углубится в воду примерно на 3,9 см. Десятые доли миллиметра мы отбросили, поскольку ясно, что в реальной задаче такая точность не нужна. (Влияние, например, поверхностного натяжения внесет ббольшую поправку.) Заметим, что первое приближение было достаточно точным: добавка во втором составила всего около 3 мм.

При желании уравнение  $x^2 \left( 1 - \frac{x}{3} \right) = \varepsilon$  можно решить и более точно. Для этого можно воспользоваться, например, методом Ньютона. Он состоит в том, что для решения уравнения  $f(x) = 0$  можно находить все более точные значения корня с помощью итерационного соотношения

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

В нашем случае  $f(x) = x^2 \left( 1 - \frac{x}{3} \right) - \varepsilon$ , и итерационная формула выглядит как

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 - \frac{2}{3}x_n^3 + \varepsilon}{(2 - x_n)x_n}.$$

Используя, например, начальное приближение  $x_1 = 0,365$ , получаем  $x_2 = 0,3923\dots$ ,  $x_3 = 0,3916\dots$ ,  $x_4 = 0,3916\dots$ . Мы видим, что последовательность очень быстро сходится, и чтобы получить глубину погружения шара с точностью до сотых долей миллиметра (что с физической точки зрения, конечно, избыточно), достаточно всего двух итераций.

Аналогичным образом можно приближенно решить задачу, если плотность шарика близка к плотности воды.

Есть еще один случай, позволяющий легко найти приближенное решение: если плотность жидкости примерно в два раза больше плотности шара. Действительно, в этом случае шар погружен почти точно наполовину. Тогда объем погруженной части складывается из половины объема шара и малой добавки, которую можно вычислить, умножая площадь шара в соответствующем сечении на малую добавку к радиусу, т. е.  $\pi R^2 h$ . В результате имеем

$$\left( \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi R^2 h \right) \rho_e = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

откуда получаем

$$\frac{h}{R} = \frac{2}{3} \frac{2\rho - \rho_e}{\rho_e}.$$

Например, для  $\rho = 0,6 \text{ г/см}^3$  получаем  $\frac{h}{R} \approx 0,133$ , и суммарная глубина погружения шара составит 11,33 см. Более точный расчет дает 11,035 см. Таким образом, ошибка составляет 3 мм.

4. Обозначим скорость налетающего грузика массы  $m$  через  $v$ . Сначала произойдет абсолютно упругий удар с одним грузиком массы  $M$ . (Считаем время соударения очень малым, так что за это время грузы не смещаются и пружина не успевает деформироваться). Используя известные результаты анализа задачи об упругом ударе двух тел, находим скорости налетающего  $u$  и первоначально неподвижного  $V$  грузов после удара:

$$u = \frac{m - M}{m + M} v, \quad V = \frac{2m}{m + M} v.$$

После удара налетающий груз движется со скоростью  $u$ , поэтому его координата зависит от времени по закону  $x_1 = ut$ . Обсудим теперь движение второго (покоившегося) груза. Он входит в систему из двух одинаковых грузиков, скрепленных пружиной. Движение такой системы проще всего понять, перейдя в систему центра масс, которая после удара движется со скоростью  $V/2$ . В этой системе отсчета грузики симметричным образом колеблются по гармоническому закону, причем центр пружины неподвижен, а амплитуда колебаний скорости составляет  $V/2$ . Таким образом, скорость грузиков изменяется по закону  $V(t) = \frac{V}{2} \cos \omega t$ , где  $\omega$  — частота собственных колебаний каждого груза. Этому отвечает изменение координаты по закону  $x(t) = \frac{V}{2\omega} \sin \omega t$ . Возвращаясь в исходную систему отсчета, получаем

$$x_2 = \frac{V}{2} t + \frac{V}{2\omega} \sin \omega t.$$

Условие повторного столкновения грузиков  $x_1 = x_2$  приводит к следующему уравнению:

$$ut = \frac{V}{2} t + \frac{V}{2\omega} \sin \omega t.$$

Используя полученные ранее соотношения для скоростей  $u$  и  $V$ , после некоторых преобразований получим

$$\sin \omega t = -\frac{M}{m} \omega t.$$

Это трансцендентное уравнение относительно времени соударения  $t$ . Обсудим подробнее его свойства. Для этого удобно ввести безразмерные переменную  $\tau = \omega t$  и параметр  $k = \frac{M}{m}$ . Тогда исследуемое уравнение примет вид

$$\sin \tau = -k\tau.$$

Таким образом, его решения зависят от параметра  $k$ . Представление о них можно получить графическим методом. С этой целью изобразим на одном графике две функции, задающие левые и правые части уравнения:  $y(\tau) = \sin \tau$  и линейную  $y(\tau) = -k\tau$  при разных значениях параметра  $k$ , «управляющего» наклоном прямой линии (рис. 41). Из рисунка хорошо видно, что в зависимости от значений этого параметра графики могут пересекаться, что физически отвечает возможности повторного столкновения грузиков, а могут и не пересекаться, и тогда повторное столкновение невозможно. «Критическая» ситуация, очевидно, отвечает случаю, когда прямая линия является касательной к графику синуса. Для этого в точке касания угловой коэффициент прямой линии  $k$  должен совпасть с угловым коэффициентом касательной к графику синуса, который находим, вычисляя соответствующую производную. Таким образом, в критической ситуации

$$\sin \tau = -k\tau,$$

$$\cos \tau = -k.$$

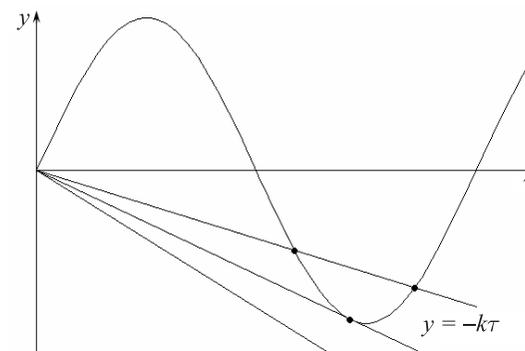


Рис. 41

(Фактически, мы просто продифференцировали первое соотношение.) Поделив эти два уравнения друг на друга, получим

$$\text{tg } \tau = \tau.$$

Это также трансцендентное уравнение, но в него не входит никаких параметров, поэтому его можно решить численно. Прежде всего, полезно оце-

нить примерное значение интересующего нас корня. Для этого вновь воспользуемся графическим методом. Из соответствующего рис. 42 видно, что графики пересекаются в окрестности точки  $\frac{3}{2}\pi$ . Таким образом,  $\tau_1 \approx 4,712388\dots$

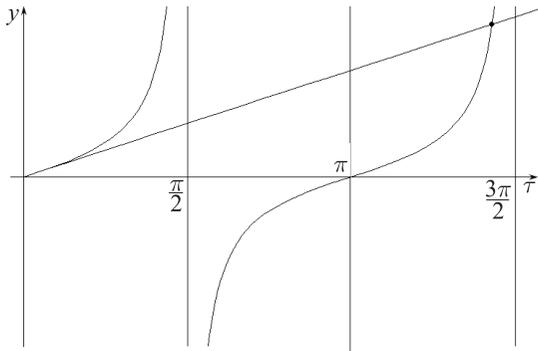


Рис. 42

Для дальнейшего уточнения корня положим  $\tau = \frac{3}{2}\pi - \delta$ , где  $\delta$  — малая величина. Подставляя это в исследуемое уравнение, получим

$$\operatorname{ctg} \delta = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi - \delta}.$$

При малых  $\delta$  можно положить  $\operatorname{ctg} \delta = \frac{1}{\delta}$  (поскольку  $\sin \delta \approx \delta$ ,  $\cos \delta \approx 1$ ).

Тогда можно легко получить  $\delta \approx \frac{2}{3\pi}$ . Окончательно,  $\tau_2 \approx \frac{3}{2}\pi - \frac{2}{3\pi} \approx 4,50017\dots$

Можно еще более точно решить уравнение, если учесть квадратичные по  $\delta$  члены:  $\sin \delta \approx \delta$ ,  $\cos \delta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}$ . Тогда из  $\left(\frac{3}{2}\pi - \delta\right) \operatorname{ctg} \delta = 1$  получаем

$$\delta = \frac{3\pi}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \left( \frac{2}{3\pi} \right)^2} \right) = 0,2172\dots$$

Таким образом,  $\tau_3 = 4,49517\dots$

Дальнейшие уточнения можно получить с помощью метода Ньютона. Тонкость состоит, однако, в том, что решать исходное уравнение  $\operatorname{tg} \tau = \tau$  оказывается очень неудобно, поскольку в окрестности корня тангенс имеет очень большую крутизну и трудно добиться сходимости метода. Поэтому будем решать эквивалентное уравнение  $\sin \tau - \tau \cos \tau = 0$ . Применим к нему формулу метода Ньютона

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{f(\tau_n)}{f'(\tau_n)}.$$

Тогда получаем

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{1}{\tau_n} + \operatorname{ctg} \tau_n.$$

Используя начальное приближение  $\tau = 0,45$ , получаем  $\tau = 4,49342\dots$ . Следующая итерация дает  $\tau = 4,49341\dots$

Возвращаясь к нашей физической задаче, легко находим значение параметра  $k = -\cos \tau$ :  $k = 0,21722\dots$

Поскольку параметр  $k$  определяется массами грузиков  $\left(k = \frac{M}{m}\right)$ , то повторное столкновение грузов возможно, если

$$\frac{M}{m} < 0,21722.$$

Таким образом, для того чтобы столкновение было возможным, налетающий груз должен быть достаточно тяжелым.

5. Могут реализоваться следующие конечные состояния системы:

- В сосуде останется только лед. Соответствующее условие имеет вид

$$c_v M T + \lambda M < c_l m.$$

- В сосуде останется только вода. Условие реализации этого состояния имеет вид

$$c_v M T > c_l m t + \lambda M.$$

- Промежуточная ситуация: есть одновременно и лед, и вода при нулевой температуре.

Здесь  $c_v$ ,  $c_l$ ,  $\lambda$  — удельные теплоемкости воды и льда и удельная теплота плавления льда соответственно.

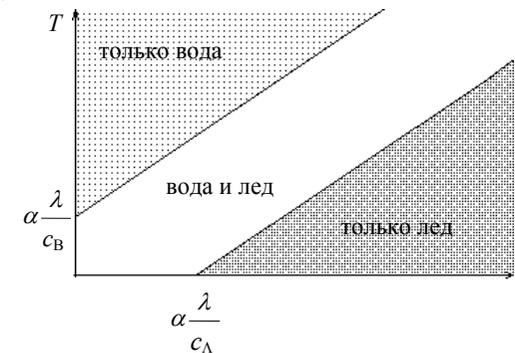


Рис. 43

Соответствующие области на плоскости параметров  $(T, t)$  изображены на рис. 43. При этом прямые, являющиеся границами областей, параллельны,

а их угловой коэффициент равен параметру  $\alpha = m/M$ , характеризующему соотношению начальных масс воды и льда.<sup>4</sup>

6. Брусок либо скользит по доске, либо нет. В первом случае приложенная сила  $F$  больше, чем максимальная сила трения покоя между бруском и доской  $F_{mp,1} = \mu_1 mg$ , во втором — меньше.

Если брусок скользит, то по третьему закону Ньютона на доску в направлении силы  $F$  действует сила трения скольжения  $F_{mp,1}$ , а если нет — то сила трения покоя, равная  $F$ . Если эта сила меньше, чем максимальная сила трения покоя между доской и поверхностью  $F_{mp,1} = \mu_2(m+M)g$ , то доска скользит по поверхности, если нет, то доска покоится. Таким образом, возможны четыре различные ситуации:

- Брусочек и доска скользят относительно друг друга.

В этом случае  $F > \mu_1 mg$  и  $\mu_1 mg > \mu_2(m+M)g$ , и, следовательно

$$\mu_1 < \frac{F}{mg}, \mu_2 < \mu_1 \frac{m}{m+M}.$$

- Брусочек скользит по доске, доска покоится относительно поверхности.

В этом случае должны выполняться неравенства  $F > \mu_1 mg$  и  $\mu_1 mg < \mu_2(m+M)g$ , откуда следует, что

$$\mu_1 < \frac{F}{mg}, \mu_2 > \mu_1 \frac{m}{m+M}.$$

• Брусочек неподвижен относительно доски, доска скользит. Это соответствует  $F < \mu_1 mg$  и  $F > \mu_2(m+M)g$ , или

$$\mu_1 > \frac{F}{mg}, \mu_2 < \mu_1 \frac{m}{m+M}.$$

• Брусочек и доска неподвижны. Тогда  $F < \mu_1 mg$  и  $F < \mu_2(m+M)g$ , или

$$\mu_1 > \frac{F}{mg}, \mu_2 > \mu_1 \frac{m}{m+M}.$$

Соответствующие этим ситуациям области на плоскости параметров  $(\mu_1, \mu_2)$  приведены на рис. 44. При вариации коэффициентов трения мы будем двигаться по этой плоскости параметров и наблюдать качественное изменение типа поведения системы. Интересно отметить,

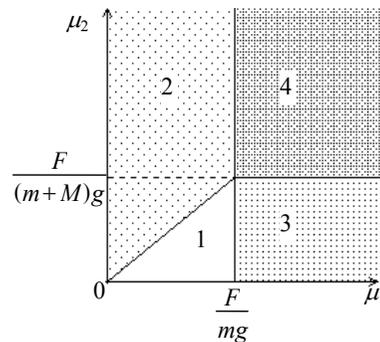


Рис. 44

<sup>4</sup> Строго говоря, необходимо дополнительно ограничить рисунок прямыми  $T = 100^\circ\text{C}$  и  $t = 273^\circ\text{C}$  из вполне очевидных физических соображений.

что на плоскости параметров имеется особая точка, в окрестности которой реализуются все четыре возможных типа динамики.

7. Пусть капли соприкасаются. Поверхность раздела в таком случае должна находиться в равновесии. Таким образом, соответствующие трем границам три силы должны в сумме давать нуль. Это условие может, однако, нарушаться. Например, если  $\sigma_{12} + \sigma_{13} < \sigma_{23}$ , то капля 1 «растечется» по капле 2. Если  $\sigma_{23} + \sigma_{12} < \sigma_{13}$ , то наоборот, капля 2 растечется по капле 1. Если же  $\sigma_{23} + \sigma_{13} < \sigma_{12}$ , то капли разлетятся. При представлении результатов в пространстве параметров можно отнормировать коэффициенты поверхностного натяжения на величину  $\sigma_{12}$ . Тогда приходим к разбиению плоскости параметров  $(\sigma_{13}/\sigma_{12}, \sigma_{23}/\sigma_{12})$  на области, показанному на рис. 45.

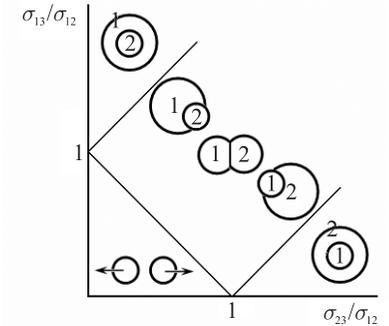


Рис. 45

8. Обсудим сначала некоторые предельные случаи. Если скорости движения по полю и дороге совпадают, т. е.  $v = u$  и  $\varepsilon = 1$ , то очевидно, что минимальное время будет достигаться при движении по кратчайшему расстоянию между точками, т. е. по диагонали прямоугольника. Если же  $v = 0$ , то двигаться следует только по дорогам. Можно предположить, что в промежуточной ситуации будет оптимальным следующий маршрут: сначала по полю под некоторым углом к дороге, а затем по дороге (рис. 46). Оказывается, что на плоскости указанных в условии параметров этим трем возможностям отвечают определенные области. Обсудим этот вопрос более подробно.

Пусть человек сначала идет по полю так, что выходит на дорогу на расстоянии  $x$  от угла поля (рис. 46). В этом случае он при движении по полю

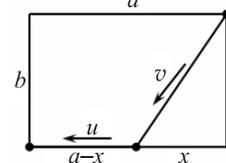


Рис. 46

затратит время  $t = \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{v}$ . По дороге он пройдет

расстояние  $(a-x)$  за время  $t = \frac{(a-x)}{u}$ . Таким

образом, суммарное время движения составит

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{v} + \frac{(a-x)}{u}.$$

Введем далее для удобства безразмерное время  $\tau = \frac{vt}{a}$  и безразмерную

координату  $\frac{x}{a}$ , которую мы для удобства продолжим обозначать как  $x$ . Тогда

$$\tau = \varepsilon(1-x) + \sqrt{x^2 + \mu^2}.$$

Эта зависимость имеет две характерные асимптотики. Для одной, отвечающей  $x=1$ , имеем

$$\tau_1 = \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Данному случаю отвечает движение строго по диагонали прямоугольника. Во втором случае  $x=0$  и

$$\tau_0 = \varepsilon + \mu.$$

На первый взгляд, ему отвечает движение только по дорогам. На самом деле нужно рассуждать более аккуратно. Такое решение отвечает движению «почти» вдоль дороги, но все же по полю вдоль стороны прямоугольника  $b$ , и лишь затем по дороге. Для движения же только по дорогам можно получить без труда  $t = \frac{a+b}{u}$  или

$$\tau_3 = (1 + \mu)\varepsilon.$$

Продолжим наш анализ. Пусть пешеход движется частично по полю, а частично по дороге. Как мы нашли, он затратит время

$$\tau = \varepsilon(1-x) + \sqrt{x^2 + \mu^2}.$$

Подберем значение  $x$  (точку выхода на дорогу) так, чтобы получить минимальное значение функции  $\tau = \tau(x)$ . Для этого вычислим производную этой функции и приравняем ее нулю:

$$\frac{d\tau}{dx} = -\varepsilon + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \mu^2}} = 0.$$

Решая это уравнение, находим координату, отвечающую экстремуму функции

$$x_M = \frac{\mu\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Само значение функции в этой точке

$$\tau_M = \varepsilon + \mu\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Нетрудно показать, что эта точка всегда отвечает локальному минимуму функции. (Для этого нужно вычислить вторую производную, которая оказывается всегда положительной.)

При дальнейшем анализе надо учесть, что функция  $\tau = \tau(x)$  определена на отрезке от нуля до единицы, и локальный минимум  $x_M$  не всегда отвечает минимальному значению функции на этом отрезке.

Пусть сначала  $x_M > 1$ . Это значит, что локальный минимум лежит на числовой оси правее границы области определения функции. Но тогда ее минимум будет определяться значением  $\tau_1 = \tau(1)$ . Физически это соответствует, как мы отмечали выше, движению по полю строго по диагонали. Найдем соответствующую область на плоскости параметров  $(\mu, \varepsilon)$ . Используя  $x_M > 1$  и  $x_M = \frac{\mu\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ , после некоторых преобразований получим:

$$\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Итак, при выполнении этого условия выгодно двигаться по диагонали.

Пусть теперь полученное неравенство выполняется в противоположную сторону. В этом случае выбирать следует между движением только по дорогам, когда  $\tau_3 = (1 + \mu)\varepsilon$ , и по дороге и по полю, когда  $\tau_M = \varepsilon + \mu\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ . Ясно, что движение только по дорогам выгоднее, если

$$\tau_3 < \tau_M, \text{ или } (1 + \mu)\varepsilon < \varepsilon + \mu\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Решая последнее неравенство, после некоторых преобразований получаем

$$\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, это условие не зависит от конфигурации прямоугольника. Собирая полученные результаты вместе, получаем области, показанные на рис. 47.

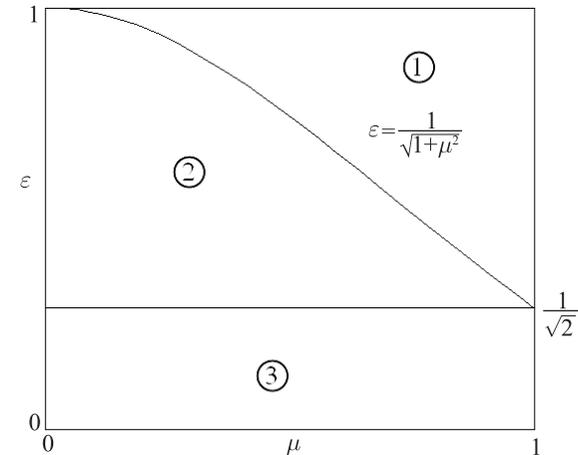


Рис. 47

На рисунке показаны ситуации, когда

- выгодно идти только по полю (по диагонали), цифра 1;
- выгодно идти под определенным углом по полю, а затем — по дороге, цифра 2;
- выгодно идти только по дорогам, цифра 3.

Из рисунка видно, что плоскость параметров имеет «тройную» точку, для которой  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$  и  $\mu = 1$ , в которой сходятся все три характерные области. Таким образом, если поле близко по форме к квадрату, а отношение скоростей к  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , пешеходу определить «на взгляд» оптимальный путь наиболее трудно. Но и разница в затраченном времени при этом невелика.

9. Возможны три качественно разные ситуации: мяч не долетел до стенки, мяч ударился о стенку, мяч перелетел через стенку (рис. 48).

«Граничными» являются траектории, обозначенные на рисунке цифрами 1 и 2. Для первой такой траектории дальность полета равна  $l$ . Поэтому имеем

$$l = v^2 \sin 2\alpha / g.$$

Вторая траектория проходит через точку на высоте  $h$  на расстоянии  $l$ . Поэтому для нее должно выполняться соотношение

$$h = l \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl}{2v^2 \cos^2 \alpha} \right).$$

Выберем два параметра, которые будут отложены по осям абсцисс и ординат. С физической точки зрения, наиболее естественно использовать угол  $\alpha$  и начальную скорость  $v$ . Однако безразмерный параметр  $gl/v^2$  удобнее, чем скорость  $v$ , поскольку для него получаются более простые соотношения. Отметим, что физический смысл имеют лишь положительные значения этого параметра и значения угла  $\alpha$ , лежащие в интервале от 0 до  $\pi/2$ . Используя два приведенных выше соотношения, получаем для разграничительных линий:

$$gl / v^2 = \sin 2\alpha,$$

$$gl / v^2 = \sin 2\alpha - (h/l)(\cos 2\alpha + 1).$$

Изобразим эти разграничительные линии на одном рисунке (рис. 49).



