

Серия: «След вдохновений и трудов упорных...»  
Приложение к журналу  
«Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика»

---

**А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев**  
**Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина**

# **ФИЗИКА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

Издательский центр «Наука»  
Саратов  
2013

УДК 530.1+517.9+ 519.6  
ББК 22.3

Серия: «След вдохновений и трудов упорных...»  
Приложение к журналу  
«Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика»

Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.

**Физика квазипериодических колебаний** – Саратов: Издательский центр  
«Наука», 2013, 252 с.

Учебно-научное издание

Квазипериодические колебания занимают «промежуточное» положение между регулярными и хаотическими колебаниями. Они весьма распространены в природе и технике. В книге обсуждаются проблемы многочастотных квазипериодических колебаний в низкоразмерных ансамблях осцилляторов и автономных системах. Такой подход позволяет рассматривать поэтапное возникновение инвариантных торов все более высокой размерности. Обсуждаются такие вопросы, как устройство областей полной (глобальной) синхронизации, классификация квазипериодических режимов, особенности квазипериодических бифуркаций, возможность реализации сценария Ландау-Хопфа и т.д. Изложение ведется с физических позиций, так что выбираются физически обоснованные модели, для которых проводится комплексное рассмотрение, включающее поиск бифуркаций, иллюстрации в виде карт ляпуновских показателей и др. Будет полезна студентам, аспирантам и преподавателям, как пособие в области нелинейной динамики и теории синхронизации.

*Использованы материалы, полученные при выполнении проектов РФФИ 11-02-91334-ННИО, 12-02-00342 и 12-02-31465.*

ISBN 978-5-9999-1653-2

Рекомендуют к печати:

член-корр. РАН, д.ф.-м.н, профессор Трубецков Д.И.,

д.ф.-м.н., профессор Кузнецов С.П.,

базовая кафедра динамических систем Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Оригинал-макет подготовлен авторами

© Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В., 2013

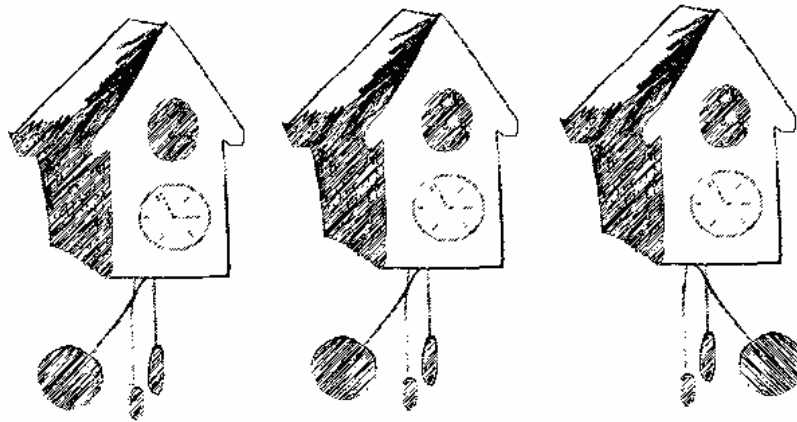
ISBN 978-5-9999-1653-2

## Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	7
<b>От авторов</b> .....	10
<b>Введение. Квазипериодические колебания и их простейшие свойства</b> .....	17
1. Квазипериодические колебания. Определения и простейшие характеристики.....	18
2. Представление о многочастотных квазипериодических колебаниях.....	23
3. Квазипериодические бифуркации.....	25
4. Спектр ляпуновских показателей и метод ляпуновских карт.....	29
5. Ансамбли взаимодействующих осцилляторов. Уравнения Ландау-Стюарта и фазовые модели.....	30
6. Эффект «гибели колебаний» и широкополосная синхронизация.....	35
7. Резонансная паутина Арнольда.....	37
8. Геометрия связей.....	39
9. Сценарии Ландау-Хопфа и Рюэля-Такенса.....	39
10. Генераторы квазипериодических колебаний и автономные системы с бифуркацией Неймарка-Сакера.....	41
11. Физические системы с многочастотной динамикой.....	42
<b>Часть I. Взаимная синхронизация фазовых осцилляторов</b> .....	43
1.1. Три диссипативно связанных осциллятора. Фазовая модель.....	44
1.1.1. Фазовые уравнения.....	44
1.1.2. Простейшие типы колебаний трех связанных фазовых осцилляторов.....	47
1.1.3. Условия полного захвата трех фазовых осцилляторов. Бифуркации, отвечающие за разрушение полной синхронизации.....	49
1.1.4. Карта режимов трех фазовых осцилляторов. Плоскость частотная расстройка – величина связи.....	53
1.1.5. Квазипериодическая седло-узловая бифуркация в фазовой модели.....	55
1.1.6. Дерево синхронизации и кластеризация.....	56
1.1.7. Классификация инвариантных кривых.....	60
1.1.8. Карта торов системы трех связанных фазовых осцилляторов.....	62
1.1.9. Точка « <i>saddle node fan</i> ».....	63
1.1.10. Точка « <i>accumulation of saddle node fans</i> ».....	64

1.1.11. Плоскость собственных частот осцилляторов.....	66
1.2. Четыре диссипативно связанных осциллятора. Фазовая модель.....	68
1.2.1. Фазовые уравнения четырех диссипативно связанных осцилляторов.....	68
1.2.2. Режим полной синхронизации четырех связанных осцилляторов....	69
1.2.3. Карта режимов четырех фазовых осцилляторов и типичные фазовые портреты.....	72
1.2.4. Дерево синхронизации, кластеризация и резонансные квазипериодические режимы разной размерности.....	78
1.2.5. Механизмы разрушения полной синхронизации и квазипериодичности разной размерности.....	82
1.2.6. Двухпараметрическая картина разрушения полной синхронизации.....	84
1.2.7. Двухпараметрическая картина разрушения двухчастотной и трехчастотной квазипериодичности.....	88
1.2.8. Устройство пространства собственных частот.....	92
1.2.9. Обобщение на случай большего числа осцилляторов.....	96
1.3. Реактивно связанные фазовые осцилляторы.....	100
1.3.1. Фазовые уравнения трех реактивно связанных осцилляторов.....	100
1.3.2. Устройства пространства собственных частот трех реактивно связанных осцилляторов.....	102
1.4. Влияние геометрии связи: сеть из фазовых осцилляторов. Случай диссипативной и активной связи.....	107
1.5. Физические системы.....	112
<b>Часть II. Взаимная синхронизация в ансамблях осцилляторов.....</b>	<b>117</b>
2.1. Три диссипативно связанных осциллятора Ван-дер-Поля.....	118
2.1.1. Случай малого управляющего параметра.....	119
2.1.2. Случай большого управляющего параметра.....	123
2.1.3. Плоскость частотных расстройек.....	127
2.2. Четыре диссипативно связанных осциллятора Ван-дер-Поля.....	130
2.2.1. Эффект повышения порога области «гибели колебаний».....	132
2.2.2. Квазипериодические бифуркации.....	135
2.2.3. Сравнение с фазовой моделью.....	137
2.3. Сценарий Ландау-Хопфа в ансамбле осцилляторов.....	137
2.4. Реактивно связанные осцилляторы Ван-дер-Поля.....	145
2.5. Влияние характера нелинейности.....	146

<b>Часть III. Вынужденная синхронизация фазовых систем и ансамблей осцилляторов</b> .....	149
3.1. Фазовые уравнения возбуждаемой системы двух диссипативно связанных осцилляторов.....	150
3.2. Полная синхронизация двух осцилляторов внешней силой.....	152
3.3. Устройство плоскости параметров частота – амплитуда воздействия.....	154
3.3.1. Случай захвата автономных осцилляторов.....	154
3.3.2. Случай биений автономных осцилляторов.....	157
3.4. Два возбуждаемых осциллятора Ван-дер-Поля.....	161
3.4.1. Фазовые портреты и динамика фазы в исходной системе.....	161
3.4.2. Двухчастотные и трехчастотные торы и Фурье-спектры.....	162
3.4.3. Режим захвата автономных осцилляторов.....	165
3.4.4. Механизмы синхронизации и ее разрушения.....	167
3.4.5. Режим биений автономных осцилляторов.....	172
3.4.6. Резонанс на гармониках внешней силы.....	173
3.5. Система трех возбуждаемых диссипативно связанных фазовых осцилляторов.....	180
3.6. Возбуждение двух осцилляторов с реактивной связью.....	188
3.7. Случаи индивидуального и коллективного возбуждения.....	197
3.8. Случай модуляции частоты осциллятора.....	198
<b>Часть IV. Автономные квазипериодические колебания и их синхронизация</b> .....	205
4.1. Автономные генераторы квазипериодических колебаний.....	206
4.1.1. Схема Чуа.....	206
4.1.2. Система Лоренц-84.....	208
4.1.3. Квазипериодический генератор Анищенко- Астахова и бифуркация удвоения двумерного тора.....	210
4.2. Генератор Кузнецова-Кузнецова-Станкевич.....	214
4.3. Синхронизация квазипериодического генератора внешним сигналом.....	228
4.4. Связанные квазипериодические генераторы.....	235
<b>Библиографический список</b> .....	244



Исследования трех и четырех осцилляторов,  
связанных каждый с каждым, дают  
достаточно сложную, практически неисчерпаемую картину.

*А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртц,*  
«Синхронизация – фундаментальное нелинейное явление».  
М.: Техносфера, 2003.

## Предисловие

Наряду с периодическими и хаотическими движениями в нелинейных системах, как консервативных, так и диссипативных, встречаются квазипериодические колебания, когда возврат системы к исходному состоянию с некоторой точностью происходит регулярно, но с периодом, увеличивающимся при повышении требуемой точности. Квазипериодические колебания можно мыслить как наложение двух или более колебательных составляющих, частоты которых находятся в иррациональном отношении, и они характеризуются дискретным спектром Фурье. В диссипативных динамических системах образом квазипериодических колебаний в пространстве состояний служат аттракторы в виде торов размерности два или выше, в зависимости от числа участвующих в динамике колебательных составляющих с несоизмеримыми частотами.

Квазипериодические колебания встречаются во многих областях науки и техники. Их исследование имеет долгую историю, кстати сказать, намного более долгую, чем, скажем, у такого популярного предмета, как динамический хаос. В этой связи можно вспомнить о задачах небесной механики, таких как анализ движения планет Солнечной системы. Многочастотные колебания естественным образом возникают в приложениях, связанных с радиотехникой, электроникой, а также лазерной физикой и нелинейной оптикой.

Имеется ряд глубоких, хотя проработанных в разной степени, идей и представлений, связанных с квазипериодическими колебаниями. Например, фундаментальное значение имеет теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ), содержание которой на физическом языке состоит в установлении возможности квазипериодической динамики в системе слабо взаимодействующих нелинейных осцилляторов. Другая фундаментальная идея, вовлекающая квазипериодические колебания – это выдвинутый в свое время Ландау и Хопфом сценарий возникновения гидродинамической турбулентности, подразумевающий последовательное рождение новых колебательных составляющих с несоизмеримыми частотами при увеличении параметра, отвечающего за степень неравновесности системы (число Рейнольдса). Можно вспомнить и о знаменитой проблеме Ферми–Паста–Улама, когда при одной из первых попыток численного моделирования динамики многомерной нелинейной механической системы авторы неожиданно столкнулись с возникновением квазипериодических колебаний вместо

предполагавшегося установления равновесного состояния в соответствии с представлениями статистической физики.

К проблеме квазипериодических колебаний примыкает круг вопросов, связанных с синхронизацией. Речь может идти о синхронизации колебаний в системе при воздействии на нее внешней силы или о внутренней синхронизации колебательных составляющих, вовлеченных в квазипериодическую динамику, при изменении каких-либо параметров системы.

Математическое исследование квазипериодических колебаний оказалось очень сложной проблемой, требующей кропотливого и нетривиального анализа с привлечением новых подходов. Хотя на этом пути достигнуты важные результаты (например, намечены контуры теории бифуркаций квазипериодических движений), до построения сколько-нибудь полной математической теории, как предоставляется, еще достаточно далеко.

В такой ситуации заслуживает внимания подход, развиваемый авторами данной книги. В его основе лежат несколько ключевых моментов, позволяющих существенным образом продвинуться в построении и понимании картины феноменов, сопровождающих существование и эволюцию квазипериодических режимов в нелинейных системах.

Во-первых, это принципиальное выдвигание на первое место конкретных физически мотивированных и допускающих физическую реализацию модельных систем, конструируемых целенаправленным образом, и подвергаемых аналитическому и численному исследованию.

Во-вторых, это методология исследования, опирающаяся на построение и интерпретацию карт динамических режимов на плоскости параметров, получаемых путем сканирования (перебора параметров) и анализа типа динамики в каждой точке. (Разновидностями таких карт являются карты показателя Ляпунова и карты чисел вращения на торе фаз осцилляторов.) Если классический бифуркационный анализ можно сравнить с кропотливой работой топографов, составляющих карту, проходя складки местности, дорожки и овраги, то построение карты режимов – это вид той же местности с птичьего полета, когда мы, возможно, теряем какие-то детали, но зато сразу получаем общее представление о присутствии и взаимном расположении различных объектов.

В-третьих, это привлечение аналитических подходов описания в рамках методов медленных амплитуд и фазовой динамики. При этом авторы смотрят на них не только как на способ приближенного описания, но и как на способ



построения специального класса моделей, заслуживающих изучения с точки зрения качественного поведения в зависимости от параметров, с последующим сопоставлением наблюдаемых феноменов с теми, что имеют место в исходных системах.

В книге собран обширный материал, существенно обогащающий наши представления о поведении нелинейных систем, способных демонстрировать квазипериодические колебания и другие феномены сложной динамики. Книга прекрасно иллюстрирована, многие картинки представляются достойными занять место классических иллюстраций в курсах теории колебаний и нелинейной динамики. Авторы придерживаются достаточно популярного стиля изложения, что делает книгу доступной для широкого круга читателей, знакомых с основами теории колебаний, в том числе для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Книга выходит в рамках серии, выпускаемой, как приложение к известному российскому научному журналу «Известия высших учебных заведений – Прикладная нелинейная динамика». Это естественно и логично, поскольку она близка по стилю к этому журналу. Кроме того, надо отметить, что значительная часть представленных в книге результатов впервые опубликована именно на его страницах.

Кузнецов С.П.,

доктор физико-математических наук, профессор,

член редакционной коллегии журнала

«Известия высших учебных заведений – Прикладная нелинейная динамика»



## От авторов

Квазипериодические колебания распространены в природе и технике. Они встречаются практически во всех областях физики: радиофизике, лазерной физике, биофизике, астрофизике, климатологии, а также в биологии, химии и т.д. [1-7]. Для них ощущается и определенная математическая красота, связанная с такими объектами, как *инвариантные торы*, которые являются образами квазипериодических колебаний в фазовом пространстве [8,9]. Как известно, динамические системы разделяют на консервативные и диссипативные. Далее будет речь идти о диссипативных системах, для которых инвариантные торы, наряду с предельными циклами и хаотическими аттракторами, являются притягивающими объектами в фазовом пространстве.

Проблема возникновения все более сложных квазипериодических колебаний обсуждались еще в рамках сценария гидродинамической турбулентности Ландау-Хопфа, ассоциирующегося с поэтапным рождением инвариантных торов все более высокой размерности [10,11]. Затем, по мере развития представлений о динамическом хаосе, сформировалась точка зрения о разрушении трех- и более высокочастотных торов при малых возмущениях, что стало основой для сценария Рюэля и Такенса [4,12,13]. Это в значительной мере охладило мотивацию исследований высокоразмерной квазипериодичности. Однако постепенно стало формироваться понимание того, что общая картина сложнее: торы разной размерности могут сохраняться при возмущениях. Кроме того, возможны аналогичные классической синхронизации эффекты с образованием своего рода резонансных торов, торы могут возникать и разрушаться в результате различных бифуркаций и сценариев и т.д. Еще один фактор состоит в том, что новые результаты могут быть получены, благодаря постоянно возрастающим возможностям компьютеров, что делает применимыми новые подходы к этим задачам, например, по сравнению с 80-90 годами.

Простейшая классификация квазипериодических колебаний основана на числе несоизмеримых частот. Что касается двухчастотных колебаний (двумерных торов), то картина в значительной мере прояснена. Это относится как к строгому математическому описанию и обоснованию соответствующих явлений, так и физическому осмыслению результатов. Соответствующие вопросы широко представлены в литературе, включая и учебную. Несколько сложнее обстоит ситуация в случае многочастотных колебаний.

Здесь могут быть полярные точки зрения. Например, можно считать, что не следует специально выделять эти задачи в отдельный класс, поскольку квазипериодические режимы испытывают только простейшие перестройки, которые сменяются возникновением хаоса (сценарий Рюэля и Такенса). Или, наоборот, считать, что динамика этих систем качественно близка к периодической и поэтому для ее анализа вполне подойдет несложная модификация теории и методов синхронизации регулярных колебаний. По нашему мнению, это все же целое самостоятельное поле для исследования, которое формирует свой, характерный круг задач, подходов, методов и результатов. В этом контексте и ведется дальнейшее изложение.

Хотелось бы отметить несколько работ, которые сыграли определенную роль в мотивации предпринятого исследования. Одной из наиболее существенных в этом плане можно назвать работу В.С. Анищенко, С.В. Астахова и Т.Е. Вадивасовой 2009 года [14]. В этой работе была выявлена картина, обобщающая представление о языке Арнольда, на задачу о воздействии внешнего сигнала на два диссипативно связанных фазовых осциллятора<sup>1</sup>. Была выбрана ситуация, когда в автономном режиме наблюдается захват осцилляторов, а внешний сигнал возбуждает первый из них. Было дано описание физических механизмов синхронизации, когда относительный захват осцилляторов с ростом амплитуды сигнала разрушается с возникновением трехчастотных колебаний, которые, в свою очередь, переходят в захват первого осциллятора. При приближении частоты сигнала к частоте осцилляторов становится возможной также их полная синхронизация внешней силой, когда оба осциллятора одновременно захвачены сигналом. Эта же картина наблюдалась и в радиофизическом эксперименте [15]. Как и всякая «прорывная» работа, она вызвала много новых интересных вопросов: какая картина будет в случае режима биений автономных осцилляторов? Что сохранится, а что модифицируется при отказе от фазового приближения и переходе к исходной системе? Что будет в случае реактивной (консервативной) связи? Что будет при увеличении числа осцилляторов? И так далее. Причем при формировании соответствующей исследовательской программы стало ясно, что задачи о взаимной и вынужденной синхронизации в случае многочастотных колебаний, в определенной мере, отличаются, и что изложение получается более логичным, если начинать с задач о взаимной синхронизации в цепочках с возрастающим числом элементов.

---

<sup>1</sup> Укажем и последующие за [14] работы В.С. Анищенко с соавторами [15-17], посвященные синхронизации резонансного предельного цикла на торе.

Одной из наиболее цитируемых работ, связанной с данной проблематикой, является работа С. Баесенса, Дж. Гукенхеймера, С. Кима, Р. Мак-Кая [18]<sup>2</sup>, опубликованная в 1991 году. В ней исследуется простейшая дискретная фазовая модель трех осцилляторов, задающая отображение на торе. Это очень объемное и фундаментальное исследование. Авторы выявляют тонкую структуру плоскости параметров, в частности, обсуждают бифуркационные портреты точных резонансов, находят множество нелокальных бифуркаций инвариантных кривых, отвечающих за квазипериодические бифуркации, указывают точки коразмерности два, играющие важную роль в общей картине, и т.д. Однако в этой, фактически, математической работе выбрана простейшая, но формальная модель, которая не подкреплена физическими аргументами. В то же время аспект физической мотивации для случая нескольких осцилляторов оказывается очень важным. В модели [18], например, возникает неудачная ситуация, когда нет устойчивой неподвижной точки, отвечающей за основной резонанс с соотношением частот осцилляторов 1:1:1. Еще один момент – отсутствие обсуждения влияния типа связи на картину режимов<sup>3</sup>. В последующем, в ряде более физически обоснованных работ рассматривались другие модели, для которых эти недостатки отчасти устранены. Например, в работе 1998 года [21], исходя из лазерных уравнений, были получены фазовые уравнения для двух возбуждаемых единой силой осцилляторов. При этом связь между осцилляторами была не вполне традиционной для радиофизики – коэффициент «диссипативной» связи имел отрицательные значения. Такая модель уже имеет основной резонанс. Его бифуркационное устройство обсуждалось в последующей работе А. Хибника и Дж. Гукенхеймера 2000 года [22]<sup>4</sup>. Однако в целом работ на эту тему было немного, и общая картина не была сформирована. В частности, фактически наиболее обсуждаемым остался случай только трех осцилляторов.

Мы не ставим целью сделать здесь полный обзор работ по многочастотным колебаниям (некоторые ссылки будут даны по ходу изложения), однако, стоит упомянуть работу П. Линсея, А. Камминга [23], в которой дана экспериментальная двухпараметрическая картина регулярных, двух- и трехчастотных квазипериодических режимов для системы из трех

---

<sup>2</sup> Отметим и еще одну аналогичную работу тех же авторов [19].

<sup>3</sup> При увеличении числа осцилляторов, начиная уже со случая трех, не удастся построить столь универсальную дискретную модель, как синус-отображение окружности для двух связанных осцилляторов. Обсуждение некоторых типов дискретных моделей и их сравнительное описание можно найти в [20].

<sup>4</sup> По сообщению Дж. Гукенхеймера, она, фактически не была опубликована в полном виде и ее можно найти в интернете без иллюстраций.

радиоэлектронных автоколебательных элементов. Хотя она посвящена конкретной системе, но она выявляет и важные моменты общей универсальной картины. Интересна также работа П. Баттелино [24], в которой изучались реактивно связанные осцилляторы Ван-дер-Поля в стиле компьютерного моделирования. Результаты определения типа режима были представлены в виде двумерной таблицы в зависимости от величины связи и частотной расстройки. Проблема синхронизации резонансного предельного цикла на торе в системе с реактивной связью обсуждалась в работах В.С. Анищенко с соавторами [16,17]. Радиоэлектронный эксперимент с тремя осцилляторами, нацеленный на проверку некоторых результатов [18], описан в работе П. Ашвина с соавторами [25]. Отметим также работы Р. Ренда, П. Холмса [26] и М. Иванченко, Г. Осипова, В. Шалфеева, Ю. Куртса [27]. Хотя они посвящены случаю только двух осцилляторов, они являются важными для понимания возможности и различий двух типов связи осцилляторов: *диссипативной* и *реактивной* (или, по терминологии [27], консервативной). При увеличении числа осцилляторов эти отличия становятся еще более существенными [28-29].

При обсуждении общей картины оказывается полезным представление о *широкополосной синхронизации*. Так можно назвать режимы, которые возможны в неидентичных по параметрам отрицательного трения осцилляторах. Они возникают в широкой полосе частот, и характеризуется доминированием одного осциллятора над другим. На это было указано как в [27], так и в работах [30,31]<sup>5</sup>. Бифуркационный анализ этой ситуации был дан в [32,33]. Понимание характерных особенностей устройства пространства параметров для режимов такого типа оказывается очень полезным при анализе случаев трех и более осцилляторов.

Для многочастотных режимов становятся важными бифуркации не регулярных, а квазипериодических аттракторов – инвариантных торов. Вслед за [34-38] будем называть их *квазипериодическими бифуркациями*. Некоторые простейшие примеры и их характерные признаки представлены в обзорной работе Х. Броера, С. Симо, Р. Витоло [38], см. также другие работы этих авторов. Однако, как общая теория таких бифуркаций, так и алгоритмы их поиска в конкретных системах еще весьма далеки от завершения<sup>6</sup>. Отметим, что в работах тех же авторов используется удачный, на наш взгляд, термин *резонансная*

---

<sup>5</sup> Соответствующий термин введен в [30,31].

<sup>6</sup> В фазовом приближении ситуация существенно упрощается: вместо бифуркаций торов достаточно отследить бифуркации инвариантных кривых, причем последние, фактически, аналогичны бифуркациям предельных циклов в силу  $2\pi$ -периодичности фаз.

*паутина Арнольда* для возникающей картины квазипериодичности разной размерности на плоскости частотных параметров [34].

В некотором смысле отдельный класс образуют *автономные* системы с квазипериодической динамикой (*генераторы квазипериодических колебаний*) [39-43,103]. Они заслуживают самостоятельного рассмотрения и обсуждения. В последнее время ряд существенных работ в этом направлении был выполнен В.С. Анищенко, С.М. Николаевым и Ю. Куртсом. Кроме того, в работах В.Д. Шалфеева и В.В. Матросова с соавторами развивается анализ фазовых систем в контексте систем с автоматической подстройкой частоты, см., например, [44]. Некоторые интересные результаты для простейших систем в виде сетей из небольшого числа элементов получены Ю. Майстренко с соавторами [45-48].

Следует отметить, конечно, и монографии, посвященные общим вопросам теории синхронизации: П.С.Ланды [2], А. Пиковского, М. Розенблюма, Ю. Куртса [1], В.С. Анищенко, В.В. Астахова, Т.Е. Вадивасовой [5], А. Баланова, Н. Янсон [6] и другие.

Подчеркнем, что мы будем рассматривать *низкоразмерные ансамбли* автоколебательных элементов (три-четыре-пять осцилляторов). Именно в этом случае проясняется картина *поэтапного* возникновения квазипериодичности все более высокой размерности. Обсуждение систем с существенно большим числом элементов и сред можно найти, например, в уже упомянутой монографии [1] и книгах Г.В. Осипова [49,50].

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, отметим два момента, которые необходимо иметь в виду. Во-первых, изложение будет отвечать принятому в физике уровню мотивации использования тех или иных моделей, а также методов и уровня строгости изложения.

Второй момент состоит в следующем. По нашему мнению, сложность и некоторые существенные особенности задачи синхронизации квазипериодических колебаний требуют определенной *смены инструментария исследования*. Действительно, в теории синхронизации периодических режимов традиционным и основным методом является бифуркационный анализ. С его помощью можно определить границы областей синхронизации и установить их внутреннее устройство. Аналитическое исследование в этом случае удается только в простейших случаях, поэтому главным становится численный бифуркационный анализ. Соответствующие алгоритмы и комплексы программ хорошо отработаны, вполне доступны и широко используются.

Для задач многочастотной динамики при анализе устройства областей полной (глобальной) синхронизации всех осцилляторов бифуркационный

анализ также эффективен. Однако при обсуждении квазипериодических режимов приходится иметь дело уже с бифуркациями инвариантных торов. Алгоритмы и численные программы для анализа квазипериодических бифуркаций появились сравнительно недавно [38]. При этом они, во-первых, очень громоздки и требуют больших вычислений. Во-вторых, они разработаны пока только для нескольких самых простых бифуркаций такого типа. Более того, говорить о создании достаточно полной и самосогласованной теории квазипериодических бифуркаций, в той мере, в какой она разработана для периодических движений, пока не приходится.

К счастью, в нелинейной динамике имеется еще один мощный инструмент исследования динамических систем, который в данном случае может стать основным. Это метод анализа *ляпуновских характеристических показателей* [51-54]. Действительно, вычисляя спектр таких показателей и находя число нулевых, можно определить тип аттрактора: периодический режим, двумерный тор, трехмерный тор и т.д. В рамках обсуждаемых здесь задач важным становится использование этого метода для *двухпараметрического анализа*. С этой целью можно строить *карты ляпуновских показателей*. Это дает возможность выявлять картину многочастотных режимов, которая приходит на смену картине языков Арнольда, характерной для периодических режимов. Конечно, такой метод является численным и, в определенном смысле, представляет собой своего рода вычислительный эксперимент. Однако для исследования квазипериодических явлений разной размерности он сейчас, пожалуй, не имеет альтернативы<sup>7</sup>. Как мы увидим далее (см. также [38]) даже для идентификации квазипериодических бифуркаций важную роль играют именно ляпуновские показатели. Отметим, что, пожалуй, лишь сравнительно недавно скорости компьютеров стали приемлемыми для многопараметрического ляпуновского анализа потоковых систем с многочастотной квазипериодичностью. Это отчасти объясняет, почему в 70-е-80-е годы, когда активно изучались задачи о взаимодействии автоколебательных систем, соответствующие результаты не могли быть получены в полном объеме.

