

## От авторов

Квазипериодические колебания распространены в природе и технике. Они встречаются практически во всех областях физики: радиофизике, лазерной физике, биофизике, астрофизике, климатологии, а также в биологии, химии и т.д. [1-7]. Для них ощущается и определенная математическая красота, связанная с такими объектами, как *инвариантные торы*, которые являются образами квазипериодических колебаний в фазовом пространстве [8,9]. Как известно, динамические системы разделяют на консервативные и диссипативные. Далее будет речь идти о диссипативных системах, для которых инвариантные торы, наряду с предельными циклами и хаотическими аттракторами, являются притягивающими объектами в фазовом пространстве.

Проблема возникновения все более сложных квазипериодических колебаний обсуждалась еще в рамках сценария гидродинамической турбулентности Ландау-Хопфа, ассоциирующегося с поэтапным рождением инвариантных торов все более высокой размерности [10,11]. Затем, по мере развития представлений о динамическом хаосе, сформировалась точка зрения о разрушении трех- и более высокочастотных торов при малых возмущениях, что стало основой для сценария Рюэля и Такенса [4,12,13]. Это в значительной мере охладило мотивацию исследований высокоразмерной квазипериодичности. Однако постепенно стало формироваться понимание того, что общая картина сложнее: торы разной размерности могут сохраняться при возмущениях. Кроме того, возможны аналогичные классической синхронизации эффекты с образованием своего рода резонансных торов, торы могут возникать и разрушаться в результате различных бифуркаций и сценариев и т.д. Еще один фактор состоит в том, что новые результаты могут быть получены, благодаря постоянно возрастающим возможностям компьютеров, что делает применимыми новые подходы к этим задачам, например, по сравнению с 80-90 годами.

Простейшая классификация квазипериодических колебаний основана на числе несоизмеримых частот. Что касается двухчастотных колебаний (двумерных торов), то картина в значительной мере прояснена. Это относится как к строгому математическому описанию и обоснованию соответствующих явлений, так и физическому осмыслению результатов. Соответствующие вопросы широко представлены в литературе, включая и учебную. Несколько сложнее обстоит ситуация в случае многочастотных колебаний.

Здесь могут быть полярные точки зрения. Например, можно считать, что не следует специально выделять эти задачи в отдельный класс, поскольку

квазипериодические режимы испытывают только простейшие перестройки, которые сменяются возникновением хаоса (сценарий Рюэля и Такенса). Или, наоборот, считать, что динамика этих систем качественно близка к периодической и поэтому для ее анализа вполне подойдет несложная модификация теории и методов синхронизации регулярных колебаний. По нашему мнению, это все же целое самостоятельное поле для исследования, которое формирует свой, характерный круг задач, подходов, методов и результатов. В этом контексте и ведется дальнейшее изложение.

Хотелось бы отметить несколько работ, которые сыграли определенную роль в мотивации предпринятого исследования. Одной из наиболее существенных в этом плане можно назвать работу В.С. Анищенко, С.В. Астахова и Т.Е. Вадивасовой 2009 года [14]. В этой работе была выявлена картина, обобщающая представление о языке Арнольда, на задачу о воздействии внешнего сигнала на два диссипативно связанных фазовых осциллятора<sup>1</sup>. Была выбрана ситуация, когда в автономном режиме наблюдается захват осцилляторов, а внешний сигнал возбуждает первый из них. Было дано описание физических механизмов синхронизации, когда относительный захват осцилляторов с ростом амплитуды сигнала разрушается с возникновением трехчастотных колебаний, которые, в свою очередь, переходят в захват первого осциллятора. При приближении частоты сигнала к частоте осцилляторов становится возможной также их полная синхронизация внешней силой, когда оба осциллятора одновременно захвачены сигналом. Эта же картина наблюдалась и в радиофизическом эксперименте [15]. Как и всякая «прорывная» работа, она вызвала много новых интересных вопросов: какая картина будет в случае режима биений автономных осцилляторов? Что сохранится, а что модифицируется при отказе от фазового приближения и переходе к исходной системе? Что будет в случае реактивной (консервативной) связи? Что будет при увеличении числа осцилляторов? И так далее. Причем при формировании соответствующей исследовательской программы стало ясно, что задачи о взаимной и вынужденной синхронизации в случае многочастотных колебаний, в определенной мере, отличаются, и что изложение получается более логичным, если начинать с задач о взаимной синхронизации в цепочках с возрастающим числом элементов.