Траектории 1 и 2 разделяют траектории мяча, отвечающие разным исходам

Рис. 48

Эти линии разбили диаграмму на три области, которые соответствуют трем возможным типам движения мяча. Нетрудно установить, какая область соответствует какому конечному результату.

А что будет происходить, если мы будем бросать несколько мячей с некоторой определенной скоростью, постепенно увеличивая угол? Чтобы ответить на этот вопрос, следует провести на диаграмме горизонтальные линии, которые соответствуют фиксированным значениям скорости (рис. 49). Как видно из рисунка, возможны три «сценария» такого эксперимента с набором мячей:

- все мячи не долетают до стенки;
- мячи, брошенные под малыми углами, не долетают до стенки; мячи, брошенные в некотором интервале больших углов, ударяются в стенку; мячи, брошенные под еще большими углами, не долетают до стенки;
- мячи, брошенные под малыми углами, не долетают до стенки; мячи, брошенные под большими углами, ударяются в стенку; мячи, брошенные под еще большими углами, перелетают через стенку, и далее в обратном порядке.

Определим пороговые значения скорости, при которой меняются типы «сценариев». Очевидно, что им соответствуют максимумы разграничительных линий. Максимум линии, заданной уравнением  $gl/v^2 = \sin 2\alpha$ , достигается при значении  $\alpha = \pi/4$  и равен единице. Поэтому соответствующее пороговое значение скорости

$$v_{\min 1}^2 = gl.$$

Это минимальное значение скорости, при которой мяч уже может долететь до стенки.

Максимум линии, заданной уравнением

$$gl / v^2 = \sin 2\alpha - (h/l)(\cos 2\alpha + 1),$$

равен  $(\sqrt{1 + h^2/l^2} - h/l)$ . Таким образом, соответствующее пороговое значение скорости

$$v_{\min 2}^2 = \frac{gl}{\sqrt{1 + h^2/l^2} - h/l}.$$

Это минимальное значение скорости, при которой мяч уже может перелететь через стенку.

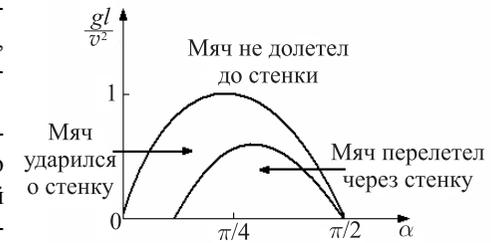


Рис. 49

10. Прежде всего, отметим, что если  $f > T$ , то рвется нижняя нить. Обсудим теперь, что будет происходить, если  $f < T$ . В этом случае сила натяжения нижней нити равна  $f$  (нить невесома). В рамках предложенной в условии модели мы приходим к ситуации, когда имеется груз на пружинке, который потянули вниз с силой  $f$ . Такая система будет совершать колебания около положения равновесия по гармоническому закону. По такому же закону будет изменяться и сила натяжения около среднего положения  $f_{\text{ср}} = f + Mg$  с амплитудой  $f$ . Нить порвется, если максимальная сила натяжения  $f + f_{\text{ср}} = 2f + Mg$  превысит  $T$ , и не порвется при выполнении противоположного условия. Различные возможные случаи на плоскости существенных параметров иллюстрируются рис. 50.

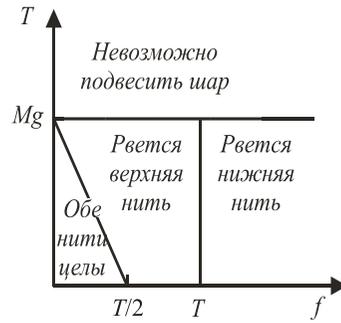


Рис. 50

11. Сразу очевидны три качественно различных ситуации: когда нить закручивается вокруг нижнего гвоздя, а грузик при этом движется по окружности; когда грузик совершает колебания, а нить все время остается натянутой; и «промежуточный» вариант.

Грузик совершает колебания, а нить все время остается натянутой, если отклонение грузика влево не превышает  $90^\circ$ . Тогда по закону сохранения энергии  $mgL(1 - \cos \alpha) < mgl$ , откуда получаем условие  $l/L > 1 - \cos \alpha$ .

Для того чтобы грузик закручивался вокруг нижнего гвоздя и нить все время оставалась натянутой, необходимо, чтобы сила натяжения нити в верхней точке траектории была больше нуля, т. е.  $mv^2/l > mg$ , тогда по закону сохранения энергии  $mgL(1 - \cos \alpha) > mgl/2 + mgl$ , откуда  $l/L < 2/5(1 - \cos \alpha)$ .

Промежуточный случай требует более подробного рассмотрения. Если грузик отклоняется вправо на угол, больший  $90^\circ$ , но его энергии не хватает для движения по окружности, то в некоторый момент натяжение нити становится равным нулю. Пусть в этот момент угол между нитью и горизонталью составляет  $\beta$  (рис. 51). Из условия равенства нулю силы натяжения нити получим  $mv^2/l = mg \sin \beta$ . В то же время по закону сохранения энергии  $mv^2/2 = mgL(1 - \cos \alpha) - mgl(1 + \sin \beta)$ , откуда получим выражение для угла  $\beta$ :  $\sin \beta = 2/3(L/l(1 - \cos \alpha) - 1)$ .

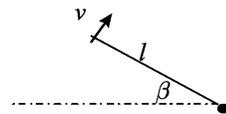


Рис. 51

Дальнейшее движение грузика в течение некоторого времени можно рассматривать как полет тела, брошенного под углом к горизонту. Возможны две качественно различных ситуации: когда грузик проходит над нижним гвоздем (в этом случае нить наматывается на гвоздь, но траектория грузика не является окружностью), и когда грузик проходит ниже этого гвоздя, при

этом нить не наматывается, а грузик совершает сложные движения. Найдем условие, разграничивающее эти ситуации.

Пусть грузик оказывается на одной вертикали с гвоздем через время  $t$ . Тогда  $v \sin \beta t = l \cos \beta$ , откуда  $t = l \cos \beta / v \sin \beta$ . Грузик пройдет выше гвоздя и нить наматывается на гвоздь, если  $l \sin \beta + v \cos \beta t - gt^2/2 > 0$ . Подставив  $t$  и проведя некоторые преобразования с использованием ранее полученных соотношений, получим неравенство:  $l/L < 2/(2 + \sqrt{3})(1 - \cos \alpha)$ .

Таким образом, окончательно имеем 4 различных ситуации: I — колебания по дуге окружности; II — сложное движение без закручивания нити вокруг гвоздя; III — нить закручивается вокруг гвоздя, шарик движется по сложной кривой; IV — шарик движется по спирали, нить закручивается вокруг гвоздя. Соответствующие им области представлены на рис. 52.

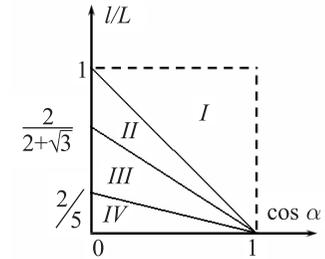


Рис. 52

## Катастрофы (бифуркации)

1. Равновесие системы будет определяться конкуренцией двух факторов — притяжением токов, которое стремится уменьшить расстояние между ними, и силой упругости, которая стремится это расстояние увеличить. Поместим начало координат в точку, отвечающую положению правого провода при отсутствии деформации пружины. Тогда сила притяжения токов, расположенных на расстоянии  $(L - x)$ , дается известной формулой

$$F(x) = \frac{\mu_0 I l i}{2\pi(L - x)}.$$

В противоположную сторону будет направлена сила упругости  $-kx$ , так что суммарная сила

$$F(x) = \frac{\mu_0 I l i}{2\pi(L - x)} - kx.$$

Положение равновесия будет определяться условием  $F(x) = 0$ , которое приводит к квадратному уравнению

$$x^2 - Lx + \frac{\mu_0 I l i}{2\pi k} = 0.$$

Решая его, находим

$$x_{1,2} = \frac{L}{2}(1 \mp \sqrt{1 - \varepsilon}),$$

где  $\varepsilon = \frac{2\mu_0 I l}{\pi k L^2}$  — управляющий безразмерный параметр, который можно варьировать, например, изменяя ток в проводниках. Мы выбрали знаки так, чтобы корень  $x_1$  лежал ближе к началу координат, а  $x_2$  — ближе к неподвижному проводнику. Действительно, в отсутствие токов  $\varepsilon = 0$  и из полученной формулы имеем  $x_1 = 0$ , а  $x_2 = L$ .

Нетрудно видеть, что состояния равновесия возможны при  $\varepsilon < 1$ , причем в этом случае их два, чему отвечают разные знаки перед квадратным корнем. Для дальнейшего анализа следует изобразить график зависимости силы  $F$  от координаты  $x$  (рис. 53). На этом графике хорошо видны положения равновесия. Обратимся сначала к тому из них, которое ближе к пружине. Из графика видно, что при прохождении через это равновесие сила меняется с положительной на отрицательную, т. е. она направлена к положению равновесия. Таким образом, это устойчивое положение равновесия. Для более далекой точки сила меняет знак с отрицательного на положительный, т. е. она направлена от точки равновесия. Это неустойчивое положение равновесия.

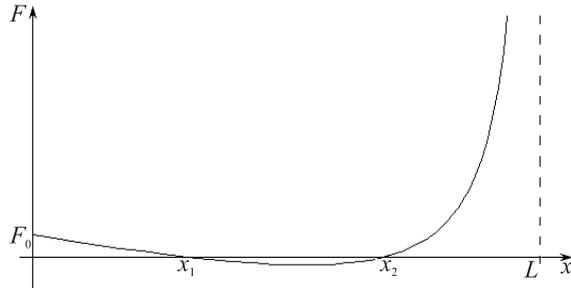


Рис. 53

Заметим, что характер положений равновесия легко можно установить и из анализа предельного случая. Действительно, при выключенных токах  $\varepsilon = 0$ , и положение равновесия  $x_1 = 0$ , очевидно, является устойчивым.

При увеличении параметра  $\varepsilon$  положения равновесия движутся навстречу друг другу, и при  $\varepsilon = 1$  сливаются и исчезают. При  $\varepsilon > 1$  положений равновесия нет вообще. Таким образом, если медленно увеличивать ток, то проводник на пружине будет постепенно приближаться к неподвижному проводнику (считаем, что возможные колебания гасятся за счет диссипации). При достижении критического значения тока ( $\varepsilon = 1$ ) в точке  $x = L/2$  равновесие исчезнет и подвижный проводник резко притянется к неподвижному. Произойдет качественное изменение состояния системы, которое называют катастрофой или бифуркацией.

Полезно изобразить также график зависимости потенциальной энергии от координаты, который показан на рис. 54. Его можно построить как из качественных соображений, используя график зависимости силы от координаты на рис. 53, так и используя аналитическое выражение

$$U(x) = - \int F(x) dx = - \int \left( \frac{\mu_0 I l}{2\pi(L-x)} - kx \right) dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln|L-x| + \frac{kx^2}{2}.$$

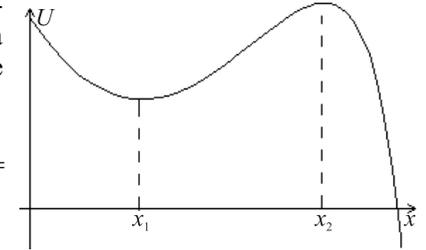


Рис. 54

Мы видим график, аналогичный рис. 9.

Ситуация слияния устойчивого и неустойчивого равновесий с их исчезновением является типичной и распространенной катастрофой (бифуркацией), которую называют «катастрофа складки». Как мы увидим далее, это одна из универсальных и распространенных бифуркаций в физических системах.

2. Пусть в начальном состоянии давление газа равно  $P$ . Тогда условие равновесия поршня имеет вид

$$P_0 + \rho g(l - l_0) + mg = P,$$

где  $\rho$  — плотность ртути, а  $m = \frac{M}{S}$  — нормированная на площадь масса поршня.

Обозначим через  $y$  высоту пробирки, занятую газом после нагревания до температуры  $T$ . Тогда условие равновесия поршня после нагрева имеет вид

$$P_0 + \rho g(l - y) + mg = P'.$$

Давление газа  $P'$  при температуре  $T$  можно найти из уравнения состояния идеального газа

$$P' = \frac{l_0 T}{y T_0} P.$$

Комбинируя эти соотношения, получим

$$P_0 + \rho g(l - y) + mg = \frac{l_0 T}{y T_0} (P_0 + \rho g(l - l_0) + mg).$$

Далее удобно ввести два существенных параметра: некоторую величину с размерностью длины

$$L = l + \frac{P_0 + mg}{\rho g}$$

и безразмерную температуру

$$\tau = \frac{T}{T_0}.$$

Тогда полученное нами уравнение можно переписать в виде

$$(L - y)y = \tau(L - l_0)l_0.$$

Отсюда следует, что координата поршня после нагревания удовлетворяет квадратному уравнению

$$y^2 - Ly + \tau(L - l_0)l_0 = 0.$$

Оно, соответственно, имеет два решения

$$y_{1,2} = \frac{L \mp \sqrt{L^2 - 4\tau(L - l_0)l_0}}{2}.$$

Оба ли корня имеют смысл? Рассмотрим температуру, равную начальной. Тогда  $\tau = 1$  и  $y_1 = l_0$ , а  $y_2 = L - l_0$ . По условию начальная высота поршня равна  $l_0$ , поэтому положение поршня определяется первым корнем. Однако, как мы увидим ниже, второй корень тоже может оказаться существенным с точки зрения решения задачи.

Действительно, пусть, как и предложено в условии, мы постепенно повышаем температуру  $\tau$ . В выражении

$$y_1 = \frac{L - \sqrt{L^2 - 4\tau(L - l_0)l_0}}{2}$$

подкоренное выражение будет постепенно уменьшаться, при этом координата  $y$  растет и поршень постепенно поднимается вверх. Однако в тот момент, когда подкоренное выражение обратится в нуль, т. е.

$$L^2 - 4\tau(L - l_0)l_0 = 0,$$

решение квадратного уравнения станет невозможным. Формально говоря, два корня уравнения  $y_1$  и  $y_2$  сольются друг с другом и исчезнут. Физически это означает, что равновесие поршня станет невозможным при достижении температурой критического значения

$$\tau_c = \frac{L^2}{4(L - l_0)l_0}.$$

Поршень «самопроизвольно» начнет двигаться вверх, выталкивая ртуть, пока не выбросит ее всю. Произойдет качественное изменение состояния системы.

Физический анализ задачи, однако, на этом не заканчивается. Найдем координату поршня в момент «катастрофы» в системе. Как следует из решения квадратного уравнения, в этот момент

$$y = \frac{L}{2}.$$

Но в системе есть еще один параметр — длина пробирки  $l$ . Описанный нами «сценарий» развития событий реализуется, если слияние корней произойдет внутри пробирки, т. е. при условии  $\frac{L}{2} < l$ . Используя определение  $L$ , это условие можно переписать в виде

$$P_0 + mg < \rho gl.$$

Если это условие заменить на противоположное, то слияние корней произойдет вне пробирки, что не имеет физического смысла. Таким образом, если  $\frac{L}{2} > l$ , то при возрастании температуры ртуть будет постепенно вытекать из пробирки вплоть до самого ее верха, и никакого «скачка» не произойдет.

Результат нашего анализа удобно представить на плоскости безразмерных параметров. В качестве одного из них выбираем  $\varepsilon = \frac{L}{l}$ , который «управляется» массой поршня, атмосферным давлением и плотностью наливаемой жидкости. По своему определению всегда  $\varepsilon > 1$ . Второй параметр — безразмерная температура  $\tau$ . Критической температуре отвечает линия

$$\tau_c = \frac{\varepsilon^2}{4(\varepsilon - \mu)\mu}.$$

Здесь  $\mu = \frac{l_0}{l}$  — еще один безразмерный параметр, отвечающий соотношению газа и ртути в начальном состоянии системы. По своему определению  $\mu < 1$ , так что знаменатель в приведенном соотношении всегда положительен.

Резкий выброс ртути возможен, как мы отмечали, при условии  $\frac{L}{2} < l$ , или, в наших безразмерных параметрах, при  $\varepsilon = \frac{L}{l} < 2$ . При противоположном условии  $\varepsilon > 2$  газ постепенно вытеснит ртуть до самого верхнего края пробирки.

Интересно отметить, что график критической температуры  $\tau_c = \frac{\varepsilon^2}{4(\varepsilon - \mu)\mu}$  имеет минимум при условии  $\varepsilon = 2\mu$ , причем критическая тем-

пература в этом случае точно равна единице,  $\tau_c = 1$ . (В этом легко убедиться, продифференцировав функцию  $\tau = \tau(\varepsilon)$  и приравняв нулю производную.) Эта ситуация отвечает тому, что начальное состояние уже является критическим — малейшее изменение температуры приводит к выбросу ртути. Ей отвечает условие  $L = 2l_0$ . Поскольку всегда  $\varepsilon > 1$ , то такая ситуация возможна лишь если  $\mu > 0,5$ . Соответственно, разбиение плоскости параметров  $(\varepsilon, \tau)$  на характерные области для  $\mu < 0,5$  (взято  $\mu = 0,25$ ) и  $\mu > 0,5$  (взято  $\mu = 0,75$ ) показано на рис. 55а и рис. 55б. Можно выделить три характерных области:

- ртуть резко поднимается вверх и выталкивает поршень, цифра 1;
- поршень приподнялся и находится внутри пробирки, цифра 2;
- поршень выдавлен из пробирки при медленном, без скачка подъеме ртути, цифра 3.

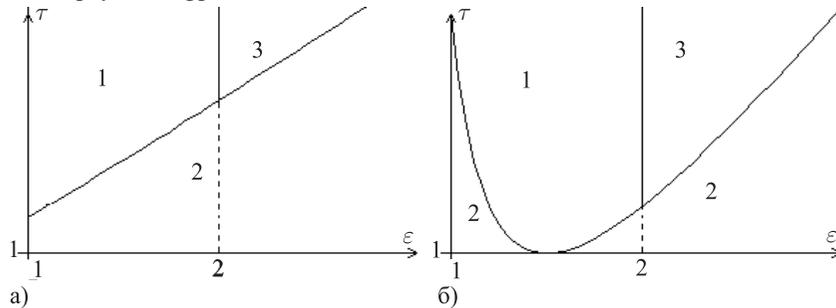


Рис. 55

Обсудим еще один вопрос. В начальном состоянии второй корень  $y_2$  располагается вне пробирки. Но, как мы отметили, возможно слияние корней внутри нее. Тогда этот корень должен иметь какой-то смысл. Можно показать, что решению  $y_1$  отвечает устойчивое состояние равновесия, а  $y_2$  — неустойчивое. Действительно, пусть поршень слегка сместился вверх на величину  $dy$  при неизменной температуре системы. Тогда часть ртути выльется и оказываемое ей давление на поршень уменьшится на величину  $dP = \rho g dy$ . В свою очередь, по закону Бойля–Мариотта давление газа также упадет, но на величину  $dP = \frac{P}{y} dy$ . Чтобы равновесие было устойчивым, пер-

вая величина должна быть меньше второй, т. е.  $\rho g < \frac{P}{y}$ . Однако по условию равновесия  $P_0 + \rho g(l - y) + mg = P$ . Тогда

$$y < \frac{P_0 + \rho gl + mg}{2\rho g} = \frac{L}{2},$$

что всегда выполняется для первого положения равновесия и не выполняется для второго.

Таким образом, реализующаяся в нашей системе «катастрофа» также отвечает слиянию и исчезновению устойчивого и неустойчивого состояний равновесия системы.

3. Пусть маятник отклонили на угол  $\varphi$ . Тогда на него будет действовать сила тяжести, создающая момент  $mgl \sin \varphi$  относительно точки подвеса. Пружина, в соответствии с условием, создает момент  $M = \mu\varphi$ . Таким образом, условие равновесия маятника можно записать как

$$mgl \sin \varphi - \mu\varphi = 0,$$

или, если ввести безразмерный параметр  $k = \frac{\mu}{mgl}$ , характеризующий жесткость пружины, то

$$\sin \varphi - k\varphi = 0.$$

Прежде всего, отметим, что мы получили точно такое же уравнение, как и в задаче 4 из предыдущего раздела, поэтому при его анализе используем уже полученные результаты. Обратимся к графику этого уравнения (рис. 56). На рисунке можно видеть, что число состояний равновесия зависит от параметра  $k$ , и с его уменьшением появляются все новые состояния равновесия, когда график прямой пересекает синусоиду во все более далеких точках.