Еще один момент состоит в том, что мы старались сформировать картину, полезную в учебных целях, в частности, в рамках учебных курсов на Факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета.

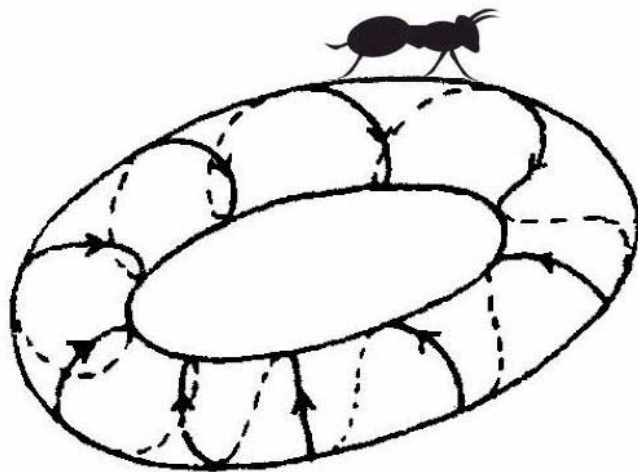
---

<sup>7</sup> Впрочем, и традиционный бифуркационный анализ для сложных систем очень часто является численным и не реализуемым без достаточно мощного компьютера.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 11-02-91334-ННИО, 12-02-00342 и 12-02-31465. Результаты получены в лаборатории теоретической нелинейной динамики Саратовского филиала Института радиотехники и электронике им. В.А. Котельникова РАН, на базовой кафедре динамических систем Саратовского госуниверситета и во время научных визитов в университет Потсдама.

Часть представленных здесь результатов опубликована в работах авторов [55-65, 29, 20, 42,43].

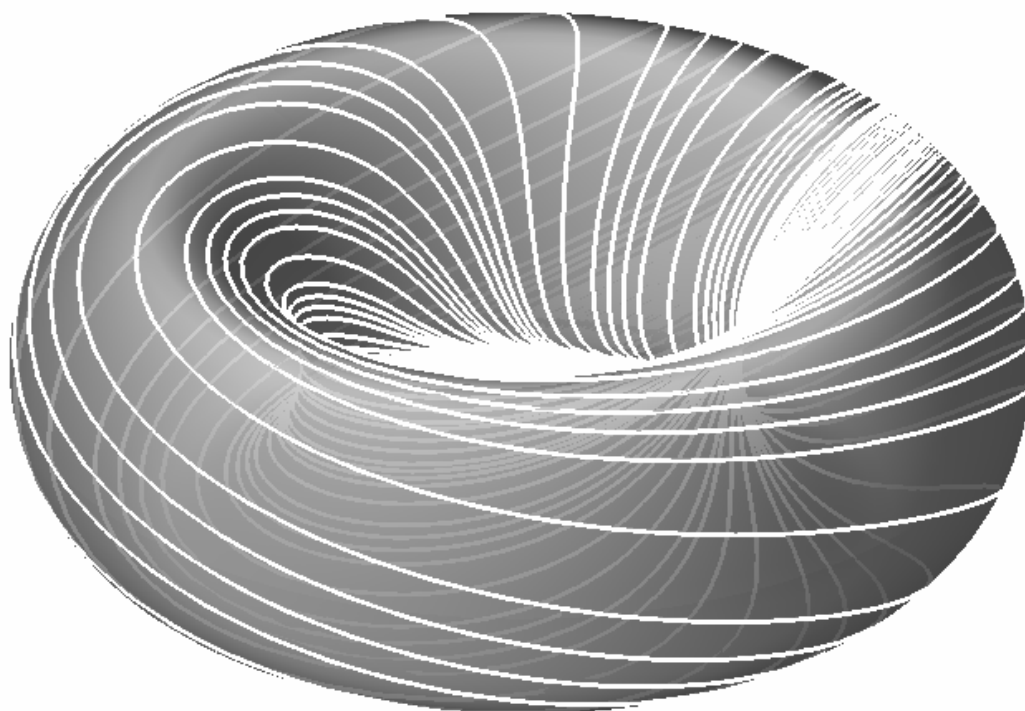
Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову за полезное концептуальное обсуждение и за предисловие к настоящей книге. Мы благодарим Д.И. Трубецкова за внимание к работе. Мы благодарны В.С. Анищенко за интересные вопросы и комментарии, Т.Е. Вадивасовой, В.В. Астахову за обсуждение и отзывы на некоторые результаты. Мы благодарны А.С. Пиковскому за возможность визитов в университет Потсдама и обсуждение вопросов синхронизации, а также за возможность самого раннего знакомства с монографией [1]. Мы также благодарны Ю. Куртсу и Э. Мозекилде за возможность визитов в Потсдамский институт изучения изменений климата и Датский технический университет. Мы благодарны Дж. Гукенхеймеру, предоставившему полный текст работы [22]. Мы благодарны В.В. Матросову за интересные обсуждения и В.Д. Шалфееву за многолетние внимание и помощь. Мы благодарны Г.В. Осипову за возможность знакомства с некоторыми материалами и внимание. Мы благодарны всем коллегам за обсуждение результатов на различных конференциях, в частности, в Нижнем Новгороде. Мы благодарны Е.П. Селезневу, Ю.П. Емельяновой, Н.Ю. Чернышову и Ю.В. Седовой за помощь.





# **Введение**

## **Квазипериодические колебания и их простейшие свойства**



## 1. Квазипериодические колебания. Определения и простейшие характеристики

Квазипериодическими называются колебания, которые характеризуются наличием нескольких (двух или более) *несоизмеримых* частот  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots$ . Несоизмеримость означает, что любые две частоты находятся в *иррациональном* соотношении, т.е. никакое отношение двух любых частот нельзя представить в виде отношения двух целых чисел  $p$  и  $q$ :

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} \neq \frac{p}{q}. \quad (1)$$

Существенным свойством квазипериодических режимов является *возвращаемость* фазовых траекторий. Оно состоит в том, что если взять некоторую стартовую точку в фазовом пространстве, то по истечении некоторого времени траектория пройдет сколь угодно близко от нее. При этом, вообще говоря, чем более точный возврат, тем большее время для этого потребуется. Причина такого поведения глубоко связана с природой иррациональных чисел. Действительно, всякое иррациональное число может быть сколь угодно точно аппроксимировано рациональным числом  $\frac{p}{q}$ . (Могут только понадобиться очень большие целые  $p$  и  $q$ .) При такой аппроксимации соответствующий колебательный режим превращается в периодический, и тогда наблюдается точный возврат траекторий<sup>8</sup>.

Самая простая классификация квазипериодических колебаний может быть основана на числе существенных частот. Так можно выделить *двухчастотные*, *трехчастотные* и т.д. колебания.

Типичная реализация двухчастотных квазипериодических колебаний  $x(t)$  представлена на рис.1а. В случае близости частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  они носят характер *биений*. При этом наблюдаются быстрые колебания со средней частотой и медленные изменения амплитуды, определяемые разностью частот.

В фазовом пространстве квазипериодическим колебаниям отвечает *аттрактор* (притягивающий объект)<sup>9</sup> в форме *инвариантного тора*, рис.1б.

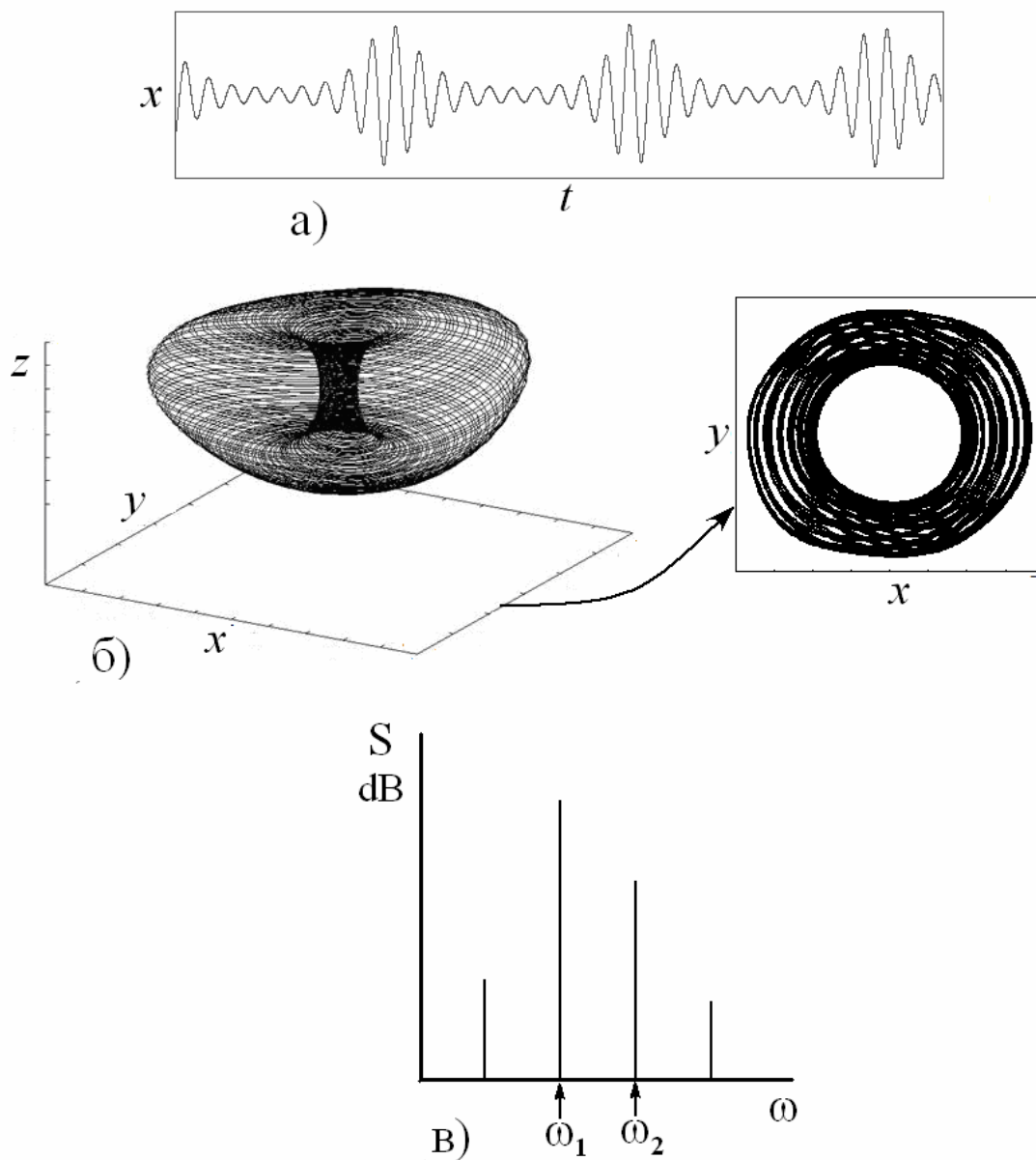
---

<sup>8</sup> Отметим в связи с этим принципиальное отличие квазипериодических режимов от хаоса, для которого характерно «разбегание» траекторий: две близкие точки расходятся с течением времени.

<sup>9</sup> В случае *диссипативных* систем. Для *консервативных* систем также возможны квазипериодические колебания, отвечающие инвариантным торами, но аттракторов в фазовом пространстве нет. Далее рассматриваются только диссипативные системы.

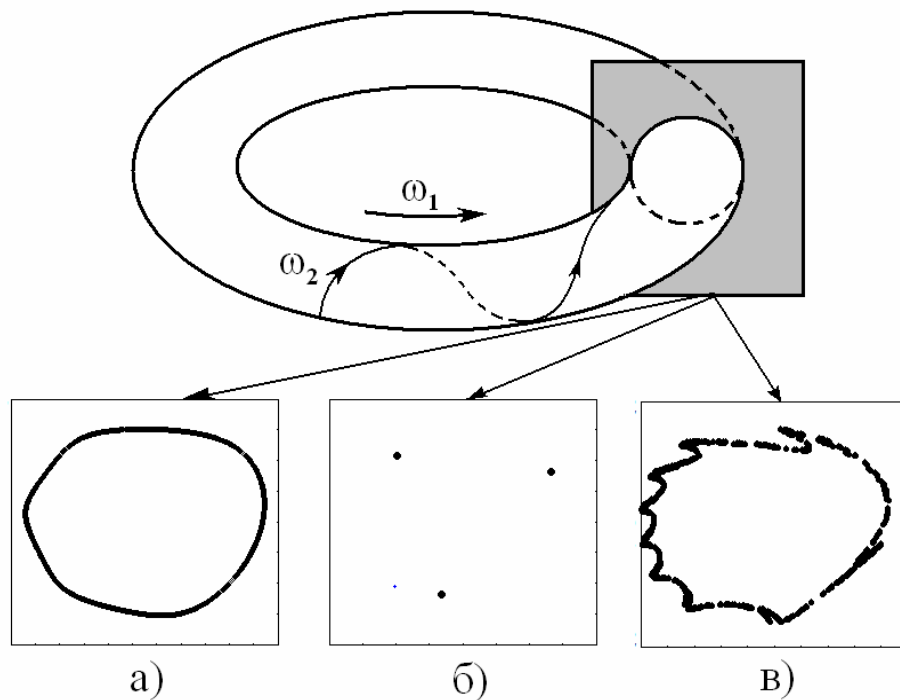
Фазовые траектории лежат на поверхности тора, всюду плотно ее покрывая. В этом случае говорят, что тор *эргодический*. На рис.2 показан двумерный тор, вложенный в трехмерное фазовое пространство. Он отвечает двухчастотному квазипериодическому режиму. Одна частота  $\omega_1$  соответствует движению изображающей точки по меридиану тора, а вторая частота  $\omega_2$  – по параллели.

Еще одной важной (особенно в эксперименте) характеристикой квазипериодических колебаний является *Фурье-спектр*. На рис.1в представлен характерный спектр квазипериодических колебаний, содержащий две основные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и их *комбинационные составляющие*  $n\omega_1 + m\omega_2$ , где  $n$  и  $m$  – целые числа.



**Рис.1.** Основные иллюстрации режима двухчастотной квазипериодичности: а) типичная реализация, демонстрирующая биения; б) фазовый портрет в виде тора и его двумерная проекция; в) Фурье спектр,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – основные спектральные составляющие.

Удобным представлением квазипериодических режимов является *сечение Пуанкаре*. Его построение иллюстрирует рис.2. На рис.2а показано, как фазовая траектория, лежащая на поверхности тора, пересекает секущую поверхность в различных точках, множество которых образует *инвариантную кривую*, топологически эквивалентную окружности. Иногда, особенно в англоязычной литературе, такую кривую также называют тором, что, вообще говоря, не вполне корректно.



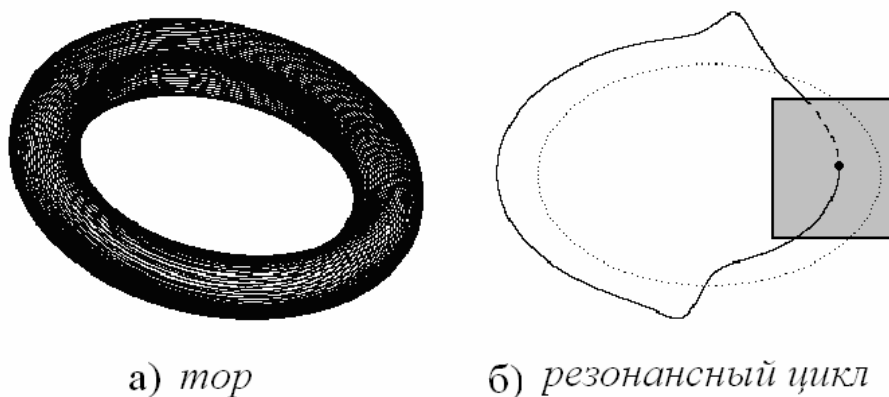
**Рис.2.** Качественная иллюстрация построения сечения Пуанкаре и различные типы сечений: а) инвариантная кривая; б) резонансный цикл периода 3; в) разрушенная инвариантная кривая.

Динамика трехмерной динамической системы в сечении Пуанкаре сводится к некоторому *двумерному отображению*. В результате свойства трехмерных потоков с квазипериодическим движением тесно связаны со свойствами двумерных отображений.

С квазипериодическими режимами и инвариантными торами ассоциируются некоторые характерные *бифуркации* (перестройки) наблюдаемых режимов. Обсудим их поподробнее. Пусть сначала в фазовом пространстве имеется предельный цикл, отвечающий простым периодическим автоколебаниям. В сечении Пуанкаре ему отвечает единственная точка пересечения траектории с секущей поверхностью. При изменении параметров от этого предельного цикла может отделиться мягким образом инвариантный тор. Соответственно, в сечении Пуанкаре неподвижная точка теряет

устойчивость, и от нее отделяется устойчивая инвариантная кривая. Такая перестройка отвечает *бифуркации Неймарка-Сакера*.

В свою очередь, при изменении параметров аттрактор в виде инвариантного тора тоже может испытывать определенные метаморфозы. Так, если отношение наблюдаемых частот  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  приближается к какому-то рациональному числу, то может возникнуть эффект *захвата частот*. В этом случае при некотором значении параметра отношение частот становится рациональным и уже не меняется в определенном интервале изменения параметра (или в некоторой области, если параметров два и больше). На поверхности тора при этом возникает устойчивый *резонансный предельный цикл*, как показано на рис.3. В сечении Пуанкаре ему отвечает периодический *цикл*, отвечающий портрету в виде набора точек. Например, иллюстрация на рис.2б отвечает резонансному циклу периода три. На рис.3б показан самый простой резонансный случай, отвечающий неподвижной точке в сечении Пуанкаре.



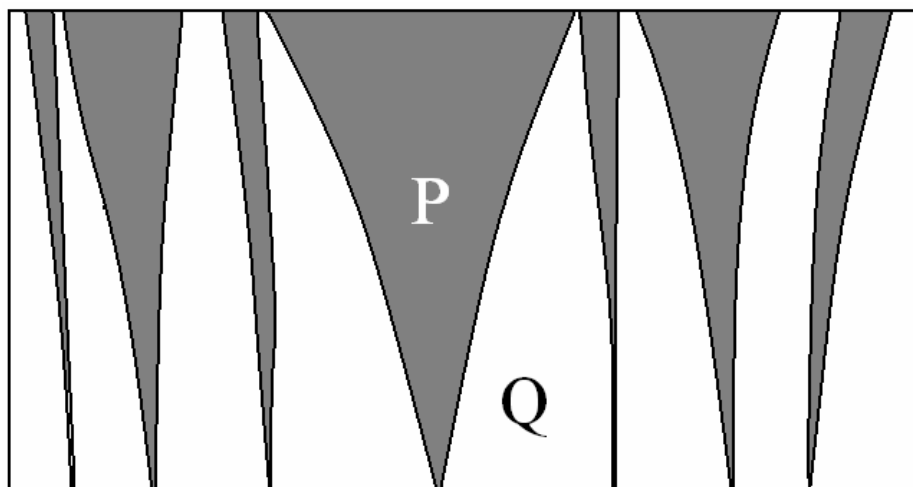
а) тор

б) резонансный цикл

**Рис.3.** Двухчастотный тор и простейший резонансный предельный цикл, возникший на его поверхности. Серым цветом показано сечение Пуанкаре, которое демонстрирует, что в данном случае предельному циклу отвечает неподвижная точка и ему можно приписать период 1.

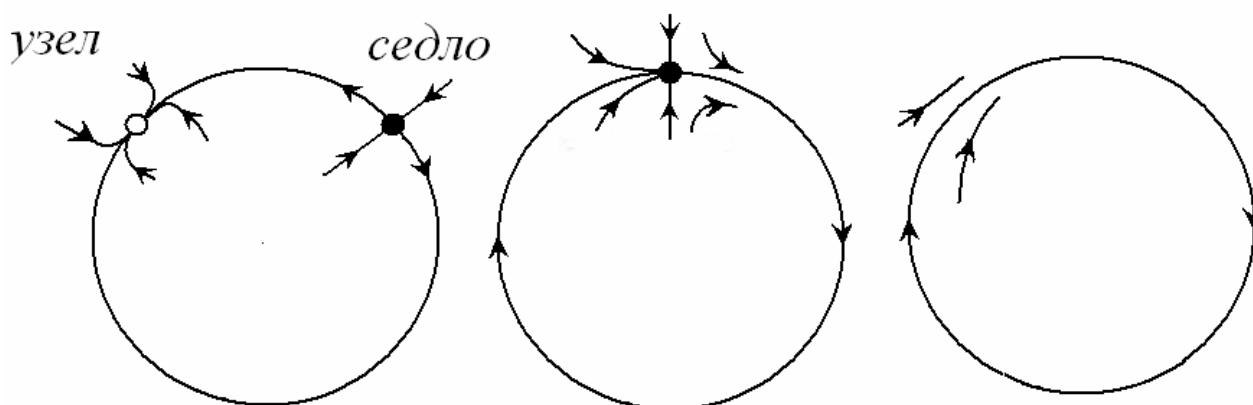
Поскольку рациональных чисел «много», то режимы захвата могут возникать в разных областях пространства параметров и отвечать разным факторам  $\frac{p}{q}$ . В результате на плоскости параметров возникает характерная картина *языков Арнольда*, схематически показанная на рис.4. Внутри языков реализуются периодические режимы  $P$ , а вне – режимы квазипериодических колебаний  $Q$ . Появление структуры языков Арнольда является характерным «атрибутом» картины квазипериодических колебаний, что, в определенной

мере, может быть использовано, как предварительный диагностический критерий наличия таких колебаний.



**Рис.4.** Качественная картина языков Арнольда и областей квазипериодических режимов  $Q$  на плоскости параметров.

С позиций теории бифуркаций границы языков Арнольда образованы линиями *седло-узловых бифуркаций* соответствующих резонансных предельных циклов<sup>10</sup>. При выходе из языка в область квазипериодических режимов устойчивый и неустойчивый резонансные циклы сливаются, а из их общего многообразия возникает инвариантный тор. Качественно картина такой бифуркации в сечении Пуанкаре для простейшего резонансного цикла, которому отвечает устойчивая неподвижная точка, дана на рис.5.



**Рис.5.** Картина седло-узловой бифуркации в сечении Пуанкаре, приводящая к возникновению притягивающей инвариантной кривой из замкнутого многообразия седла и устойчивого узла.

При движении вдоль границ языка по плоскости параметров (увеличение параметра, отложенного по оси ординат на рис.4) квазипериодические режимы

<sup>10</sup> Точнее говоря, это справедливо вблизи оснований языков. Достаточно «высоко» на рис.4 картина бифуркаций может усложняться.

могут сменяться хаотическими. В этом случае инвариантная кривая в сечении Пуанкаре может *терять гладкость и разрушаться*, что иллюстрирует рис.2в. В результате из квазипериодического режима возникает *хаос*.

Отметим, что инвариантные торы могут быть как *устойчивыми*, так и *неустойчивыми*. В первом случае траектории приближаются к тору, «наматываясь» на него. Во втором они уходят от тора. Соответственно, в сечении Пуанкаре возможны устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые. Неустойчивый тор легко визуализировать, поскольку, если обратить время в исходных уравнениях, то такой тор станет устойчивым. Поэтому все рассуждения о возможности резонансов и резонансных предельных циклов на поверхности тора относятся и к неустойчивому тору.

## **2. Представление о многочастотных квазипериодических колебаниях**

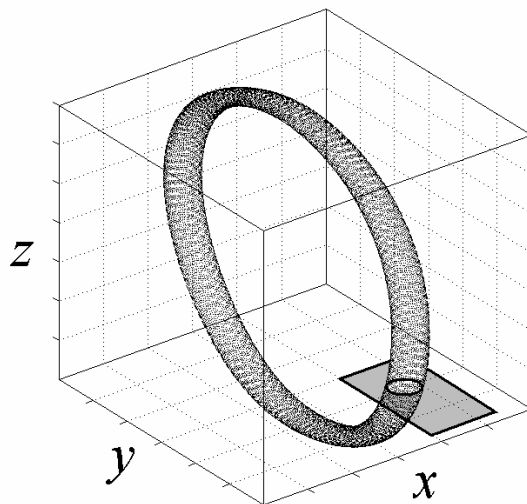
Мы обсудили кратко случай двух частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , т.е. случай двухчастотной квазипериодичности. Однако базовых частот может быть три, четыре и более:  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ . Для этого размерность исходной динамической системы должна быть не менее четырех, пяти и т.д. В этом случае говорят о *многочастотной квазипериодичности*.

Геометрическим образом многочастотной квазипериодичности в фазовом пространстве является *многомерный инвариантный тор*. Так трехчастотному режиму отвечает *трехмерный тор*. Спектр такого режима будет содержать уже три несоизмеримых частоты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и их комбинационные составляющие  $n\omega_1 + m\omega_2 + l\omega_3$ .

Если говорить о сечении Пуанкаре, то его размерность при переходе к многомерным торам тоже повышается. Так, если секущая для двухчастотного тора может быть выбрана в виде плоскости, то для трехчастотного – уже в виде трехмерной «гиперповерхности». В этом случае динамика в сечении Пуанкаре будет отвечать *трехмерному отображению*. Образом трехчастотного тора в таком сечении будет набор точек, вложенный в трехмерное пространство, как показано на рис.6. Для четырехчастотного режима уже необходимо вводить *четырёхмерное отображение* и т.д.

Визуально портреты многочастотных торов на «плоскости» рисунка трудно отличить друг от друга и, соответственно оценить их размерность. Поэтому для их визуальной диагностики можно использовать метод *двойного сечения Пуанкаре*. Обсудим его на примере трехчастотного тора. Сначала выполняется

традиционное, «первичное» сечение. Тогда возникает аттрактор, состоящий из дискретного набора точек, которые располагаются на поверхности тора, рис.6. Затем ищется пересечение этой фигуры с некоторой площадкой – двойным сечением Пуанкаре. В результате трехчастотный тор в двойном сечении Пуанкаре будет представлен замкнутой инвариантной кривой.



**Рис.6.** Трехчастотный тор в «первичном» сечении Пуанкаре и двойном сечении Пуанкаре, показанном серым цветом.

Некоторое неудобство при построении двойного сечения Пуанкаре состоит в том, что на рис.6 нет непрерывных траекторий, а имеется дискретный набор точек. Поэтому необходима численная процедура, отслеживающая ситуацию, когда точки «почти» попадают на поверхность вторичного сечения, и, соответственно, требуется дополнительное время для расчетов.

По аналогии можно строить *тройное, четверное сечение Пуанкаре* и т.д., что позволяет диагностировать четырех-, пятичастотные и т.д. торы.

Многомерные торы также могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Кроме того, возможны *седловые торы*, характеризующиеся как устойчивым, так и неустойчивым многообразиями. Седловые торы играют важную роль, в частности, участвуют в характерных квазипериодических бифуркациях, хотя их визуализация представляет определенную проблему.