---

<sup>1</sup> Укажем и последующие за [14] работы В.С. Анищенко с соавторами [15-17], посвященные синхронизации резонансного предельного цикла на торе.

Одной из наиболее цитируемых работ, связанной с данной проблематикой, является работа С. Баесенса, Дж. Гукенхеймера, С. Кима, Р. Мак-Кая [18]<sup>2</sup>, опубликованная в 1991 году. В ней исследуется простейшая дискретная фазовая модель трех осцилляторов, задающая отображение на торе. Это очень объемное и фундаментальное исследование. Авторы выявляют тонкую структуру плоскости параметров, в частности, обсуждают бифуркационные портреты точных резонансов, находят множество нелокальных бифуркаций инвариантных кривых, отвечающих за квазипериодические бифуркации, указывают точки коразмерности два, играющие важную роль в общей картине, и т.д. Однако в этой, фактически, математической работе выбрана простейшая, но формальная модель, которая не подкреплена физическими аргументами. В то же время аспект физической мотивации для случая нескольких осцилляторов оказывается очень важным. В модели [18], например, возникает неудачная ситуация, когда нет устойчивой неподвижной точки, отвечающей за основной резонанс с соотношением частот осцилляторов 1:1:1. Еще один момент – отсутствие обсуждения влияния типа связи на картину режимов<sup>3</sup>. В последующем, в ряде более физически обоснованных работ рассматривались другие модели, для которых эти недостатки отчасти устранены. Например, в работе 1998 года [21], исходя из лазерных уравнений, были получены фазовые уравнения для двух возбуждаемых единой силой осцилляторов. При этом связь между осцилляторами была не вполне традиционной для радиофизики – коэффициент «диссипативной» связи имел отрицательные значения. Такая модель уже имеет основной резонанс. Его бифуркационное устройство обсуждалось в последующей работе А. Хибника и Дж. Гукенхеймера 2000 года [22]<sup>4</sup>. Однако в целом работ на эту тему было немного, и общая картина не была сформирована. В частности, фактически наиболее обсуждаемым остался случай только трех осцилляторов.

Мы не ставим целью сделать здесь полный обзор работ по многочастотным колебаниям (некоторые ссылки будут даны по ходу изложения), однако, стоит упомянуть работу П. Линсея, А. Камминга [23], в которой дана экспериментальная двухпараметрическая картина регулярных, двух- и трехчастотных квазипериодических режимов для системы из трех

---

<sup>2</sup> Отметим и еще одну аналогичную работу тех же авторов [19].

<sup>3</sup> При увеличении числа осцилляторов, начиная уже со случая трех, не удастся построить столь универсальную дискретную модель, как синус-отображение окружности для двух связанных осцилляторов. Обсуждение некоторых типов дискретных моделей и их сравнительное описание можно найти в [20].

<sup>4</sup> По сообщению Дж. Гукенхеймера, она, фактически не была опубликована в полном виде и ее можно найти в интернете без иллюстраций.

радиоэлектронных автоколебательных элементов. Хотя она посвящена конкретной системе, но она выявляет и важные моменты общей универсальной картины. Интересна также работа П. Баттелино [24], в которой изучались реактивно связанные осцилляторы Ван-дер-Поля в стиле компьютерного моделирования. Результаты определения типа режима были представлены в виде двумерной таблицы в зависимости от величины связи и частотной расстройки. Проблема синхронизации резонансного предельного цикла на торе в системе с реактивной связью обсуждалась в работах В.С. Анищенко с соавторами [16,17]. Радиоэлектронный эксперимент с тремя осцилляторами, нацеленный на проверку некоторых результатов [18], описан в работе П. Ашвина с соавторами [25]. Отметим также работы Р. Ренда, П. Холмса [26] и М. Иванченко, Г. Осипова, В. Шалфеева, Ю. Куртса [27]. Хотя они посвящены случаю только двух осцилляторов, они являются важными для понимания возможности и различий двух типов связи осцилляторов: *диссипативной* и *реактивной* (или, по терминологии [27], консервативной). При увеличении числа осцилляторов эти отличия становятся еще более существенными [28-29].