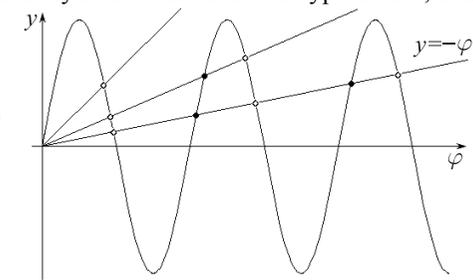


Рис. 56

Проанализируем возможные решения с использованием физических представлений. Пусть параметр  $k$  стремится к нулю, т. е. пружина очень «мягкая» и почти не оказывает влияния на систему. Как видно из рисунка, решения нашего уравнения в этом случае стремятся к значениям угла  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$ ,  $4\pi$  и т. д. Им легко дать простую физическую интерпретацию: это положения равновесия свободного маятника. При этом углам  $\pi$ ,  $3\pi$ , ... отвечает неустойчивое равновесие, когда маятник вертикален, а груз находится в верхней точке. Углам  $2\pi$ ,  $4\pi$  ... отвечает нижнее положение маятника, т. е. устойчивое равновесие. (На рис. 56 устойчивые состояния равновесия отмечены жирными точками, а неустойчивые — кружочками.) Если пружины нет, то эти равновесия неотличимы друг от друга и от случая нулевого угла. (Они соответствуют поворотам маятника вокруг точки подвеса на угол, кратный  $2\pi$ .) Однако наличие даже очень мягкой пружины снимает эту симметрию и делает состояния равновесия этого типа различающимися.

Будем теперь медленно увеличивать жесткость пружины, что отвечает на графике увеличению наклона прямой. Можно видеть, что устойчивые и неустойчивые состояния равновесия будут попарно двигаться навстречу друг другу. При некоторых (бифуркационных) значениях параметра они также попарно будут сливаться и исчезать, то есть, если использовать введенную в предыдущих задачах терминологию, будет иметь место катастрофа складки. Моменты слияния и исчезновения равновесий близки к точкам  $\frac{3}{2}\pi$ ,  $\frac{5}{2}\pi$ ,  $\frac{7}{2}\pi$ .... Физически это тоже понятно: повернем маятник на угол, чуть больший  $\pi$ , т. е. перейдем через верхнюю точку. Тогда сила тяжести начнет создавать момент, противоположный возвращающему моменту пружины. Максимальный момент силы тяжести как раз отвечает повороту на  $270^\circ$ , или  $\frac{3}{2}\pi$ . Именно в окрестности этой точки и возможна первая бифуркация.

Такая же ситуация имеет место при углах около  $\frac{5}{2}\pi$  и т. д.

Найдем теперь значения параметра, отвечающие слиянию положений равновесия. В таких точках прямая на рис. 56 является касательной к графику синуса, и поэтому выполняется как соотношение

$$\sin \varphi - k\varphi = 0,$$

так и продифференцированное соотношение

$$\cos \varphi - k = 0.$$

Отсюда получаем уже известное нам по задаче 4 уравнение

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi.$$

Однако в отличие от задачи 4, смысл имеют все его корни и решения.

Как видно из графика и как мы отмечали при физическом обсуждении, новые решения возникают в окрестности значений  $\varphi = \alpha$ , где  $\alpha$  равно  $\frac{3}{2}\pi$ ,  $\frac{5}{2}\pi$ ,  $\frac{7}{2}\pi$ .... Для примерного определения соответствующих бифуркационных значений можно положить  $\varphi = \alpha - \delta$ . Тогда для малой величины  $\delta$  справедливо уравнение

$$\operatorname{ctg} \delta = \alpha - \delta,$$

Далее можно использовать, что  $\operatorname{ctg} \delta \approx \frac{1 - \delta^2/2}{\delta}$ , и тогда получаем уравнение

$$\delta^2 - 2\alpha\delta + 2 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\delta = \alpha \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \left( \frac{1}{\alpha} \right)^2} \right).$$

Заметим, что из графической интерпретации задачи видно, что полученная приближенная формула должна работать тем лучше, чем более далекие корни мы рассматриваем.

Для определения параметра  $k$  следует воспользоваться соотношением  $k = -\cos \varphi$ . Если мы используем, что  $\varphi = \alpha - \delta$ , то  $k = \sin \delta$ , и при малых  $\delta$  можно полагать

$$k \approx \delta.$$

Перейдем теперь к численным оценкам. Случай  $\alpha = \frac{3}{2}\pi$  уже был рассмотрен в задаче 4 из предыдущего раздела. Для него приближенные соотношения дают  $\delta_1 \approx 0,21721$ ... и, соответственно,

$$\varphi_1 = 4,49518... = 1,43086\pi \text{ (точное значение } 4,49341...),$$

$$k_1 = 0,21721... \text{ (точное значение } 0,21723...).$$

Здесь индекс означает номер бифуркации слияния решений, а в скобках приведены точные значения, найденные методом Ньютона.

Для второй точки  $\alpha = \frac{5}{2}\pi$  получаем  $\delta_2 \approx 0,12837$ ... и, соответственно,

$$\varphi_2 = 7,72561... = 2,45914\pi \text{ (точное значение } 7,72525...),$$

$$k_2 = 0,12837... \text{ (точное значение } 0,12837...).$$

Мы видим, что далее приближенные формулы дают очень высокую точность, и можно не привлекать более метод Ньютона. Для третьей точки  $\alpha = \frac{7}{2}\pi$  тогда получаем  $\delta_3 \approx 0,09132$ ... и

$$\varphi_3 = 10,90425... = 3,47093\pi,$$

$$k_3 = 0,09132....$$

В этом случае уже хорошо работает и более простая аппроксимация  $k \approx \frac{1}{\alpha}$ .

Итак, особенность представленной задачи по сравнению с двумя предыдущими — возможность счетного множества бифуркаций слияния и исчезновения устойчивого и неустойчивого равновесий при вариации некоторого параметра.

4. Пусть отклонение шарика от вертикали мало. Тогда сила тяжести создает «прокидывающую» силу  $\frac{mg}{l}x$ . Для равновесия шарика необходимо равенство нулю результирующей силы

$$F = \frac{mg}{l}x - kx - cx^3 = 0.$$

Отсюда следует, что равновесия отвечают значению  $x = 0$ , а также

$$x = \pm \frac{\sqrt{mg - kl}}{\sqrt{lc}}.$$

Последнее решение существует лишь при  $mg > kl$ . Нетрудно понять, что положение равновесия  $x = 0$  устойчиво при выполнении неравенства в противоположную сторону:  $mg < kl$ . В этом случае пружина достаточно жесткая и стабилизирует неустойчивость маятника, связанную с действием силы тяжести. В момент, когда  $mg = kl$ , это положение равновесия теряет устойчивость, и от него отделяются два новых устойчивых равновесия  $x = \pm \frac{\sqrt{mg - kl}}{\sqrt{lc}}$ .

Для анализа положений равновесия и их устойчивости найдем потенциальную энергию системы:

$$U(x) = -\frac{mg}{2l}x^2 + \frac{kx^2}{2} + \frac{cx^4}{4} = \frac{1}{2}\left(k - \frac{mg}{l}\right)x^2 + \frac{cx^4}{4}.$$

(Дифференцирование этого соотношения по координате приводит к полученному выше выражению для суммарной силы.)

Обсудим вид потенциальной функции  $U(x)$  и ее метаморфозы подробнее. Для этого удобно ввести параметр  $a = k - \frac{mg}{l}$ . Тогда

$$U(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{cx^4}{4}.$$

Таким образом, потенциальная энергия представляет собой полином четвертой степени. При этом ее график обладает симметрией относительно вертикальной оси, поскольку  $U(x)$  зависит только от четных степеней координаты  $x$ . С точки зрения исходной системы, наличие симметрии связано с равноправием отклонения маятника в ту или иную сторону.

Для анализа свойств функции  $U(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{cx^4}{4}$  удобно заметить, что вблизи начала координат  $U(x) \approx \frac{a}{2}x^2$ , в силу того, что  $x^4 \ll x^2$ . Поэтому, если

$a > 0$ , то функция  $U(x)$  в начале координат имеет единственный квадратичный минимум, отвечающий устойчивому равновесию системы (рис. 57а).

Если же  $a < 0$ , то вблизи начала координат минимум сменяется максимумом. Вдали от начала координат начинает доминировать член четвертой степени  $x^4$ , поэтому «ветви» графика в этой области идут «вверх». Значит, функция  $U(x)$  при  $a < 0$  должна иметь два локальных минимума (рис. 57в), которым как раз отвечают значения координаты  $x = \pm \frac{\sqrt{mg - kl}}{\sqrt{lc}}$ .

Таким образом, функция  $U(x)$  может демонстрировать два качественно разных случая: единственный минимум в начале координат и два минимума, между которыми расположен максимум. Перестройка от одного типа функции к другому происходит через «вырожденный» случай  $a = 0$ , которому отвечает минимум четвертой степени:  $U(x) = \frac{cx^4}{4}$  (рис. 57б).

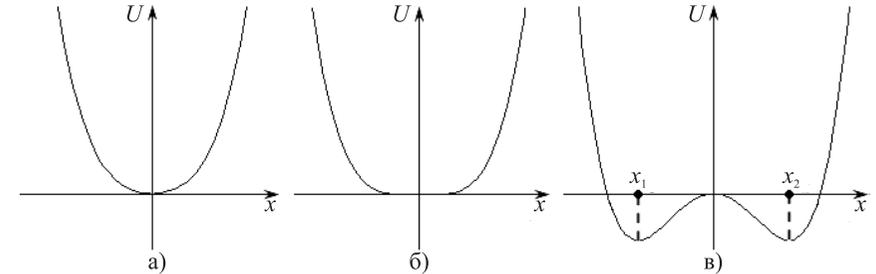


Рис. 57

Отметим, что вид потенциальной функции типа изображенной на рис. 57в очень часто встречается в самых разных физических задачах. Такой потенциал называют «двухъямным потенциалом» в силу его характерной формы.

Вернемся к нашему маятнику. Если  $mg < kl$ , то вертикальное положение маятника устойчиво, а если  $mg > kl$ , то оно станет неустойчивым. Таким образом, сколь угодно малое воздействие выведет его из состояния равновесия, и он отклонится либо налево, либо направо. При этом «выбор» состояния равновесия будет определяться направлением малого воздействия и, фактически, будет во многом случайным. Подчеркнем, что стабилизация маятника в этом случае связана с нелинейностью пружины. Если пружина подчиняется закону Гука ( $c = 0$ ), то при  $mg > kl$  в системе останется только неустойчивое равновесие в начале координат.

Наблюдаемая в данной системе перестройка положений равновесия также является достаточно типичной. Она состоит в том, что при вариации некоторого параметра единственное состояние равновесия теряет устойчивость,

и от него отделяются два устойчивых. Ее часто называют бифуркация «вилка». Такая бифуркация обычно характерна для систем с некоторой симметрией.

5. Обозначим расстояние между кольцами через  $a$ . Рассмотрим сначала некоторые асимптотические ситуации. Если расстояние между кольцами равно нулю, то они сольются вместе и будут создавать потенциал как одно кольцо удвоенного заряда. В этом случае, очевидно, будет иметь место единственное состояние равновесия в начале координат, которое будет устойчивым (рис. 58а). Пусть теперь кольца разнесены очень далеко, т. е.  $a \gg R$ . Тогда каждое кольцо фактически изолировано и создает локальный минимум потенциала (рис. 58б).

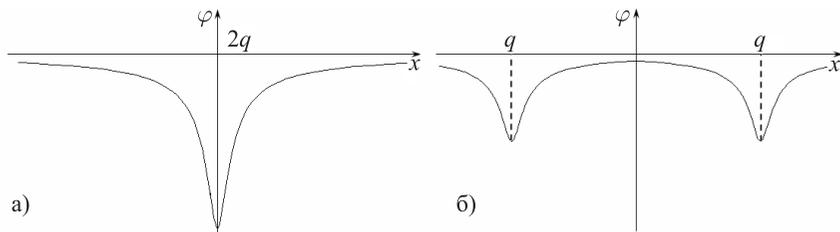


Рис. 58

Таким образом, в соответствии с рис. 58б будут иметь место два устойчивых состояния равновесия и одно неустойчивое, расположенное в начале координат. Следовательно, если медленно увеличивать параметр  $a$ , то при некотором его значении находящееся в начале координат положение равновесия потеряет устойчивость и от него отделятся два неустойчивых. Найдем соответствующее критическое значение расстояния между кольцами.

Поместим начало координат точно посередине между зарядами. Тогда потенциал, создаваемый кольцами, можно записать в виде

$$\Phi(x) = \varphi(x, a) + \varphi(x, -a),$$

где первое слагаемое

$$\varphi(x, a) = Q \frac{1}{((x+a)^2 + R^2)^{3/2}}$$

отвечает полю, созданному первым зарядом, а второе — созданному вторым. Вычислим первую производную от этого выражения по координате:

$$\varphi'(x, a) = -Q \frac{(x+a)}{((x+a)^2 + R^2)^{5/2}}.$$

Очевидно, что

$$\Phi'(0) = \varphi'(0, a) + \varphi'(0, -a) = 0,$$

что отвечает тому, что в начале координат в любом случае имеет место положение равновесия. Для исследования его на устойчивость необходимо вычислить вторую производную  $\Phi''(x)$ :

$$\Phi''(x) = \varphi''(x, a) + \varphi''(x, -a).$$

Здесь

$$\varphi''(x, a) = Q \frac{2(x+a)^2 - R^2}{((x+a)^2 + R^2)^{5/2}}.$$

Таким образом,

$$\Phi''(0) = \varphi''(0, a) + \varphi''(0, -a) = 2Q \frac{2a^2 - R^2}{(a^2 + R^2)^{5/2}}.$$

Нетрудно видеть, что при  $a < R/\sqrt{2}$  вторая производная отрицательна, а при противоположном условии — положительна.

Таким образом, при  $a = R/\sqrt{2}$  в системе положение равновесия в начале координат становится неустойчивым, и от него симметричным образом отделяются два устойчивых. Наблюдаемая в данной системе бифуркация представляет собой бифуркацию «вилка» и аналогична имеющей место в предыдущей задаче.

6. Пусть точка крепления стержня расположена над водой. Очевидно, что вертикальное положение стержня всегда будет положением равновесия, однако оно не всегда устойчиво. Это легко понять, представив два противоположных предельных случая — очень тяжелый и очень легкий стержень.

Проведем анализ устойчивости этого положения. У вертикально висящего стержня длина подводной части составляет  $(l-h)$ , ее центр масс расположен на расстоянии  $\frac{1}{2}(l+h)$  от точки прикрепления, а центр масс всего стержня — на расстоянии  $\frac{1}{2}l$  от той же точки. Если стержень отклонился на очень маленький угол, то сила тяжести создаст момент, пропорциональный  $\rho \frac{l^2}{2}$ , а архимедова сила — момент, пропорциональный  $\frac{1}{2} \rho_B (l+h)(l-h)$ . Таким образом, стержень будет устойчивым, если первый момент превысит второй, т. е.  $\rho l^2 > \rho_B (l+h)(l-h)$ . Отсюда следует, что вертикальное равновесие устойчиво при

$$\rho > \rho_B \left( 1 - \frac{h^2}{l^2} \right).$$

Пусть теперь стержень в положении равновесия отклонился на угол  $\alpha$  от вертикали (рис. 59). Тогда расстояние от точки прикрепления до поверхности воды вдоль стержня составит  $\frac{h}{\cos \alpha}$ , а длина погруженной в воду части стержня равна  $l - \frac{h}{\cos \alpha}$ . Центр этой погруженной части расположен на расстоянии  $L = \frac{h}{\cos \alpha} + \frac{1}{2} \left( l - \frac{h}{\cos \alpha} \right) = \frac{1}{2} \left( l + \frac{h}{\cos \alpha} \right)$  от точки прикрепления.

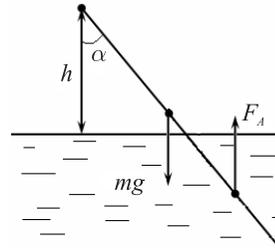


Рис. 59

Условие равновесия стержня можно записать как равенство моментов силы тяжести, приложенной к центру стержня, и силы Архимеда, приложенной к центру погруженной части. Это приводит к следующему уравнению:

$$\frac{1}{2} \rho l^2 = \frac{1}{2} \left( l + \frac{h}{\cos \alpha} \right) \left( l - \frac{h}{\cos \alpha} \right) \rho_B.$$

Отсюда можно выразить косинус искомого угла:

$$\cos \alpha = \frac{h}{l \sqrt{1 - \rho / \rho_B}}.$$

Проанализируем это соотношение. Пусть плотность стержня исчезающе мала. Тогда  $\cos \alpha = \frac{h}{l}$ , что отвечает тому, что стержень целиком расположен в воздухе, касаясь воды только своей нижней точкой. При возрастании плотности стержня он начнет опускаться вниз, и угол его наклона будет определяться полученной формулой. Однако при условии  $\rho = \rho_B \left( 1 - \frac{h^2}{l^2} \right)$  косинус обратится в единицу, и при дальнейшем увеличении плотности соответствующее решение невозможно. В критической точке угол наклона стержня обращается в нуль. Таким образом, если  $\rho < \rho_B \left( 1 - \frac{h^2}{l^2} \right)$ , то стержень располагается наклонно, а вертикальное положение равновесия является неустойчивым. При выполнении условия в другую сторону неустойчивое положение равновесия при  $\alpha = 0$  сливается с парой симметрично расположенных устойчивых, и после этого становится устойчивым. Это бифуркация типа «вилка», аналогичная рассмотренной в двух предыдущих задачах.

Аналогичное исследование в случае, когда точка крепления расположена под водой, рекомендуем проделать самостоятельно.

7. Задачу удобно решать во вращающейся системе отсчета. В этой системе действует центробежная сила  $m\omega^2 r$ , которой можно сопоставить потен-

циальную энергию  $U = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$ , где  $r$  — радиус вращения. Проведем вертикальную ось системы координат так, чтобы она проходила через центр окружности. Тогда, очевидно,  $r = x + a$ . В свою очередь, в соответствии с рис. 60 потенциальная энергия дается выражением

$$U = -mg\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Таким образом, суммарная потенциальная энергия

$$U(x) = -\frac{m\omega^2 (x+a)^2}{2} - mg\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Перейдем к безразмерным переменным и параметрам. Введем безразмерную энергию  $W = \frac{U}{m\omega^2 R}$

и параметры:  $\varepsilon = \frac{g}{\omega^2 R}$ , характеризующий скорость вращения системы, и  $\alpha = \frac{a}{R}$ , характеризующий степень смещения оси вращения относительно центра системы. Тогда

$$W(x) = -\frac{(x+\alpha)^2}{2} - \varepsilon\sqrt{1-x^2}.$$

(Мы сохранили для координаты, нормированной на радиус кольца, обозначение  $x$ .)

При вариации двух существенных параметров  $\alpha = \frac{a}{R}$  и  $\varepsilon = \frac{g}{\omega^2 R}$  потенциальная энергия как функция координаты может испытывать определенные метаморфозы.

Обсудим сначала случай  $\alpha = 0$ , при котором ось вращения проходит через центр окружности. Ясно, что при отсутствии вращения в системе будет единственное положение равновесия в нижней части окружности, т. е. при  $x = 0$ . С другой стороны, при очень сильном вращении кольца это равновесие может стать неустойчивым. Убедимся в этом. Используя при малых  $x$  известное соотношение

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots,$$

получаем

$$W(x) = const + \frac{\varepsilon-1}{2}x^2 + \frac{\varepsilon}{8}x^4 + \dots$$

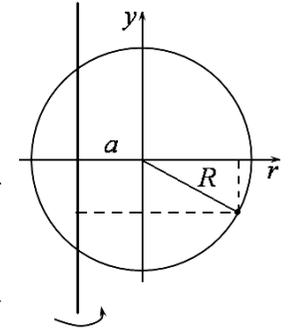


Рис. 60

Таким образом, потенциальная энергия задается параболой четвертой степени. При  $\varepsilon = \frac{g}{\omega^2 R} > 1$  (медленное вращение) имеется единственный минимум в начале координат, который отвечает устойчивому положению равновесия. При  $\varepsilon < 1$  (быстрое вращение) оно становится неустойчивым, и в этот момент от него отделяются симметричным образом два локальных минимума с координатами  $x = \pm \sqrt{\frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}}$ . Это бифуркация «вилка», уже показанная ранее на рис. 57.

Если теперь  $\alpha \neq 0$ , т. е. ось вращения смещена относительно центра окружности, то

$$W(x) = \text{const} - \alpha x + \frac{\varepsilon - 1}{2} x^2 + \frac{\varepsilon}{8} x^4 + \dots$$

В этом случае график потенциальной энергии становится асимметричным, при этом количество возможных конфигураций потенциала как функции  $x$  существенно возрастает и задача становится принципиально двух-параметрической (то есть поведение существенно зависит от двух параметров  $\alpha$  и  $\varepsilon$ ). Обсудим возможные метаморфозы потенциала.

Введение нового параметра  $\alpha$  и асимметрии задачи приводит к тому, что «глубина» двух потенциальных минимумов может быть разной. При этом варьируя параметр  $\alpha$ , можно добиться ситуации слияния максимума и одного из минимумов. Эта ситуация иллюстрируется рис. 61.

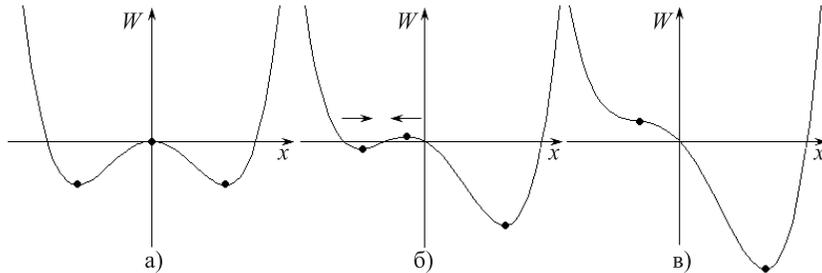


Рис. 61

Найдем условие этой бифуркации. Положению равновесия отвечает нулевое значение производной потенциала по координате  $W'(x) = 0$ , а условию слияния положений равновесия — равенство нулю второй производной  $W''(x) = 0$ , когда потенциальная функция имеет точку перегиба (рис. 61в).