В многомерных системах возникает возможность *резонансных торов* разной размерности. Подобно тому, как на поверхности двумерного тора может возникнуть резонансный предельный цикл, на поверхности (точнее – гиперповерхности) трехчастотного тора может возникнуть резонансный двухчастотный тор, на поверхности четырехчастотного тора – резонансный трехчастотный тор и т.д.

Как мы отмечали, один из возможных способов различения аттракторов в виде торов разной размерности состоит в построении кратного сечения



Пуанкаре. Однако он требует визуального анализа в каждой точке пространства параметров. Более удобным для данного круга задач является метод построения *спектра ляпуновских характеристических показателей*. Как известно, такой спектр характеризует свойство «притяжения» (или, наоборот, «разбегания») соседних траекторий. Полное число ляпуновских показателей равно размерности фазового пространства, а число нулевых позволяет классифицировать квазипериодические колебания. А именно, двухчастотный тор будет иметь один нулевой показатель, трехчастотный – два, четырехчастотный – три и т.д. При этом один нулевой показатель, связанный с инвариантностью относительно сдвигов вдоль траектории, должен быть отброшен.

### 3. Квазипериодические бифуркации

Возможность резонансов для торов разной размерности существенно усложняет параметрическую картину, и на смену таковой для языков Арнольда на рис.3 приходит существенно более сложная. В этой новой картине важную роль играют *квазипериодические бифуркации*, т.е. бифуркации инвариантных торов. Теория квазипериодических бифуркаций в полном виде пока не построена. Положение осложняется и тем, что численный анализ таких бифуркаций достаточно сложен и трудоемок, и столь отработанных и удобных стандартных компьютерных программ, как в случае периодических режимов, пока нет. В то же время можно указать некоторые важные квазипериодические бифуркации коразмерности один, играющие существенную роль в общей картине [35-38]. Они возможны в системах, размерность которых не менее четырех, а, соответственно, сечения Пуанкаре – не менее трех<sup>11</sup>.

Первая и наиболее изученная бифуркация – это седло-узловая бифуркация инвариантных торов или *квазипериодическая седло-узловая бифуркация* (*quasiperiodic saddle-node bifurcation*). Мы будем обозначать ее *QSN*. Возможная эволюция портрета в трехмерном сечении Пуанкаре для такой бифуркации представлена на рис.7а-в. Соответствующие графики ляпуновских показателей приведены на рис.7г.

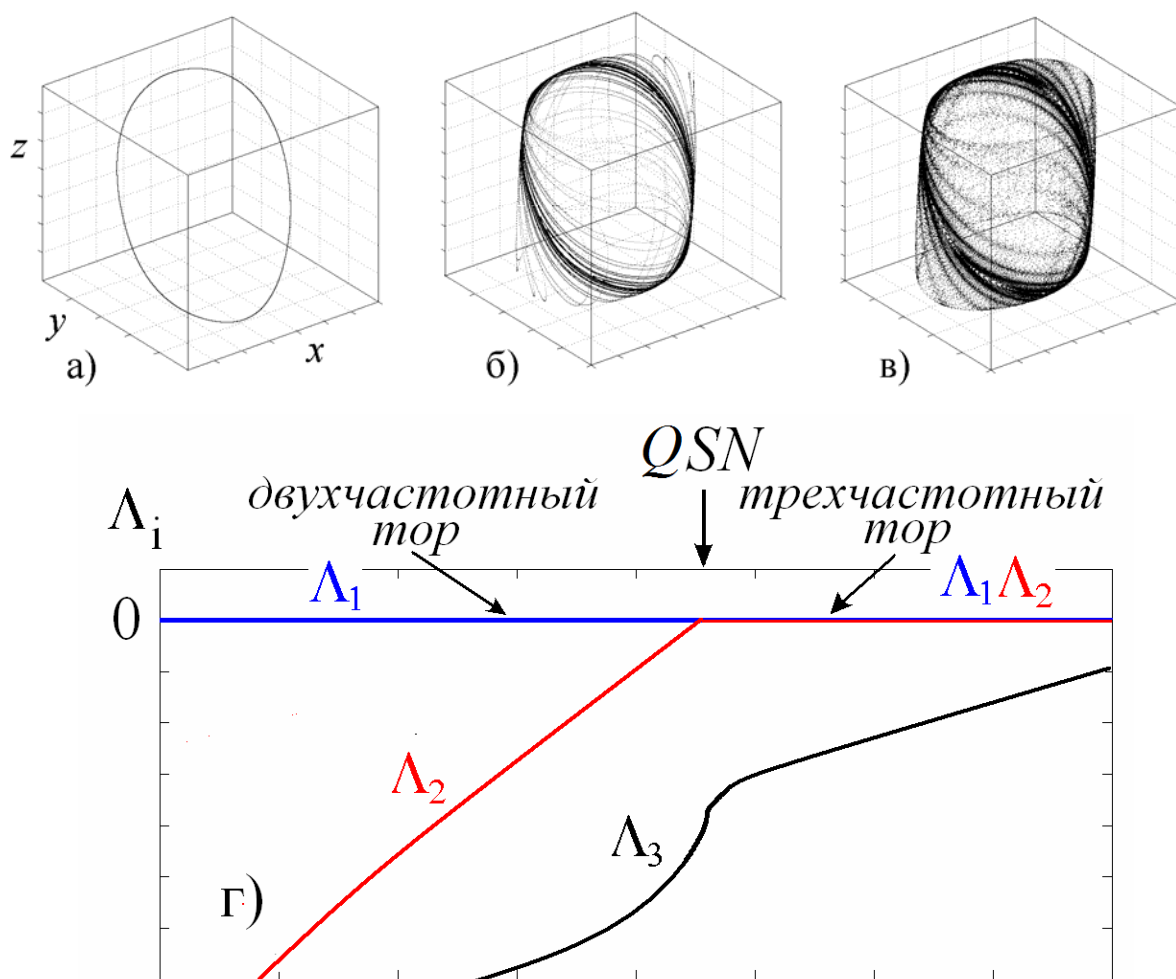
В случае такой бифуркации устойчивый и седловой торы сливаются и исчезают, а из их многообразий возникает притягивающий более высокоразмерный тор. В сечении Пуанкаре на рис.7а-в этому будет отвечать слияние устойчивой и седловой инвариантных кривых. После бифуркации

---

<sup>11</sup> В фазовом приближении этим перестройкам отвечают более простые бифуркации, и для них необходимая меньшая размерность, см. часть I.

изображающие точки «растекаются» по поверхности трехчастотного тора, рис.7в. Отметим, что седловая инвариантная кривая на рис.7 не показана в силу проблемы визуализации седловых торов<sup>12</sup>.

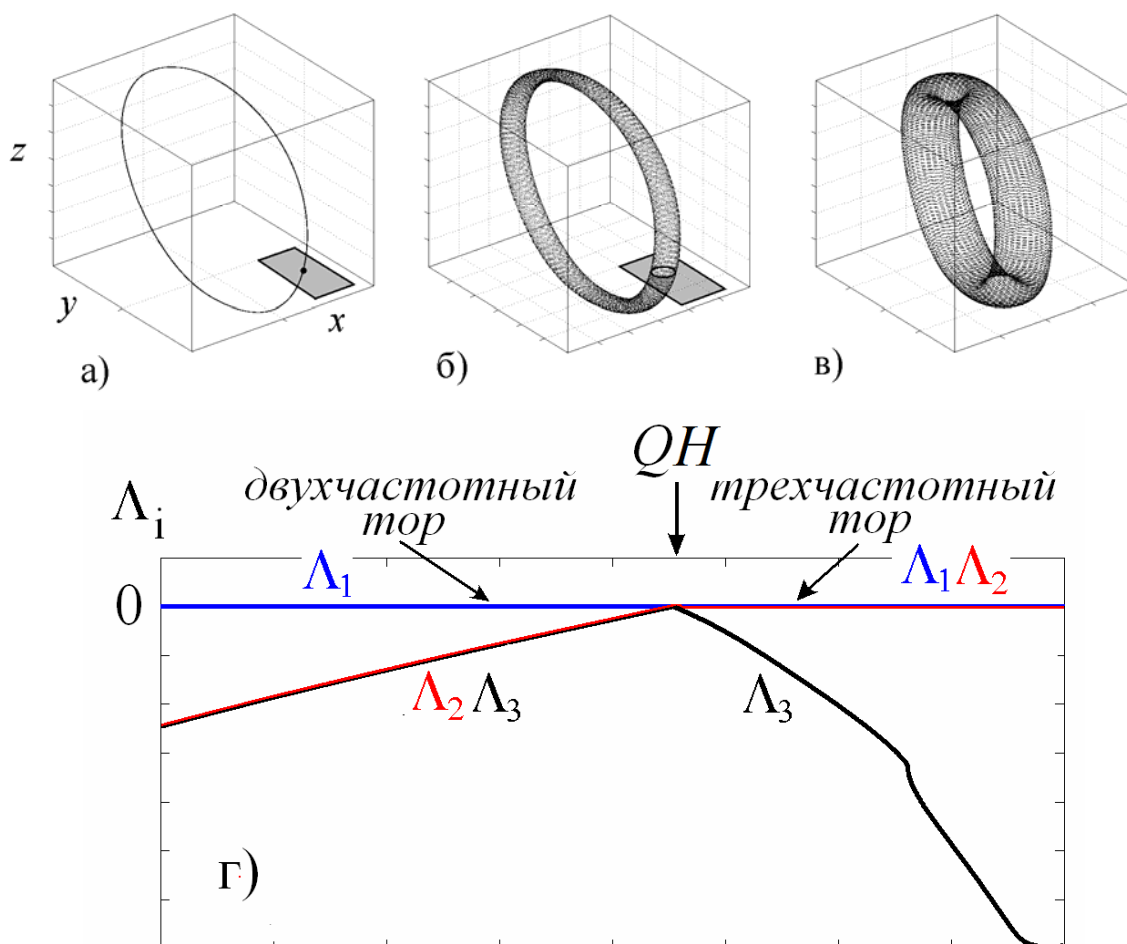
Обратимся теперь к графикам ляпуновских показателей. Можно видеть, что до бифуркации  $QSN$  первый показатель равен нулю  $\Lambda_1=0$ , а второй – отрицательный  $\Lambda_2 < 0$ . В точке бифуркации второй показатель обращается в ноль  $\Lambda_2=0$ , и остается нулевым за порогом бифуркации, отвечая за возникновение трехчастотного тора. Третий показатель всегда отрицательный и в картине бифуркации «не участвует».



**Рис.7.** Седло-узловая бифуркация торов  $QSN$ : а) инвариантная кривая, отвечающая двухчастотному тору в сечении Пуанкаре, б) момент бифуркации, в) трехчастотный тор в этом же сечении, г) характерные графики ляпуновских показателей.

<sup>12</sup> Устойчивый тор является аттрактором. Неустойчивый тор легко превратить в аттрактор, обратив время в исходных уравнениях. Однако *седловой* тор содержит неустойчивые многообразия, как в прямом, так и в обратном времени. На настоящий момент отсутствует простой численный алгоритм построения седловых торов.

Вторая типичная бифуркация состоит в том, что инвариантный тор теряет устойчивость, и от него мягким образом отделяется тор более высокой размерности. Нетрудно понять, что она представляет собой аналог бифуркации Неймарка-Сакера для торов. Поэтому она может быть названа *квазипериодической бифуркацией Неймарка-Сакера*<sup>13</sup>. Мы будем обозначать ее *QH*. В трехмерном сечении Пуанкаре бифуркация *QH* состоит в мягкой потере устойчивости инвариантной кривой, что иллюстрирует рис.8а-в.



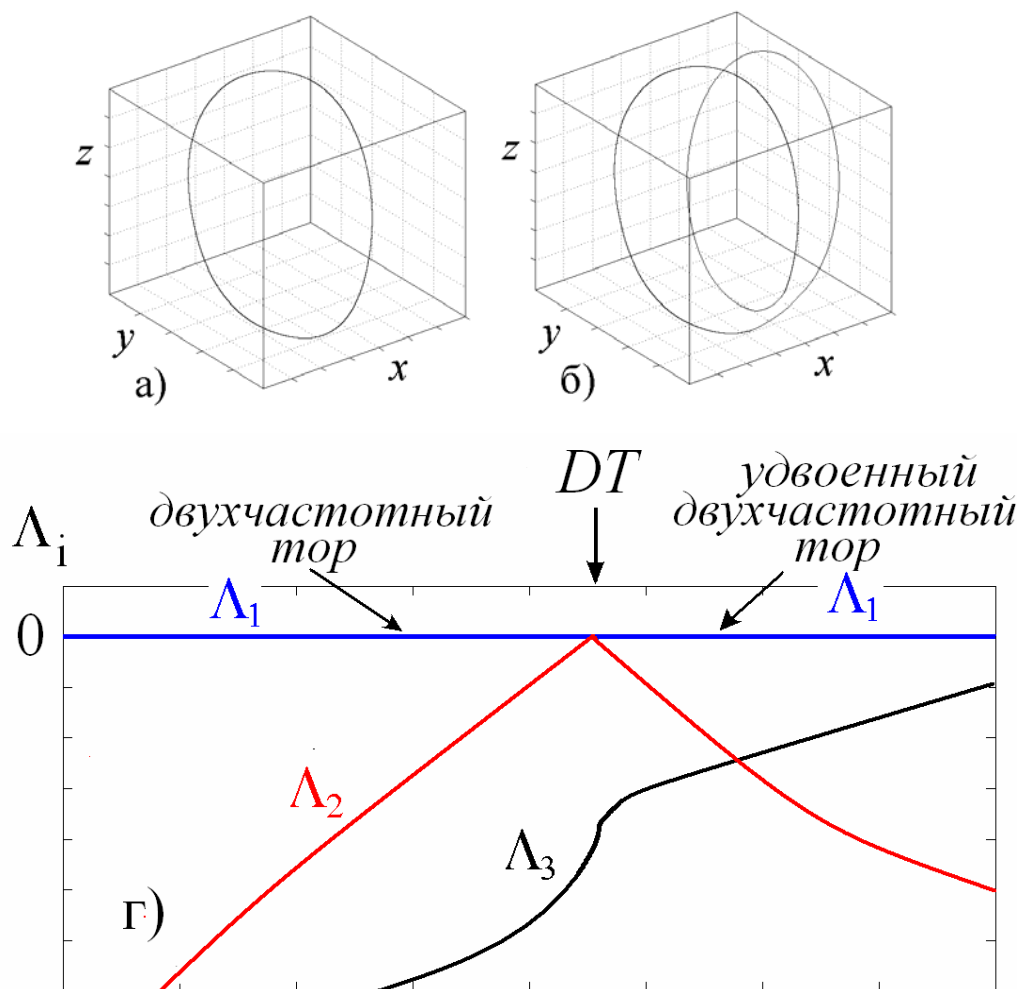
**Рис.8.** Квазипериодическая бифуркация Неймарка-Сакера *QH*: а) инвариантная кривая, отвечающая сечению Пуанкаре двумерного тора, также показано двойное сечение Пуанкаре; б-в) возникновение трехчастотного тора, г) характерные графики ляпуновских показателей.

Диагностировать квазипериодическую бифуркацию Неймарка-Сакера *QH* можно по поведению ляпуновских показателей, рис.8г. До бифуркации один показатель равен нулю,  $\Lambda_1 = 0$ , а два других отрицательны,  $\Lambda_2, \Lambda_3 < 0$ . При этом характерный признак рассматриваемой бифуркации состоит в равенстве этих

<sup>13</sup> В [38] ее называют квазипериодической бифуркацией Хопфа (*quasi-periodic Hopf bifurcation*). Однако предложенное выше название, по-нашему мнению, предпочтительнее, поскольку за рождение тора отвечает все же бифуркация Неймарка-Сакера. В то же время, в литературе иногда и рождение тора из предельного цикла и последующие бифуркации называют бифуркацией Хопфа, см., например, [4].

показателей до порога бифуркации:  $\Lambda_2 = \Lambda_3$ . Это условие аналогично требованию наличия комплексно-сопряженных мультипликаторов для обычной бифуркации Неймарка-Сакера и обеспечивает рождение инвариантного тора. За точкой бифуркации второй показатель обращается в ноль, и становится не равным третьему. Теперь  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$  и  $\Lambda_3 < 0$ . Отметим, что в точке бифуркации  $QH$  графики второго и третьего показателя имеют излом. Четвертый показатель (и другие, если есть) остаются отрицательными и в бифуркации не участвуют.

Отметим еще возможность *бифуркации удвоения тора DT*. В этом случае инвариантная кривая удваивается (визуально аналогично предельному циклу в случае бифуркации удвоения периода), как показано на рис.9а,б. При этом один ляпуновский показатель всегда нулевой, а второй – отрицательный. Непосредственно в точке бифуркации  $DT$  его график касается оси абсцисс, а затем с характерным изломом опять уходит в отрицательную область. Отметим, что возникший тор может «удвоиться» еще раз и т.д.



**Рис.9.** Бифуркация удвоения тора  $DT$ : а,б) инвариантная кривая, отвечающая сечению Пуанкаре, г) графики ляпуновских показателей, характерные для этой бифуркации.

## 4. Спектр ляпуновских показателей и метод ляпуновских карт

Анализ описанных бифуркаций, однако, не дает полную картину устройства пространства параметров, и, кроме того, в рамках достаточно строгих алгоритмов сложен и трудоемок даже для современных компьютеров. Поэтому необходимо искать альтернативные методы анализа устройства пространства параметров в системах с многомерными торами. В качестве такого удобно использовать *метод карт ляпуновских показателей*.

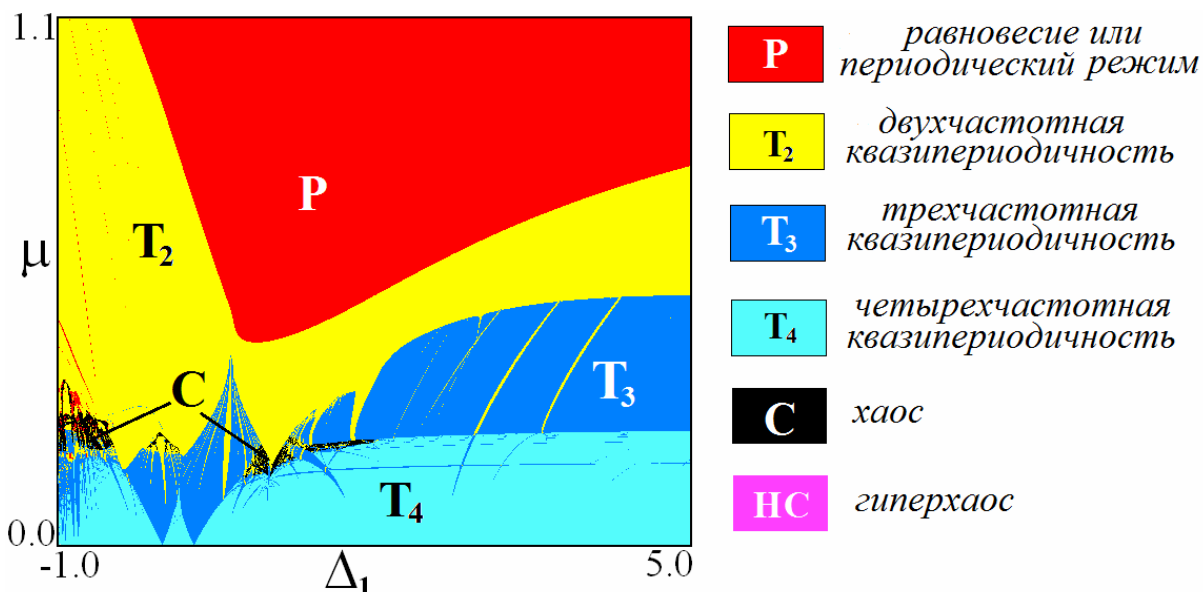
Этот метод алгоритмизируется следующим образом. Сначала выбирается точка на плоскости параметров. В этой точке вычисляется спектр ляпуновских показателей системы, и определяются положительные, нулевые и отрицательные показатели. После этого точка на плоскости параметров окрашивается в определенный цвет, в соответствии со структурой спектра показателей. (При этом один нулевой, связанный с существованием нетривиального аттрактора, должен быть отброшен.) Затем выполняется сканирование всей плоскости параметров в исследуемых диапазонах, и в каждой ее точке выполняется описанная процедура. В результате получается двухпараметрический «портрет» различных колебательных режимов.

Например, если существенных показателей три, то с помощью такого метода выявляются области:

- а)  $P$  – устойчивое состояние равновесия или периодический режим  $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$ ;
- б)  $T_2$  – режим двухчастотной квазипериодичности  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$ ;
- в)  $T_3$  – режим трехчастотной квазипериодичности  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0$ ;
- г)  $T_4$  – режим четырехчастотной квазипериодичности  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0$ ;
- д)  $C$  – хаотический режим  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$ ;
- е)  $HC$  – гиперхаос  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0, \Lambda_3 < 0$ .

Пример ляпуновской карты дан на рис.10 и там же расшифрована цветовая палитра, которую мы будем использовать и далее.

Отметим, что на ляпуновской карте вся область существования двухчастотных торов будет показана одним цветом. Однако эти торы, как и резонансные предельные циклы в классической картине, допускают определенную классификацию. Поэтому можно предложить еще один вариант метода карт режимов – построение *карт торов* – для которых цвет на плоскости параметров определяется типом резонансного двухчастотного тора (подробнее см. раздел 1.1.8).



**Рис.10.** Пример карты ляпуновских показателей, иллюстрирующей различные регулярные и нерегулярные режимы; справа – расшифровка цветовой палитры.

Область периодических режимов  $P$  на ляпуновской карте отвечает *полной* (или *глобальной*) синхронизации системы. С точки зрения динамики, полная синхронизация в простейшем случае отвечает предельному циклу и неподвижной точке в сечении Пуанкаре. Границы области полной синхронизации  $P$  для случая многочастотных систем оказываются достаточно сложно устроенными. Поэтому будем дополнять ляпуновский анализ также и классическим бифуркационным анализом регулярных режимов. Возможны и более сложные периодические режимы, для которых наблюдаются захваты с разным соотношением частот. Они фиксируются, как предельные циклы с большими периодами в сечении Пуанкаре<sup>14</sup>.

Границы областей квазипериодичности разной размерности на ляпуновской карте рис.10 отвечают квазипериодическим бифуркациям. Как мы отмечали, строгий анализ квазипериодических бифуркаций представляет собой пока не решенную задачу. Поэтому мы будем давать лишь некоторые отдельные иллюстрации, используя подходы раздела 3.

## 5. Ансамбли взаимодействующих осцилляторов.

### Уравнения Ландау-Стюарта и фазовые модели

Пока мы привели некоторые, достаточно общие соображения. Однако важно указать физически мотивированные классы задач, для которых они

<sup>14</sup> Поэтому ляпуновскую карту иногда целесообразно дополнять картой периодических режимов, для которой цвет отвечает периоду цикла в сечении Пуанкаре, см. [54].

применимы и существенны. Такими системами, в первую очередь, являются *ансамбли взаимодействующих автоколебательных элементов* (автогенераторов). Применимость концепций многочастотного анализа для таких систем вытекает из физических соображений. Действительно, в отсутствие связи между автогенераторами каждый из них характеризуется своей собственной частотой. Поэтому включение связи приводит к картине многочастотных режимов, которая может быть очень сложной, в зависимости от того какие элементы взаимодействуют друг с другом, и каков характер этого взаимодействия. В свою очередь, эта картина будет как-то эволюционировать при вариации величины связи и собственных частот осцилляторов.

Рассмотрение подобных систем может проводиться на нескольких «уровнях» модельных представлений. Например, высокой степенью общности и универсальности характеризуется система взаимодействующих осцилляторов Ван-дер-Поля. Причина состоит в том, что в этом случае отдельный элемент ансамбля является базовой моделью теории колебаний и нелинейной динамики, демонстрирующей *бифуркацию Андронова-Хопфа*.

Если отдельные осцилляторы слабо возбуждены и соответствующий управляющий параметр мал, так что предельные циклы автономных осцилляторов близки к окружностям, а также малы связь и частотные расстройки осцилляторов, то можно применить метод *медленно меняющихся амплитуд*. В этом случае получаются *укороченные уравнения* для комплексных амплитуд. В англоязычной литературе соответствующую модель часто называют *осцилляторами Ландау-Стюарта (Landau-Stuart oscillators)*. В этом случае рассматриваются явления в окрестности одного, основного резонанса с соотношением частот  $1:1:1\dots$

Можно выполнить еще одно упрощение, которое предполагает, что радиусы орбит осцилляторов настолько слабо возмущены связью, что можно следить только за их фазами. Тогда приходим к *фазовой модели*. Для двух осцилляторов – это известное *уравнение Адлера*. При увеличении числа осцилляторов возникают его соответствующие обобщения. Отметим, что уже для трех осцилляторов даже в рамках укороченных и фазовых уравнений картина оказывается весьма сложной и существенно отличается от случая двух осцилляторов.

При анализе ансамбля осцилляторов важным (даже принципиальным) является учет характера связи осцилляторов. Она может быть *диссипативной* (связь через скорости изменения переменных) или *реактивной* (связь через сами переменные). При радиофизической реализации автогенераторов первый

случай отвечает связи через сопротивление (резистор), а во второй – через реактивный элемент (емкость).

Так уравнения двух осцилляторов Ван-дер-Поля с диссипативной связью имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь  $\lambda$  – параметр отрицательного трения, отвечающий за возможность автоколебаний в отдельном осцилляторе,  $\Delta$  – параметр частотной расстройки осцилляторов,  $\mu$  – величина диссипативной связи.

Соответственно, система с реактивной связью записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \varepsilon(y - x) &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь  $\varepsilon$  – величина реактивной связи.

Определенные отличия этих двух типов связи проявляются уже в случае двух осцилляторов. Так для диссипативной связи фазовая модель имеет вид классического уравнения Адлера:

$$\dot{\theta} = -\frac{\Delta}{2} - \mu \sin \theta.\tag{4}$$

Здесь  $\theta$  – относительная фаза осцилляторов,  $\Delta$  – их безразмерная частотная расстройка,  $\mu$  – величина связи. Соотношение (4) легко получается из укороченных уравнений, если в соответствующих уравнениях для действительных фаз просто подставить значения невозмущенных орбит осцилляторов [1,2].

Уравнение Адлера (4) описывает возможность захвата осцилляторов при  $|\Delta| < 2\mu$  и режима биений при  $|\Delta| > 2\mu$  [1,2]. При этом устойчивым оказывается режим синфазной синхронизации, а противофазный режим неустойчив.

Реактивная связь – явление существенно более тонкое. В отличие от случая диссипативной связи, укороченные уравнения в системе с реактивной связью для относительной фазы содержат разность орбит осцилляторов. Поэтому подстановка невозмущенных стационарных орбит в первом порядке по величине связи дает нулевой результат. Таким образом, требуется более



аккуратный расчет с учетом эффектов второго порядка<sup>15</sup>. Он приводит тоже к уравнению Адлера, но немного другого вида:

$$2\dot{\theta} = -\Delta - \varepsilon^2 \sin 2\theta. \quad (5)$$

У уравнения (5) есть две основные особенности. Во-первых, на плоскости параметров частотная расстройка – величина связи язык синхронизации имеет очень острое основание в виде корневой особенности  $\varepsilon = \sqrt{|\Delta|}$ . Второй момент – возможность *фазовой бистабильности*. Действительно, в соответствии с (5) возможно сосуществование, как устойчивого синфазного режима синхронизации  $\theta \approx 0$ , так и устойчивого противофазного  $\theta \approx \pi$ .

Как мы покажем далее, в случае трех осцилляторов диссипативная и реактивная связь приводят к еще более существенно разным уравнениям и колебательным эффектам.