При обсуждении общей картины оказывается полезным представление о *широкополосной синхронизации*. Так можно назвать режимы, которые возможны в неидентичных по параметрам отрицательного трения осцилляторах. Они возникают в широкой полосе частот, и характеризуется доминированием одного осциллятора над другим. На это было указано как в [27], так и в работах [30,31]<sup>5</sup>. Бифуркационный анализ этой ситуации был дан в [32,33]. Понимание характерных особенностей устройства пространства параметров для режимов такого типа оказывается очень полезным при анализе случаев трех и более осцилляторов.

Для многочастотных режимов становятся важными бифуркации не регулярных, а квазипериодических аттракторов – инвариантных торов. Вслед за [34-38] будем называть их *квазипериодическими бифуркациями*. Некоторые простейшие примеры и их характерные признаки представлены в обзорной работе Х. Броера, С. Симо, Р. Витоло [38], см. также другие работы этих авторов. Однако, как общая теория таких бифуркаций, так и алгоритмы их поиска в конкретных системах еще весьма далеки от завершения<sup>6</sup>. Отметим, что в работах тех же авторов используется удачный, на наш взгляд, термин *резонансная*

---

<sup>5</sup> Соответствующий термин введен в [30,31].

<sup>6</sup> В фазовом приближении ситуация существенно упрощается: вместо бифуркаций торов достаточно отследить бифуркации инвариантных кривых, причем последние, фактически, аналогичны бифуркациям предельных циклов в силу  $2\pi$ -периодичности фаз.

*паутина Арнольда* для возникающей картины квазипериодичности разной размерности на плоскости частотных параметров [34].

В некотором смысле отдельный класс образуют *автономные* системы с квазипериодической динамикой (*генераторы квазипериодических колебаний*) [39-43,103]. Они заслуживают самостоятельного рассмотрения и обсуждения. В последнее время ряд существенных работ в этом направлении был выполнен В.С. Анищенко, С.М. Николаевым и Ю. Куртсом. Кроме того, в работах В.Д. Шалфеева и В.В. Матросова с соавторами развивается анализ фазовых систем в контексте систем с автоматической подстройкой частоты, см., например, [44]. Некоторые интересные результаты для простейших систем в виде сетей из небольшого числа элементов получены Ю. Майстренко с соавторами [45-48].

Следует отметить, конечно, и монографии, посвященные общим вопросам теории синхронизации: П.С.Ланды [2], А. Пиковского, М. Розенблюма, Ю. Куртса [1], В.С. Анищенко, В.В. Астахова, Т.Е. Вадивасовой [5], А. Баланова, Н. Янсон [6] и другие.

Подчеркнем, что мы будем рассматривать *низкоразмерные ансамбли* автоколебательных элементов (три-четыре-пять осцилляторов). Именно в этом случае проясняется картина *поэтапного* возникновения квазипериодичности все более высокой размерности. Обсуждение систем с существенно большим числом элементов и сред можно найти, например, в уже упомянутой монографии [1] и книгах Г.В. Осипова [49,50].

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, отметим два момента, которые необходимо иметь в виду. Во-первых, изложение будет отвечать принятому в физике уровню мотивации использования тех или иных моделей, а также методов и уровня строгости изложения.

Второй момент состоит в следующем. По нашему мнению, сложность и некоторые существенные особенности задачи синхронизации квазипериодических колебаний требуют определенной *смены инструментария исследования*. Действительно, в теории синхронизации периодических режимов традиционным и основным методом является бифуркационный анализ. С его помощью можно определить границы областей синхронизации и установить их внутреннее устройство. Аналитическое исследование в этом случае удается только в простейших случаях, поэтому главным становится численный бифуркационный анализ. Соответствующие алгоритмы и комплексы программ хорошо отработаны, вполне доступны и широко используются.