Вычислим соответствующие производные:

$$W'(x) = -\alpha + (\varepsilon - 1)x + \frac{\varepsilon x^3}{2} = 0,$$

$$W''(x) = \varepsilon - 1 + \frac{3\varepsilon x^2}{2} = 0.$$

После несложных преобразований находим  $x = \pm \sqrt{\frac{2(1-\varepsilon)}{3\varepsilon}}$ . Подставляя в первое соотношение, получаем

$$\alpha = \pm \left( \frac{2(1-\varepsilon)}{3\varepsilon} \right)^{3/2}.$$

Последнее уравнение задает линию на плоскости параметров  $(\alpha, \varepsilon)$ , разделяющую области с различным характером конфигурации потенциальной энергии как функции координаты. Такое разбиение показано на рис. 62. Рядом представлены характерные конфигурации потенциальной функции.

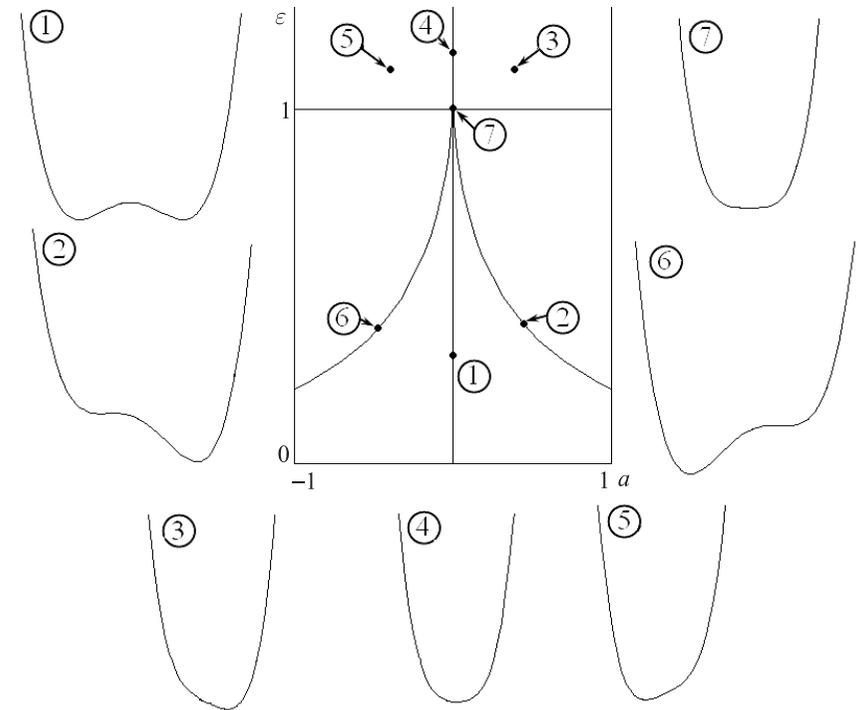


Рис. 62

Можно заметить, что разделительная линия, отвечающая слиянию двух (устойчивого и неустойчивого) положений равновесия, в точке  $(0, 1)$  имеет особенность («острие»). Эта точка отвечает максимально вырожденной си-

туации, когда функция характеризуется локальным минимумом четвертой степени. В ее окрестности, используя  $\varepsilon = 1 - \Delta\varepsilon$ , получаем

$$\alpha \approx \pm \left( \frac{2}{3} \Delta\varepsilon \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, это действительно особенность в виде полукубического острия. Такие особенности весьма характерны для систем, в которых могут существовать и сливаться три локальных экстремума. В теории катастроф она носит специальное название «точка сборки», а подходящие к ней линии слияния экстремумов являются линиями складок. Действительно, как мы видели, переход через эти линии отвечает слиянию максимума и минимума.

Представленная двухпараметрическая картина связана и с бифуркацией «вилка». Действительно, если двигаться по плоскости параметров на рис. 62 снизу вверх по линии  $\alpha = 0$ , то при переходе через вершину острия произойдет характерная для рис. 57 связанная с этой бифуркацией перестройка.

Итак, мы имеем пример системы, для которой существенен именно двухпараметрический анализ. Об этой двухпараметрической ситуации можно говорить, как о катастрофе «сборка». (Сравните полученную картину с имевшей место при решении задачи 5в из раздела «Физический анализ математических задач».)

Мы пока ограничились рассмотрением случая малых  $x$ . Проведем теперь рассмотрение более аккуратно, не ограничиваясь этим предположением. Вычисляя соответствующие производные от «полного потенциала»

$$W(x) = -\frac{(x + \alpha)^2}{2} - \varepsilon\sqrt{1 - x^2}, \text{ получаем}$$

$$W'(x) = -x - \alpha + \frac{\varepsilon x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

$$W''(x) = -1 + \frac{\varepsilon}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

После несложных преобразований находим:

$$x = \pm \sqrt{1 - \varepsilon^{\frac{2}{3}}}$$

и

$$\alpha = \pm \left( 1 - \varepsilon^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Последнее уравнение задает более точно линию на плоскости параметров  $(\alpha, \varepsilon)$ , разделяющую области с различным характером конфигурации потенциальной энергии как функции координаты. Однако легко видеть, что в окрестности точки сборки мы имеем также полукубическое острие. Действи-

тельно, используя  $\varepsilon = 1 - \Delta\varepsilon$  и, соответственно,  $\varepsilon^{\frac{2}{3}} = (1 - \Delta\varepsilon)^{\frac{2}{3}} \approx 1 - \frac{2}{3}\Delta\varepsilon$ ,

получаем

$$\alpha \approx \pm \left( \frac{2}{3} \Delta\varepsilon \right)^{\frac{3}{2}},$$

то есть уже полученное выше соотношение.

8. Решение этой задачи аналогично предыдущей. В системе координат, связанной со стержнем (ось  $OX$  направлена вдоль стержня, ось  $OY$  — перпендикулярно к нему и проходит через точку крепления пружины), нетрудно получить следующее выражение для потенциальной энергии:

$$U(x) = \frac{k(\sqrt{a^2 + x^2} - l)^2}{2} + mgx \sin \alpha,$$

где  $\sqrt{a^2 + x^2} - l$  — найденное с помощью теоремы Пифагора удлинение пружины.

Переходя к безразмерным переменным и параметрам, получаем

$$W(x) = (\sqrt{\varepsilon^2 + x^2} - 1)^2 + \mu x,$$

или

$$W(x) = \varepsilon^2 + 1 + x^2 - 2\sqrt{\varepsilon^2 + x^2} + \mu x.$$

Здесь  $W = \frac{U}{kx^2/2}$  — безразмерная энергия,  $\varepsilon = \frac{a}{l}$  и  $\mu = \frac{2mg \sin \alpha}{kl}$  —

безразмерные управляющие параметры, причем первый из них характеризует расстояние от точки прикрепления пружины до стержня. Координата  $x$  нормирована на длину  $l$ . При малых  $x$  из этого соотношения можно получить

$$W(x) = const + \mu x + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} x^2 + \frac{1}{4\varepsilon^3} x^4 + \dots$$

Таким образом, метаморфозы потенциала при малых  $x$  качественно аналогичны случаю предыдущей задачи.

Найдем теперь разбиение плоскости параметров на характерные области, не ограничиваясь случаем малых  $x$ . Вычисляя соответствующие производные, имеем:

$$W'(x) = 2x - \frac{2x}{\sqrt{\varepsilon^2 + x^2}} + \mu = 0,$$

$$W''(x) = 2 - \frac{2\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

После некоторых преобразований получаем для линий складок

$$\mu = \pm 2 \left( 1 - \varepsilon^{2/3} \right)^{3/2}.$$

Нетрудно видеть, что и в этом случае имеется полукубическая особенность — точка сборки.

Дадим физическое обоснование этой задачи в случае, когда наклон стержня отсутствует. При этом

$$U(x) = \frac{k(\sqrt{a^2 + x^2} - l)^2}{2}.$$

Положениям равновесия отвечают значения  $x=0$  и  $\sqrt{a^2 + x^2} - l = 0$ . Второе из этих соотношений отвечает просто недеформированной пружине. Таким образом, если отвести стержень далеко от пружины ( $a > l$ ), то за счет деформации пружины положение равновесия в начале координат будет устойчивым. Будем уменьшать расстояние до точки прикрепления пружины  $a$ . При  $a < l$  пружина станет «выпучиваться» и положение равновесия в начале координат станет неустойчивым, но появятся два симметричных устойчивых равновесия, которые отвечают недеформированной пружине.

9. Наше предыдущее рассмотрение говорит о том, что в задаче надо ввести асимметрию. В задаче о кольцах это могут быть разные заряды или радиусы колец. В задаче о стабилизируемом пружиной маятнике можно предположить, что верхняя точка маятника отвечает некоторой начальной деформации пружины.

10. Запишем закон Ома для данной системы:

$$IR + U = E.$$

Здесь  $I$  и  $U$  — ток и напряжение на диоде. Используя выражение для их зависимости, получаем:

$$\left[ a(U - U_0)^3 - b(U - U_0) + c \right] R + U = E.$$

Удобно ввести замену переменной  $y = U - U_0$ . Тогда из нашего уравнения следует

$$aRy^3 - bRy + cy + y = E - U_0,$$

или

$$y^3 + \frac{1 - bR}{aR}y + \frac{U_0 - E + cR}{aR} = 0.$$

Вводя параметры  $p = \frac{1 - bR}{aR}$  и  $q = \frac{U_0 - E + cR}{aR}$ , приходим к кубическому уравнению

$$y^3 + py + q = 0.$$

Его анализ уже не представляет труда. Это уравнение может иметь один или три действительных корня. Новые корни появляются при условии обращения в нуль производной

$$3y^2 + p = 0.$$

Но тогда  $y = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}$ , и получаем уравнения линий, разграничивающих области существования одного и трех корней:

$$q = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} (-p)^{3/2}.$$

Характерно, что мы вновь получили закон «трех вторых». Возвращаясь к физическим переменным, находим

$$E = U_0 + cR \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{(bR - 1)^{3/2}}{\sqrt{aR}}.$$

Это линия сложной формы на плоскости физических параметров — ЭДС  $E$  и регулируемое сопротивление  $R$ . Можно отметить, однако, что она имеет вид «острия» с особенностью «три вторых», с вершиной в точке

$$R = \frac{1}{b}, \quad E = U_0 + E.$$

При этом область, где возможно три решения, располагается при  $R > \frac{1}{b}$ .

Заметим, что предыдущие примеры дают возможность предположить, и это действительно оказывается так, что из трех решений два — устойчивы, а одно неустойчиво.

## Задачи для компьютера

1. Коэффициенты разложения  $a_i$  в выражении

$$(x + 1)^n = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \dots + a_0x^n$$

для  $n = 0, 1, 2, \dots$  даются последовательными строками треугольной таблицы, в которой каждый новый элемент получается как сумма двух стоящих над ним элементов предыдущей строки (рис. 63). Соответствующая таблица и представляет собой треугольник Паскаля, который позволяет легко находить коэффициенты разложений по степеням  $x$  и  $y$  выражений вида  $(x + y)^n$ .

1  
 1 1  
 1 2 1  
 1 3 3 1  
 1 4 6 4 1  
 1 5 10 10 5 1  
 1 6 15 20 15 6 1  
 1 7 21 35 35 21 7 1  
 .....

Рис. 63

2. Соответствующие кривые показаны на рис. 64: а) декартов лист; б) циссоида Диоклеса; в) овалы Кассини. Форма первых двух кривых качественно не зависит от параметра  $a$  (на рисунках приведены кривые, соответствующие  $a = 1$ ).

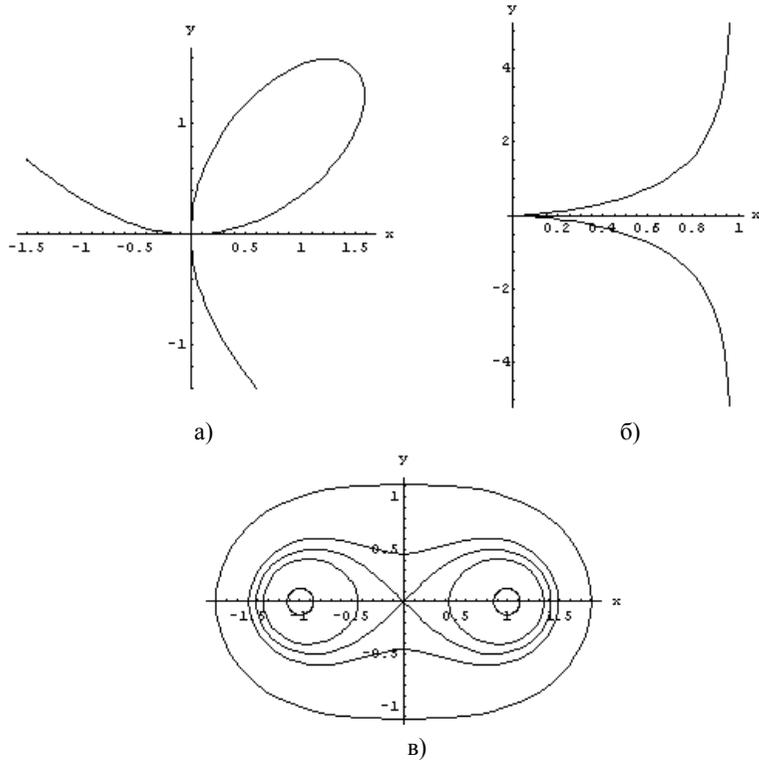


Рис. 64

Форма овалов Кассини существенно зависит от параметра  $a$ , поэтому на рис. 64в приведено несколько кривых. Обсудим более подробно их вид.

Отметим, что овалы Кассини обладают свойством, в определенной мере аналогичным эллипсу, — для них произведение расстояний от каждой точки кривой до некоторых двух точек остается постоянным. Овалы Кассини образуют две различные системы кривых, происхождение которых легко объяснить физически. Обратимся к системе из двух параллельных линий, несущих заряды с одинаковой линейной плотностью. В электростатике показывается, что для отдельной нити потенциал зависит от расстояния  $R$  до нее как  $\varphi \cong \ln R$ . Для двух нитей по принципу суперпозиции и свойству логарифмов

$$\varphi \cong \ln R + \ln r = \ln Rr.$$

Таким образом, эквипотенциалы отвечают линиям  $Rr = const$ , что соответствует овалам Кассини. Вблизи одной нити эквипотенциалы замыкаются вокруг нее (это соответствует случаю  $a < 1$  и двум «внутренним» кривым на рис. 64в). В свою очередь, очень далеко от нитей они формируют картину поля как одна нить, но с удвоенной плотностью заряда, поэтому в этой области эквипотенциалы охватывают обе нити ( $a > 1$ , две «внешние» кривые на рис. 64в). Значит, существует некоторая критическая ситуация, отвечающая переходу от эквипотенциалей первого типа ко второму. Эта кривая соответствует случаю  $a = 1$  и проходит через начало координат.

3. Обозначим координаты дома  $x_d, y_d$ , школы —  $x_s, y_s$ , кино —  $x_c, y_c$ , катка —  $x_k, y_k$ . Составим компьютерную модель движения ученика. Сначала он прошёл половину расстояния от дома до школы. Вычислим координаты точки, в которую сместится ученик, по формуле середины отрезка:

$$x := \frac{x_d + x_s}{2},$$

$$y := \frac{y_d + y_s}{2}.$$

(Символом «:=» обозначаем оператор присвоения.) После этого ученик проходит половину расстояния до кино и попадает в точку с координатами

$$x := \frac{x + x_c}{2},$$

$$y := \frac{y + y_c}{2}.$$

Затем он идет на каток:

$$x := \frac{x + x_k}{2},$$

$$y := \frac{y + y_k}{2},$$

и далее циркулирует по маршруту школа–кино–каток, при этом координаты точек, в которых он поворачивает, рассчитываются аналогично. Целесообразно программу, которая рассчитывает координаты ученика и выводит траекторию его движения на экран, при этом можно реализовать различные компьютерные модели системы. Так, удобно составить программу, которая при щелчке мыши на плоскости параметров (экране компьютера), задающем стартовую точку, рисует траекторию ученика.

В результате моделирования движения ученика несложно обнаружить, что если кино, каток и школа не лежат на одной прямой, то через некоторое число шагов ученик начинает периодически обходить вершины некоторого треугольника, приближаясь к каждой вершине все ближе и ближе (рис. 65).

Нетрудно также найти вершины этого треугольника. Для первой вершины имеем:

$$x_1 = \frac{x_s + 2x_c + 4x_k}{7},$$

$$y_1 = \frac{y_s + 2y_c + 4y_k}{7},$$

остальные рассчитываются по аналогичным формулам с циклической перестановкой индексов в правой части.

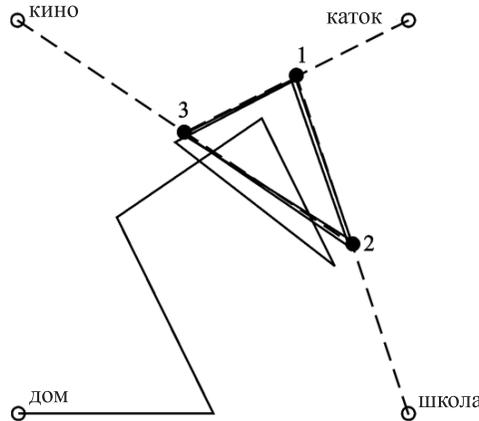


Рис. 65

Обоснуем тот факт, что найденный треугольник является «притягивающей» траекторией, т. е. при «старте» школьника из любой точки плоскости после большого времени он приходит к этому режиму. Для этого предположим, что начальная точка имеет координаты  $(x_n, y_n)$ . Пусть ученик совершит один полный цикл движений: в школу, на каток и в кино. Используя

полученные выше соотношения, получим, что он придет в точку  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ , координаты которой даются формулой:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n + x_s + 2x_c + 4x_k}{8},$$

$$y_{n+1} = f(y_n) = \frac{y_n + y_s + 2y_c + 4y_k}{8}.$$

Таким образом, координаты ученика в моменты времени, отвечающие тому, что он в очередной,  $(n+1)$ -ый, раз отправляется в школу, могут быть получены с помощью соотношений, представляющих собой пример итерированного (дискретного) отображения. Отметим, что хотя наша задача двумерна, система распадается на два независимых одномерных отображения.

Полезно представить движение ученика в виде итерационной диаграммы, как показано на рис. 66.

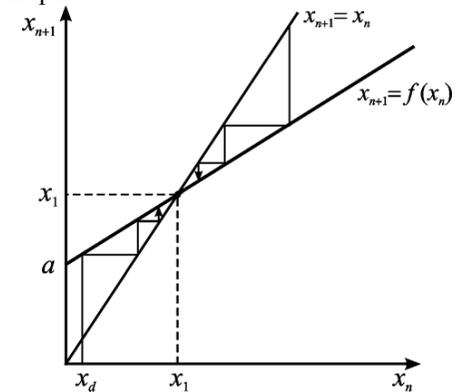


Рис. 66

Из нее хорошо видно, что отображение имеет устойчивую неподвижную точку, к которой стремится изображающая точка. Неподвижная точка легко ищется аналитически из условия  $x = f(x)$ ,  $y = f(y)$ , и приводит к уже полученному выражению для координаты вершины треугольника.

Устойчивость неподвижной точки в данном случае вытекает из того, что итерационная формула задает прогрессию с показателем  $\frac{1}{8}$ . Более формально устойчивость обусловлена неравенством

$$f'(x) = \frac{1}{8} < 1.$$

На языке дискретных отображений это означает, что мультипликатор неподвижной точки меньше единицы:  $\mu = f'(x) < 1$ . На этом же языке можно сказать, что предельная траектория — аттрактор в кинематической задаче на плоскости.

Обсудим также некоторые «вырожденные» случаи и обобщения задачи.

Если школа, каток и кино лежат на одной прямой, то точки 1, 2 и 3 также лежат на этой прямой, а ученик по-прежнему последовательно обходит эти три точки. Исследовать вырожденные ситуации и вид аттрактора удобно, написав следующую программу. Две точки (например, каток и кино) фиксированы. Фиксируем мышью положение школы, а программа рисует на экране компьютера предельную траекторию. Тогда можно визуальнo отследить метаморфозы предельной траектории при различных взаимных положениях объектов, «перетаскивая» мышью точку школы, в частности, ситуацию, когда школа, кино и каток лежат на одной прямой. Можно рассмотреть вырождение большей кратности, когда школа вдоль этой прямой и приближается к катку и т. д.

Интересной модификацией компьютерной модели может служить задача о движении двух учеников. В этом случае возникает вопрос о том, какое расстояние установится между ними при выходе на предельную траекторию? Компьютерное моделирование такой задачи, однако, уже нельзя ограничить видом траектории — необходимо отследить движения учеников в «реальном» времени. Можно рассмотреть задачу о динамике «ансамбля» учеников, т. е. об эволюции некоторой области на плоскости  $(x, y)$ .