Еще одним интересным примером может служить *активная* связь, которой отвечает отрицательный знак параметра  $\mu$  в уравнении Адлера (4). В этом случае устойчивыми оказываются уже противофазные колебания, а синфазные – неустойчивыми. В радиофизике такая ситуация для своей реализации требует включению в цепь связи отрицательного сопротивления (например, операционного усилителя.) Однако такой случай достаточно распространен в лазерной физике, когда связь лазеров осуществляется за счет оптического излучения через боковые поверхности световодов.

В теории колебаний различают синхронизацию *взаимную* и синхронизацию *вынужденную*. В первом случае речь идет о системе взаимодействующих осцилляторов, а во втором о возбуждении осцилляторов внешней силой. Несмотря на различие в физической постановке, в рамках фазового приближения задачи о взаимодействии двух осцилляторов и о возбуждении одного осциллятора внешним сигналом оказываются эквивалентными – обе они приводятся к уравнению Адлера. При этом только роль параметра связи выполняет нормированная амплитуда внешней силы, а частотная расстройка осциллятора определена относительно частоты воздействия. Для большего числа осцилляторов эти две задачи с физической точки зрения оказываются не вполне эквивалентными, и требуют отдельного обсуждения.

Скажем несколько слов об эффективности укороченных уравнений Ландау-Стюарта и фазовых моделей. Формально говоря, она обеспечивается некоторым малым параметром, в качестве которого может выступать надкритичность возбуждения осцилляторов. При этом обычно считают, что

---

<sup>15</sup> Детали можно найти в [26,27,66,67].

частотные расстройки и величина связи нормируются на этот малый параметр. Если оставаться в рамках аналитического подхода, то для оценки эффективности метода необходимо построить решение в следующем порядке по малому параметру и сравнить с первым приближением. Понятно, что с ростом числа осцилляторов эта процедура существенно усложняется. Однако, благодаря развитию компьютеров, ее можно не реализовывать, а просто сравнивать результаты компьютерных расчетов для исходных и приближенных уравнений. Особенно удобно это делать с помощью карт режимов, поскольку сразу наглядной оказывается общая картина. Достаточно часто при этом оказывается, что, по крайней мере, на качественном уровне, многие существенные свойства фазовых моделей или укороченных уравнений «наследуются» и для не очень малых управляющих параметров. Причина, видимо, в *глубокой физической природе* метода медленно меняющихся амплитуд<sup>16</sup>.

В тоже время, фазовая модель интересна и сама по себе, как самостоятельный пример динамической системы, в которой отброшены некоторые черты общей картины. В этом плане первоначально полезно «забыть» происхождение этой модели и дать достаточно полное и согласованное ее описание. Это тем более важно, так как к фазовым моделям можно придти, исходя из разных физически мотивированных задач. Так уравнение Адлера может быть получено для разных исходных физических систем. (Например, в случае задач радиофизики и лазерной физики.)

Если говорить о фазовых моделях многочастотных колебаний, то важно отметить, что столь универсальной модели, как для двух осцилляторов, уже в случае трех осцилляторов не получается. Действительно, уравнение Адлера (4) задает простейший *поток на окружности*. Его структура очень проста и, фактически, определяется первым членом разложения в ряд Фурье для обобщенной модели вида  $\dot{\theta} = \omega + f(\theta)$ , где  $f(\theta)$  –  $2\pi$ -периодическая функция аргумента, а  $\theta$  – относительная фаза осцилляторов. Если существенных относительных фаз уже две (три осциллятора), то имеет место *поток на торе*:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega_1 + f(\theta, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \omega_2 + g(\theta, \varphi),\end{aligned}\tag{6}$$

где  $f(\theta, \varphi)$ ,  $g(\theta, \varphi)$  –  $2\pi$ -периодические функции по обоим переменным. Нетрудно понять, что разложение в двумерный ряд Тейлора приводит к модели

---

<sup>16</sup> Отметим, что на «избыточную» эффективность фазового приближения указано и в работе [21] в контексте задач лазерной физики.

с существенно большим числом параметров. Кроме того, часто связь подсистем зависит от тригонометрических функций разностей переменных, двойного угла (случай реактивной связи) и т.д. Поэтому столь универсальной модели для фазовых потоков на торе построить не удастся. Соответственно, возрастает роль *физических соображений* при построении и выборе моделей.

После подробного обсуждения фазовой модели, целесообразно вернуться к исходной системе. Обычно оказывается, что некоторые элементы картины, характерные для фазового приближения, «наследуются», но возникают и принципиально новые моменты. В первую очередь, это возможность гармонических резонансов с соотношением частот  $p:q$ , вблизи которых, в свою очередь, разыгрываются новые эффекты, связанные с квазипериодической динамикой.

## 6. Эффект «гибели колебаний» и широкополосная синхронизация

Для случая диссипативной связи двух осцилляторов (2) возникает характерный *эффект гибели колебаний (oscillator death OD)*. Он состоит в том, что состояние равновесия системы в начале координат становится устойчивым, и колебаний затухают [1,96]. Поясним природу этого эффекта. Пусть расстройка осцилляторов достаточно велика, так что осцилляторы вращаются по своим орбитам с существенно разными частотами. В этом случае осцилляторы имеют большую относительную скорость, и диссипация существенна. Если  $\mu > \lambda$ , то диссипация будет превалировать над отрицательным трением, и колебания станут затухающими. Подчеркнем важность условия большой частотной расстройки осцилляторов  $\Delta$  для реализации эффекта гибели колебаний. В альтернативном случае малой расстройки возникает взаимная синхронизация.

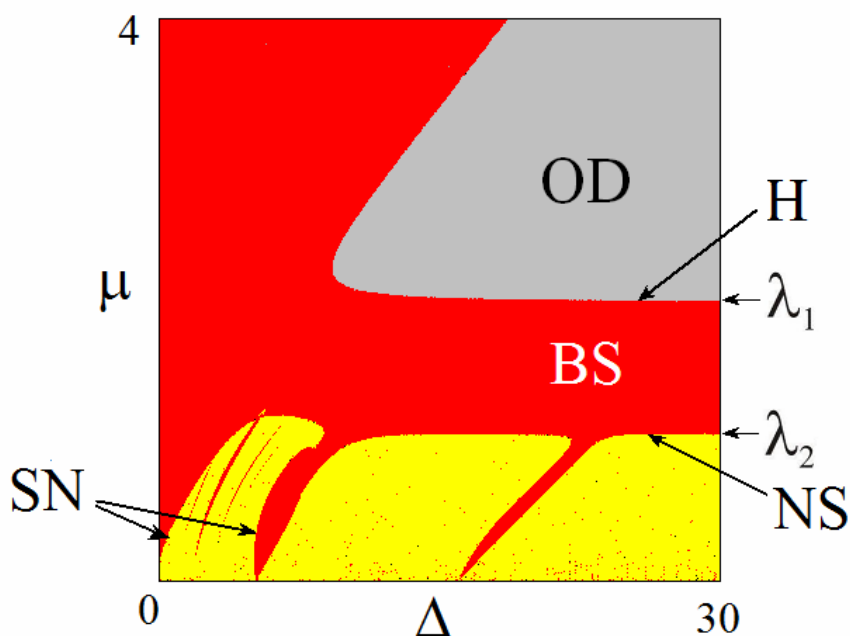
Еще один интересный режим возникает для неидентичных по управляющим параметрам осцилляторов:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

когда  $\lambda_1 > \lambda_2$ . В такой модели при большой частотной расстройке в области  $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$  реализуется режим, который можно охарактеризовать, как *широкополосную синхронизацию (broadband synchronization BS)* [31,32]. В этом случае на плоскости частотная расстройка – величина связи появляется дополнительная область в виде полосы  $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$ , являющаяся продолжением

основного языка синхронизации и неограниченная по частоте, как показано на рис.11. Физическая природа этого режима состоит в том, что внутри указанной полосы второй осциллятор подавлен связью, так что первый, в определенном смысле, доминирует<sup>17</sup>.

На рис.11 на карте ляпуновских показателей двух неидентичных диссипативно связанных осцилляторов (7) отмечены перечисленные характерные области и режимы. Для удобства восприятия по правому обрезу карты указаны значения  $\mu = \lambda_1$  и  $\mu = \lambda_2$ . Можно видеть возникновение характерного «отростка» (полосы) у основной области синхронизации, имеющего асимптотические границы в области большой частотной расстройки:  $\mu = \lambda_2$  снизу и  $\mu = \lambda_1$  – сверху.



**Рис.11.** Карта ляпуновских показателей двух неидентичных по управляющим параметрам диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (7). Обозначения: *OD* – область гибели колебаний, *BS* – область широкополосной синхронизации, *H* – линия бифуркации Андронова-Хопфа, *NS* – линия бифуркации Неймарка-Сакера, *SN* – линии седло-узловых бифуркаций. Значения параметров  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=1$ . Цветовая палитра соответствует рис.10.

Эту картину полезно дополнить описанием основных бифуркаций<sup>18</sup>. Нижняя граница области гибели колебаний (она же верхняя граница области широкополосной синхронизации) отвечает бифуркации Андронова-Хопфа *H*.

<sup>17</sup> Отметим, что использование здесь термина синхронизация оправдано. Действительно, в случае внешнего воздействия выделяют не только фазовую синхронизацию в области малых амплитуд сигнала, но и синхронизацию через подавление в области больших амплитуд [1]. Здесь ситуация аналогична, но отвечает взаимной связи осцилляторов.

<sup>18</sup> Мы указываем их здесь как границы соответствующих областей на карте, однако, в данном случае они могут быть легко установлены и в рамках бифуркационного анализа.

Нижняя граница области широкополосной синхронизации дается бифуркацией Неймарка-Сакера  $NS$ . В свою очередь, вблизи своего основания язык области основной синхронизации отвечает седло-узловой бифуркации  $SN$ <sup>19</sup>. Заметим, что в системе с идентичными параметрами  $\lambda_1 = \lambda_2$  граница области гибели колебаний – это вырожденная линия, отвечающая совпадению бифуркаций Андронова-Хопфа и Неймарка-Сакера [33].

Аналогичный асимптотический анализ случаев больших частотных расстройек оказывается очень полезным и для многочастотных задач, позволяя выявлять и интерпретировать иерархию типов возможных режимов и бифуркаций, причем это оказывается полезным даже в случае идентичных по параметрам возбуждения подсистем.

## 7. Резонансная паутина Арнольда

Для ансамблей взаимодействующих осцилляторов естественными параметрами могут служить собственные частоты осцилляторов. Например, для трех связанных осцилляторов будут существенными два таких частотных параметра. (Частоту одного осциллятора всегда можно принять за единицу.) Таким образом, для многочастотных систем возникает существенно новая задача, а именно исследование устройства *пространства собственных частот* осцилляторов. В этом случае ляпуновские карты выявляют тонкую и сложную картину, связанную с различными резонансами в системе. Один из характерных феноменов в этом случае – *резонансная паутина Арнольда (Arnold web)*.

Поясним ее возникновение, обратившись к иллюстрации в виде карты ляпуновских показателей на рис.12а на плоскости нормированных собственных частот  $(w_1, w_2)$  для модельной системы в виде отображения Кима-Остлунда [18]:

$$\begin{aligned}\psi_{n+1} &= 2\pi w_1 + \psi_n - \mu \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= 2\pi w_2 + \varphi_n - \mu \sin \psi_n.\end{aligned}\tag{8}$$

Можно видеть систему тонких линий режимов двухчастотной квазипериодичности, образующих характерную «паутину», погруженную в область трехчастотной квазипериодичности. На пересечении полос двухчастотных режимов возникают «островки» периодических режимов. Возникновение такой структуры обусловлено возможностью резонансов

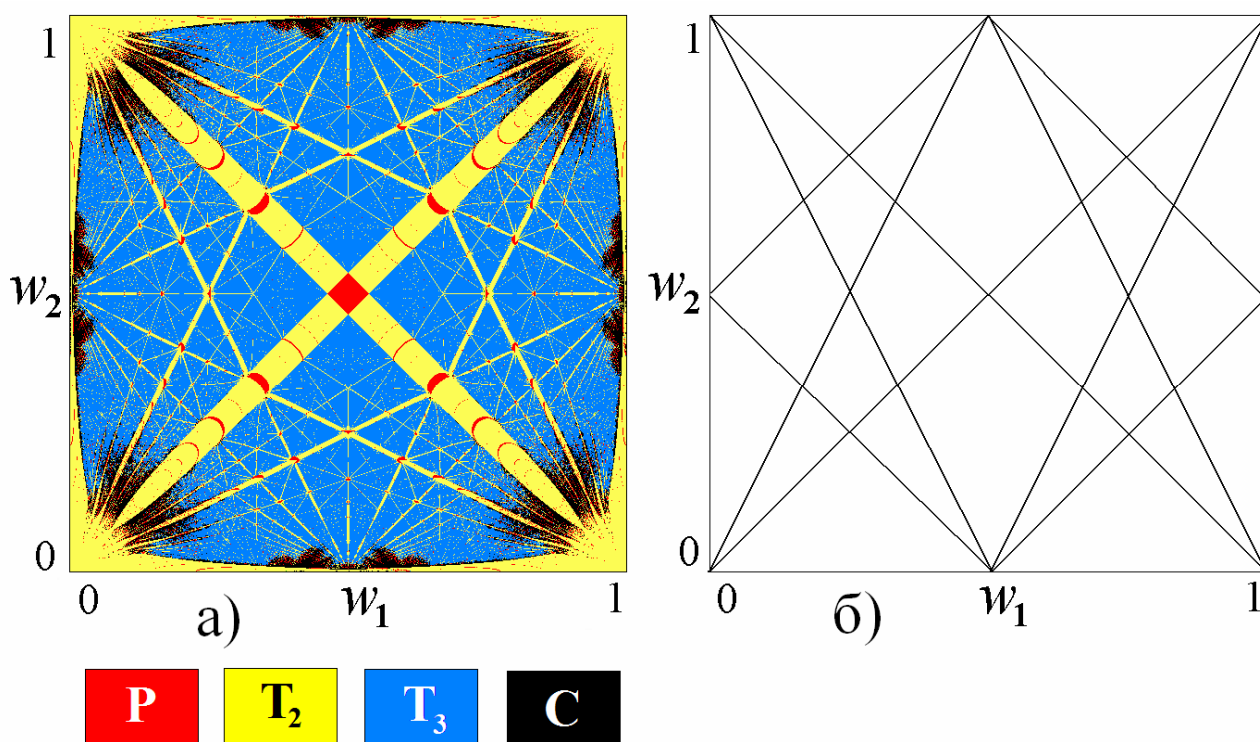
---

<sup>19</sup> Переход от границы языка в виде седло-узловой бифуркации к бифуркации Неймарка-Сакера связан с точками бифуркаций коразмерности два. При этом линия Неймарка-Сакера может иметь разрывы в окрестности резонансных языков высокого порядка, подробнее см. [33,34].

разного типа в системе. Действительно, собственные частоты могут находиться в некотором *резонансном соотношении*:

$$nw_1 + mw_2 = p. \quad (9)$$

Резонанс будет возникать, если  $n$ ,  $m$  и  $p$  – целые числа. Уравнение (9) при фиксированных  $n$ ,  $m$  и  $p$  на плоскости частот  $(w_1, w_2)$  задает прямую линию. Вдоль этой линии выполняется резонансное условие, а значит, возникают резонансные колебания. Поскольку это условие одно, то вдоль линии (9) будут возникать полосы, которым на карте ляпуновских показателей будут отвечать области с одним нулевым показателем, т.е. режимы двухчастотной квазипериодичности  $T_2$ . Чем сильнее резонанс, тем более широкими будут эти полосы.



**Рис.12.** Резонансная паутина Арнольда на плоскости чисел вращения в виде ляпуновской карты (а) и схематическое объяснение ее построения (б) для модельной системы двух связанных отображений поворота (8) [18]. Параметр связи  $\mu=0.7$ .

Для примера на рис.12б показано несколько линий, заданных уравнением (9) с небольшими  $(n, m, p)$ , в частности:

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 = 0, \quad w_1 + w_2 = 1, \quad 2w_1 - w_2 = 0, \quad w_1 - 2w_2 = 0, \\ w_1 + 2w_2 = 1, \quad w_1 - 2w_2 = -1, \dots \end{aligned}$$

На пересечении этих линий лежат основные резонансы, которым на плоскости  $(w_1, w_2)$  отвечают области периодических режимов  $P$ . Как эта картина проявляется в устройстве ляпуновской карты, можно видеть на рис.12а.

Общим «фоном» на рис.12а при этом являются режимы трехчастотной квазипериодичности  $T_3$ .

Отметим, что строго говоря, термин «паутина Арнольда» используется в теории консервативного хаоса для описания соответствующих резонансных структур в фазовом пространстве, например, для пары переменных «действие» двух связанных подсистем [68,69]. В то же время, процедура построения такой структуры аналогична случаю рис.12. Поэтому авторы [35] относят этот термин и к соответствующему устройству плоскости параметров диссипативных систем.

При увеличении числа осцилляторов картина будет усложняться, за счет появления четырех- и более частотной квазипериодичности, но общий принцип резонансного устройства пространства параметров будет сохраняться.

## 8. Геометрия связей

Заметим также, что здесь мы будем говорить, в основном, о моделях в виде *цепочек осцилляторов*. Возможны, однако, и другая геометрия связи, например, *кольцо* из осцилляторов, *сеть* из осцилляторов со связью «каждого с каждым» и т.д. В последнем случае фазовая модель с диссипативной связью носит специальное название *модель Курамото* [1] и очень популярна, однако, в основном, в случае большого числа элементов. Мы обсудим некоторые отличия свойств цепочки и сети из небольшого числа осцилляторов.

## 9. Сценарии Ландау-Хопфа и Рюэля-Такенса

Традиционно обсуждаемым вопросом в связи с квазипериодическими колебаниями разной размерности является вопрос о *сценариях Ландау-Хопфа* и *Рюэля-Такенса*. Еще в сороковые годы двадцатого века Ландау и Хопф высказали предположение, что гидродинамическая турбулентность возникает благодаря следующей последовательности перестроек движения [10,11]. Сначала в результате бифуркации Андронова-Хопфа возникает автоколебательный режим, которому отвечает предельный цикл. Затем он теряет устойчивость в результате вторичной бифуркации Хопфа (или, говоря более аккуратно, в результате бифуркации Неймарка-Сакера). В результате мягким образом возникает двумерный тор. Затем и он претерпевает аналогичную бифуркацию, в результате которой добавляется еще одна существенная частота, и возникает трехчастотный тор. И так далее. В результате происходит добавление все большего числа несоизмеримых частот в спектр колебаний, и возникает все более сложный режим, т.е. развивается

турбулентность. В 70-е годы Рюэль и Такенс высказали некоторые математические утверждения, которые интерпретировались «на популярном» уровне следующим образом: даже малые возмущения разрушают трехчастотные торы с возникновением хаоса [12]. На физическом уровне строгости этот факт можно пояснить следующим образом. Пусть в фазовом пространстве возник двухчастотный тор. Его развертка даст прямоугольник, на котором располагается поток траекторий. При возникновении трехчастотного тора, его развертка будет представлять собой трехмерный параллелепипед. В трехмерном пространстве типичным феноменом становится динамический хаос («размерность три рождает хаос»), так что можно ожидать разрушения трехчастотных торов с образованием хаоса.

Такая гипотеза проверялась некоторыми исследователями, в частности Гребоджи с соавторами<sup>20</sup>, следующим образом [13]. Рассматривались простейшие модельные отображения для относительных фаз осцилляторов, для которых вводились возмущения со случайными коэффициентами. При этом при многочисленных расчетах проверялась доля возникающих хаотических, квазипериодических и регулярных режимов. Получился достаточно физически предсказуемый результат, что при малых возмущениях торы сохраняются, а при больших – разрушаются с образованием хаоса<sup>21</sup>. Таким образом, сценарий Рюэля и Такенса не является достаточно универсальным.

С другой стороны, и подход Ландау-Хопфа, основанный, фактически, на отсутствии взаимодействия мод, подвергался традиционной критике. Кроме того, он не был подтвержден достаточно глубокими результатами теории бифуркации квазипериодических движений.

При обсуждении вопроса о сценарии Ландау-Хопфа, однако, часто упускают несколько важных моментов. Во-первых, колебательные моды должны характеризоваться разной степенью возбуждения. Если, например, речь идет о связанных осцилляторах Ван-дер-Поля, то должны быть различными параметры, отвечающие за отрицательное трение. Именно в этом случае возникают условия для поэтапного включения мод при повышении уровня диссипации (числа Рейнольдса). В теории колебаний, однако, гораздо более традиционным объектом исследования служит случай одинаковых управляющих параметров. Во-вторых, все моды должны быть достаточно разнесены по частотам. В ином случае действительно возникает взаимодействие мод, которое разрушает картину Ландау-Хопфа. Однако и

---

<sup>20</sup> Достаточно подробное обсуждение можно найти и в монографии [4].

<sup>21</sup> Аналогичные оценки предпринимались и в других работах, например, [24].



здесь есть свой нюанс: взаимодействие мод приводит не столько к хаосу, а скорее к традиционным для физики колебаний явлениям типа резонансов и синхронизации. При этом могут наблюдаться резонансные двухчастотные, трехчастотные торо и т.д. Происходит и определенная смена бифуркационных механизмов. Если для несинхронных мод квазипериодические бифуркации Неймарка-Сакера являются типичными, то для резонансных взаимодействий становятся типичными седло-узловые бифуркации торов.

Наконец, для понимания возникающей картины важным является двухпараметрический анализ, формирующий обобщение картины языков Арнольда на случай многочастотных колебаний. Такой анализ делает наглядной картину различных резонансов и торов разной размерности в зависимости от связи осцилляторов и их частотных расстроек. При этом возникает и хаос, однако, обычно связь при этом должна быть достаточно велика.

## **10. Генераторы квазипериодических колебаний и автономные системы с бифуркацией Неймарка-Сакера**

Как мы отмечали, традиционные примеры систем с квазипериодическим поведением относятся к ансамблям осцилляторов, которые при выключении связи распадаются на отдельные подсистемы, или к системам с внешним воздействием. Интересным в этом плане представляется иметь примеры *автономных* систем с квазипериодическим поведением, т.е. в радиофизической терминологии – автономных *генераторов квазипериодических колебаний*. Такие системы также могут служить базовыми моделями для исследования задач о многочастотной квазипериодичности. Исходя из общих соображений, можно сказать, что такие системы должны демонстрировать бифуркацию Неймарка-Сакера рождения инвариантного тора из предельного цикла, а также ассоциирующуюся с ней структуру языков Арнольда в пространстве параметров. При этом, с одной стороны, важно иметь как можно более простую модель с минимальной размерностью фазового пространства. С другой стороны, увеличение размерности фазового пространства будет приводить к новым эффектам, например, возможности удвоения инвариантных торов и т.д.

На первый взгляд, задача построения таких автогенераторов очень проста, поскольку в сечении Пуанкаре система сводится к двумерному отображению, а известно множество таких отображений с бифуркацией Неймарка-Сакера. Оказывается, однако, что это не столь тривиальный вопрос, и достаточно удобные физические мотивированные и реализуемые примеры появились

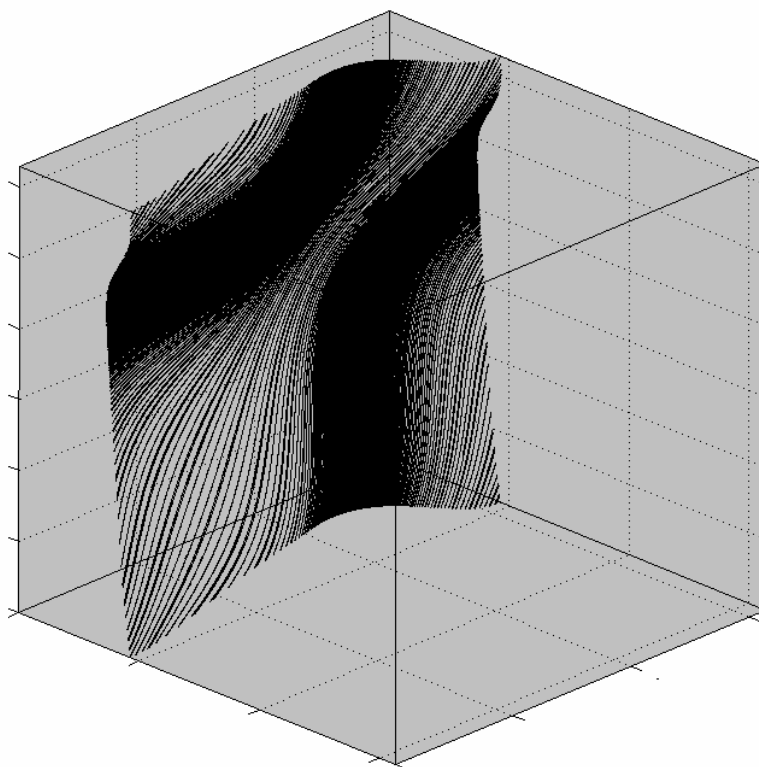
только в последнее время [39-43,103]. В этом плане ситуация отчасти парадоксальная – известно гораздо больше простых примеров генераторов хаоса, излагаемых в учебной литературе, чем автономных генераторов квазипериодических колебаний.

## **11. Физические системы с многочастотной динамикой**

Квазипериодические колебания появляются практически во всех областях физики: радиофизике, электронике, лазерной физике, гидродинамике, климатологии, биофизике, астрофизике и т.д. Известны примеры, как в виде ансамблей автоколебательных элементов, так и в виде различных фазовых моделей. Например, фазовые модели могут быть получены для мощных генераторов микроволнового излучения – *виркаторов*. Известны примеры оптически связанных лазеров, приводящие к связанным уравнениям Адлера: системы с *инжекцией лазерного излучения*, системы с *оптическим пространственным фильтром* и т.д. Одним из интересных примеров системы с реактивной связью является система *ионных ловушек*. Различные типы связанных фазовых уравнений могут быть получены в контексте описания связанных *контактов Джозефсона* и т.д. Более детально этот вопрос мы обсудим и дадим необходимые ссылки в разделе 1.5.

# Часть I

## Взаимная синхронизация фазовых осцилляторов



Перейдем теперь к более детальному обсуждению картины многочастотных колебаний в системе трех и более взаимодействующих автоколебательных элементов. В этой части будут рассмотрены соответствующие *фазовые модели*. При этом мы не просто выпишем те или иные разновидности фазовых уравнений, а продемонстрируем их вывод для ансамбля взаимодействующих осцилляторов Ван-дер-Поля. Это позволит в дальнейшем вернуться к исходной системе и сопоставить ее свойства с фазовой моделью.

## 1.1. Три диссипативно связанных осциллятора.

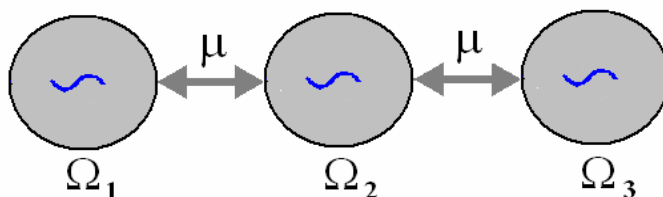
### Фазовая модель

#### 1.1.1. Фазовые уравнения

Пусть имеется система из трех взаимно связанных в цепочку осцилляторов Ван-дер-Поля, схематически показанная на рис.1.1. Система дифференциальных уравнений, описывающих такую цепочку, имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\lambda$  – параметр возбуждения автономных осцилляторов, характеризующий отрицательное трение и отвечающий за возникновение автоколебаний,  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого,  $\mu$  – коэффициент диссипативной связи. Частота первого осциллятора принята за единицу.