Для задач многочастотной динамики при анализе устройства областей полной (глобальной) синхронизации всех осцилляторов бифуркационный

анализ также эффективен. Однако при обсуждении квазипериодических режимов приходится иметь дело уже с бифуркациями инвариантных торов. Алгоритмы и численные программы для анализа квазипериодических бифуркаций появились сравнительно недавно [38]. При этом они, во-первых, очень громоздки и требуют больших вычислений. Во-вторых, они разработаны пока только для нескольких самых простых бифуркаций такого типа. Более того, говорить о создании достаточно полной и самосогласованной теории квазипериодических бифуркаций, в той мере, в какой она разработана для периодических движений, пока не приходится.

К счастью, в нелинейной динамике имеется еще один мощный инструмент исследования динамических систем, который в данном случае может стать основным. Это метод анализа *ляпуновских характеристических показателей* [51-54]. Действительно, вычисляя спектр таких показателей и находя число нулевых, можно определить тип аттрактора: периодический режим, двумерный тор, трехмерный тор и т.д. В рамках обсуждаемых здесь задач важным становится использование этого метода для *двухпараметрического анализа*. С этой целью можно строить *карты ляпуновских показателей*. Это дает возможность выявлять картину многочастотных режимов, которая приходит на смену картине языков Арнольда, характерной для периодических режимов. Конечно, такой метод является численным и, в определенном смысле, представляет собой своего рода вычислительный эксперимент. Однако для исследования квазипериодических явлений разной размерности он сейчас, пожалуй, не имеет альтернативы<sup>7</sup>. Как мы увидим далее (см. также [38]) даже для идентификации квазипериодических бифуркаций важную роль играют именно ляпуновские показатели. Отметим, что, пожалуй, лишь сравнительно недавно скорости компьютеров стали приемлемыми для многопараметрического ляпуновского анализа потоковых систем с многочастотной квазипериодичностью. Это отчасти объясняет, почему в 70-е-80-е годы, когда активно изучались задачи о взаимодействии автоколебательных систем, соответствующие результаты не могли быть получены в полном объеме.

Еще один момент состоит в том, что мы старались сформировать картину, полезную в учебных целях, в частности, в рамках учебных курсов на Факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета.

---

<sup>7</sup> Впрочем, и традиционный бифуркационный анализ для сложных систем очень часто является численным и не реализуем без достаточно мощного компьютера.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 11-02-91334-ННИО, 12-02-00342 и 12-02-31465. Результаты получены в лаборатории теоретической нелинейной динамики Саратовского филиала Института радиотехники и электронике им. В.А. Котельникова РАН, на базовой кафедре динамических систем Саратовского госуниверситета и во время научных визитов в университет Потсдама.

Часть представленных здесь результатов опубликована в работах авторов [55-65, 29, 20, 42,43].

Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову за полезное концептуальное обсуждение и за предисловие к настоящей книге. Мы благодарим Д.И. Трубецкова за внимание к работе. Мы благодарны В.С. Анищенко за интересные вопросы и комментарии, Т.Е. Вадивасовой, В.В. Астахову за обсуждение и отзывы на некоторые результаты. Мы благодарны А.С. Пиковскому за возможность визитов в университет Потсдама и обсуждение вопросов синхронизации, а также за возможность самого раннего знакомства с монографией [1]. Мы также благодарны Ю. Куртсу и Э. Мозекилде за возможность визитов в Потсдамский институт изучения изменений климата и Датский технический университет. Мы благодарны Дж. Гукенхеймеру, предоставившему полный текст работы [22]. Мы благодарны В.В. Матросову за интересные обсуждения и В.Д. Шалфееву за многолетнее внимание и помощь. Мы благодарны Г.В. Осипову за возможность знакомства с некоторыми материалами и внимание. Мы благодарны всем коллегам за обсуждение результатов на различных конференциях, в частности, в Нижнем Новгороде. Мы благодарны Е.П. Селезневу, Ю.П. Емельяновой, Н.Ю. Чернышову и Ю.В. Седовой за помощь.