4. Удобно перейти в новую систему отсчета  $(x', y')$ , в которой наклонная плоскость горизонтальна (рис. 67). В новой системе отсчета шарик движется равноускоренно с ускорением,  $x$ - и  $y$ -компоненты которого есть

$$a_x = -g \sin \alpha,$$

$$a_y = -g \cos \alpha.$$

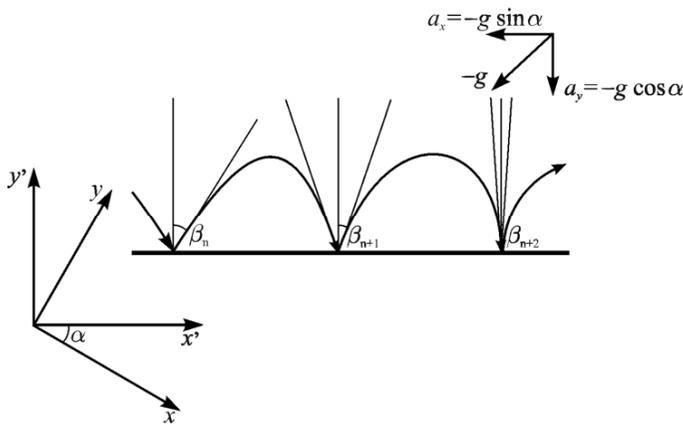


Рис. 67

Далее, учитывая свойство упругого удара (угол падения равен углу отражения) и проведя геометрические построения, можно получить итераци-

онную формулу, связывающую углы падения шарика при двух последовательных ударах. Опуская промежуточные вычисления, приведем ее:

$$\beta_{n+1} = \text{arccctg}(\text{ctg } \beta_n - 2 \text{tg } \alpha).$$

Поведение этого отображения также удобно иллюстрировать с помощью итерационной диаграммы, аналогичной представленной в предыдущей задаче. На рис. 68 приведен пример такой диаграммы при  $\alpha = 30^\circ$ . Начальный угол, под которым бросают шарик,  $\beta_0 = 5^\circ$ .

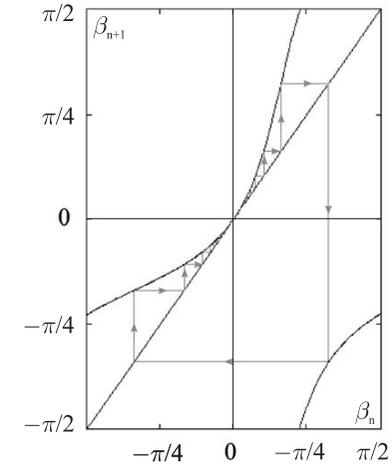


Рис. 68

Как видно, задающая отображение функция состоит из двух ветвей, терпящих разрыв при

$$\beta_c = \text{arccctg}(2 \text{tg } \alpha),$$

причем в начале координат график этой функции касается биссектрисы. При положительных значениях  $\beta_n$  шарик поднимается вверх по наклонной плоскости, при отрицательных — опускается вниз.

Если мы зададим положительное значение  $\beta_0$ , то сначала, в течение нескольких первых итераций,  $\beta_n$  будет нарастать, оставаясь положительным, при этом шарик будет подниматься вверх по наклонной плоскости. После некоторого числа итераций  $\beta_n$  станет больше  $\beta_c$ , и ломаная линия, показанная на рис. 68, перейдет на вторую ветвь функции. Дальнейшие значения  $\beta_n$  становятся отрицательными. Это значит, что шарик начинает спускаться вниз по наклонной плоскости. Обратим внимание, что отрицательные значения  $\beta_n$  быстро стремятся к нулю, т. е. шарик начинает практически катиться вниз.

На рис. 69 приведена итерационная диаграмма для малого угла наклона плоскости ( $\alpha = 2^\circ$ ), при этом по-прежнему  $\beta_0 = 5^\circ$ . Видно, что в этом

случае число соударений значительно увеличилось. Расчеты показывают, что, поднимаясь вверх по наклонной плоскости, шарик совершает 163 соударения и достигает при этом максимальной высоты  $y_{\max} = 0,243v_0^2$ .

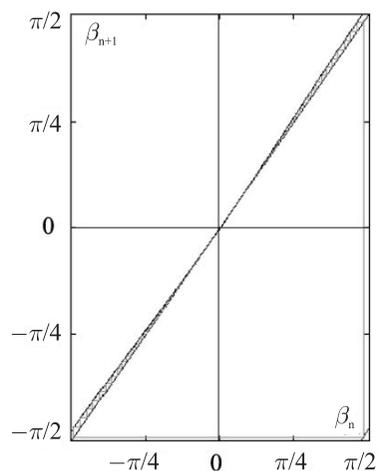


Рис. 69

Далее можно исследовать зависимость числа соударений от углов  $\alpha$  и  $\beta_0$ . Число соударений уменьшается приблизительно обратно пропорционально  $\alpha$  и  $\beta_0$  до тех пор, пока сумма углов не приблизится к  $\pi/2$ , когда шарик поворачивает назад уже после 1-2 соударений.

5. *Подсказка.* Доска Гальтона представляет собой расположенные в шахматном порядке штырьки, сверху на которые сыплют мелкие частицы (рис. 70). Внизу расположены ячейки, в которых накапливаются частицы. (Подробности см. в Интернете или литературе.) При компьютерном моделировании следует считать, что при ударе о штырь падающая частица с вероятностью  $\frac{1}{2}$  уходит либо налево, либо направо. Можно «подсветить» моменты «прохождения» частицей очередного штыря. Внизу с помощью номограммы демонстрируется накопление со временем частиц в ячейках.

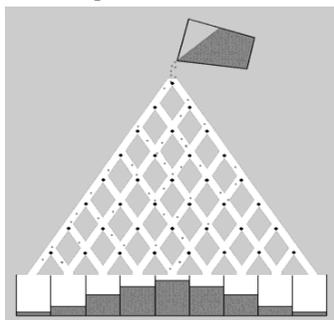


Рис. 70

6. Простейшая компьютерная модель может представлять собой двумерную квадратную решетку. Частица с равной вероятностью делает шаг влево или вправо, вверх или вниз. (В соответствии со случайным числом, генерируемым компьютером.) В результате получаются «траектории» блуждающей частицы типа показанной на рис. 71.

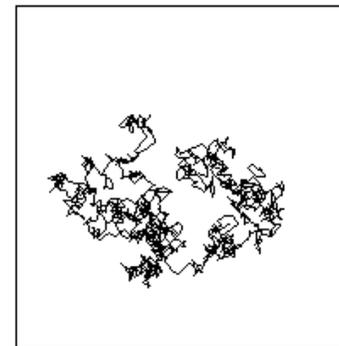


Рис. 71

8. *Подсказка.* Следует разыскать в литературе или Интернете формулу для зависимости потенциала, создаваемого диполем, от расстояния от центра диполя, и построить на компьютере соответствующий график. Другим цветом на него нанести точный расчет по закону Кулона для двух точечных зарядов. Следует отдельно рассмотреть области вблизи диполя и вдали от него. Можно также построить эквипотенциали диполя и системы двух точечных зарядов и сравнить их. Далее можно проделать аналогичные расчеты для квадруполь (системы двух диполей, расположенных параллельно друг другу на расстоянии, равном их длине, и ориентированных в противоположном направлении).

10. При построении системы отраженных лучей следует использовать закон отражения — угол падения равен углу отражения. На рис. 72 показан результат компьютерного моделирования для разной «густоты» падающих лучей.

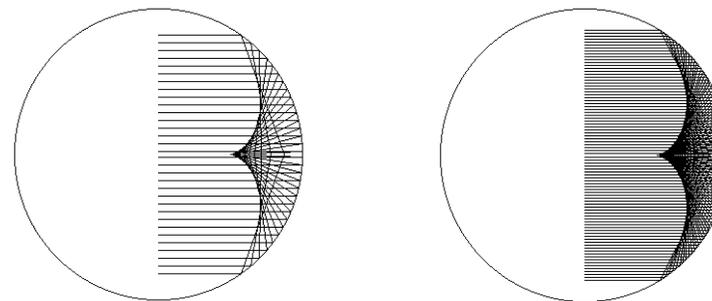


Рис. 72

На этих рисунках хорошо видны линии наибольшей «концентрации» света, образующие так называемые каустики (от греческого «жгучая»). Из рисунка видно, что каустики представляют собой огибающие семейства отраженных лучей. На каустике имеется характерный «клев», в котором яркость еще больше. Это, как говорят, особая точка, называемая точкой сборки.

11. *Подсказка.* Пусть электрон проходит сетку в момент времени  $t$ . Тогда его скорость на выходе сетки может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$m \frac{v^2}{2} = m \frac{v_0^2}{2} + eU_0 \cos \omega t.$$

На плоскости  $(t, x)$  траектории электронов выглядят как прямые линии, наклон которых задан скоростью, определяемой приведенной формулой. Таким образом, электроны, влетевшие в зазор в разные моменты времени, могут ускоряться, а могут и тормозиться. Следует построить систему траекторий электронов, влетевших в зазор в разные моменты времени. Такое исследование выявляет области «концентрации» электронов.

12. Уравнение нормали к квадратичной параболе, заданной уравнением  $y = x^2$ , можно найти в справочнике или воспользоваться следующими соображениями. Используем параметрическое представление параболы:

$$y = t^2, x = t.$$

Тогда, вычисляя производную, найдем угловой коэффициент касательной:  $2t$ . Нормаль перпендикулярна к касательной, поэтому ее угловой коэффициент дается соотношением  $-1/2t$ . Теперь легко написать уравнение прямой, имеющей такой угловой коэффициент и проходящей через точку с координатами  $(t, t^2)$ :

$$y = -x/2t + t^2 + 1/2.$$

Это и есть уравнение нормали в параметрической форме. Перебирая параметр  $t$ , можно построить множество нормалей, т. е. их семейство. Парабола и семейство ее нормалей, построенные на компьютере, показаны на рис. 73.

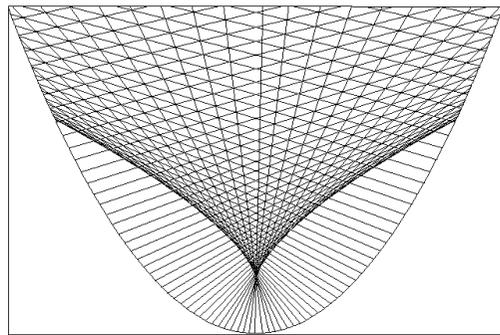


Рис. 73

На этом рисунке хорошо видна огибающая семейства нормалей (эволюта), имеющая характерную особенность, которую еще называют точкой сборки или точкой возврата. (О точках сборки и эволютах см.: В. И. Арнольд. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.) Рекомендуем построить также поверхность в пространстве  $(x, y, t)$ , заданную уравнением нормали, что прояснит смысл термина «сборка». Обратите внимание на аналогию с оптическими каустиками из задачи 10.

Подобным образом можно построить семейство нормалей к эллипсу  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , используя его параметрическое уравнение  $x = a \sin t$ ,  $y = b \cos t$ . Результат представлен на рис. 74 для некоторых значений  $a$  и  $b$ : а)  $a = 1, b = 1,5$  б)  $a = 1, b = 0,85$ . Отметим, что в данном случае эволюта имеет четыре точки сборки. Можно показать, что она образует кривую, называемую астроидой.

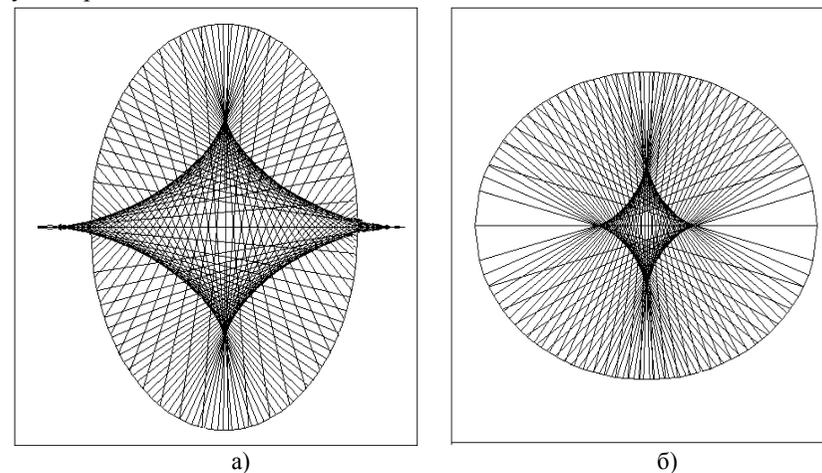


Рис. 74

Наконец, на рис. 75 показано семейство нормалей для кривой, заданной уравнением  $x^4/a^4 + y^2/b^2 = 1$ .

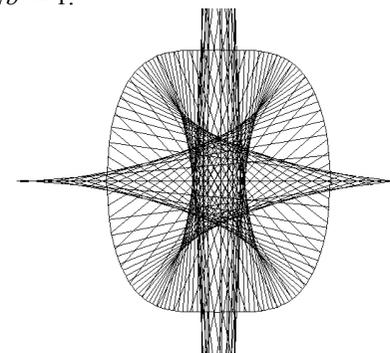


Рис. 75

16. *Подсказка.* Для численного решения дифференциального уравнения следует использовать какую-либо разностную схему, например, метод Эйлера. На рис. 76 показаны найденные численно зависимости координаты (угла) маятника  $x(t)$  и его скорости  $\dot{x}(t)$  от времени. Оба режима отвечают колебательным движениям, но у первого амплитуда колебаний мала и составляет около 0,1 радиан, т. е. примерно 0,6 градуса. Такие движения отвечают модели линейного осциллятора, период колебаний которого не зависит от амплитуды. Зависимость от времени координаты и скорости близки к синусоиде и косинусоиде соответственно.

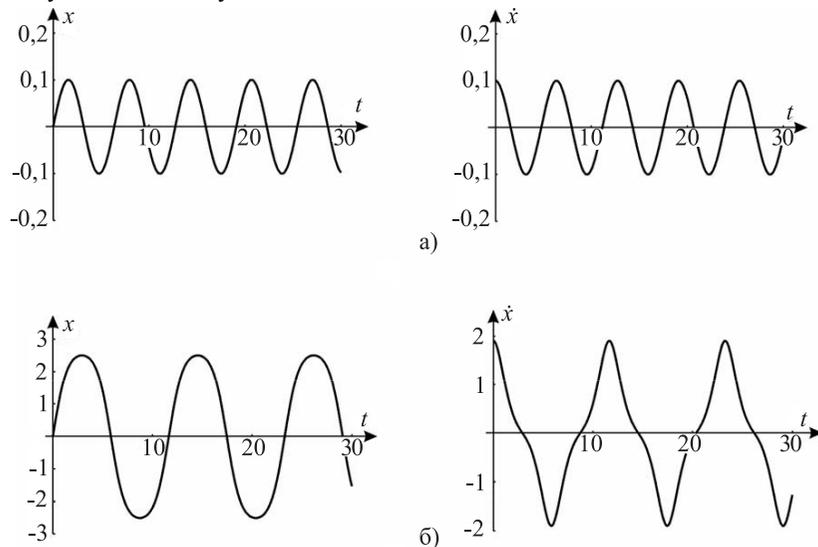


Рис. 76

Второй режим отвечает углам отклонения, близким к  $\pi$ . В ходе таких колебаний маятник становится почти вертикально, но все же падает обратно. (Заметим, что удобным параметром является полная энергия системы

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x,$$

которая не меняется в ходе колебаний. Для рис. 76а  $E = -0,9$ , а для рис. 76б  $E = 0,9$ .)

Хорошо видно, что во втором случае колебания становятся существенно ангармоническими, т. е. их форма отличается от синусоиды. Далее, период колебаний в этом случае возрос. Таким образом, из численного эксперимента мы видим, что период колебаний математического маятника на самом деле зависит от амплитуды. Для определения с помощью компьютера зависимости периода колебаний от амплитуды (энергии) следует найти удвоенное расстояние между точками пересечения графика  $x(t)$  с осью ор-

динат. В численных расчетах можно следить за знаком  $x(t)$  и фиксировать момент его смены. Для улучшения точности можно рекомендовать линейную аппроксимацию этого графика в окрестности точки смены знака. Такое уточнение может быть весьма не лишним, поскольку график зависимости периода от амплитуды резко и круто возрастает вблизи значения  $x = \pi$  (или  $E = 1$ ).

17. *Подсказка.* При больших начальных скоростях наряду с колебательными возможны и «вращательные» (ротационные) движения маятника. Результат исследования удобно представить в виде так называемого фазового портрета — траекторий на плоскости  $(\dot{x}, x)$ . Обратите внимание на отличие двух типов траекторий и «особую» траекторию, разделяющую эти два семейства.

20. *Снежинка Коха* — пример области с фрактальной границей. Начиная ее построение с равностороннего треугольника. Затем на каждой стороне среднюю треть заменяем ломаной из двух отрезков той же длины. Повторяя процедуру многократно до бесконечности, приходим в итоге к фрактальному объекту (пять первых шагов построения приведены на рис. 77).

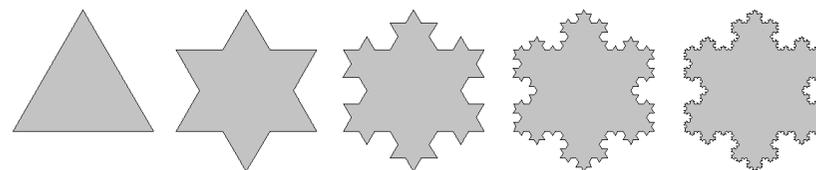


Рис. 77

Чтобы построить салфетку Серпинского, берем равносторонний треугольник, который можно представить как составленный из четырех меньших треугольников. Средний треугольник выбрасываем. Далее те же действия выполняем с каждым из оставшихся треугольников до бесконечности (рис. 78).

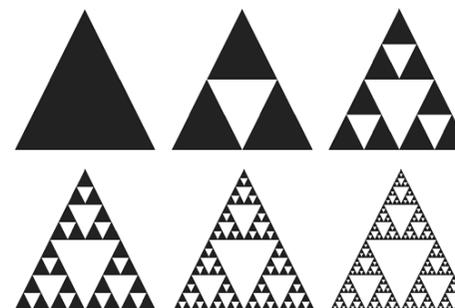


Рис. 78

Ковер Серпинского строится, исходя из квадрата, который делим вертикальными и горизонтальными линиями на 9 равных частей, и средний квадрат выбрасываем. С каждым оставшимся квадратом повторяем ту же процедуру, и так до бесконечности (рис. 79).

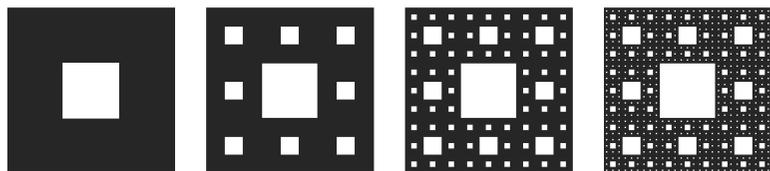


Рис. 79

Аналогичное построение в трехмерном пространстве приводит к фракталу, который называют губкой Серпинского.

Рекомендуем самостоятельно познакомиться с другими примерами фракталов.

23. *Подсказка.* Можно найти в Интернете и использовать список победителей Всероссийской олимпиады по физике и математике.

25. Представляем краткую информацию о выдающихся физиках. Дополните ее, используя возможности сети Интернет. Организуйте в Интернете поиск по выделенным курсивом словам.

**Петр Капица.** Петр Леонидович Капица (1894–1984) — выдающийся советский физик. Лауреат *Нобелевской премии* за экспериментальные работы в области физики низких температур (1978). Создатель *Института физических проблем*. Один из главных организаторов *Московского физико-технического института*. Автор знаменитых «*Задач Капицы*».

**Лев Ландау.** Лев Давидович Ландау (1908–1968) — выдающийся советский физик. Лауреат Нобелевской премии за работы в области квантовой теории конденсированных сред (1962). Автор многотомного «*Курса теоретической физики*» (с Е. М. Лифшицем). Создатель научной школы теоретической физики и автор «*Теорминимума Ландау*».

**Ричард Фейнман.** Ричард Фейнман (1928–1986) — выдающийся американский физик. Лауреат Нобелевской премии за работы в области квантовой электродинамики (1965). Один из интереснейших персонажей в физике XX века. Автор популярнейшего курса «*Фейнмановские лекции по физике*». Автор занимательной книги «*Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!*» (*Surely, You're Joking, Mr. Feynman!*).

26. Формула Кардано дает корень уравнения  $x^3 + px + q = 0$ :

$$x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}.$$

Для знакомства с ее захватывающей историей рекомендуем, в первую очередь, журнал «Квант». Заметим, что к кубическому уравнению приводит, например, такая простая физическая задача, как определение глубины погружения в жидкость плавающего шара с заданной плотностью. (Покажите это самостоятельно, получите соответствующее кубическое уравнение в безразмерной форме и приведите его к указанному выше виду.)

27. Мы даем краткий комментарий на указанную тему. Рекомендуем организовать поиск в сети Интернет по выделенным курсивом терминам.

*Хаос* — сложное, в определенной мере непредсказуемое поведение простых *нелинейных динамических систем*, заданных либо дифференциальными уравнениями (например, разнообразные маятники), либо *дискретными отображениями*.

Рассмотрим последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , получаемую по правилу:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2,$$

где  $\lambda$  — постоянное число (параметр). Это простейшее нелинейное отображение, которое может моделировать, например, динамику биологической популяции. Тогда  $x_n$  дает численность популяции в  $n$ -ый год, а  $\lambda$  — количество пищи. Известны и примеры из физики и других естественных наук. Такое отображение называют *логистическим*. При  $\lambda < 0,75$  последовательность  $x_n$  сходится к *неподвижной точке*; в интервале от 0,75 до 1,25 — к так называемому циклу периода 2, на котором динамическая переменная принимает попеременно два значения; от 1,25 до 1,368 — к циклу периода 4; затем имеются уменьшающиеся интервалы, где возникают циклы периодов 8, 16, 32, ... При переходе через  $\lambda = 1,401155189\dots$  возникает сложная динамика: существует множество значений параметра, для которых реализуется хаос, и множество, для которого имеет место периодическое поведение. Аналогичный *сценарий перехода к хаосу* через удвоения периода наблюдается в системах разной физической природы (*нелинейный маятник с затуханием под периодическим воздействием, конвекция в слое жидкости, система Лоренца, отображение Эно* и др.).