**Рис.1.1.** Схематическое изображение цепочки из трех осцилляторов Ван-дер-Поля.

Если параметр возбуждения  $\lambda$  мал, а также малы частотные расстройки и величина связи, то для анализа уравнений (1.1) можно применить метод медленно меняющихся амплитуд. В этом случае решение ищется в виде, характерном для автономных осцилляторов, но при этом амплитуда и фаза каждого осциллятора считаются медленно меняющимися во времени по

сравнению с колебаниями на собственной частоте. Для этого представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{it} + a^* e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^* e^{-it}, \quad z = ce^{it} + c^* e^{-it}. \quad (1.2)$$

Здесь  $a(t)$ ,  $b(t)$  и  $c(t)$  – комплексные амплитуды осцилляторов, медленно меняющиеся на фоне колебаний с единичной частотой<sup>22</sup>.

В силу комплексного характера функций  $a(t)$ ,  $b(t)$  и  $c(t)$ , вместо трех действительных переменных теперь, фактически, используется шесть. Поэтому можно наложить дополнительные условия, которые выбираем в традиционной для этого метода форме:

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^* e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}^* e^{-it} = 0, \quad \dot{c}e^{it} + \dot{c}^* e^{-it} = 0. \quad (1.3)$$

Дифференцируя (1.2) с учетом (1.3), получаем выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i(ae^{it} - a^* e^{-it}), \quad \dot{y} = i(be^{it} - b^* e^{-it}), \quad \dot{z} = i(ce^{it} - c^* e^{-it}). \quad (1.4)$$

В свою очередь, дифференцируя (1.4), находим вторые производные  $\ddot{x}(t)$ ,  $\ddot{y}(t)$ ,  $\ddot{z}(t)$ . Подставим полученные выражения и соотношения (1.2)-(1.4) в уравнения (1.1), умножим полученные соотношения на  $e^{-it}$  и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. После соответствующих преобразований приходим к следующим укороченным уравнениям для комплексных амплитуд (уравнениям Ландау-Стюарта):

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_1 b - \mu(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_2 c - \mu(c - b). \end{aligned} \quad (1.5)$$

В полученных уравнениях управляющий параметр  $\lambda$  можно убрать перенормировкой переменных и параметров следующего вида:

$$a = \sqrt{\lambda} \bar{a}, \quad b = \sqrt{\lambda} \bar{b}, \quad c = \sqrt{\lambda} \bar{c}, \quad t = \bar{t}/\lambda, \quad \mu = \lambda \bar{\mu}, \quad \Delta_{1,2} = \lambda \bar{\Delta}_{1,2}. \quad (1.6)$$

Будем считать такую перенормировку выполненной, а для сокращения записи черту над нормированными величинами опускать. Теперь новые нормированные параметры можно считать уже не малыми.

Положим далее  $a = Re^{i\psi_1}$ ,  $b = re^{i\psi_2}$  и  $c = ve^{i\psi_3}$ , где  $R, r, v$  – действительные амплитуды, а  $\psi_{1,2,3}$  – фазы осцилляторов. Тогда получаем:

<sup>22</sup> Метод медленно меняющихся амплитуд излагается практически во всех монографиях и учебниках по теории колебаний. Возможны разные его версии, которые в первом приближении приводят, фактически, к одинаковым результатам. Здесь и далее будем следовать достаточно удобному в техническом плане варианту [70].

$$\begin{aligned}
2\dot{R} &= R - R^3 + \mu(r \cos(\psi_2 - \psi_1) - R), \\
2\dot{r} &= r - r^3 + \mu(R \cos(\psi_1 - \psi_2) + v \cos(\psi_3 - \psi_2) - 2r), \\
2\dot{v} &= v - v^3 + \mu(v \cos(\psi_2 - \psi_3) - r), \\
\dot{\psi}_1 &= \frac{r}{2R} \mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\
\dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{R}{2r} \mu \sin(\psi_1 - \psi_2) + \frac{v}{2r} \mu \sin(\psi_3 - \psi_2), \\
\dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{r}{2v} \mu \sin(\psi_2 - \psi_3).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Это укороченные уравнения для безразмерных действительных амплитуд и фаз осцилляторов. Полезно привести вытекающие из (1.2), (1.6) соотношения, дающие связь исходных переменных с медленными амплитудами и фазами:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\sqrt{\lambda}R(t) \cos[t + \psi_1(t)], \\
y(t) &= 2\sqrt{\lambda}r(t) \cos[t + \psi_2(t)], \\
z(t) &= 2\sqrt{\lambda}v(t) \cos[t + \psi_3(t)].
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Получим теперь фазовую модель. Как видно из первых трех уравнений (1.7), в отсутствие связи ( $\mu = 0$ ) осцилляторы движутся по стационарным орбитам, которые представляют собой окружности единичного радиуса:  $R = r = v = 1$ . Будем считать связь слабой, так что осцилляторы движутся практически по этим стационарным орбитам, а связь возмущает лишь динамику фаз. Подставляя тогда  $R = r = v = 1$  в уравнения для фаз в (1.7), получаем:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_1 &= \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1), \\
\dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2) + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_3 - \psi_2), \\
\dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_3).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Это уравнения фазового приближения, независимые от амплитудных уравнений.

С физической точки зрения, важными являются *наблюдаемые частоты* колебаний осцилляторов. Они могут быть вычислены, как средние значения скоростей изменения фаз  $\dot{\psi}_i$ . Если осцилляторы не связаны, то из (1.9) легко находим их собственные частоты  $\Omega_i$  в принятых нормировке и обозначениях:

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \frac{\Delta_1}{2}, \quad \Omega_3 = \frac{\Delta_2}{2}. \tag{1.10}$$

Отметим далее, что размерность системы (1.9) может быть понижена на единицу, если ввести относительные фазы осцилляторов

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3. \quad (1.11)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Это и есть фазовые уравнения, описывающие взаимодействие трех диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов. Как мы уже отмечали, фазовые уравнения можно рассматривать как, в определенном смысле, самостоятельную фазовую модель. Обсудим более подробно ее свойства.

### 1.1.2. Простейшие типы колебаний трех связанных фазовых осцилляторов

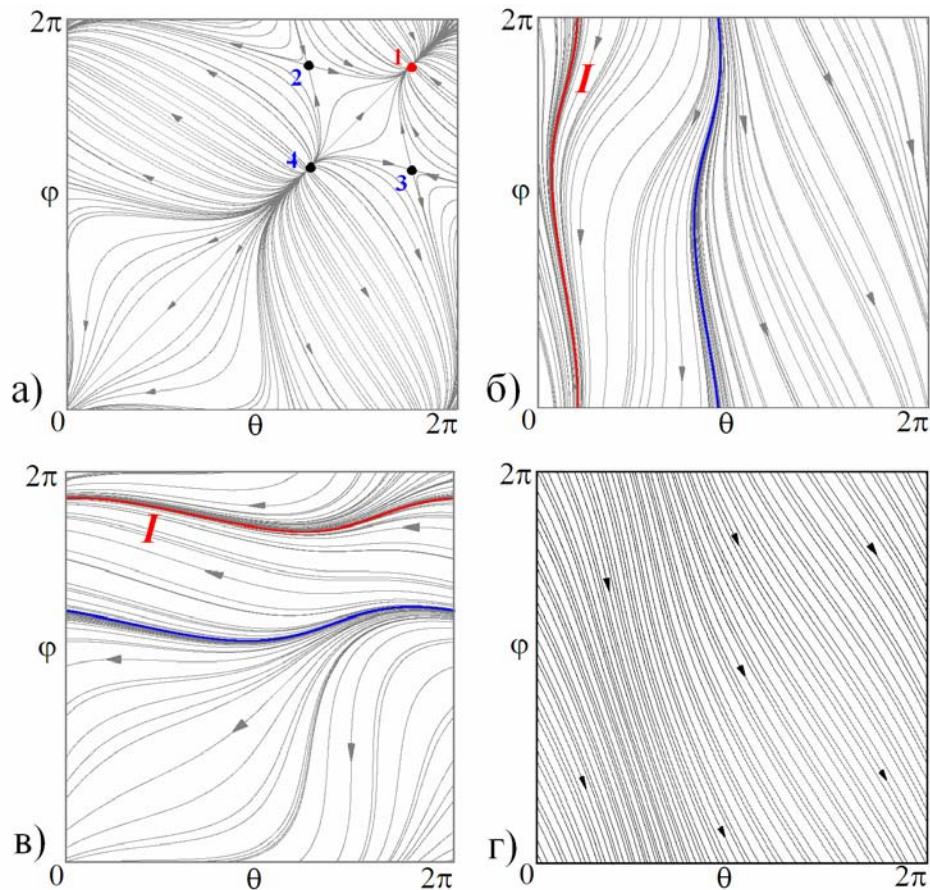
Прежде всего, представим несколько фазовых портретов системы (1.12), иллюстрирующих основные типы ее поведения. Такие портреты на плоскости относительных фаз осцилляторов  $(\theta, \varphi)$  приведены на рис.1.2. Отметим, что благодаря свойству  $2\pi$ -периодичности фаз, динамику переменных  $\theta$  и  $\varphi$  можно рассматривать на «фазовом квадрате» в диапазонах  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ . При этом, если фазовая траектория уходит, например, через правую сторону квадрата, то она появляется в соответствующей точке на его левой стороне. Аналогично, для верхней и нижней границ.

На рис.1.2 представлены фазовые портреты, отвечающие следующим основным типам режимов системы (1.12):

- а) режим *полной синхронизации* всех трех осцилляторов,
- б)-в) квазипериодические режимы, отвечающие *частичному захвату* одной из пар осцилляторов,
- в) квазипериодический режим более высокой размерности.

Обсудим эти режимы подробнее. В случае рис.1.2а система имеет четыре состояния равновесия, из которых одно является устойчивым узлом, два – седлами и одно – неустойчивым узлом. Относительные фазы осцилляторов с течением времени будут стремиться к устойчивому равновесию, и после переходного процесса установятся значения  $\theta = const$ ,  $\varphi = const$ , так что  $\dot{\theta} = 0$  и  $\dot{\varphi} = 0$ . В соответствии с определением относительных фаз (1.11), это означает,

что скорости изменения фаз каждого осциллятора  $\dot{\psi}_i$  становятся постоянными и равными друг другу величинами. Это режим *полной синхронизации*<sup>23</sup> всех трех осцилляторов. При этом скорость изменения фаз определяет значение частоты захвата трех осцилляторов.



**Рис.1.2.** Фазовые портреты системы (1.12): а) режим полной синхронизации всех осцилляторов,  $\Delta_1 = 0.5, \mu = 0.75$ ; б) режим частичного захвата первого и второго осцилляторов,  $\Delta_1 = -0.25, \mu = 0.25$ ; в) режим частичного захвата второго и третьего осцилляторов,  $\Delta_1 = 0.75, \mu = 0.25$ ; г) трехчастотный квазипериодический режим,  $\Delta_1 = -1, \mu = 0.25$ . Значение  $\Delta_2 = 1$ . Красным цветом выделены устойчивые состояния равновесия и инвариантные кривые, синим – неустойчивые. Два седла показаны черным цветом.

Перейдем теперь к рис.1.2б. На этом рисунке имеются два новых объекта: притягивающая и отталкивающая *инвариантные кривые*. Устойчивая кривая показана красным цветом и обозначена буквой *I*, а неустойчивая кривая показана синим цветом. Теперь фаза  $\theta$  в режиме, отвечающем устойчивой инвариантной кривой, не постоянна, а осциллирует около некоторого среднего значения. Поскольку, по определению  $\theta = \psi_1 - \psi_2$ , то это значит, что фазы первого и второго осцилляторов близки, и их разность не нарастает. Этот

<sup>23</sup> Иногда еще говорят *глобальной синхронизации*.



режим можно охарактеризовать, как *частичный захват* первого и второго осцилляторов. Отметим, что в соответствии с рис.1.2б относительная фаза осцилляторов  $\theta$  колеблется около нулевого значения  $\theta \approx 0$ . Таким образом, имеет место синфазный захват первого и второго осцилляторов.

На рис.1.2в можно видеть другой вариант расположения притягивающей инвариантной кривой. В этом случае около стационарного значения колеблется уже фаза  $\varphi = \psi_2 - \psi_3$ , а фаза  $\theta$  изменяется во всем возможном диапазоне. Таким образом, это режим частичного захвата второго и третьего осциллятора. При этом также наблюдается синфазный захват этих осцилляторов.

На рис.1.2г можно видеть еще одну разновидность режима колебаний системы из трех осцилляторов. В этом случае наблюдается «поток» фазовых траекторий, всюду плотно покрывающих фазовый квадрат. При этом обе фазы меняются во всем возможном диапазоне  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ .

Полезно обсудить представленные режимы с точки зрения динамики исходной системы (1.1). Состояние равновесия фазовой модели, в соответствии с определениями метода медленно меняющихся амплитуд и соотношениями (1.8), будет отвечать устойчивому предельному циклу. Соответственно, инвариантная кривая с учетом дополнительной «опорной» частоты в (1.8) отвечает простейшему двумерному инвариантному тору, т.е. режиму двухчастотной квазипериодичности. Случай потока траекторий рис.1.2г отвечает трехчастотному тору, т.е. трехчастотной квазипериодичности.

### **1.1.3. Условия полного захвата трех фазовых осцилляторов. Бифуркации, отвечающие за разрушение полной синхронизации**

Найдем условия полной синхронизации, т.е. режима, когда реализуется точный одновременный захват относительных фаз всех осцилляторов, а также его возможные бифуркации. В рассматриваемом случае это можно сделать аналитически.

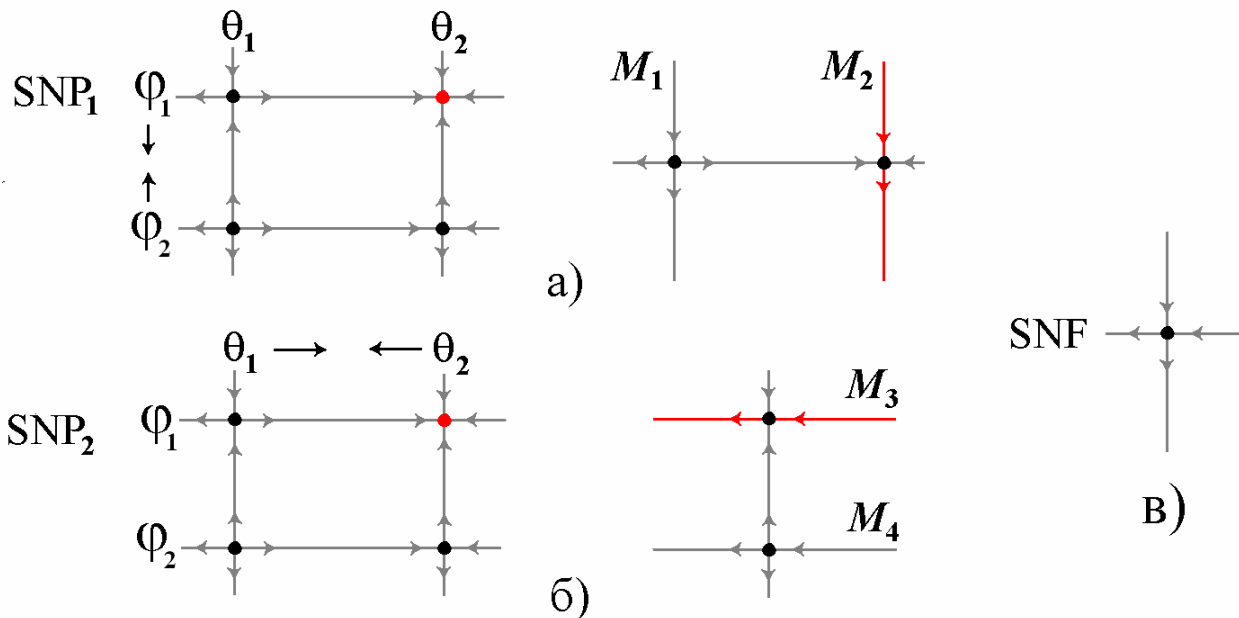
Режиму полной синхронизации отвечает устойчивое состояние равновесия фазовой системы (1.12). Подставим в (1.12)  $\dot{\theta} = 0$  и  $\dot{\varphi} = 0$ . Тогда можно выразить синус каждой относительной фазы через параметры системы:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3\mu}, \\ \sin \varphi &= \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3\mu}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Уравнения (1.13) легко решаются аналитически, причем решения появляются парами:  $\theta_1$  и  $\theta_2$  для первого уравнения, и  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – для второго:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\arcsin\left(\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3\mu}\right), \theta_2 = \pi + \arcsin\left(\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3\mu}\right), \\ \varphi_1 &= \arcsin\left(\frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3\mu}\right), \varphi_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3\mu}\right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Таким образом, на фазовой плоскости состояния равновесия лежат в вершинах прямоугольника  $(\theta_1, \varphi_1), (\theta_1, \varphi_2), (\theta_2, \varphi_1), (\theta_2, \varphi_2)$ , как схематически показано на рис.1.3 слева. Одно из них является устойчивым узлом, два – седлами, а еще одно – неустойчивым узлом. Устойчивое состояние равновесия единственное<sup>24</sup>, и именно оно отвечает за режим полной синхронизации.



**Рис.1.3.** Качественная картина состояний равновесия и их многообразий для системы (1.12) и ситуация на пороге разрушения полной синхронизации. Рис. (а) и (б) относится к двум вариантам вырожденной седло-узловой бифуркации состояний равновесия. Рис. (в) относится к ситуации коразмерности два, когда все равновесия стягиваются в одну точку.

Особенность фазовых уравнений (1.12) состоит в том, что устойчивые и неустойчивые многообразия всех четырех состояний равновесия образуют общий замкнутый, как говорят гетероклинический контур, схематически изображенный на рис.1.3. Этот факт существенным образом проявляется в особенностях бифуркаций состояний равновесия. Обсудим их более подробно.

Будем варьировать одну из комбинаций параметров, стоящих в правых частях (1.13), например, вторую. Тогда решения  $\theta_1$  и  $\theta_2$  не будут меняться, а

<sup>24</sup> Это особенность диссипативной связи, для реактивной связи это не так.

решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  будут сближаться, как показано стрелками на рис.1.3а. При выполнении условия

$$\frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3\mu} = \pm 1, \quad (1.15)$$

синус обращается по модулю в единицу, и значения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  сливаются. Как видно из рис.1.3а, это будет отвечать *одновременному* слиянию обеих пар состояний равновесия. Таким образом, наблюдается своего рода *вырожденная седло-узловая бифуркация* состояния равновесия  $SNP_1$ , когда одновременно сливаются и исчезают все четыре состояния равновесия. После такой бифуркации остаются два многообразия, обозначенные на рис.1.3а, как  $M_1$  и  $M_2$ . Из них и возникают неустойчивая и устойчивая инвариантные кривые, причем вторая отвечает за режим двухчастотных колебаний.

Описанная бифуркация  $SNP_1$  отвечает за разрушение полной синхронизации с возникновением квазипериодического режима частичного захвата первого и второго осцилляторов. В этом случае переменная  $\theta$  будет «примерно» постоянна.

Если варьировать другую комбинацию параметров, отвечающую первому соотношению (1.13), то при выполнении условия

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3\mu} = \pm 1, \quad (1.16)$$

будут сливаться решения  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , и уже не горизонтальные, а вертикальные многообразия, рис.1.3б. При этом за порогом бифуркации примерно постоянной будет уже вторая относительная фаза  $\varphi$ , что отвечает режиму частичного захвата второго и третьего осцилляторов. Будем обозначать такую бифуркацию  $SNP_2$ .

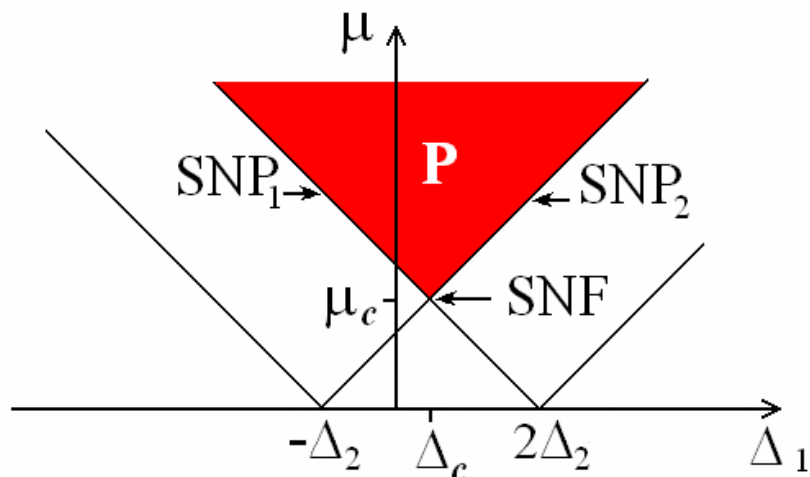
Мы описали качественно бифуркации, отвечающие за разрушение полной синхронизации<sup>25</sup>. Обсудим их вложение в пространство параметров. Для системы (1.12) таких параметров три:  $(\Delta_1, \Delta_2, \mu)$ . Условия (1.15), (1.16) задают некоторые поверхности в этом пространстве. Обратимся сначала к плоскости  $(\Delta_1, \mu)$ , отвечающей частотной расстройке второго осциллятора и величине связи. Расстройку (частоту) третьего осциллятора  $\Delta_2$  фиксируем.

На плоскости  $(\Delta_1, \mu)$  условия (1.15), (1.16) задают линии, показанные на рис.1.4. Они определяют два языка традиционного вида с вершинами в точках

$$\Delta_1 = -\Delta_2, \quad \Delta_1 = 2\Delta_2. \quad (1.17)$$

<sup>25</sup> Как мы отмечали во введении, на важность аналогичных бифуркаций в задачах синхронизации фазовых осцилляторов указано в [14,15] на примере задачи о вынужденной синхронизации двух осцилляторов.

Область существования устойчивого равновесия выделена красным цветом и обозначена буквой  $P$ . При выходе из области  $P$  при пересечении ее границ наблюдаются описанные выше вырожденные седло-узловые бифуркации с возникновением двухчастотных квазипериодических режимов. При этом при выходе через левую границу наблюдается бифуркация  $SNP_1$  с возникновением частичного захвата пары первый-второй осциллятор. При выходе через правую границу имеет место бифуркация  $SNP_2$  с возникновением частичного захвата пары второй-третий осциллятор.



**Рис.1.4.** Область полного захвата трех фазовых осцилляторов (1.12)  $P$  (красный цвет) и квазипериодических режимов (белый цвет). Линии отвечают условиям (1.15), (1.16). Обозначения:  $SNP$  – вырожденные седло-узловые бифуркации состояний равновесия,  $SNF$  – точка коразмерности два (*saddle node fan*),  $\mu_c$  – порог полной синхронизации.

Две линии седло-узловых бифуркаций описанного типа сходятся на плоскости параметров в точке, которую легко находим, совмещая (1.15) и (1.16):

$$\mu_c = \frac{\Delta_2}{2}, \quad \Delta_c = \frac{\Delta_2}{2}. \quad (1.18)$$

Эти значения отмечены на рис.1.4. Таким образом, область полной синхронизации имеет *пороговый характер* по величине связи, что отличает обсуждаемую ситуацию от случая двух связанных осцилляторов.

Точка (1.18) является, фактически, точкой *бифуркации коразмерности два*, которую будем обозначать  $SNF^{26}$ . Ее характерный признак состоит в том, что все четыре положения равновесия на фазовой плоскости одновременно стягиваются в одну точку, рис.1.3в. В окрестности (1.18) на плоскости параметров имеет место достаточно сложная картина областей различных режимов и бифуркаций, которую обсудим в следующих разделах.

<sup>26</sup> Смысл аббревиатуры объясним ниже.

Отметим, что выражения (1.17) для оснований вспомогательных языков на рис.1.4 допускают простую интерпретацию. Действительно, запишем резонансное условие, отвечающее равенству собственной частоты первого осциллятора и частоты захвата автономной пары второй-третьей:  $\Omega_1 = (\Omega_2 + \Omega_3)/2$ . Используя выражения для собственных частот осцилляторов (1.10), получаем тогда первое условие (1.17). Аналогично второе условие отвечает равенству частоты третьего осциллятора частоте захвата пары первый-второй осциллятор:  $\Omega_3 = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$ .

#### 1.1.4. Карта режимов трех фазовых осцилляторов.

##### Плоскость частотная расстройка – величина связи

Мы описали пока простейшие режимы колебаний трех связанных осцилляторов: полная синхронизация, частичная синхронизация пар осцилляторов и отсутствие синхронизации, рис.1.2а-г. Для более полного исследования необходимо детально проанализировать устройство пространства параметров, привлекая численные методы. С этой целью используем построение *карты ляпуновских показателей*, визуализирующей их спектр<sup>27</sup>. Как известно, наличие нулевых ляпуновских показателей и их число позволяет выделять и классифицировать квазипериодические режимы [1,18,44].

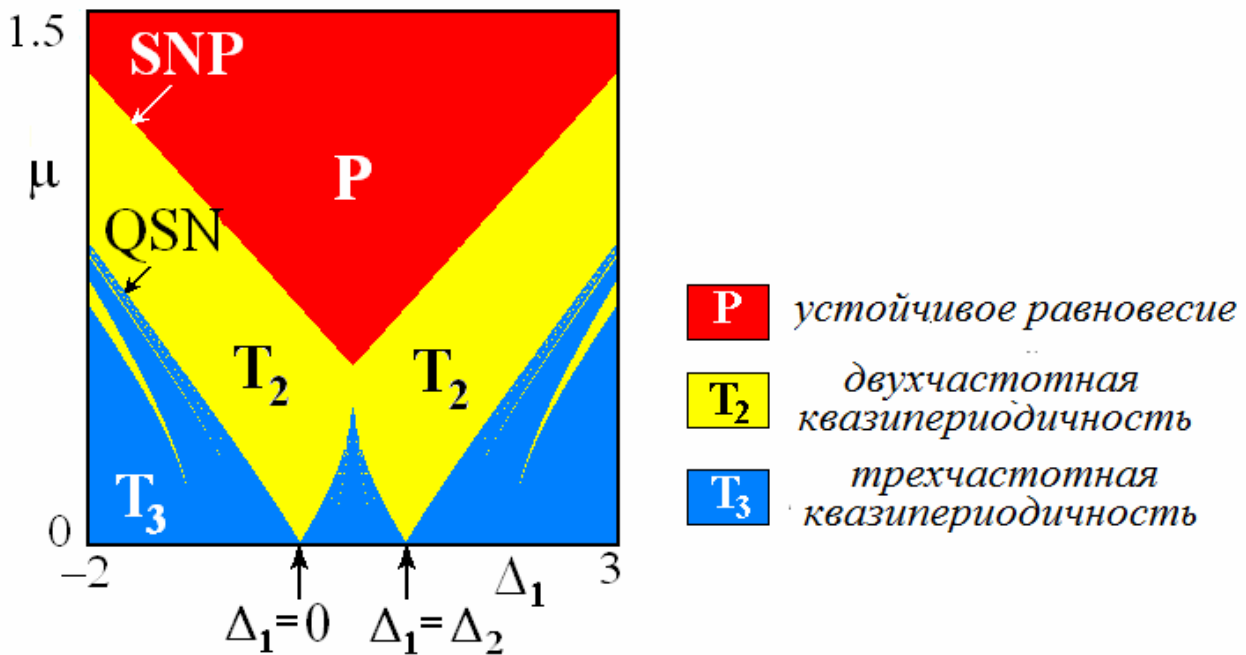
Система (1.12) имеет второй порядок и поэтому характеризуется двумя ляпуновскими показателями. Будем вычислять оба ляпуновских показателя  $\Lambda_1, \Lambda_2$  в каждой точке плоскости параметров  $(\Delta_1, \mu)$ . Затем эту плоскость окрасим в разные цвета в соответствии с величиной показателей так, чтобы визуализировать следующие режимы:

- а)  $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0$  – наличие устойчивого состояния равновесия  $P$  (точный захват фаз);
- б)  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$  – двухчастотный квазипериодический режим  $T_2$ ;
- в)  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$  – трехчастотный квазипериодический режим  $T_3$ .