Хорошей иллюстрацией такого поведения являются *итерационные диаграммы (диаграммы Ламерея)*, описанные в задаче 2 из раздела «Исследовательские задачи».

Еще более наглядным является *бифуркационное дерево* (или, как иногда говорят, *дерево Фейгенбаума* — по имени ученого, установившего многие существенные законы динамики отображений). Бифуркационное дерево дает зависимость установившихся значений переменной  $x$  от параметра  $\lambda$ . Оно легко может быть построено на компьютере, что рекомендуем сделать самостоятельно. Для этого надо задать некоторое начальное значение переменной и параметра. Затем выполнить несколько сот итераций отображения, чтобы исключить переходные процессы и реализовать установившийся

режим, и вывести некоторое количество точек на экран дисплея. Затем процедуру повторить для слегка измененного значения параметра. И далее все повторить для всего диапазона управляющего параметра. В результате получится картинка, показанная на рис. 80.

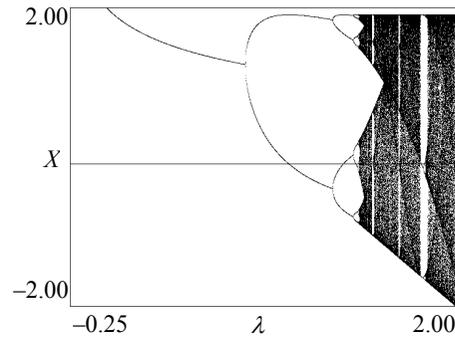


Рис. 80

На бифуркационном дереве хорошо видны моменты удвоения периода, в которые дерево расщепляется на две ветви, хаотический режим и различные окна периодических режимов в хаосе.

## Исследовательские задачи

1. Поместим систему координат так, как показано на рис. 81. В силу вращательной симметрии поверхности, координата  $y$  дает радиус  $r$  окружности в горизонтальном сечении пленки. Рассечем поверхность горизонтальной плоскостью, отстоящей на расстоянии  $x$  от начала координат. Длина пленки в этом сечении равна  $2\pi r$ . Соответственно, сила поверхностного натяжения составляет  $2\pi r \sigma$ , и эта сила направлена по касательной к поверхности пленки. Пусть угол наклона этой касательной составляет  $\theta$ . Тогда вертикальная составляющая силы есть  $2\pi r \sigma \cdot \sin \theta$ . Поскольку пленка свободна и почти невесома, то вертикальная составляющая силы должна быть одинакова в любой точке пленки. Следовательно, величина  $r \cdot \sin \theta$  является константой. Вспомним, что угловой коэффициент касательной есть  $\operatorname{tg} \theta = \frac{dx}{dr}$ ,

или  $\operatorname{ctg} \theta = \frac{dr}{dx}$ . Из тригонометрии известно, что  $\sin \theta = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \theta}$ . Тогда получаем следующее уравнение для края пленки:

$$r^2 [1 + (dr/dx)^2]^{-1} = \text{const.}$$

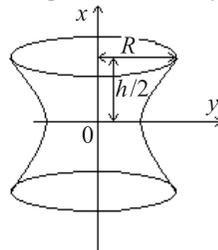


Рис. 81

Это уравнение имеет решение вида

$$r(x) = \frac{1}{a} \operatorname{ch}(ax) = \frac{1}{2a} (e^{ax} + e^{-ax}),$$

что можно проверить его подстановкой в уравнение. При этом начало координат отвечает самому узкому месту пленки — «перетяжке» (см. рис. 81). Постоянная  $a$  определяется из граничного условия, отвечающего тому, что пленка натянута на кольцо радиуса  $R$ :

$$R = \frac{1}{a} \operatorname{ch}(ad).$$

Здесь и далее  $d$  — расстояние от «перетяжки» пленки до кольца, т. е. половина расстояния между кольцами  $h$ . Заметим, что поверхность мыльной пленки, натянутой на два проволочных кольца, является фигурой, называемой катеноидом. (В переводе с латинского *catena* — цепь. Форма боковой поверхности катеноида имеет вид цепной линии.)

Решим уравнение относительно  $a$  приближенно, для чего используем разложение в ряд Тейлора. Пренебрегая малыми величинами порядка четвертой степени и выше, запишем:

$$\operatorname{ch}(ad) \approx 1 + \frac{(ad)^2}{2}.$$

Тогда получим следующее квадратное уравнение относительно  $a$ :

$$a^2 - 2Ra/d^2 + 2/d^2 = 0,$$

откуда

$$a = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2d^2}}{d}.$$

Таким образом, решение существует лишь при условии

$$d \leq R / \sqrt{2} \approx 0,71R.$$

Это означает, что есть некоторое критическое расстояние между кольцами, при котором пленка натянута на кольца, — при его превышении пленка рвется.

Определим критическое значение более точно. Положим  $z = ad$ . Тогда имеем

$$z \cdot \frac{R}{d} = \operatorname{ch}(z).$$

Если решать это уравнение графически, то решению будут отвечать пересечение графиков прямой линии и гиперболического косинуса. Очевидно, что в момент исчезновения решения линия будет касательной к гра-

фику косинуса.<sup>5</sup> Поэтому справедливо и соотношение, получающееся дифференцированием нашего уравнения по  $z$ :

$$\frac{R}{d} = \text{sh}(z).$$

Но тогда  $z = \text{cth}(z)$ . Это уравнение можно решить численно, например, методом Ньютона. В результате получаем  $z \approx 1,2$ . Тогда  $\frac{R}{d} = \text{sh}(1,2) \approx 1,51$ .

Окончательно

$$d \leq 0,66R.$$

Мы видим, что получилось неплохое соответствие с приближенным рассмотрением. (Заметим, что  $d$  — это половина расстояния между кольцами, для полного расстояния  $h = 2d \leq 1,32R$ .)

Проведенное рассмотрение позволяет определить и размер «перетяжки» в момент разрыва. Действительно, из  $r(x) = \frac{1}{a} \text{ch}(ax)$  находим, что при  $x = 0$  справедливо  $r_0 = 1/a$ . Тогда из

$$z = ad = 1,2 \quad \text{и} \quad d = 0,66R$$

находим, что  $r_0 = 0,55R$ .

Для проведения эксперимента были изготовлены кольца различных радиусов из медной проволоки. В эксперименте было обнаружен эффект разрыва мыльной пленки при превышении расстояния между кольцами некоторого критического значения. Оно было измерено для нескольких колец. Полученные результаты для колец одинакового радиуса представлены в таблице 1. Третьей строкой в таблице даны теоретические значения для критического расстояния между кольцами, полученные из точной теории.

Таблица 1

$R$ , см	2	3	4	5
$h$ , см	2,8	4,0	5,4	6,1
$h_{\text{теор}}$ , см	2,66	3,99	5,32	6,65

Для наблюдения конфигураций мыльных пленок использовался метод проектирования их теней на экран. В процессе эксперимента форма мыльной пленки зарисовывалась (см. рис. 82, радиусы колец 2 см (а) и 3 см (б)).

<sup>5</sup> Заметим, что из этого рассуждения следует, что решения появляются парами. То же видно и из приближенного рассмотрения. В эксперименте, однако, всегда реализуется единственная конфигурация. Это говорит о том, что вторая неустойчива. Доказать это достаточно сложно, но поскольку в момент разрыва конфигурация единственна, то на дальнейшем рассмотрении эта тонкость не сказывается.

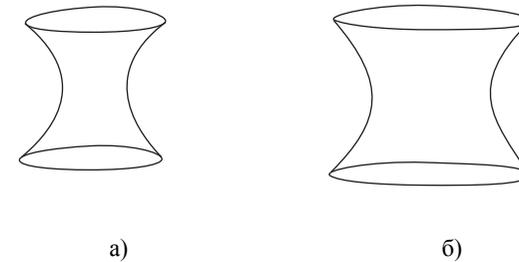


Рис. 82

Фиксация конфигураций пленки позволяет проверить и теоретическое выражение для перетяжки. Так, для кольца с  $R = 2$  см получаем размер перетяжки  $r_0 = 0,55R = 1,1$  см. Экспериментальное значение — 0,9 см (см. рис. 82). Для второго кольца с  $R = 3$  см получаем размер перетяжки  $r_0 = 1,65$  см. Экспериментальное значение — 1,75 см. Как видно, предсказания теории неплохо совпадают с экспериментом.

Перейдем теперь к обсуждению случая колец разного радиуса. Для колец радиусов  $R_1$  и  $R_2$  граничные условия примут вид

$$aR_1 = \text{ch}(-ad_1),$$

$$aR_2 = \text{ch}(ad_2),$$

которые следует дополнить соотношением  $d_1 + d_2 = h$ , где  $h$  — расстояние между кольцами. Здесь  $d_1$  и  $d_2$  имеют смысл расстояний от «перетяжки» до верхнего и нижнего колец соответственно. Таким образом, мы имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными, из которой и определяется параметр  $a$ . В общем виде ее анализ не столь прост, причем результат зависит от нового параметра, в качестве которого можно взять отношение радиусов колец. Поэтому мы ограничимся приближенным рассмотрением. Используя разложение в ряд, получим:

$$aR_1 = 1 + (ad_1)^2/2,$$

$$aR_2 = 1 + (ad_2)^2/2.$$

Выражая из этих уравнений  $d_1$  и  $d_2$  и складывая полученные соотношения, приходим к

$$\sqrt{2(aR_1 - 1)} + \sqrt{2(aR_2 - 1)} = ah.$$

Возводя обе части этого соотношения в квадрат, получаем:

$$(ah)^2 - 2a(R_1 + R_2) + 4 = 2\sqrt{2(aR_1 - 1)}\sqrt{2(aR_2 - 1)}.$$

Еще раз возведем это соотношение в квадрат и приведем подобные члены:

$$[ah^2 - 2(R_1 + R_2)]^2 = 8(2R_1R_2 - h^2).$$

Таким образом, решение возможно, если  $h^2 \leq 2R_1R_2$ . Следовательно, критическое значение расстояния между кольцами определяется соотношением

$$h = \sqrt{2R_1R_2}.$$

(Заметим, что в частном случае  $R_1 = R_2$  оно превращается в полученное ранее соотношение для колец одинакового радиуса.) Из нашего уравнения теперь получаем, что в момент разрыва

$$a = 2(R_1 + R_2) / h^2 = 1 / R_1 + 1 / R_2.$$

Но поскольку

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{aR_1 - 1}{aR_2 - 1}},$$

то получаем

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Таким образом, в случае колец разного радиуса перетяжка образуется ближе к меньшему кольцу, причем ее расстояния от колец пропорциональны их радиусам.

Экспериментальные результаты исследования колец разного радиуса приведены в таблице 2.

С учетом приближенного характера теории, наблюдается неплохое соответствие с экспериментом.

Таблица 2

$R_1$ , см	2	2	2	3	3	4
$R_2$ , см	3	4	5	4	5	5
$h$ , см	3,6	4,5	5,7	4,5	6,2	7,0
$h_{\text{теор}}$ , см	3,5	4,0	4,5	4,9	5,5	6,3

Одна из конфигураций мыльной пленки в случае колец разного радиуса приведена на рис. 83 (радиусы колец 3 см и 5 см). В соответствии с теоретическим рассмотрением, в этом случае перетяжка должна делить расстояние между кольцами в отношении  $3 : 5 = 0,6$  и располагаться ближе к кольцу меньшего радиуса. Последнее, как видно из рисунка, выполняется. Экспериментальное значение отношения расстояний до перетяжки составляет 0,65, что также следует признать хорошим соответствием с теоретическим значением.

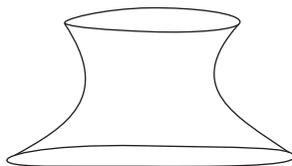


Рис. 83

2. Задачу об определении сопротивления представленной в условии бесконечной цепочки можно найти практически в любом олимпиадном задачнике. Ее традиционное решение основано на использовании того факта, что добавление еще одного звена к бесконечной системе не изменяет ее. Таким образом, данная схема эквивалентна представленной на рис. 84.

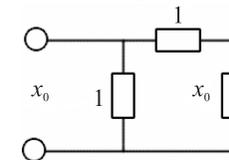


Рис. 84

Здесь  $x_0$  — искомое сопротивление. Нетрудно получить, что

$$x_0 = \frac{(x_0 + 1) \cdot 1}{(x_0 + 1) + 1}, \text{ или } x_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 + 2}.$$

Тогда

$$x_0^2 + x_0 - 1 = 0.$$

Отсюда следует ответ к задаче:

$$x_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618034.$$

Описанный метод в журнале «Квант» в статье, посвященной методам вычисления сопротивлений различных схем, назвали методом Иона Тихого — по имени известного героя Станислава Лема, сумевшего разместить постояльца в полностью заполненной гостинице с бесконечным числом номеров.

Такое решение, хотя и весьма изящно, оставляет некоторое чувство неудовлетворения, поскольку остаются открытыми некоторые вопросы. В первую очередь: какое отношение к реальности имеет эта задача и это решение? Ведь реальная цепочка будет содержать конечное число звеньев. Можно сформулировать вопрос так: если мы можем измерять сопротивление с заданной точностью, то сколько звеньев должна содержать цепочка, чтобы считаться бесконечной? Кроме того, если вдуматься, то заранее не очевидно, что добавление новых звеньев в реальной конечной цепочке будет приближать результат измерения сопротивления к значению  $x_0$ . Вдруг малые погрешности, которые вносят реальные резисторы, будут вносить нарастающий вклад? Ведь цепочка бесконечная!

Оказывается, на все эти вопросы можно ответить, привлекая изящный математический аппарат разностных уравнений или отображений, являющийся частью современной теории динамических систем.

Итак, обратимся к нашей схеме, отсчитаем конечное число звеньев  $n$  и  $n + 1$  от правого конца (рис. 85а).

Сопровитления всех резисторов одинаковы, и мы будем полагать их равными единице. Из рисунка хорошо видно, что схема эквивалентна показанной на рис. 85б. Тогда легко получаем

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}.$$

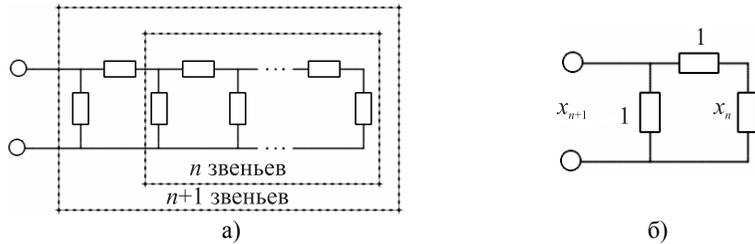


Рис. 85

Это и есть простейший пример отображения.

В общем виде одномерное отображение задается соотношением

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Это отображение называется одномерным, поскольку в него входит одна переменная —  $x$ . Такое отображение по заданному начальному значению  $x_1$  позволяет определить все последующие значения переменной  $x_2, x_3$  и т. д. Действительно,

$$x_2 = f(x_1),$$

$$x_3 = f(x_2),$$

...

Свойства отображений удобно иллюстрировать на итерационной диаграмме. Для ее построения прежде всего надо на плоскости  $(x_n, x_{n+1})$  изобразить график функции  $f(x)$  и биссектрису (рис. 86).

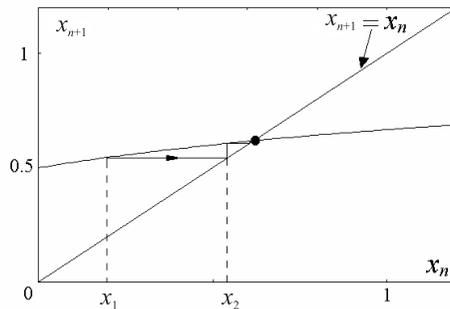


Рис. 86

Задав теперь начальное значение  $x_1$ , можно найти  $x_2 = f(x_1)$  по графику. Затем это значение переносится на биссектрису и процедура повторяется. Возникает своеобразная лесенка, иллюстрирующая ход итераций.

Как видно из графика, наше отображение имеет неподвижную точку, т. е. точку, для которой  $x_0 = f(x_0)$ . Она как раз соответствует решению задачи по методу Иона Тихого.

По рисунку получается, что последовательные итерации сходятся к неподвижной точке. Докажем это более строго и выясним характер сходимости (быстрый, медленный?). На эти вопросы можно ответить и в общей формулировке.

Для этого исследуем поведение системы в случае, когда значения переменной близки к предельному значению  $x_0$ . Положим поэтому  $x_{n+1} = x_0 + \tilde{x}_{n+1}$  и  $x_n = x_0 + \tilde{x}_n$ , где знаком «тильда» обозначены малые добавки к  $x_0$ . Тогда из  $x_{n+1} = f(x_n)$  имеем

$$x_0 + \tilde{x}_{n+1} = f(x_0 + \tilde{x}_n) \approx f(x_0) + f'(x_0)\tilde{x}_n \Rightarrow \tilde{x}_{n+1} = f'(x_0)\tilde{x}_n.$$

Таким образом, если имеется некоторая маленькая добавка к значению  $x_0$ , то после первой итерации она умножается на постоянное число  $C = f'(x_0)$ , после второй — на  $C^2$ , после третьей — на  $C^3$  и т. д. Это означает, что переменная  $x$  приближается к неподвижной точке по закону геометрической прогрессии с показателем  $C$ . Отметим, что наше рассмотрение на итерационной диаграмме соответствует тому, что мы аппроксимируем  $f(x)$  касательной (вспомните геометрический смысл производной) в окрестности  $x_0$ . Соответствующая итерационная диаграмма и дает геометрическую прогрессию (рис. 87).

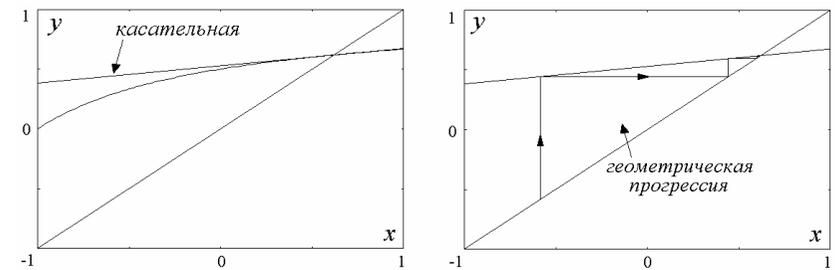


Рис. 87

Теперь по свойству геометрической прогрессии автоматически получаем, что если

- $|f'(x_0)| < 1$ , то итерации сходятся;
- $|f'(x_0)| > 1$ , то итерации расходятся.

Это позволяет судить об устойчивости неподвижной точки. В первом случае неподвижная точка устойчива, а во втором — неустойчива.

Вернемся от отображения общего вида к нашему случаю. Тогда

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2+x}; f'(x_0) = \frac{1}{(2+x_0)^2} = \frac{4}{(\sqrt{5}+3)^2} \approx 0,145900.$$

Итак, как мы видим,  $C = 0,145900$ . Это означает, что итерации сходятся, причем, поскольку  $f'(x_0)$  мало, сходятся очень быстро. В этом убеждаемся, итерируя соотношение  $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}$ . Результат представлен в таблице 3.

Таблица 3

Число звеньев в цепочке, $n$	Сопротивление цепочки, $x_n$	Отклонение от неподв. точки, %	Результаты эксперимента
1	$x_1 = 1$		1
2	$x_2 = 2/3 \approx 0,666667$	7,86	0,690
3	$x_3 = 5/8 \approx 0,625000$	1,12	0,631
4	$x_4 = 13/21 \approx 0,619048$	0,16	0,621
5	$x_5 = 34/55 \approx 0,618182$	0,02	0,620
...	...	...	...
$\infty$	$x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618034$	0	0,620

Мы убеждаемся, что увеличение числа звеньев действительно приводит в неподвижную точку. Из таблицы видно, что, оказывается, цепочку всего из трех звеньев можно считать бесконечной с точностью до 1%, а из пяти — уже с точностью всего до 0,02%! Устойчивость неподвижной точки этого отображения снимает и еще один физический вопрос: о том, не «испортят» ли возможные дефекты в цепочке результат нашего решения. Попробуйте самостоятельно изучить скорость приближения к неподвижной точке для существенно другого значения начального сопротивления (например, 10).

Цепочку, содержащую небольшое количество звеньев, вполне можно изготовить экспериментально и измерить ее сопротивление омметром. Результаты эксперимента представлены в четвертой колонке таблицы и хорошо соотносятся с теоретическим рассмотрением.

Любопытно, что рассмотренная задача связана с числами Фибоначчи и «золотым средним». «Золотое среднее» (число Фидия) — это иррациональное число, которое допускает самое простое разложение в бесконечную цепную дробь:

$$\omega = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

так что  $\omega$  должно удовлетворять квадратному уравнению  $\omega^2 + \omega - 1 = 0$ . Отсюда находим

$$\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618034005\dots$$

Это число связано с числами Фибоначчи, задаваемыми следующим рекуррентным соотношением

$$F_{m+1} = F_m + F_{m-1}.$$

Начальные значения  $F_0 = 0, F_1 = 1$ . Нетрудно получить, что  $F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots$ , и т. д.

Последовательно улучшающиеся аппроксимации «золотого среднего» рациональными числами получаются как отношения последовательных чисел Фибоначчи:

$$\omega_m = F_{m-1}/F_m.$$

Таким образом,  $\omega_2 = 2/3, \omega_3 = 3/5, \omega_4 = 5/8, \omega_5 = 8/13, \omega_6 = 13/21, \omega_7 = 21/34, \omega_8 = 34/55, \dots$ . Обратившись к таблице, убеждаемся, что наша система дает физическую реализацию аппроксимаций чисел Фибоначчи и «золотого среднего». Для более подробного знакомства с числами Фибоначчи и «золотым средним» рекомендуем обратиться к возможностям сети Интернет и журналу «Квант».