(Напомним, что здесь размерность квазипериодических режимов дана в терминах исходной системы, см. раздел 1.1.2.)

Полученная карта показана на рис.1.5 для случая  $\Delta_2 = 1$ . Цветовая палитра аналогична рис.10 из Введения, а также расшифрована в подписи справа от рисунка.

<sup>27</sup> О вычислении спектра ляпуновских показателей см., например, [54].



**Рис.1.5.** Карта ляпуновских показателей трех диссипативно связанных фазовых осцилляторов (1.12) на плоскости «частота второго осциллятора – величина связи». Обозначения: *SNP* – линия вырожденной седло-узловой бифуркации состояний равновесия, *QSN* – линия квазипериодической седло-узловой бифуркации. Значение параметра  $\Delta_2=1$ .

Анализируя рис.1.5, прежде всего, отмечаем наличие области точного захвата всех трех осцилляторов *P*, которая отвечает аналитическому рассмотрению. В частности, выявляется амплитудный порог полной синхронизации трех осцилляторов, определяемый формулой (1.18).

Область полной синхронизации граничит также с двумя обширными областями двухчастотных режимов, обозначенными на рисунке буквами *T<sub>2</sub>*. Они отвечают режимам частичного захвата первого-второго (левая область) и второго-третьего (правая область) осцилляторов. Области *T<sub>2</sub>* имеют вид языков, по виду напоминающие классические языки Арнольда. Основания этих языков лежат на оси частотной расстройки, а сами они погружены в область трехчастотной квазипериодичности.

Нетрудно найти основания этих языков двухчастотной квазипериодичности. Действительно, анализируемая фазовая система при выключенной связи характеризуется тремя собственными частотами, которые даются соотношениями (1.10):

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \frac{\Delta_1}{2}, \quad \Omega_3 = \frac{\Delta_2}{2}. \quad (1.19)$$

Понятно, что при выключенной связи двухчастотные режимы наблюдаются при *резонансных условиях*, когда две из трех частот совпадают, т.е.

$$\Omega_1 = \Omega_2 \text{ или } \Omega_2 = \Omega_3. \quad (1.20)$$

Подставляя сюда значения собственных частот (1.19), получаем резонансные условия:

$$\Delta_1 = 0 \text{ или } \Delta_1 = \Delta_2. \quad (1.21)$$

Эти значения отмечены на рис.1.5 стрелочками. Как можно видеть из ляпуновской карты, они отвечают основаниям двух указанных языков двухчастотных режимов.

Вне этих языков располагается трехчастотная область  $T_3$ , внутри которой, в свою очередь, имеются узкие языки *резонансных двухчастотных режимов* высшего порядка. Острия этих языков также лежат на оси частотной расстройки. Их свойства и классификацию мы обсудим позже.

Отметим, что при малой связи трехчастотные режимы доминируют. Таким образом, в области малой связи картина напоминает классическую для синхронизации регулярных колебаний, характерную, например, для отображения окружности. При этом только роль синхронных режимов играют режимы двухчастотной квазипериодичности, а биений – трехчастотной.

### **1.1.5. Квазипериодическая седло-узловая бифуркация в фазовой модели**

В разделе 1.1.3 мы обсудили бифуркации, отвечающие за разрушение полной синхронизации с образованием двухчастотной квазипериодичности. Обсудим теперь бифуркацию, отвечающую за разрушение двухчастотной квазипериодичности в фазовой модели с диссипативной связью.

Пусть мы находимся внутри левой области  $T_2$  на рис.1.5. В этом случае на фазовой плоскости имеют место устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые, показанные на рис.1.3б. Будем уменьшать (с учетом знака) частотную расстройку  $\Delta_1$ . По мере приближения к границе области  $T_2$  инвариантные кривые сближаются. Точно на границе этой области, обозначенной на рис.1.5  $QSN$ , эти кривые сливаются, а затем исчезают с возникновением потока фазовых траекторий, характерного для трехчастотного режима.

Таким образом, имеет место бифуркация инвариантных кривых. Ее можно назвать *седло-узловой бифуркацией инвариантных кривых* [14] или же *квазипериодической седло-узловой бифуркацией QSN*. В терминах исходной системы она отвечает за разрушение двухчастотной квазипериодичности с возникновением трехчастотных колебаний.

Дадим небольшой комментарий к названию бифуркации. Оно использует аналогию с традиционной седло-узловой бифуркацией состояний равновесия. В этом случае в одномерной системе сливаются устойчивое и неустойчивое равновесия, а при переходе к двумерным системам – сливаются узел и седло. В обсуждаемом случае в рамках фазовой модели сливаются устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые, а при отказе от фазового приближения происходит слияние устойчивого и седлового инвариантных торов. Таким образом, фактически, это седло-узловая бифуркация торов, найденная в рамках фазового приближения.

Как мы отмечали, на плоскости параметров на рис.1.5 имеется множество других, более узких языков двухчастотных режимов. Они своими границами также имеют квазипериодические седло-узловые бифуркации.

### 1.1.6. Дерево синхронизации и кластеризация

При анализе синхронизации в ансамбле осцилляторов полезно отследить свойства *наблюдаемых частот*. Обсудим подробнее имеющую место на рис.1.5 картину с этой точки зрения. С этой целью построим *дерево синхронизации*, которое представляет собой диаграмму, дающую зависимость всех наблюдаемых частот ансамбля осцилляторов от некоторого параметра [1]. В нашем случае – параметра связи  $\mu$ .

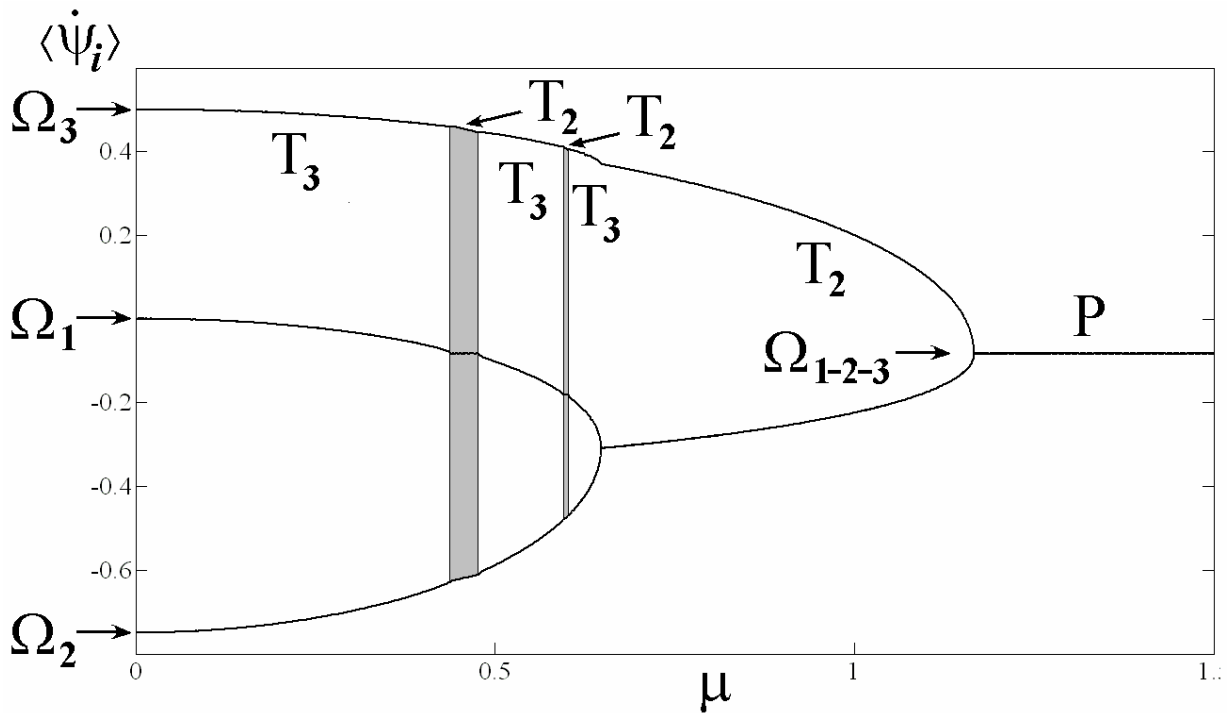
Для того чтобы вычислить наблюдаемые частоты, необходимо решить систему (1.9) и найти средние значения скорости изменения фаз:

$$\langle \dot{\psi}_i \rangle = \frac{\dot{\Psi}_i}{T}, \quad T \rightarrow \infty. \quad (1.22)$$

Результат такого расчета в виде графиков зависимости частот  $\langle \dot{\psi}_i \rangle$  от параметра связи показан на рис.1.6.

При малой связи в системе реализуется трехчастотный режим  $T_3$ , и наблюдаемые частоты близки к собственным частотам осцилляторов  $\Omega_i$  (1.19). Для удобства значения собственных частот показаны стрелками по левому краю рисунка. С ростом параметра связи  $\mu$  частоты первого и второго осцилляторов  $\langle \dot{\psi}_1 \rangle$  и  $\langle \dot{\psi}_2 \rangle$  сближаются, и при некотором его значении совпадают, так что две соответствующие ветви дерева сливаются. На рис.1.5 мы в этот момент проходим точку седло-узловой бифуркации инвариантных кривых, и попадаем в область, отвечающую возникновению частичной синхронизации первого и второго осцилляторов.





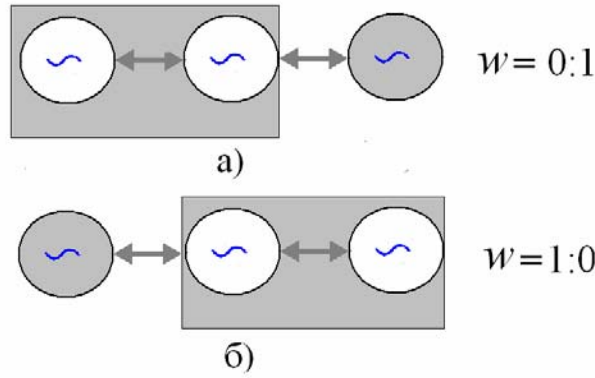
**Рис.1.6.** Дерево синхронизации трех диссипативно связанных фазовых осцилляторов (1.12),  $\Omega_i$  – собственные частоты автономных осцилляторов,  $\Omega_{1-2-3}$  – частота захвата трех осцилляторов в режиме полной синхронизации. Серым цветом выделены два наиболее широких окна резонансных двухчастотных режимов. Значения параметров  $\Delta_1 = -1.5$ ,  $\Delta_2 = 1$ .

Таким образом, в системе наблюдается простейшая *кластеризация*, схематически представленная на рис.1.7а. Частота колебаний возникшего кластера из двух синхронно колеблющихся осцилляторов близка к частоте взаимного захвата первого и второго осцилляторов при отключенном третьем. Действительно, два осциллятора захватываются на их центральной частоте. Поэтому с учетом (1.19) частоты захвата пар осцилляторов даются соотношениями

$$\Omega_{1-2} = \frac{\Delta_1}{4}, \quad \Omega_{2-3} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4}. \quad (1.23)$$

Для использованных значений параметров  $\Delta_1 = -1.5$  и  $\Delta_2 = 1$  получаем  $\Omega_{1-2} = -0.375$ , что близко к частоте захвата первого и второго осцилляторов на рис.1.6.

При дальнейшем росте величины связи частота колебаний возникшего кластера сближается с частотой третьего осциллятора, и при некотором пороговом значении они тоже совпадают. Возникает полная синхронизация системы  $P$ .



**Рис.1.7.** Объединение трех связанных осцилляторов в кластеры,  $w$  – число вращения на «торе фаз», см. раздел 1.1.7.

Нетрудно показать, что частота  $\Omega_{1-2-3}$ , отвечающая режиму полной синхронизации всех трех осцилляторов, равна среднему арифметическому их собственных частот. Действительно, подставляя (1.13) в выражения (1.9), получаем для частоты захвата:

$$\Omega_{1-2-3} = \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}. \quad (1.24)$$

В свою очередь, используя выражения (1.19), получаем

$$\Omega_{1-2-3} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3}{3}. \quad (1.25)$$

Вернемся к области на дереве, когда наблюдаются три его ветви. На рис.1.8 слева показан соответствующий увеличенный фрагмент дерева. В этом случае, в основном, наблюдаются трехчастотные режимы. Однако, выбранный маршрут  $\Delta_1 = -1.5$  на плоскости  $(\Delta_1, \mu)$  пересекает и узкие языки двухчастотных режимов. Самое широкое окно такого режима хорошо просматривается на рис.1.5, и отмечено полосой серого цвета на дереве рис.1.6. Портрет аттрактора в этом случае показан на рис.1.8а. Можно видеть, что это инвариантная кривая, но она имеет более сложную форму, чем представленные ранее варианты.

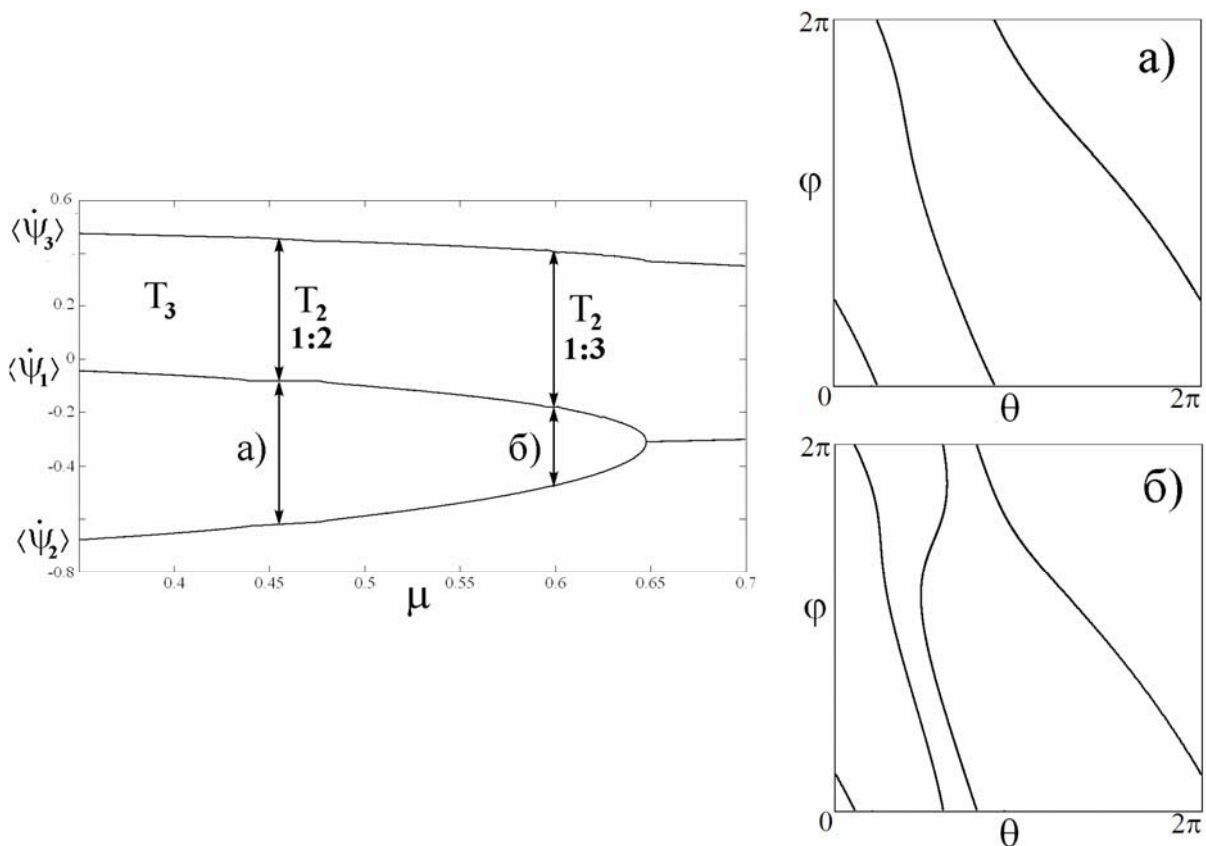
В этом случае характер режима, как двухчастотной квазипериодичности, проявляется в том, что между ветвями дерева наблюдается некоторое дополнительное *резонансное условие*. Действительно, центральная ветвь дерева располагается точно посередине между двумя крайними, как показано стрелками на рис.1.8. Это условие выполняется в некотором интервале изменения параметра связи  $\mu$ , отвечающем ширине области двухчастотного режима на рис.1.6.

Резонансы такого типа можно охарактеризовать фактором (*числом вращения*), определяемым разностью наблюдаемых частот:

$$w = \frac{|\langle \dot{\psi}_1 \rangle - \langle \dot{\psi}_2 \rangle|}{|\langle \dot{\psi}_2 \rangle - \langle \dot{\psi}_3 \rangle|}. \quad (1.26)$$

Для рассмотренного случая  $w = 1:2$ .

На плоскости параметров имеется множество языков резонансных двухчастотных режимов разного типа, хотя они и достаточно узкие. Соответственно, на дереве синхронизации наблюдается множество, своего рода, *резонансных интервалов*. На рис.1.6 серой полосой отмечен еще один такой интервал. Резонансное условие в этом случае проявляется в том, что центральная ветвь дерева делит расстояние между крайними в пропорции  $w = 1:3$ . Этот факт иллюстрируют вторая пара стрелок на увеличенном фрагменте дерева на рис.1.8. Аттрактор такого режима приведен на рис.1.8б.



**Рис.1.8.** Увеличенный фрагмент дерева синхронизации в области резонансных двухчастотных режимов двух типов и фазовые портреты соответствующих инвариантных кривых: а)  $w = 1:2$ ,  $\mu = 0.45$ , б)  $w = 1:3$ ,  $\mu = 0.6$ , остальные параметры  $\Delta_1 = -1.5$ ,  $\Delta_2 = 1$ .

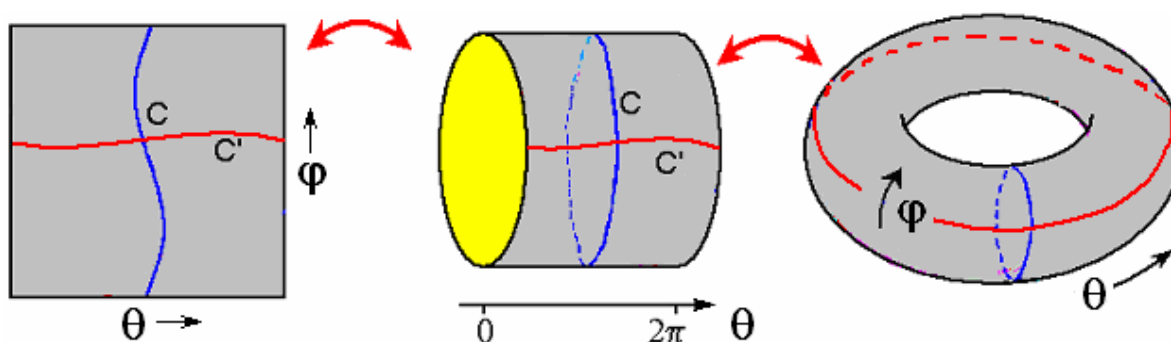
Таким образом, дерево синхронизации дает наблюдаемые частоты и картину кластеризации в системе трех осцилляторов, но имеет и определенные особенности организации, обусловленные множеством резонансных режимов.

Отметим, что на фазовых портретах число вращения  $w = p:q$  отвечает числам  $p$  и  $q$  пересечений траектории с вертикальной и горизонтальной сторонами фазового квадрата, см. примеры на рис.8а,б. Далее обсудим классификацию инвариантных кривых более подробно.

### 1.1.7. Классификация инвариантных кривых

Как мы отмечали, существует множество резонансных двухчастотных режимов, которым отвечают фазовые портреты аттракторов в форме инвариантных кривых. Поэтому удобно дать соответствующую классификацию, используя геометрическую интерпретацию. Это можно сделать, используя тот факт, что математически фазовые уравнения (1.12) представляют собой *поток на торе*. Действительно, воспользуемся  $2\pi$ -периодичностью фаз по угловым переменным. Это свойство позволяет трансформировать фазовый квадрат  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$  в тор, «склеивая» его дважды, как показано на рис.1.9. Тогда инвариантные кривые превращаются в замкнутые орбиты на поверхности «тора фаз».

В результате такой процедуры кривая  $C$ , отвечающая частичному захвату первого и второго осцилляторов, трансформируется в замкнутую кривую, обходящую тор только по меридиану. Кривая  $C'$ , отвечающая частичному захвату второго и третьего осцилляторов, трансформируется в орбиту, обходящую тор только по параллели.



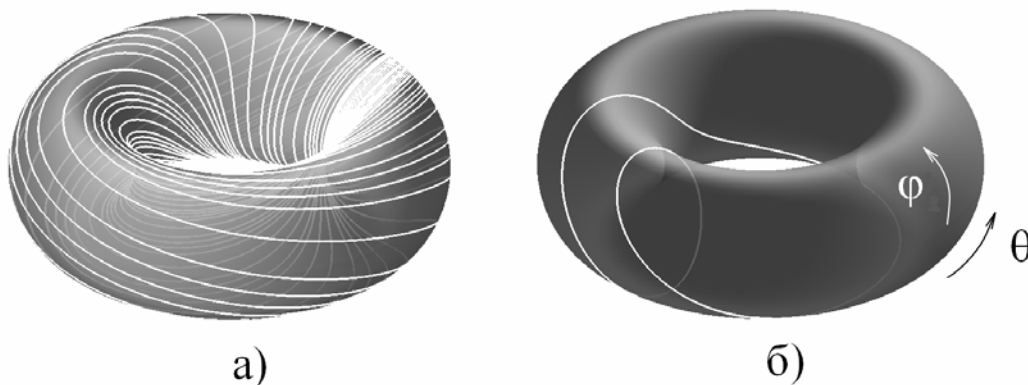
**Рис.1.9.** Качественная картина замыкания плоскости фазовых переменных  $(\theta, \varphi)$  в тор. Показаны инвариантные кривые  $C$  и  $C'$ , отвечающие простейшим режимам с числами вращения  $0:1$  и  $1:0$ .

Указанная интерпретация позволяет понять возможность более сложных вариантов инвариантных кривых, которые образуют замкнутые орбиты на поверхности тора<sup>28</sup>. Каждой инвариантной кривой можно приписать *число вращения*  $w = p:q$ , где  $p$  – число оборотов по поверхности построенного тора по параллели, а  $q$  – по меридиану. При этом отвечающие кривым  $C$  и  $C'$  на рис.1.9 режимы частичного захвата первого-второго и второго-третьего осциллятора характеризуются числами вращения  $w = 1:0$  и  $w = 0:1$ . Исходя из топологических соображений, ясно, что возможны инвариантные кривые с

<sup>28</sup> В определенном смысле их можно назвать предельными циклами на торе, но мы здесь и далее будем использовать термин инвариантная кривая.

любыми числами вращения, представляемыми несократимыми дробями с рациональными значениями  $p$  и  $q$ .

Пусть теперь на фазовой плоскости нет притягивающих объектов. Такому режиму будет соответствовать эргодический тор, как показано на рис.1.10а. Фазовые траектории будут всюду плотно покрывать его поверхность. Рядом, на рис.1.10б представлен пример режима, отвечающего инвариантной кривой с числом вращения  $w = 1:2$ . Сравнение этих двух рисунков делает понятным, что режимы с инвариантными кривыми являются *резонансными* по отношению к случаю потока фазовых траекторий. Действительно, соответствующая инвариантная кривая лежит на поверхности «тора фаз»<sup>29</sup>.



**Рис.1.10.** Траектории на «торе фаз»: а) поток фазовых траекторий на эргодическом торе, отвечающий трехмерному тору в исходной системе; б) инвариантная кривая на поверхности тора, отвечающая резонансному двухчастотному тору с числом вращения  $w = 1:2$ .

Обсудим теперь, как указанные свойства квазипериодических режимов проявляются в динамике исходной системы (1.1). Если на плоскости  $(\theta, \varphi)$  в фазовой модели реализуется поток траекторий, то с движением по поверхности эргодического тора на рис.1.10а ассоциируются две частоты, из которых одна отвечает движению по параллели, а вторая – по меридиану. В соответствии с (1.2) к ним следует добавить еще одну частоту – опорную единичную частоту колебаний системы. Таким образом, этому режиму в исходной системе отвечает режим трехчастотной квазипериодичности. А режимы с замкнутыми орбитами на «торе фаз» будут отвечать двухчастотной квазипериодичности в исходной системе<sup>30</sup>.

<sup>29</sup> Его не следует путать с тором для исходной системы.

<sup>30</sup> Подчеркнем, что введенное здесь число вращения  $w$  характеризует режимы в фазовой модели. В этом случае обсуждается классификация квазипериодических режимов в окрестности основного резонанса. В случае, если в поле зрения попадают высшие периодические резонансы, может потребоваться введение двух чисел вращения по другим правилам, см. с. 126, а также обсуждение на с. 164.

### 1.1.8. Карта торов системы трех связанных фазовых осцилляторов.

Интерпретация динамики фаз на торе с помощью рис.1.10 позволяет предложить еще один способ численного исследования устройства пространства параметров фазовой системы, модифицируя для данной задачи метод карт динамических режимов [54]. Постараемся теперь выявить на плоскости параметров области, отвечающие *разным числам вращения*  $w = p : q$ . Для этого используем тот факт, что числа  $p$  и  $q$  дают, фактически, число пересечений фазовой траектории с горизонтальными и вертикальными сторонами фазового квадрата.

Алгоритм организован следующим образом. Фиксируем сначала точку на плоскости параметров  $(\Delta_1, \mu)$ . Решаем затем численно систему (1.12) для этих значений параметров и находим установившийся режим. Задавшись координатами пересечения установившейся траектории с одной из сторон фазового квадрата, определяем период этого режима по времени возврата траектории обратно в эту точку (с определенным малым допуском). После этого определяем на интервале времени, длительностью в это период, число пересечений фазовой траектории с границами фазового квадрата:  $p$  с левой и правой сторонами,  $q$  – с верхней и нижней. Затем окрашиваем точку плоскости параметров в определенный цвет, свой для каждого типа двухчастотного режима. Трехчастотные режимы фиксируются как неперiodические. После этого выполняем аналогичную процедуру в каждой точке плоскости параметров.

Следует иметь в виду, что числа  $p$  и  $q$ , определяющие число вращения, совпадают с числом пересечений притягивающей кривой сторон фазового квадрата только для простейших двухчастотных режимов. В случае резонансов высокого порядка фаза может совершать колебательные движения, что приводит к «ложным» пересечениям, которые учитывать не нужно. Принимая во внимание отождествление правой/левой и верхней/нижней сторон фазового квадрата, можно использовать следующее правило: если траектория покидает фазовый квадрат через верхнюю границу и снова входит в него через нижнюю, значение  $p$  увеличивается на единицу, а если наоборот – уменьшается. Точно так же, если траектория покидает фазовый квадрат через правую границу и снова входит в него через левую, значение  $q$  увеличивается на единицу, а если наоборот – уменьшается. Начальные условия во всех расчетах выбирались нулевыми:  $\theta(0) = \varphi(0) = 0$ .

Будем использовать следующую цветовую палитру. Режиму с числом вращения  $w=1:0$  сопоставим синий цвет. Уменьшение числа вращения отвечает постепенной трансформации этого цвета в зеленый, так что режиму  $w=1:1$  отвечает светло-зеленый цвет. Затем зеленый цвет постепенно трансформируется в красный, так что режиму с числом вращения  $w=0:1$  отвечает насыщенный красный цвет. Полученная карта в тех же масштабах и для тех же параметров, что и приведенная выше ляпуновская карта, показана на рис.1.11. Будем называть ее далее *картой торов*. Дробями на рисунке указаны числа вращения основных резонансных двухчастотных режимов.

Наряду с простейшими режимами  $w=1:0$  и  $w=0:1$  на карте выявляется множество резонансных двухчастотных языков с разными числами вращения. Самые широкие из них отвечают значениям  $w=1:2$  и  $w=2:1$ , они обозначены соответствующими цифрами на рис.1.1.

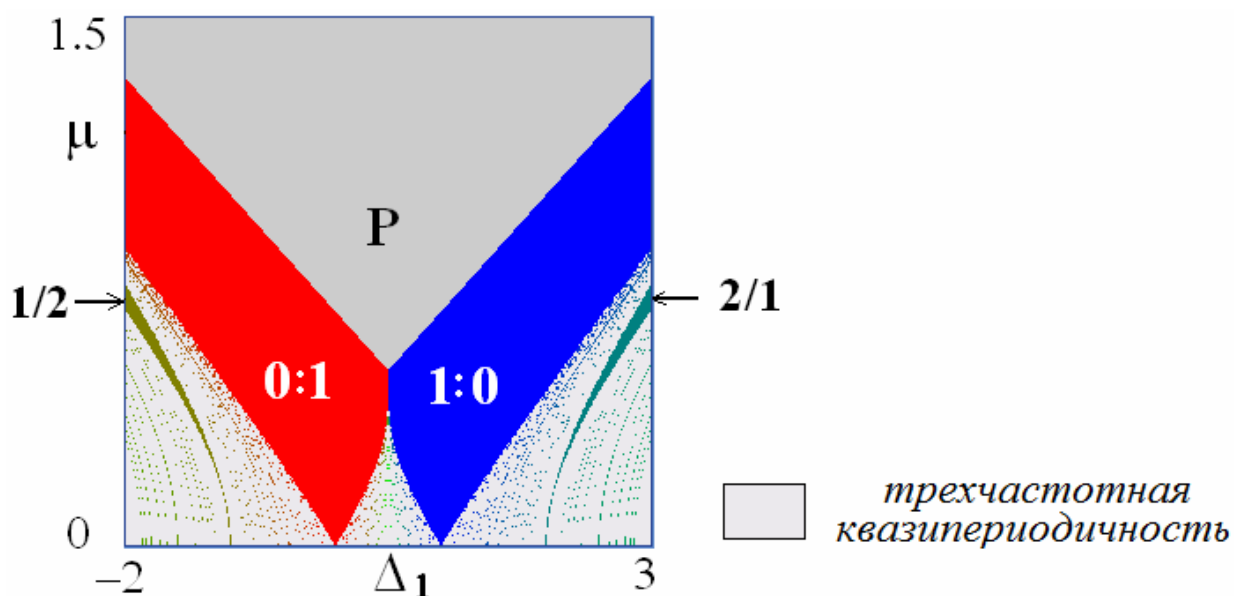


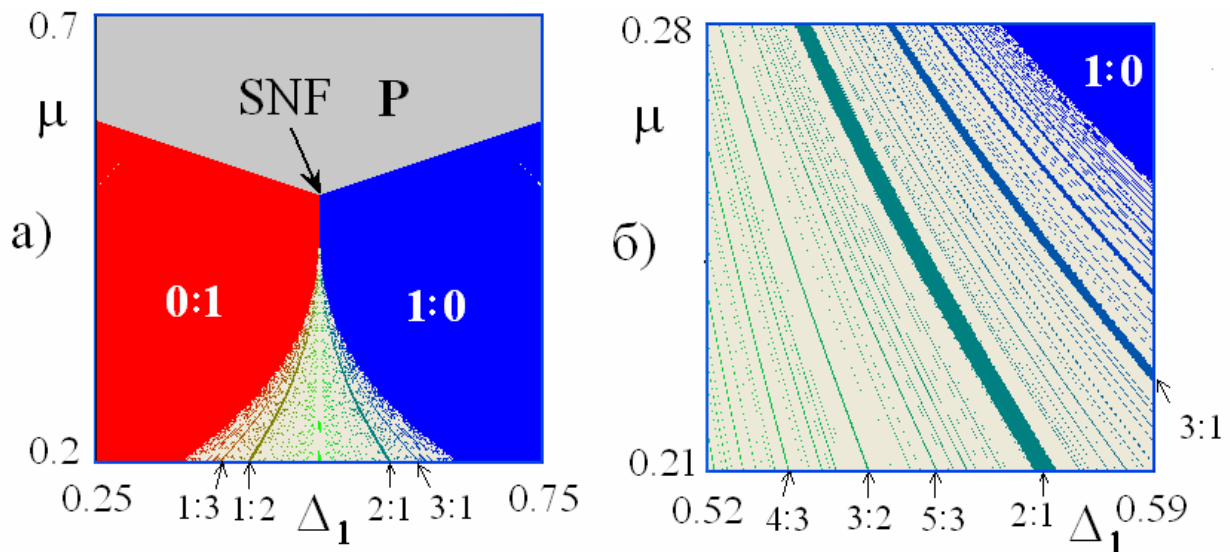
Рис.1.11. Карта торов для трех связанных фазовых осцилляторов (1.12),  $\Delta_2 = 1$ ,  $\mu = 0.15$ .

### 1.1.9. Точка «*saddle node fan*»

Анализируя рис.1.11, можно заключить, что точка коразмерности два (1.18), отвечающая порогу полной синхронизации, играет важную роль в устройстве плоскости параметров системы с трехчастотной квазипериодичностью. Обратимся к увеличенной карте торов вблизи этой точки на рис.1.12а.

В ее окрестности имеют место режимы полного захвата всех осцилляторов, частичного захвата пар осцилляторов и трехчастотных режимов. В свою очередь, область трехчастотных режимов пронизана целой системой языков резонансных двухчастотных режимов, самые широкие из которых имеют числа

вращения 1:2 и 2:1, а более узкие – числа вращения 1:3 и 3:1 и т.д. Об их многообразии можно судить по еще более увеличенному фрагменту на рис.1.12б, на котором фиксируются области с числами вращения 4:3, 3:2, 5:3 и т.д. Все эти языки, сужаясь, приходят в обсуждаемую точку.



**Рис.1.12.** Увеличенные фрагменты карты торов рис.1.11 в окрестности точки коразмерности два *SNF* – *saddle node fan*.

Наличие подобных точек, по-видимому, характерный атрибут задач о трехчастотной квазипериодичности. Так, аналогичные точки были представлены в работе [18] для связанных отображений поворота, моделирующих динамику связанных осцилляторов (рис.1.22 в [18]). Там они получили название *saddle node fan* – «седло-узловой веер», в соответствии с характерным расположением системы высших языков двухчастотных режимов<sup>31</sup>. Поэтому мы будем использовать обозначение *SNF*. Как мы отмечали выше, в рассматриваемом случае в этой точке все четыре положения равновесия системы на фазовой плоскости стягиваются в одну точку<sup>32</sup>.

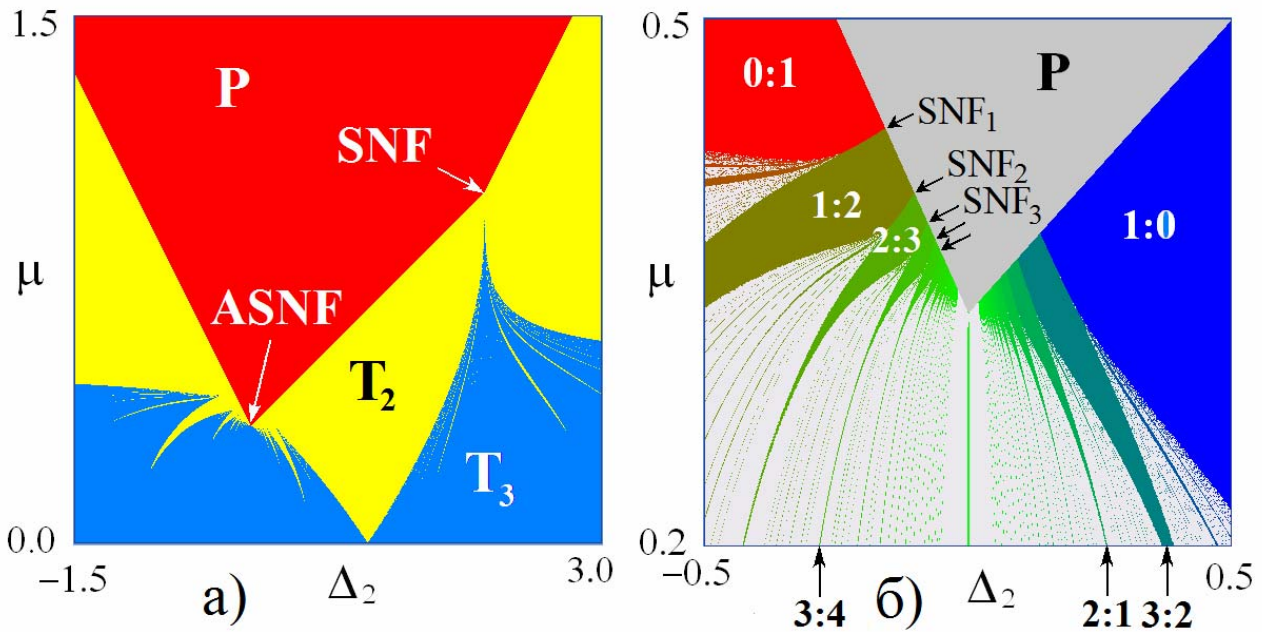
### 1.1.10. Точка «*accumulation of saddle node fans*»

Пока мы рассмотрели устройство плоскости параметров  $(\Delta_1, \mu)$ , т.е. плоскости «собственная частота второго осциллятора – параметр связи». При этом частоты первого и третьего были фиксированы. Зафиксируем теперь частоту первого и второго осциллятора, и будем менять частоту третьего  $\Delta_2$ . Устройство плоскости параметров  $(\Delta_2, \mu)$  в этом случае иллюстрирует рис.1.13.

<sup>31</sup> Они также достаточно уверенно диагностируются и по экспериментальным картам, представленным в работе [23], см. рис.9 в [23].

<sup>32</sup> Отметим, что для данной системы эта точка лежит на линиях вырожденных седло-узловых бифуркаций *SNP*, так что и она является, в определенном смысле, вырожденной.





**Рис.1.13.** а) Карта ляпуновских показателей трех фазовых осцилляторов (1.12) на плоскости  $(\Delta_2, \mu)$ , б) ее увеличенный фрагмент в виде карты торов. Значение параметра  $\Delta_1 = 1$ . Обозначения: *SNF* – точки *saddle node fan*, *ASNF* – точка *accumulation of saddle node fans*.

Сравнивая его с рис.1.5, отмечаем, что область полной синхронизации *P* устроена несколько иначе. Она ограничена тремя ломаными линиями, которые образуют теперь два характерных «угла». Первый из них отвечает большему значению уровня связи, и представляет собой точку *saddle node fan* *SNF*. Порогу же области полной синхронизации теперь соответствует другая точка, обозначенная на карте *ASNF*.

Более детально картина режимов в окрестности точки *ASNF* в виде карты торов дана на рис.1.13б. В этом случае двухчастотные области с разными числами вращения 0:1, 1:2, 2:3 и т.д. имеют протяженный контакт с областью полной синхронизации *P* в виде отрезков. Эти отрезки, в свою очередь, ограничены точками *saddle node fan*  $SNF_1, SNF_2, SNF_3, \dots$  на базе режимов разного типа. Можно видеть характерные сужающиеся языки трехчастотных режимов со встроенными веерными структурами, вытянутыми к каждой такой точке. С ростом чисел вращения  $w$  точки  $SNF_i$  накапливаются к точке *ASNF*, как показано стрелочками на рис.1.13б. Поэтому будем называть ее точкой «*accumulation of saddle node fans*»  $ASNF^{33}$  («накопление точек седло-узловой веер»).

<sup>33</sup> Термин введен в [18] при описании модельного отображения на торе и употребляется в [25] при обсуждении результатов эксперимента с тремя электронными осцилляторами. Отметим, что мы описываем все же визуальную картину, выявленную в результате численного моделирования. Более строгий анализ должен включать поиск нелокальных бифуркаций, и, возможно, выявит более тонкие особенности (см. в связи с этим работу [22]).

Как мы увидим далее, точки *saddle node fan* и *accumulation of saddle node fans* являются типичными структурными элементами в устройстве плоскости параметров диссипативно связанных фазовых осцилляторов.

### 1.1.11. Плоскость собственных частот осцилляторов.

Представление результатов на плоскости «собственная частота – величина связи» является традиционным в задаче о взаимной синхронизации осцилляторов. Однако, увеличение числа осцилляторов делает возможным дать иллюстрации для еще одного сечения пространства параметров, имеющего полезную физическую интерпретацию. Это плоскость собственных частот автономных осцилляторов. В соответствии с исходными уравнениями (1.1), в качестве двух таких частотных параметров можно использовать пару  $(\Delta_1, \Delta_2)$ . Поскольку частота первого осциллятора фиксирована и устраняется перенормировкой, то мы имеем, фактически, плоскость собственных частот второго и третьего осцилляторов.

Ляпуновская карта фазовой системы (1.12) на плоскости  $(\Delta_1, \Delta_2)$  для значения параметра связи  $\mu = 0.6$  представлена на рис.1.14а. Можно видеть, что область полной синхронизации имеет вид параллелограмма. Этот факт легко обосновать аналитически. Действительно, найденные в разделе 1.1.3 линии (1.15), (1.16), отвечающие обращению в  $\pm 1$  синусов относительных фаз, на плоскости  $(\Delta_1, \Delta_2)$  образуют две показанные на рис.1.14б полосы. Их пересечение и дает область полной синхронизации в виде параллелограмма<sup>34</sup>. Из (1.15), (1.16) следует также, что размер этой области растет линейным образом при увеличении параметра связи  $\mu$ .

Точки пересечения линий (1.15), (1.16) на рис.1.14б отвечают ситуациям коразмерности два. Таких точек четыре, их легко находим, совмещая (1.15), (1.16):

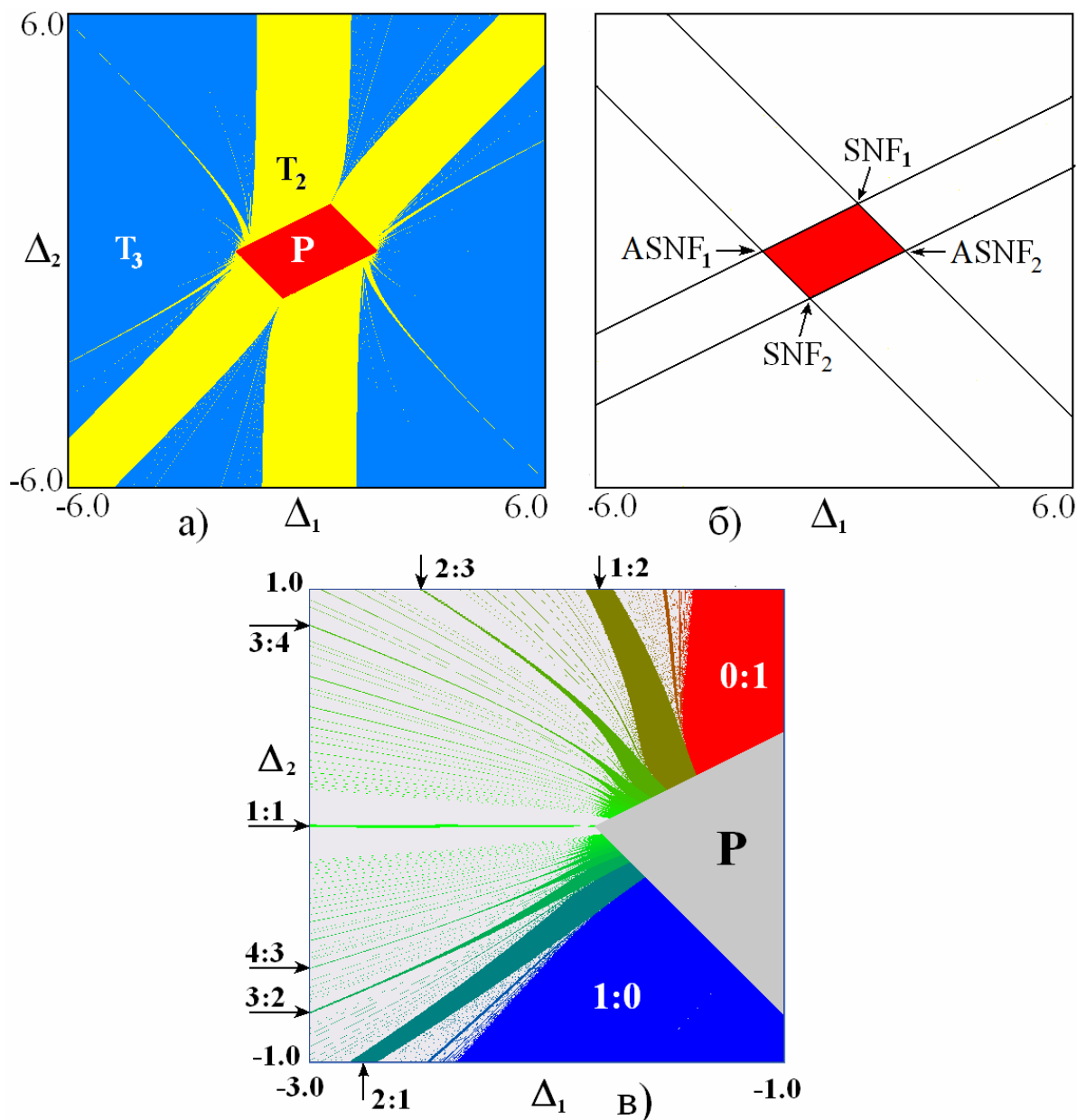
$$SNF_{1,2} : \Delta_1 = \mu, \Delta_2 = 2\mu; \Delta_1 = -\mu, \Delta_2 = -2\mu;$$

$$ASN F_{1,2} : \Delta_1 = 3\mu, \Delta_2 = 0; \Delta_1 = -3\mu, \Delta_2 = 0.$$

Как видно из карты рис.1.14а, организация системы языков двухчастотных режимов такова, что две первые ассоциируются с точками *saddle node fan*. Вторая пара представляет собой точки *accumulation of saddle node fans*. Характерное для точки *accumulation of saddle node fans* *ASN F* устройство системы языков двухчастотных режимов хорошо видно на увеличенном фрагменте карты тором на рис.1.14в. В этом случае языки резонансных

<sup>34</sup> Тот факт, что область полной синхронизации трех фазовых осцилляторов в случае диссипативной связи имеет форму параллелограмма, был отмечен П.С. Ландой, 1980 [2].

двухчастотных режимов не уменьшаются в размере при приближении к области полной синхронизации, а наоборот, расширяются.



**Рис.1.14.** а) Ляпуновская карта трех диссипативно связанных фазовых осцилляторов (1.12) на плоскости частотных параметров, б) конфигурация области полной синхронизации в рамках аналитического рассмотрения и точки коразмерности два, в) карта торов в окрестности точки  $ASNF$ . Значение параметра связи  $\mu = 0.6$ .

Отметим, что наиболее представительные области двухчастотных режимов на рис.1.14а имеют вид двух полос, на пересечении которых и располагается область полной синхронизации. Физически эти полосы отвечают частичной синхронизации двух разных пар осцилляторов и отвечают резонансным условиям  $\Delta_1 \approx 0$  и  $\Delta_1 \approx \Delta_2$ . В терминах исходной системы, в соответствии с

(1.19), первое из этих условий означает совпадение собственных частот первого и второго осцилляторов, а второе – второго и третьего.

## 1.2. Четыре диссипативно связанных осциллятора.

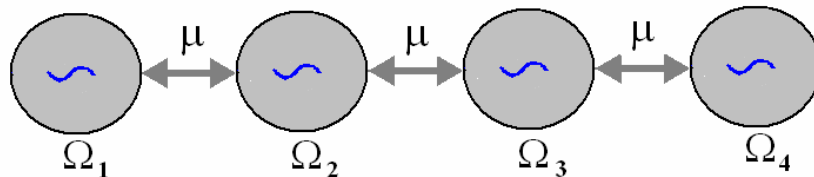
### Фазовая модель

#### 1.2.1. Фазовые уравнения четырех диссипативно связанных осцилляторов

Увеличим теперь число осцилляторов в ансамбле, и обратимся к цепочке из четырех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, схематически показанной на рис.1.15:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\
 \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\
 \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) + \mu(\dot{z} - \dot{w}) &= 0, \\
 \ddot{w} - (\lambda - w^2)\dot{w} + (1 + \Delta_3)w + \mu(\dot{w} - \dot{z}) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

Здесь смысл параметров аналогичен уравнениям (1.1), при этом величины  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  задают собственные частоты второго, третьего и четвертого осцилляторов, а частота первого принята за единицу.



**Рис.1.15.** Схематическое изображение четырех связанных осцилляторов Ван-дер-Поля.

Действуя аналогично разделу 1.1.1, получаем уравнения в фазовом приближении:

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_1 &= -\frac{\mu}{2} \sin \theta, \\
 \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\
 \dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi - \frac{\mu}{2} \sin \phi, \\
 \dot{\psi}_4 &= \frac{\Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \phi.
 \end{aligned}
 \tag{1.28}$$

Здесь использованы обозначения для относительных фаз осцилляторов

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3, \quad \phi = \psi_3 - \psi_4.
 \tag{1.29}$$

Перейдем теперь от (1.28) к уравнениям для относительных фаз:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\
\dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \phi, \\
\dot{\phi} &= \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi - \mu \sin \phi.
\end{aligned}
\tag{1.30}$$

Эта система третьего порядка и является фазовой моделью для цепочки из четырех диссипативно связанных осцилляторов.

### 1.2.2. Режим полной синхронизации четырех связанных осцилляторов

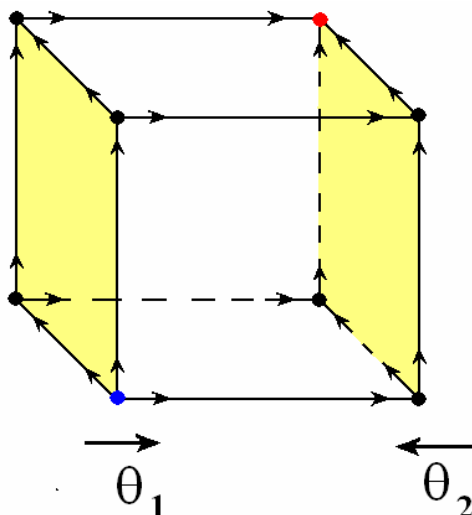
Проведем исследование фазовой системы (1.30). Прежде всего, найдем условия полной синхронизации всех осцилляторов. Для этого ищем состояния равновесия, полагая в (1.30)  $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \dot{\phi} = 0$ . После несложных преобразований можно получить следующие уравнения для синусов каждой из относительных фаз:

$$\begin{aligned}
\sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{4\mu}, \\
\sin \varphi &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{2\mu}, \\
\sin \phi &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2 - 3\Delta_3}{4\mu}.
\end{aligned}
\tag{1.31}$$

Полученная система уравнений (1.31) имеет решение, если все правые части по модулю меньше единицы. При вариации параметров решения каждого уравнения появляются парами:  $(\theta_1, \theta_2)$ ,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  и  $(\phi_1, \phi_2)$ . Поэтому система имеет *восемь* состояний равновесия, расположенных в фазовом пространстве  $(\theta, \varphi, \phi)$  в вершинах параллелепипеда, как схематически показано на рис.1.16. При этом одно из них всегда устойчиво, а остальные являются седлами и неустойчивым узлом.

При увеличении (по модулю) любой из трех комбинаций параметров в правых частях (1.31), две из граней параллелепипеда будут сближаться. Для примера на рис.1.16 стрелами показана ситуация, когда сближаются две выделенные желтым цветом грани, отвечающие паре решений  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . При обращении соответствующей комбинации параметров в (1.31) в  $\pm 1$  все восемь неподвижных точек *одновременно* попарно сливаются. Возникает негрубая ситуация из четырех равновесий, расположенных в вершинах прямоугольника.

Затем и они исчезают. В результате такой бифуркации устойчивое состояние равновесия становится невозможным, и полная синхронизация разрушается. Эта картина, в определенном плане, аналогична рис.1.3, только вложена в трехмерное фазовое пространство. Таким образом, за разрушение полной синхронизации отвечает специфический вариант *вырожденной седло-узловой бифуркации SNP*.



**Рис.1.16.** Качественная картина расположения состояний равновесия фазовой модели (1.30) в пространстве относительных фаз четырех осцилляторов  $(\theta, \varphi, \phi)$  и иллюстрация седло-узловой бифуркации, отвечающей слиянию пары решений (1.31)  $(\theta_1, \theta_2)$ . Красным цветом показано устойчивое равновесие, отвечающее за режим полной синхронизации, неустойчивое (репеллер) – синим.

Из приведенных рассуждений и соотношений (1.31) следуют выражения, определяющие седло-узловые бифуркации указанного типа:

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{4}, \quad (1.32)$$

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{2}, \quad (1.33)$$

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 - 3\Delta_3}{4}. \quad (1.34)$$

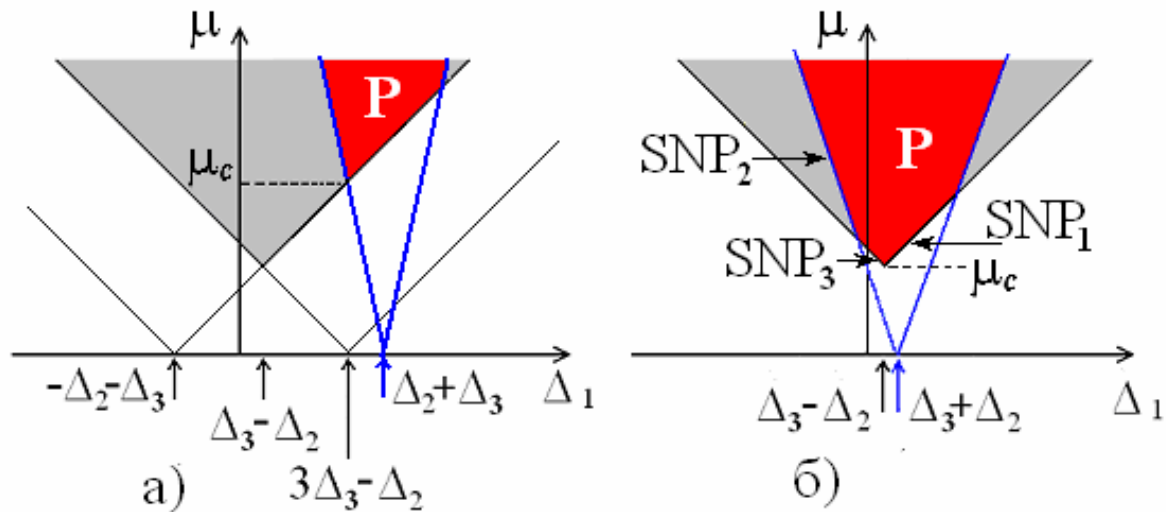
При этом возникают три варианта такой бифуркации  $SNP_{1-3}$ , соответствующих слиянию боковых граней параллелепипеда по одной из трех фазовых осей. Так за бифуркацию  $SNP_1$ , когда сливается пара решений  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , отвечает соотношение (1.32), за бифуркацию  $SNP_2$ , когда сливается пара решений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , отвечает соотношение (1.33), за бифуркацию  $SNP_3$ , когда сливается пара решений  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , отвечает соотношение (1.34).