3. Выберем прямоугольную систему координат  $(X, Y)$  так, чтобы ось  $X$  совпала с невозмущенной поверхностью океана, а ось  $Y$  проходила через материальную точку массы  $m$ , расположенную на высоте  $h$ , отсчитываемой от уровня невозмущенного океана (рис. 88). Таким образом, координаты этой точки суть  $X = 0, Y = h$ .

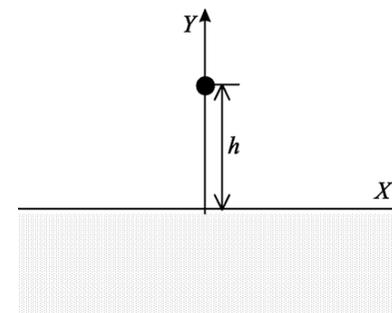


Рис. 88

Материальная точка будет создавать гравитационное поле, потенциал которого вычисляется по известной формуле  $\varphi_1 = -\frac{\gamma m}{R}$ , где  $R$  — расстояние от нее до точки наблюдения. По теореме Пифагора,

$$R = \sqrt{X^2 + (Y - h)^2}.$$

Однородному полю тяжести Земли будет отвечать линейный закон изменения потенциала  $\varphi_2 = gY$ , где  $g$  — «напряженность» поля Земли, равная ускорению свободного падения у ее поверхности. В силу принципа суперпозиции суммарный потенциал есть  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Собирая все эти соотношения вместе, получаем зависимость потенциала системы от координат точки наблюдения:

$$\varphi(X, Y) = -\frac{\gamma m}{\sqrt{X^2 + (Y-h)^2}} + gY.$$

Поверхность воды в такой системе будет располагаться вдоль линий постоянного потенциала  $\varphi(X, Y) = const$ . Будем полагать океан бесконечным. Тогда вдали от материальной точки его поверхность совпадает с осью  $X$  и  $\varphi(X, Y) = 0$ . Таким образом, уравнение поверхности воды выглядит следующим образом:

$$-\frac{\gamma m}{\sqrt{X^2 + (Y-h)^2}} + gY = 0.$$

Прежде чем исследовать его, сделаем следующее замечание. В это уравнение входит, вообще говоря, четыре параметра:  $m, h, g, \gamma$ . Однако на самом деле конфигурация поверхности зависит от меньшего числа параметров. Чтобы убедиться в этом, введем безразмерные координаты  $y = Y/h, x = X/h$ , нормированные на высоту  $h$ , и безразмерный параметр  $\varepsilon = \frac{\gamma m}{gh^2}$ . Тогда уравнение поверхности примет вид

$$y - \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0.$$

Мы видим, что конфигурация поверхности океана зависит от единственного параметра  $\varepsilon$ , который можно интерпретировать как безразмерную массу материальной точки.

Полученное уравнение позволяет выразить в явном виде координату  $x$ , и тогда можно без труда построить вид конфигураций поверхности воды в зависимости от параметра  $\varepsilon$ :

$$x = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{y^2} - (y-1)^2}.$$

Такое построение выявляет два возможных типа конфигураций (рис. 89). Если параметр  $\varepsilon$  достаточно велик, то вода «охватывает» материальную точку, которая оказывается под непрерывной поверхностью океана (рис. 89а).

Если же параметр  $\varepsilon$  достаточно мал, то материальная точка слегка возмущает поверхность океана и захватывает «каплю» — небольшое количество воды. При этом имеется некоторый «просвет» между океаном и захваченной водой (рис. 89в). Промежуточная, своего рода критическая ситуация, когда исчезает перемычка между захваченной водой и океаном, показана на рис. 89б.

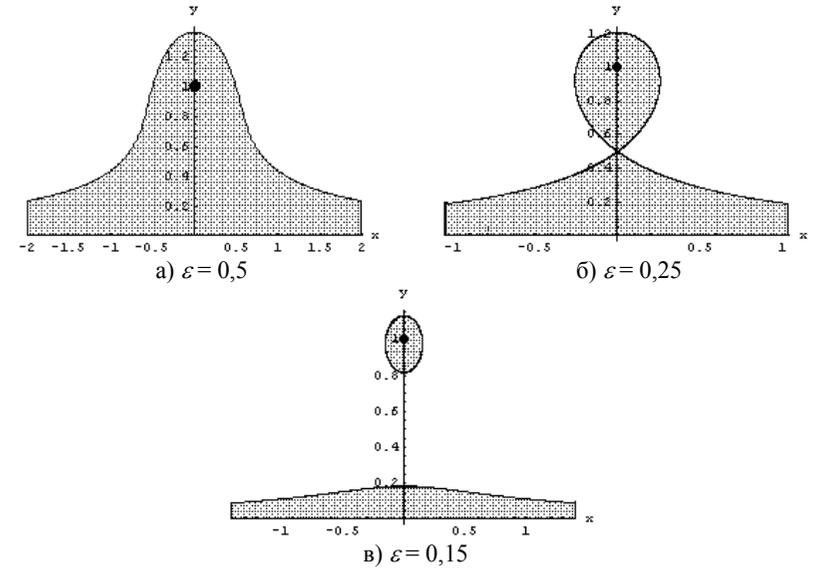


Рис. 89

Объясним полученную картину и вычислим критическое значение параметра  $\varepsilon$  аналитически. Для этого найдем точки пересечения поверхности воды с вертикальной осью. Полагая в уравнении поверхности  $x = 0$ , получаем:

$$y|y-1| = \varepsilon.$$

Если  $y > 1$  (область выше материальной точки), то мы приходим к квадратному уравнению

$$y^2 - y - \varepsilon = 0.$$

Оно имеет два решения, но только одно из них,

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2},$$

удовлетворяет условию  $y > 1$ . Таким образом, поверхность воды выше материальной точки всегда пересекает ось  $y$ , причем в единственной точке.

Пусть теперь  $y < 1$  (область ниже материальной точки). Теперь мы имеем квадратное уравнение

$$y^2 - y + \varepsilon = 0,$$

оба корня которого

$$y_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2}$$

имеют физический смысл. Такие решения существуют только при  $\varepsilon < 1/4$ . При выполнении этого условия поверхность воды пересекает вертикальную ось в двух точках (рис. 89в). При  $\varepsilon > 1/4$  эти решения не существуют и реализуется ситуация, показанная на рис. 32а. Таким образом, критической ситуации рис. 89б отвечает значение параметра  $\varepsilon = 1/4$ .

Оценим искажение поверхности воды в случае малой массы материальной точки, когда  $\varepsilon \ll 1$ . Используя известное приближенное соотношение  $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$ , получаем для высоты подъема уровня океана

$$y_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} \approx \varepsilon,$$

или, возвращаясь к размерным переменным,  $H = \varepsilon h = \frac{\gamma m}{gh}$ .

Сделаем оценку: какой объект, находящийся на орбите Земли на высоте  $h \approx 200$  км, может вызвать возмущение уровня океана Земли порядка  $H \approx 1$  м. Используя известное выражение для ускорения свободного падения через массу Земли и ее радиус  $g = \frac{\gamma M_3}{R_3^2}$ , получаем

$$\frac{m}{M_3} = \frac{Hh}{R_3^2} \approx 5 \cdot 10^{-9}.$$

(Мы использовали, что  $R_3 \approx 6400$  км.) На самом деле это достаточно большая масса. Действительно, оценим размер объекта, полагая, что его плотность примерно равна плотности Земли. Тогда  $\frac{m}{M_3} = \frac{r^3}{R_3^3}$  и получаем

$$r \approx \sqrt[3]{5 \cdot 10^{-9}} \cdot R_3 \approx 11 \text{ км.}$$

Таким образом, заметное изменение уровня воды в океане может вызвать лишь астероид (размеры астероидов от 0,5 км до 700 км). Соответственно, решения типа показанных на рис. 32а,б могут иметь физический смысл

лишь для крупных астрофизических объектов типа двойных звезд. Заметим, однако, что в силу известной аналогии между гравитационным и электростатическим полем соответствующая задача может интерпретироваться в терминах электрического заряда в однородном поле. Тогда проблемы «большой массы» не возникнет и все конфигурации рис. 89 вполне реализуемы.

Обратимся теперь к случаю, когда материальная точка находится ниже невозмущенного уровня океана. В этом случае потенциальная функция имеет следующий вид:

$$\varphi(X, Y) = -\frac{\gamma m}{\sqrt{X^2 + (Y + h)^2}} + gY.$$

В безразмерной форме для уравнения поверхности имеем

$$y - \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} = 0.$$

Точкам пересечения с вертикальной осью отвечает уравнение

$$y|y+1| = \varepsilon.$$

Нетрудно показать, что при  $y > -1$  (выше материальной точки) смысл имеет единственное решение квадратного уравнения

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2}.$$

А при  $y < -1$  (ниже материальной точки) решений нет. Таким образом, реализуется единственная характерная конфигурация, которой отвечает «вспучивание» океана над материальной точкой на высоту  $y_1$ . (Заметим, что это заранее столь не очевидный результат — можно было бы ожидать и понижения уровня воды.) При  $\varepsilon \ll 1$  получаем в размерной форме

$$H = \varepsilon y_1 \approx \varepsilon h = \frac{\gamma m}{gh}.$$

Пусть, например, на глубине  $l = 1$  км расположено «месторождение» радиуса  $r = 3$  км. Как известно,  $g = \frac{4}{3} \gamma \pi \rho_3 R_3$ . Очевидно также, что  $m = \frac{4}{3} \pi (\rho - \rho_3) r^3$ . Полагая плотность породы месторождения  $\rho$  грубо в 2 раза больше средней плотности Земли  $\rho \approx 2\rho_3$ , получаем оценку для высоты возмущения океана

$$H \approx \frac{r^3}{(l+r)R_3} \approx 1 \text{ м.}$$

Таким образом, в «гравитационной» формулировке эта задача более реалистична, чем первая.

Интересным развитием задачи может служить случай двух материальных точек. Если точки имеют одинаковые массы и располагаются на одинаковом расстоянии друг от друга, то в безразмерном виде потенциал такой системы дается выражением

$$\varphi(x, y) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-1)^2}} + y.$$

Координаты точек  $x = 0, y = 1$  («старая» точка) и  $x = a, y = 1$  («новая» точка).

Теперь уже нельзя получить аналитическое выражение для поверхности и приходится прибегать к компьютерному моделированию. Можно рекомендовать исследовать конфигурации поверхности воды на плоскости переменных  $(x, y)$  следующим образом. Отобразим эту плоскость на экране компьютера. В каждой точке экрана (пикселе) вычислим потенциал  $\varphi(x, y)$ . Если  $\varphi(x, y) < 0$ , то эту точку отметим каким-либо цветом (например, синим). Она будет соответствовать уровню ниже поверхности воды. Затем последовательно переберем все пиксели экрана. Тогда на экране мы получим выделенную синим цветом конфигурацию, отвечающую воде океана.

Мы видим далее, что потенциал системы существенным образом зависит от двух параметров:  $\varepsilon$  и  $a$ . (Первый из них можно интерпретировать как безразмерную массу точек, а второй — как безразмерное расстояние между точками.) Это сигнализирует о возможности различных типов конфигураций поверхности. Для компьютерного изучения можно применить следующий прием. Зададим на экране компьютера плоскость параметров  $(\varepsilon, a)$ . Выберем на ней некоторую точку (например, щелчком мыши на экране компьютера). В соседнем окне выведем найденную, как описано выше, конфигурацию океана. Путешествуя по плоскости параметров, с помощью мыши мы можем выявить характерные конфигурации и их метаморфозы.

При построении классификации полученных решений будут полезными следующие соображения. Обратимся сначала к случаю одного параметра (рис. 89). Можно сообразить, что случаи рис. 89а,в и рис. 89б в определенном смысле «неравноценны». Действительно, ситуации на рис. 89а,в не меняются качественно при малом изменении (как говорят, «шевелении» параметра). Поэтому их называют «грубыми», или случаями общего положения. Ситуация на рис. 89б этим свойством не обладает: при малом шевелении параметра она превращается либо в рис. 89а, либо в рис. 89б. Такие ситуации называют вырожденными («негрубыми»). Таким образом, в ходе исследования нужно выявить случаи общего положения (области на плоскости параметров), вырожденные ситуации (линии) и вырождение высшего порядка (точки).

Полезно предварительно качественно проанализировать возможную картину. Действительно, при  $a = 0$  две материальные точки сливаются в одну удвоенной массы. Поэтому в точку  $\varepsilon = 1/8$  приходит линия, отвечающая переходу типа показанного на рис. 89. Если пересечь эту линию сверху вниз при малых  $a$ , то общая для двух точек «капля» оторвется от поверхности воды. Будем затем увеличивать расстояние между точками. Тогда наступит момент, когда общая «капля» воды распадется на две изолированных. Если теперь зафиксировать расстояние и снова увеличить массу точек, то «капли» снова, но уже как изолированные, могут объединиться с поверхностью океана.

Наконец, отметим, что если точки удалены друг от друга достаточно далеко и  $a \gg 1$ , то они становятся изолированными и соответствующий переход типа рис. 89 происходит при  $\varepsilon = 1/4$ .

Мы обсудили самый простой вариант системы из двух точек. Если считать, что точки могут иметь разную высоту над уровнем океана, то приходим к потенциалу

$$\varphi(x, y) = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} + y.$$

Мы видим, что конфигурация поверхности воды определяется тремя параметрами  $(\varepsilon, a, b)$ .

Наконец, приведем выражение для потенциала в случае двух произвольных точек:

$$\varphi(x, y) = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} + y.$$

Теперь конфигурация поверхности воды определяется четырьмя параметрами  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b)$ . Два первых имеют смысл безразмерных масс точек  $\varepsilon_1 = \frac{\gamma m_1}{gh^2}$  и  $\varepsilon_2 = \frac{\gamma m_2}{gh^2}$ , а параметры  $a$  и  $b$  — нормированные координаты второй точки. Итак, в общей постановке задача о двух точках над поверхностью океана оказывается очень сложной. Ее полный анализ требует изучения устройства пространства четырех параметров.

4. *Подсказка.* Аналитическое построение каустики можно получить, записав уравнение отраженного луча от цилиндрической поверхности и выбрав в качестве параметра угол падения  $\theta$ . Дифференцируя данное соотношение по  $\theta$ , получаем уравнение огибающей семейства отраженных лучей — каустики (см. Т. Постон, И. Стюарт. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир). Каустика имеет особенность — точку сборки, отстоящую от центра чашки на половину радиуса. Считая угол  $\theta$  малым, можно показать, что «острие» в точке сборки характеризуется степенным законом с показателем  $3/2$ . Компьютерное моделирование может следовать задаче 10 из предыдущего раздела. Можно построить также систему лучей и каустики для то-

чечного источника света. Изменяя положение источника, можно изучить вопрос об «устойчивости» сборки относительно вариации параметров. Интересно проследить за метаморфозами картины при приближении источника к центру чашки, когда каустика должна исчезнуть. Можно провести весьма разнообразные эксперименты, используя чашку с молоком и лампу.

5. *Подсказка.* Следует нанести профиль слегка изогнутой линейки на миллиметровую бумагу и зафиксировать несколько точек. Затем, поместив начало координат в вершину полученной кривой, перерисовать эти точки в координатах  $(x^2, y)$ . Качеству аппроксимации формы линейки параболой будет отвечать степень прямолинейности полученного графика. Продумайте аналогичный способ для синусоиды.

Заметим, что оба способа аппроксимации годятся лишь для случая малой деформации. Действительно, сильно сжав концы линейки, мы получим профиль, заведомо не описываемый этими функциями. Обсуждение изгиба балки можно найти, например, в книге «Фейнмановские лекции по физике» (том 7, глава 38, п. 5). Интересно отметить, что угол к касательной к профилю линейки связан с длиной дуги до соответствующей точки уравнением математического маятника (аналогия Кирхгофа, см. там же). Не вдаваясь здесь в детали, составляющие предмет теории упругости, поясним происхождение основных уравнений. В любой точке  $(x, y)$  локальная кривизна линейки дается производной от угла наклона  $\theta$  по отсчитываемой вдоль линейки координате  $s$  (см. рис. 90).

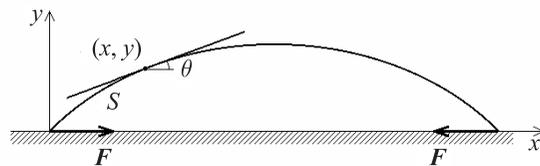


Рис. 90

Скорость же изменения кривизны по длине балки пропорциональна изгибающему моменту — произведению силы  $F$  на плечо  $y$ , т. е.

$$\frac{d\theta}{ds} = -CFy.$$

Здесь  $C$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от упругих свойств материала и формы поперечного сечения балки. Дифференцируя это равенство по  $\theta$  и используя геометрически очевидное соотношение  $\frac{dy}{ds} = \sin \theta$ , получаем

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -CF \sin \theta.$$

6. *Рекомендации.* В качестве первого шага можно рекомендовать написать программу случайного движения по квадратной сетке, при котором за один шаг дискретного времени точка с равной вероятностью смещается на одну клетку в любом из четырех возможных направлений.

Попробуйте ответить на вопрос: какое (в среднем) время нужно для того, чтобы точка удалась от места старта на заданное расстояние  $L$ ? Как зависит это время от  $L$ ?

В качестве нетривиального развития данной задачи можно добавить в область, в которой происходит блуждание, «липкий» объект, при касании которого точкой она прилипает и далее не движется, увеличивая таким образом площадь объекта (для этого, конечно, «точки» должны иметь конечные размеры). При достаточно большом числе запущенных точек можно получить сложно устроенные объекты (см., например, рис. 91).

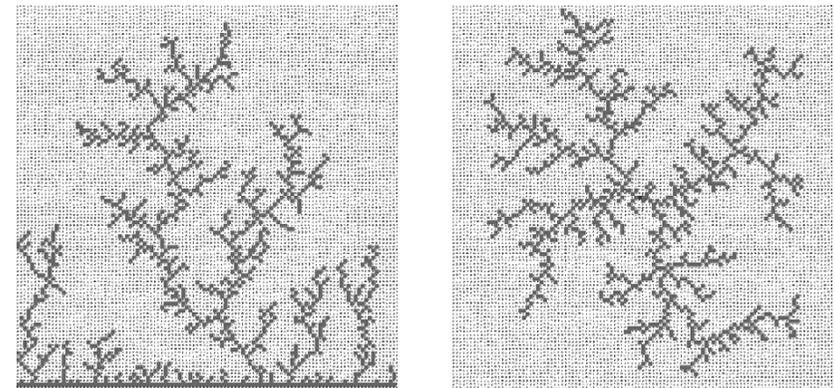


Рис. 91

Более подробно об этом явлении, называемом «ограниченной диффузией агрегацией», а также его применениях к описанию реальных процессов можно узнать из литературы. В частности, рекомендуем книгу М. Шредера «Фракталы, хаос, степенные законы».

7. *Подсказка.* Следует написать уравнение движения монеты в системе координат, связанной с наклонной плоскостью. В качестве переменных используем проекции скорости на оси координат. Сила трения дается известным выражением с коэффициентом трения  $\mu$ . Далее можно попытаться получить аналитическое решение этих уравнений и классифицировать траектории. Альтернативный вариант — численное решение уравнений. В результате можно получить траектории монеты на наклонной плоскости. При проведении экспериментов первым делом следует измерить коэффициент трения (например, просто фиксируя угол наклона, отвечающий началу сколь-

жения первоначально покоящейся монеты). Далее возникает проблема измерения начальной скорости. Можно нанести на поверхность наклонной плоскости семейство траекторий, отвечающих разным начальным скоростям, а в эксперименте разные по силе толчки будут отвечать каким-либо избранным траекториям из этого семейства. Такие исследования можно провести для разных углов наклона плоскости.

8. *Подсказка.* Получите численно оценку среднего времени ухода от точки старта на расстояние, большее  $R$ , для нескольких различных  $R$ . Предложите эмпирическую формулу для этой зависимости. Оцените характерное время возврата в окрестность начала координат. Попробуйте исследовать аналогичную задачу в трехмерном пространстве.

9. *Подсказка.* При малых колебаниях шара можно считать, что объем погружаемой части примерно равен ее площади, умноженной на глубину. Это приводит к уравнению гармонического осциллятора. В экспериментах существенную роль будет играть затухание.

12. *Подсказка.* Для маятника в виде шарика, катящегося по профилю в виде циклоиды, следует учесть вращательное движение шарика.

13. *Подсказка.* Следует иметь в виду, что профиль поверхности, по которой колеблется материальная точка, вообще говоря, не совпадает с графиком потенциальной энергии. (Это будет так лишь при малых колебаниях вблизи дна потенциальной ямы.) Обратимся к рис. 92, на котором показана исследуемая система.

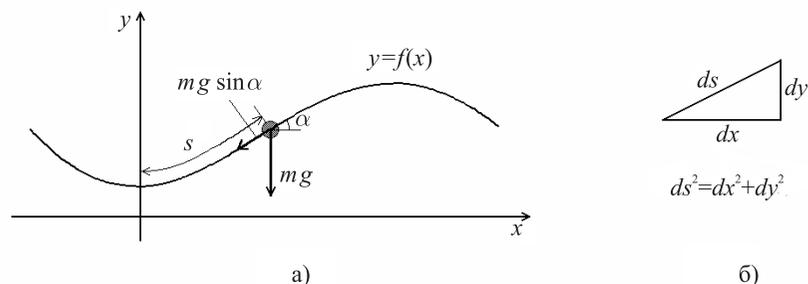


Рис. 92. К выводу уравнения скольжения материальной точки по профилю в форме заданной кривой (а). Пояснение связи между приращениями величин  $s$ ,  $x$  и  $y$  при малом смещении вдоль кривой (б).

Обозначим через  $s$  координату, отсчитываемую вдоль поверхности. Рис. 92б иллюстрирует, как соотносится малое приращение  $ds$  введенной так координаты с приращениями  $dy$  и  $dx$ .

В проекции на направление движения сила равна  $F = -mg \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона кривой в точке расположения грузика (см. рис. 92а).

Значит, уравнение движения имеет вид

$$\ddot{s} = -g \sin \alpha.$$

Как видно из рис. 92б,  $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$ . Тогда

$$\ddot{s} = -g \frac{dy}{ds}.$$

Итак, для координаты  $s$ , отсчитываемой вдоль профиля, мы получили уравнение маятника с потенциальной энергией, заданной функцией  $y = F(s)$ . Еще раз обращаем внимание на нетривиальность задачи — профиль  $f(x)$  не совпадает с функцией  $F(s)$  в силу сложной связи координат  $x$ ,  $y$  и  $s$ . Например, функция  $F(s) = \frac{ks^2}{2}$  приводит к линейному осциллятору при любых амплитудах, но при этом профиль поверхности  $f(x)$  задается циклоидой.

Из соотношений  $ds^2 = dy^2 + dx^2$  и  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx}$  получаем:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - [F'(s)]^2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{F'(s)}{\sqrt{1 - [F'(s)]^2}}.$$

Эта система двух дифференциальных уравнений, из которой и можно определить профиль поверхности  $y = y(x)$ , отвечающей колебаниям осциллятора с потенциалом  $F(s)$ . По условию,  $F(s) = \frac{ks^4}{4}$ , и тогда  $F'(s) = ks^3$ :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (ks^3)^2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ks^3}{\sqrt{1 - (ks^3)^2}}.$$

При малых  $x$  легко получаем  $s \approx x$  и  $y \approx \frac{kx^4}{4}$ , т. е. вблизи положения равновесия наш профиль должен отвечать параболе четвертой степени. В случае произвольных  $x$  эту систему следует решать численно. (Можно также рекомендовать построить решение в виде ряда по степеням  $x$ , первый член дается соотношениями  $s \approx x$  и  $y \approx \frac{kx^4}{4}$ .) Полученные конфигурации следует изобразить на рисунке и изготовить соответствующий профиль, например, из жести.

При изучении колебаний осциллятора следует учесть решение задачи 22 из раздела «Подобие». Согласно результату этой задачи,  $T = \frac{C}{A}$ . Таким образом, период колебаний обратно пропорционален амплитуде, и исследуемый маятник будет неизохронным. Этот факт может быть проверен экспериментально.

15. *Подсказка.* Бутылка фактически представляет собой открытый акустический резонатор, или резонатор Гельмгольца: сосуд, сообщающийся с внешней средой через небольшое отверстие или трубку (горло) (см., например, *Физический энциклопедический словарь*). Частота колебаний такого резонатора зависит только от геометрических параметров горла (площади поперечного сечения  $S$  и длины  $l$ ) и объема всего сосуда  $V$ , а также от скорости звука в воздухе  $c$ :  $f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{lV}}$ . Эту формулу можно найти в справочниках, но не очень сложно и вывести самостоятельно.

Несложно поставить эксперимент, изготовив такие резонаторы из пластиковых (например, 1,5-литровых) или стеклянных бутылок. Объем резонатора можно менять, наливая в бутылку воду, а геометрические параметры горла — например, частично заклеивая его пластилином. Качественная проверка формулы для частоты не представляет большой сложности.

Для количественной оценки частоты звука необходимо сравнить колебание со звуком известной частоты. Для этого можно использовать, например, фортепиано. Известно, что частота звука, соответствующего ноте «ля» первой октавы, равна 440 Гц. Для равномерно темперированного инструмента (которым и является хорошо настроенное фортепиано) отношение частот двух соседних нот (отличающихся на полтона, т. е. с учетом черных клавиш) равно  $\sqrt[12]{2} \approx 1,05946$ . Эта на первый взгляд странная константа получается следующим образом. Слух человека устроен так, что «расстояние» по высоте между двумя парами звуков кажется одинаковым, если их частоты отличаются в одно и то же число раз, поэтому чтобы интервалы между соседними нотами воспринимались одинаково, отношение частот любых соседних нот должно быть постоянным. Известно также, что частоты, соответствующие двум нотам, интервал между которыми составляет октаву, различаются ровно в два раза (собственно, это и есть определение октавы). Поскольку в современной гамме в октаву входит 12 нот (полутонов), то отношение частот соседних нот и должно быть  $\sqrt[12]{2}$ .

Таким образом можно получить частоты, соответствующие всем нотам фортепиано. Для нот первой октавы они приведены в таблице 4.

Подстраивая частоту резонатора так, чтобы она совпадала со звучанием определенной ноты, а затем измеряя геометрические параметры, можно сравнить расчетную частоту с реально получающейся в эксперименте.

нота	частота, Гц	нота	частота, Гц
до	262	фа-диез	370
до-диез	277	соль	391
ре	294	соль-диез	415
ре-диез	311	ля	440
ми	330	ля-диез	466
фа	349	си	494

16. *Подсказка.* Качалку, изготовленную из картона, можно считать невесомой, а ее массу — сосредоточенной в магните. Тогда положению равновесия качалки будет отвечать расположение магнита на нормали к линии, образующей край качалки. Таким образом, на поверхность качалки следует нанести семейство нормалей из задачи 12 из предыдущего раздела. При расположении магнита вне области, ограниченной эволютой, качалка будет иметь единственное устойчивое положение равновесия. Внутри этой области качалка будет иметь три положения равновесия, чему отвечает существование трех нормалей, проходящих через данную точку. Два из них устойчивы, а одно — нет. Прикрепляя магнит в разных точках, можно экспериментально определить границу области, в которой реализуется два устойчивых равновесия, и сравнить ее с эволютой. Интересно изучить «опрокидывание» качалки при переходе через границы, а также ее колебания при прикреплении магнита в разных точках, в частности, в точке сборки.

20. *Подсказка.* Формальное рассмотрение приводит к ряду  $\frac{l}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ , ко-

торый при  $N \rightarrow \infty$  расходится. Это означает, что можно сложить стенку какой угодно длины. На самом деле возникающая из-за погрешностей установки неустойчивость разрушает систему даже при сравнительно небольших  $N$ , в чем убеждают соответствующие эксперименты.

21. *Подсказка.* Простейшая модель процесса отвечает математической модели маятника с длиной, отвечающей координате центра масс. Далее можно считать систему физическим маятником, используя различные модели для сосуда с водой.

22. *Подсказка.* Волновой фронт можно построить, откладывая вдоль нормалей к кривой одинаковые расстояния  $cT$ , где  $c$  — скорость фронта, а  $T$  — текущее время. Например, для параболической излучающей поверхности уравнение нормали получено в задаче 12 из предыдущего раздела:

$$y = -x/2t + t^2 + 1/2.$$

Нормаль в этом случае проходит через точку с координатами  $(x = t, y = t^2)$ . (Здесь  $t$  — параметр, а не время распространения фронта.) Второе

соотношение получим из условия, что расстояние вдоль нормали от излучающей поверхности до фронта есть  $cT$ . По теореме Пифагора,

$$(y - t^2)^2 + (x - t)^2 = (cT)^2.$$

Решая эти соотношения совместно, получим уравнение волнового фронта в параметрической форме:

$$y = t^2 + \frac{cT}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \quad x = t + \frac{2ctT}{\sqrt{1 + 4t^2}}.$$

Изменяя время  $T$ , можно получить эволюцию волнового фронта во времени. Можно рекомендовать построить волновые фронты в режиме мультипликации, наблюдая фронт, отделяющийся от излучающей поверхности. Второй вариант — построить систему волновых фронтов, отвечающих одинаковым интервалам времени. Компьютерное моделирование приводит к выводу о том, что через определенный промежуток времени на поверхности фронта появляются особенности типа сборок, которые бегут вдоль эволюты параболы. При этом на волновом фронте появляется точка самопересечения. Полезно построить рядом систему волновых фронтов и систему нормалей к параболы. Аналогичное исследование можно провести для эллипса и других кривых (например, в форме спирали и т. д.)

24. *Подсказка.* Для компьютерного расчета надо формально написать формулу закона Кулона для суммы поля от всех зарядов. В зависимости от координаты, отсчитываемой от центра решетки, должны выделяться следующие асимптотические ситуации:

- очень далеко от решетки поле отвечает точечному заряду  $N^2q$ ,
- в «промежуточной» области поле слабо зависит от координаты и отвечает листу, равномерно заряженному с поверхностной плотностью  $\sigma = N^2q/(N - 1)^2a^2$ ,
- непосредственно вблизи решетки в случае нечетного  $N$  доминировать будет единственный точечный заряд  $q$ , а в случае четного — поле обратится в нуль.

25. При  $\varepsilon < 0$  существует только одно устойчивое положение равновесия, а при  $\varepsilon > 1$  от точки  $x = 1$  отделяются локальные максимум и минимум, отвечающие неустойчивому и устойчивому положению равновесия. Рассмотрим изменение поведения системы при приближении  $\varepsilon$  к нулю. При положительных значениях параметра  $\varepsilon$  динамика системы будет представлять собой колебания осциллятора вблизи устойчивого положения равновесия.

При близких к нулю отрицательных значениях параметра  $\varepsilon$  наблюдается «переменяющееся» поведение (рис. 93). Переменная плавно меняется в течение некоторого времени, а затем наблюдается резкий всплеск. Промежутки между всплесками возрастают по мере приближения к точке  $\varepsilon = 0$ .

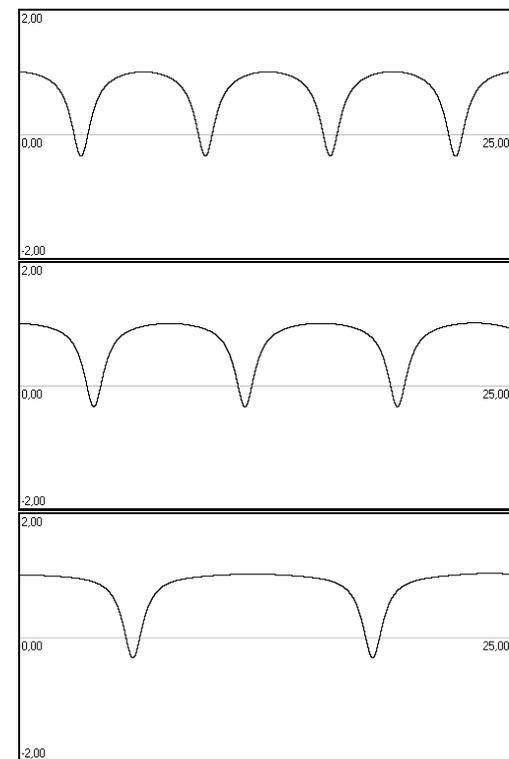


Рис. 93. Временные реализации при  $\varepsilon = -0,1$ ,  $\varepsilon = -0,05$ ,  $\varepsilon = -0,01$  (сверху вниз).

Такое поведение связано с тем, что в этой точке потенциальная функция имеет «почти» горизонтальный участок. Рекомендуем построить так называемые фазовые портреты — траектории на плоскости (скорость — координата осциллятора) при разных  $\varepsilon$ .

26. По условию притягивающие центры расположены в вершинах равностороннего треугольника (см. рис. 94). Будем считать, что магниты притягивают маятник по закону обратных квадратов. Тогда по аналогии с законом всемирного тяготения получаем следующее выражение для потенциальной энергии:

$$U(x, y) = -\gamma m \sum_{i=1}^3 \frac{M_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}.$$

Здесь  $M_i$  — «сила»  $i$ -го магнита,  $x_i, y_i$  — координаты магнитов. (Выпишите самостоятельно координаты магнитов в соответствии с рис. 93.)

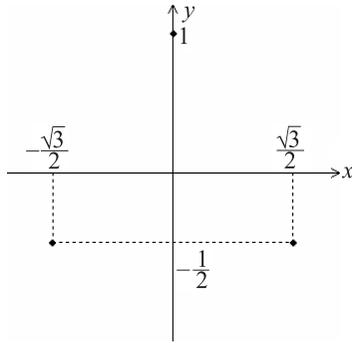


Рис. 94

Обсудим теперь уравнения движения системы. Будем полагать, как рекомендуется в условии, что маятник имеет очень длинную нить. В этом случае можно считать, что движение маятника происходит исключительно в плоскости рис. 94. Кроме того, можно пренебречь «возвращающей» силой и считать, что уравнение движения имеет простой вид  $m\vec{a} = \vec{F}$ . Тогда в проекции на оси координат имеем:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y.$$

Компоненты силы вычисляются как производные потенциала:

$$F_x = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \quad \text{и} \quad F_y = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}.$$

Можно и просто записать формулы для силы из закона всемирного тяготения, но использование потенциала дает некоторые преимущества. Действительно, он допускает наглядное представление в виде линий уровня (линий, отвечающих постоянному потенциалу, аналогу горизонталей на географических картах). На следующем рисунке 95 показаны линии уровня, построенные в случаях различных соотношений «сил» магнитов: а)  $M_3 = 1,02M_2$ ,  $M_1 = 1,02M_2$  и б)  $M_3 = 1,1M_2$ ,  $M_1 = 1,1M_2$ .

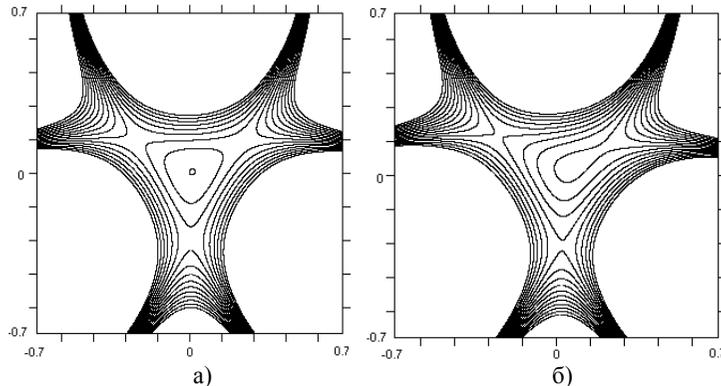


Рис. 95

Для численного построения траекторий нужно представить уравнения движения в форме системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial U(x_1, x_3)}{\partial x_1}, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\frac{\partial U(x_1, x_3)}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Эту систему можно решить численно, используя какую-либо стандартную программу. На рис. 96 слева показана система линий уровня для случая  $M_2 = 0.98M_1$ ,  $M_3 = 1.02M_1$ . Справа показан пример траектории маятника в такой системе. Нетрудно видеть, что траектория может быть очень сложной и «запутанной». Такой характер движения связан с «блужданием» в окрестностях трех притягивающих центров.

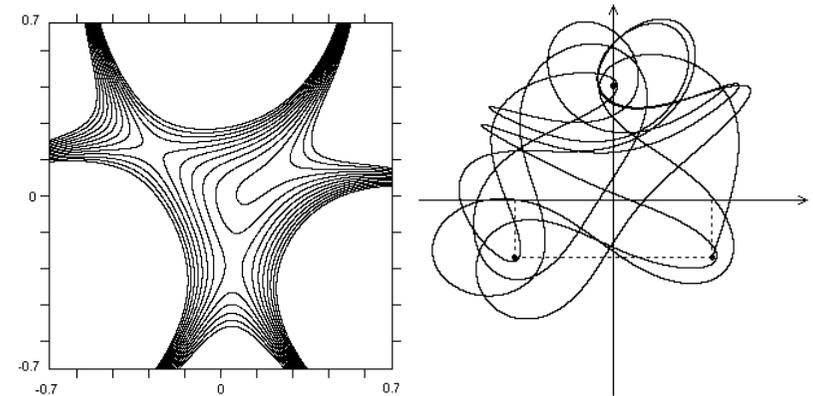


Рис. 96

Учтем теперь диссипацию, считая, что сила сопротивления пропорциональна скорости. В этом случае приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial U(x_1, x_3)}{\partial x_1} - 2\kappa x_2, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\frac{\partial U(x_1, x_3)}{\partial x_3} - 2\kappa x_4. \end{cases}$$

Здесь  $\kappa$  — параметр диссипации. На рис. 97 показаны (слева направо) примеры траекторий, отвечающих движению маятника из центра с начальной скоростью при значениях коэффициента диссипации  $\kappa = 0,05$ ,  $\kappa = 0,1$  и  $\kappa = 0,15$  соответственно.

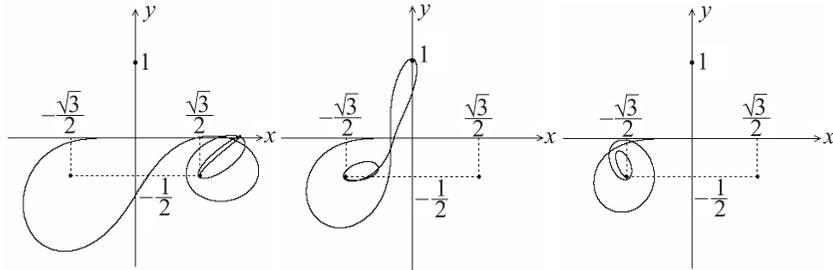


Рис. 97

Видно, что маятник в конечном итоге может притянуться к разным магнитам.

27. *Подсказка.* Необходимо выбрать модель столкновения камня с плоскостью, описывающую потери как продольной, так и поперечной компонент скорости при ударе.

28. *Подсказка.* Для начала можно считать, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, и построить компьютерную модель процесса.

29. *Подсказка.* Парабола отвечает локальной аппроксимации эллипса.

## Приложение.

### О численном решении дифференциальных уравнений

Простейшее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dot{x} = f(x).$$

Смысл его понятен: скорость изменения какой-то физической величины определяется некоторой функцией самой этой величины. Например, если сила сопротивления пропорциональна скорости тела, то можно записать второй закон Ньютона следующим образом:

$$\dot{v} = kv^2 / m.$$

Это уравнение первого порядка. Система двух дифференциальных уравнений общего вида задается соотношениями:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y).$$

Смысл этих соотношений тоже понятен: скорости изменения физических величин определяются функциями от их значений. Здесь представлен случай двумерной системы, но вообще говоря, число уравнений может быть любым.

Для численного решения системы дифференциальных уравнений воспользуемся физическим смыслом производной. Представим искомые функции времени  $x(t)$  и  $y(t)$  их значениями на дискретном множестве точек  $t_n = nh$  (как говорят, в узлах сетки с шагом  $h$  по времени):

$$x_n = x(nh), \quad y_n = y(nh).$$

Величина шага должна быть достаточно малой: от нее будет зависеть точность решения. В силу малости  $h$  по смыслу производной как скорости на этом малом отрезке времени, можно положить:

$$\dot{x}_n \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h}, \quad \dot{y}_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}.$$

Тогда нетрудно выразить в явном виде  $x_{n+1}$  и  $y_{n+1}$  через  $x_n$  и  $y_n$ :

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n).$$

Таким образом, мы пришли к некоторому итерационному соотношению. Итерируя его, мы будем получать аппроксимацию динамики дифференциальной системы. Это простейший вариант численного метода — метод Эй-

лера. Известны и другие, более точные методы. После знакомства с методом Эйлера они не вызывают каких-либо принципиальных трудностей, и мы рекомендуем обратиться к соответствующей литературе.

Здесь следует сделать еще одно замечание. Часто в физике уравнения изначально не отвечают использованной выше «стандартной» форме

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y).$$

Например, математический маятник описывается следующим уравнением:

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

Это и понятно — закон Ньютона имеет вид дифференциального уравнения второго порядка, так как ускорение представляет собой вторую производную координаты по времени. В таком случае уравнения приводятся к «стандартной» форме, если наряду с координатой  $x$  ввести вторую переменную — скорость  $v$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\sin x. \end{aligned}$$

Такая форма записи удобна для численного решения по описанной выше схеме.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	5
<b>1. «Неформальная физика».....</b>	<b>9</b>
Оценки .....	12
Размерность .....	14
Подобие.....	16
<b>2. Анализ в физике.....</b>	<b>19</b>
Физический анализ математических задач .....	21
Анализ функций.....	24
Параметрический анализ.....	27
Катастрофы (бифуркации).....	31
<b>3. Задачи для компьютера.....</b>	<b>37</b>
<b>4. Исследовательские задачи .....</b>	<b>45</b>
<b>5. Решения, комментарии.....</b>	<b>55</b>
Оценки .....	57
Размерность .....	64
Подобие.....	69
Физический анализ математических задач .....	75
Анализ функций.....	88
Параметрический анализ.....	96
Катастрофы (бифуркации).....	111
Задачи для компьютера .....	131
Исследовательские задачи .....	146
<b>Приложение.....</b>	<b>173</b>
<b>Содержание .....</b>	<b>175</b>

*Кузнецов Александр Петрович  
Кузнецов Сергей Петрович  
Савин Алексей Владимирович  
Станкевич Наталия Владимировна*

## ФИЗИКА: ОТ ОЦЕНОК К ИССЛЕДОВАНИЮ

Учебно-методическое пособие

*Дизайнер \_\_\_\_\_  
Технический редактор А. В. Ширококов  
Компьютерная верстка О. А. Печина  
Корректор \_\_\_\_\_*

Подписано в печать 00.08.2009. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Гарнитура «Times New Roman». Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 19,59. Уч.-изд. л. 15,76. Заказ № ??.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»  
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1  
<http://shop.rcd.ru>      E-mail: [mail@rcd.ru](mailto:mail@rcd.ru)