Обратимся к устройству плоскости параметров частотная расстройка – величина связи, и обсудим, какие отличия возникают по сравнению со случаем трех осцилляторов.

Соотношения (1.32)-(1.34) на плоскости параметров  $(\Delta_1, \mu)$  определяют три языка, схематически показанные на рис.1.17а. Основания языков отвечают точкам

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -\Delta_2 - \Delta_3, \\ \Delta_1 &= \Delta_2 + \Delta_3, \\ \Delta_1 &= -\Delta_2 + 3\Delta_3.\end{aligned}\tag{1.35}$$

Из (1.31) нетрудно понять, что решения существуют только внутри области перекрытия всех этих языков, которая и образует область полной синхронизации  $P$  четырех связанных осцилляторов.



**Рис.1.17.** Различные конфигурации линий седло-узловых бифуркаций и область точного захвата  $P$  для четырех связанных осцилляторов (1.30);  $SNP_i$  - седло-узловые бифуркации трех типов, отвечающих за разрушение полной синхронизации,  $\mu_c$  – порог полной синхронизации.

Чтобы классифицировать режимы полной синхронизации, удобно следить за относительным положением показанной светло-серым цветом области пересечения языков (1.32),(1.34) и языка (1.33), что иллюстрирует рис.1.17. Абсциссы оснований этих двух областей равны, соответственно,  $\Delta_1 = \Delta_3 - \Delta_2$  и  $\Delta_1 = \Delta_3 + \Delta_2$ . Проследим, как меняется конфигурация при уменьшении частотной расстройки  $\Delta_2$ .

При  $\Delta_2 > \frac{\Delta_3}{2}$  реализуется конфигурация, показанная на рис.1.17а.

Отвечающая ей область полного захвата четырех осцилляторов показана красным цветом и отмечена буквой  $P$ . Полная синхронизация в этом случае имеет порог по величине связи, который находим, совмещая (1.32) и (1.34):

$$\mu_c = \frac{\Delta_3 + \Delta_2}{3}, \quad \Delta_c = \frac{\Delta_3 + \Delta_2}{3}. \quad (1.36)$$

При уменьшении расстройки  $\Delta_2$  языки на рис.1.17а сближаются, и при  $\Delta_2 < \frac{\Delta_3}{2}$  точка пересечения их границ переходит на другую ветвь, так что реализуется ситуация, показанная на рис.1.17б. В этом случае форма области точного захвата осцилляторов меняет форму, а пороговое значение связи перестает зависеть от  $\Delta_2$  и отвечает значению

$$\mu_c = \frac{\Delta_3}{2}, \quad \Delta_c = \Delta_3 - \Delta_2. \quad (1.37)$$

Затем ситуация симметричным образом повторяется.

Таким образом, возможны два основных типа области полной синхронизации четырех осцилляторов, отвечающие рис.1.17а и 1.17б. Наиболее интересным является второй случай.

### 1.2.3. Карта режимов четырех фазовых осцилляторов и типичные аттракторы

Обсудим устройство плоскости параметров более детально, используя двухпараметрический ляпуновский анализ. На рис.1.18а представлена карта ляпуновских показателей системы (1.30) на плоскости  $(\Delta_1, \mu)$ . Значения остальных параметров  $\Delta_1 = 0.3, \Delta_2 = 1$  выбраны так, чтобы реализовалась конфигурация области полной синхронизации типа рис.1.17б.

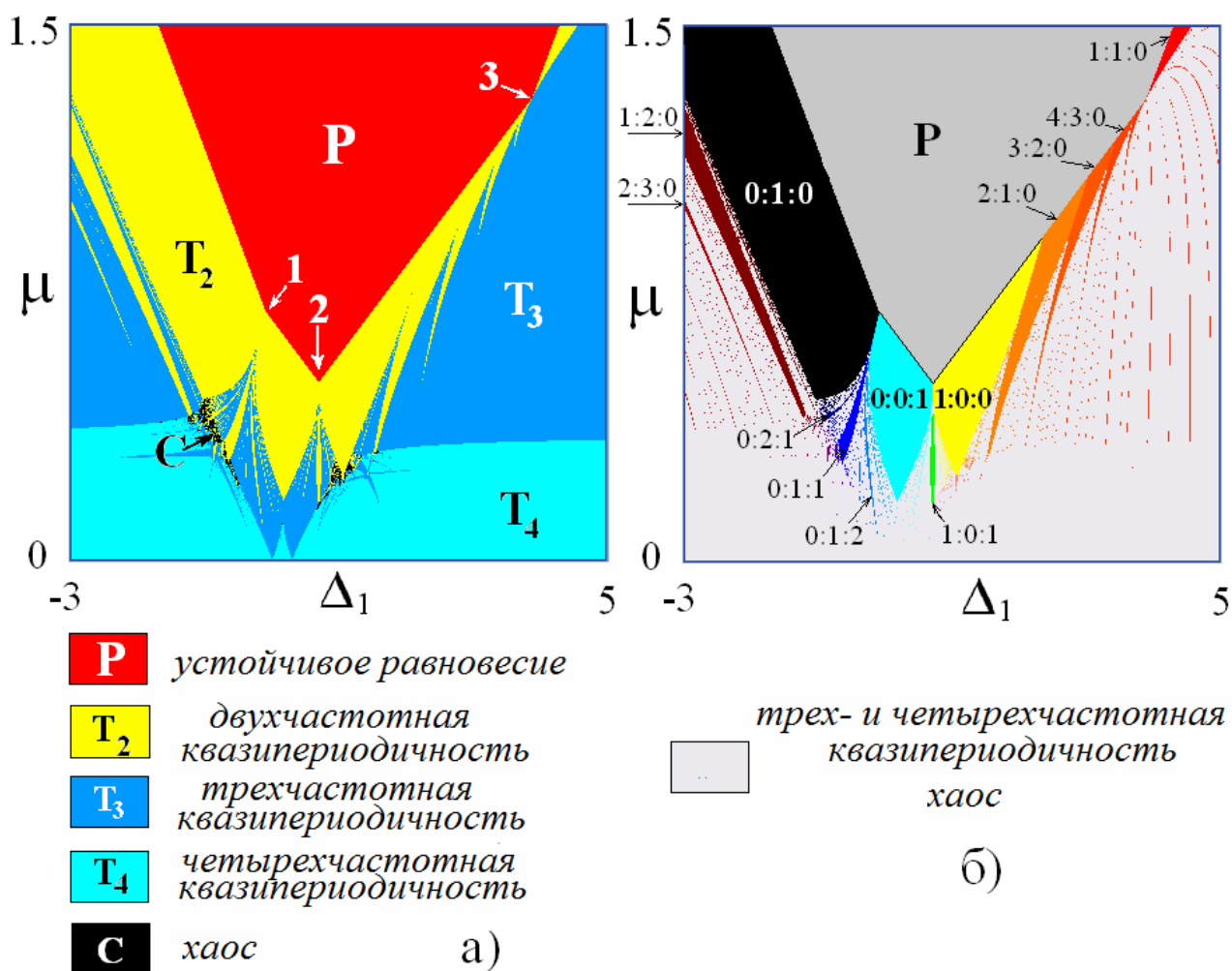
Исследуемая система характеризуется уже тремя ляпуновскими показателями, так что дополнительно появляется возможность режимов четырехчастотной квазипериодичности<sup>35</sup> и хаоса. На рис.1.18а показаны:

- а)  $P$  – область устойчивого состояния равновесия  $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$ ;
- б)  $T_2$  – режим двухчастотной квазипериодичности  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$ ;
- в)  $T_3$  – режим трехчастотной квазипериодичности  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0$ ;
- г)  $T_4$  – режим четырехчастотной квазипериодичности  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0$ ;
- д)  $C$  – хаотический режим,  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$ .

На карте можно видеть область полной синхронизации  $P$ , отвечающую аналитическому рассмотрению и рис.1.17б. Эта область имеет три «угла» – точки коразмерности два, обозначенные на рисунке цифрами 1, 2 и 3, в которых сходятся попарно линии седло-узловых бифуркаций.

<sup>35</sup> В исходной системе (1.27) такой режим соответствует четырехчастотному тору.





**Рис.1.18.** а) Карта ляпуновских показателей четырех диссипативно связанных фазовых осцилляторов (1.30), б) карта торов той же системы. Значения параметров  $\Delta_2 = 0.3, \Delta_3 = 1$ . Числа на правом рисунке отвечают трехкомпонентным числам вращения  $w$ .

Область полной синхронизации на рис.1.18 граничит с областями двухчастотных режимов, образующими характерные языки. В отличие от случая трех осцилляторов, основания языков двухчастотных режимов не лежат на оси частотной расстройки. Таким образом, теперь и двухчастотные режимы имеют порог по величине связи. Трехчастотные режимы располагаются, в основном, выше линии  $\mu \approx 0.3$ . При меньших значениях связи доминируют уже режимы четырехчастотной квазипериодичности. Однако и при очень малой связи можно видеть два языка трехчастотных режимов, основания которых расположены на оси частот.

Для системы из четырех связанных осцилляторов возникают и области хаоса, однако, они незначительны и локализованы на границе областей трех- и четырехчастотных режимов. Имеется также множество узких языков двухчастотных и трехчастотных режимов более высокого порядка.

Ляпуновскую карту удобно дополнить *картой торов*. Такая карта показана на рис.1.18б. Режимы двухчастотной квазипериодичности обозначены *трехкомпонентными числами вращения*  $w = p : q : r$ , где  $p, q, r$  отвечают числам существенных пересечений инвариантной кривой с гранями фазового куба со сторонами  $(0, 2\pi)$  в фазовом пространстве относительных фаз осцилляторов  $(\theta, \varphi, \phi)$ .

Выбор цветовой палитры для трехкомпонентных чисел вращения  $w = p : q : r$  представляется априорно не очевидным. Мы используем следующую гамму. Сначала определяется наибольшее число из трех чисел  $p, q$  и  $r$ :  $M = \max(p, q, r)$ . Затем красный, зеленый и синий цвета смешиваются в пропорции

$$\frac{P}{M} : \left(1 - \frac{q}{M}\right) : \frac{r}{M}. \quad (1.38)$$

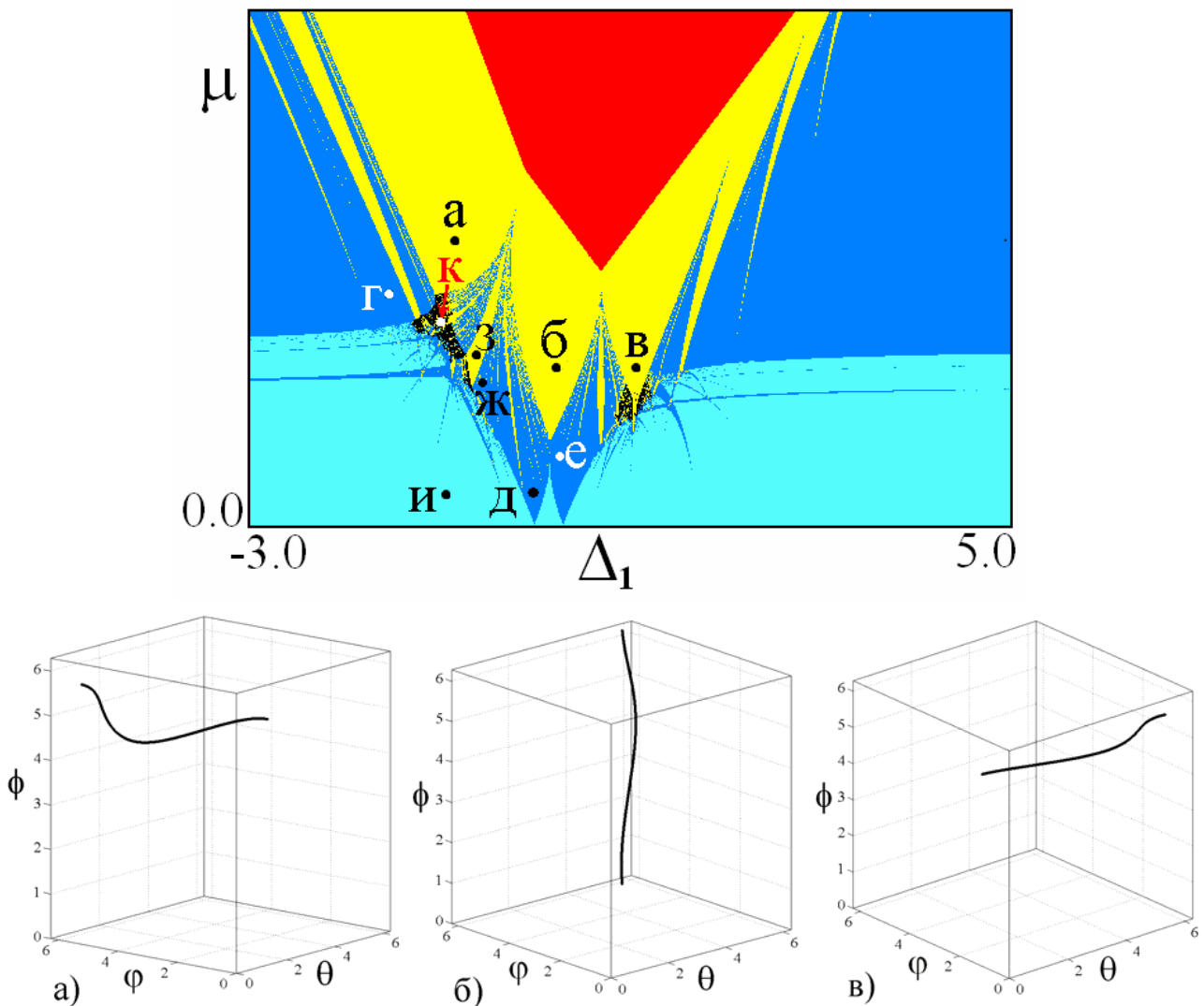
Сделано только одно исключение: для режима 1:0:1 по такому правилу получается белый цвет, плохо различимый на картах, так что он заменяется на светло-зеленый. Такие правила дают приемлемую цветовую гамму, причем соседние на карте языки с близкими числами вращения оказываются окрашенными в близкие цвета.

Полученная в результате карта показана на рис.1.18б. Она отчасти аналогична ляпуновской карте, но режимы двухчастотной квазипериодичности оказываются классифицированными в соответствии с числами вращения  $w = p : q : r$ . В свою очередь, трех-, четырехчастотные режимы и хаос в этом случае неразличимы и показаны одинаковым цветом, см. расшифровку цветовой палитры под рисунком.

Проиллюстрируем некоторые простейшие типы режимов системы четырех фазовых осцилляторов с помощью фазовых портретов. Примеры возможных аттракторов даны на рис.1.19, 1.21, 1.22. Буквы на этих рисунках соответствуют точкам на ляпуновской карте, фрагмент которой воспроизведен вверху на рис.1.19. Представленные серии рисунков отвечают постепенному уменьшению величины связи между осцилляторами. Аттракторы представлены в виде трехмерных объектов в пространстве трех относительных фаз  $(\theta, \varphi, \phi)$ .

Первая серия на рис.1.19 демонстрирует простейшие инвариантные кривые, вложенные в трехмерное фазовое пространство. Они отвечают режимам двухчастотной квазипериодичности. Обратимся к первому рисунку серии рис.1.19а. Можно видеть, что в этом случае две фазы  $\theta$  и  $\phi$  колеблются около некоторых равновесных значений, а фаза  $\varphi$  изменяется во всем диапазоне

$(0, 2\pi)$ . В соответствии с определением относительных фаз (1.29), это означает, что первый-второй и третий-четвертый осцилляторы взаимно захвачены.



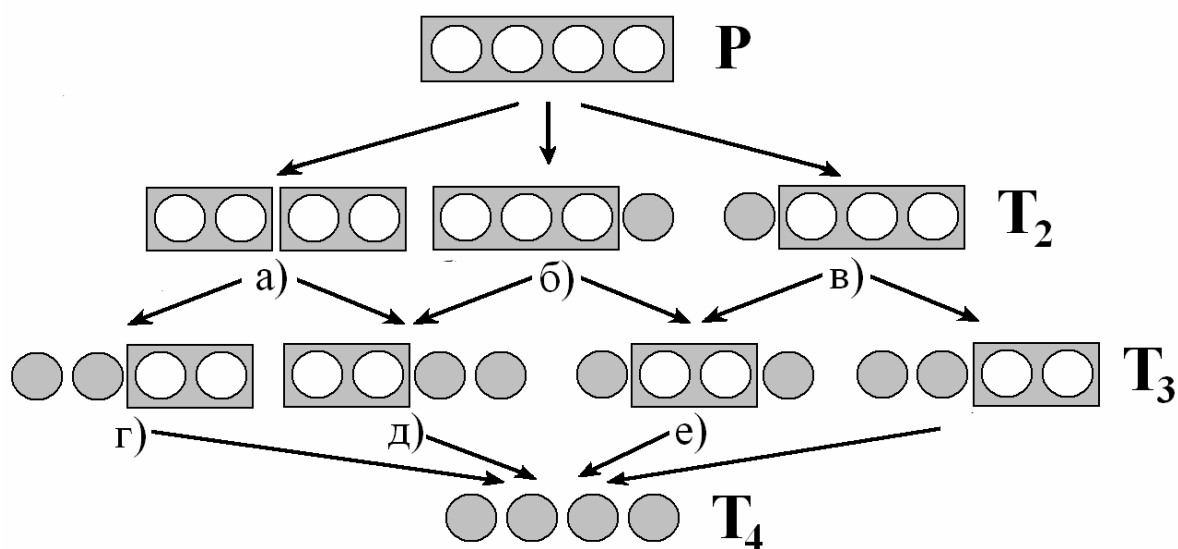
**Рис.1.19.** Простейшие инвариантные кривые в системе (1.30), отвечающие двухчастотному режиму: а)  $\Delta_1 = -0.9$   $\mu = 0.5$ ,  $w = 0:1:0$ , б)  $\Delta_1 = 0.2$   $\mu = 0.3$ ,  $w = 0:0:1$ , в)  $\Delta_1 = 1.05$   $\mu = 0$ ,  $w = 1:0:0$ .

Таким образом, возникает режим частичной синхронизации в системе: захвачены пары первый-второй и третий-четвертый осцилляторы. При этом наблюдается *кластеризация* в цепочке, схематически показанная на рис.1.20а. Отметим, что фазовая траектория на рис.1.19а имеет пересечение только с одной гранью фазового куба  $\phi = 0$ . Поэтому число вращения для данного типа режима  $w = 0:1:0$ .

Для второго рисунка 1.19б наблюдается подобный режим, только теперь осциллирует пара фаз  $\theta, \phi$ , а третья фаза  $\phi$  изменяется во всем допустимом диапазоне. Эта ситуация отвечает частичному захвату одновременно первого, второго и третьего осцилляторов, как схематически показано на рис.1.20б. При этом число вращения наблюдаемого режима  $w = 0:0:1$ .

Наконец для третьего рисунка 1.19в захвачены уже второй, третий и четвертый осцилляторы. При этом число вращения  $w=1:0:0$ , а возникшая кластеризация схематически показана на рис.1.20в.

Отметим, что в каждом из трех рассмотренных случаев колебание каждой пары фазовых переменных происходит вблизи нулевых значений (или, что эквивалентно,  $2\pi$ ). Это означает, что захват каждой пары осцилляторов происходит *синфазным* образом.

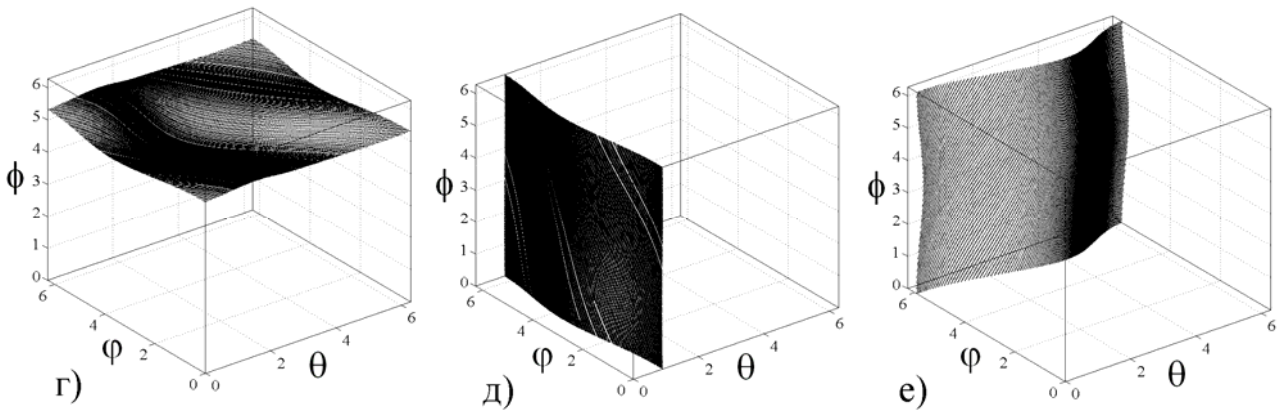


**Рис.1.20.** Схематическое «дерево кластеризации» для четырех диссипативно связанных осцилляторов. Иллюстрирует возникновение кластеров при уменьшении связи. Буквы отвечают точкам на карте режимов на рис.1.18 и фазовым портретам на рис.1.19, 1.21 и 1.22.

Схематическое изображение возникающих простейших двухчастотных режимов  $T_2$  на рис.1.20 можно рассматривать, как первый шаг в построении *дерева кластеризации*, которое является полезным «путеводителем» при изучении режимов четырех взаимодействующих осцилляторов.

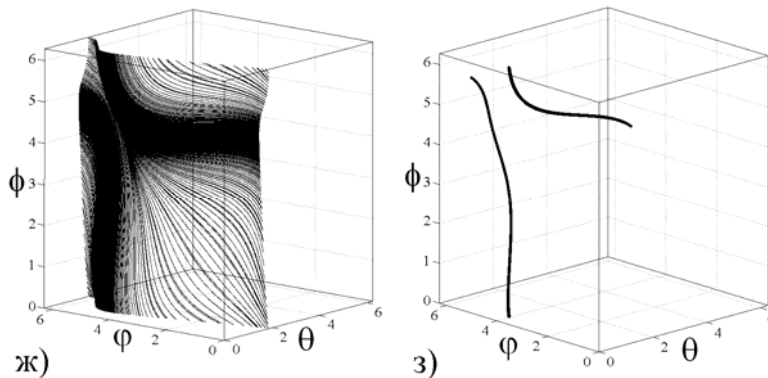
Перейдем теперь на карте на рис.1.19 в область трехчастотной квазипериодичности: точки г), д) и е). Соответствующие фазовые портреты приведены на рис.1.21. Теперь аттракторы представляют собой *инвариантные поверхности*, которые фазовые траектории покрывают всюду плотным образом. В случае г) слабо осциллирует фаза  $\phi$ , так что частично захвачены третий и четвертый осцилляторы. Два других основных возможных типа частичного захвата пар осцилляторов демонстрируют фазовые портреты в виде различным образом ориентированных инвариантных поверхностей на рис.1.21д,е. На дереве кластеризации качественная конфигурация возникающих кластеров показана на рис.1.20г-е<sup>36</sup>.

<sup>36</sup> Четвертый рисунок в этом ряду качественно аналогичен случаю г).



**Рис.1.21.** Простейшие инвариантные поверхности в системе (1.30), отвечающие трехчастотным режимам: г)  $\Delta_1 = -1.4$   $\mu = 0.45$ , д)  $\Delta_1 = -0.075$   $\mu = 0.05$ , е)  $\Delta_1 = 0.2$   $\mu = 0$ .

Следует отметить, что здесь приведены только простейшие примеры инвариантных кривых и инвариантных поверхностей. Более сложный вариант иллюстрирует рис.1.22. На рис.1.22ж можно видеть инвариантную поверхность. На этой поверхности имеется сгущение фазовых траекторий. В точке з) из этого сгущения возникает более сложная инвариантная кривая, которая характеризуется числом вращения  $w=0:1:1$ . Это пример резонансного двухчастотного режима, возникающего на поверхности трехчастотного аттрактора. Как можно видеть из карты на рис.1.18, резонансу такого типа отвечает узкий язык  $w=0:1:1$  с вершиной в точке коразмерности два, обозначенной цифрой 1 на карте.

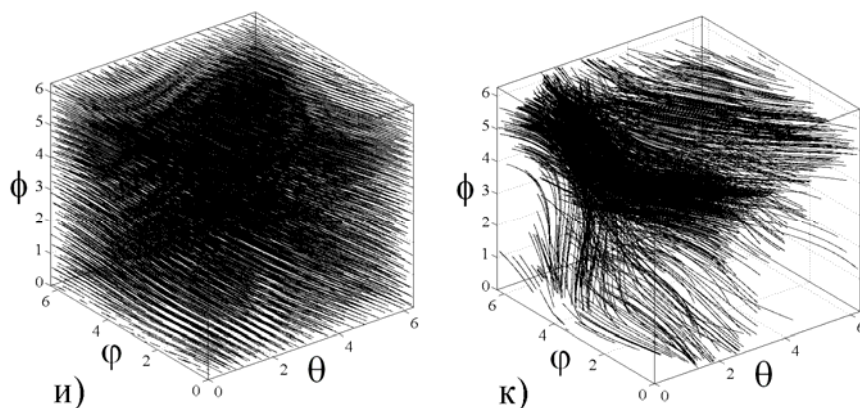


**Рис.1.22.** Инвариантная поверхность системы (1.30) и резонансная инвариантная кривая  $w=0:1:1$ , возникающая на этой поверхности из сгущения фазовых траекторий: ж)  $\Delta_1 = -0.6$   $\mu = 0.2$ , з),  $\Delta_1 = -0.6$   $\mu = 0.35$ .

Это случай достаточно простого резонанса. На самом деле на карте торов рис.1.18б реализуется множество языков двухчастотных режимов с разными числами вращения, так что в системе существует большое число различных резонансных двухчастотных режимов.

При уменьшении связи кластеры, отвечающие трехчастотным режимам, будут разрушаться с возникновением режима четырехчастотной

квазипериодичности. В этом случае фазовые траектории заполняют уже весь объем фазового куба, как показано на рис.1.23и. Отметим, что в некоторых областях параметров могут наблюдаться хаотические режимы. Пример представлен на рис.1.23к. Визуально четырехчастотный режим и хаос различить достаточно трудно, но для квазипериодического режима фазовые траектории более равномерно заполняют фазовый куб.



**Рис.1.23.** Аттракторы четырехчастотного (и) и хаотического режимов (к) системы (1.30): и)  $\Delta_1 = -1.0$   $\mu = 0.1$ , к) хаос  $\Delta_1 = -1.0$   $\mu = 0$ .

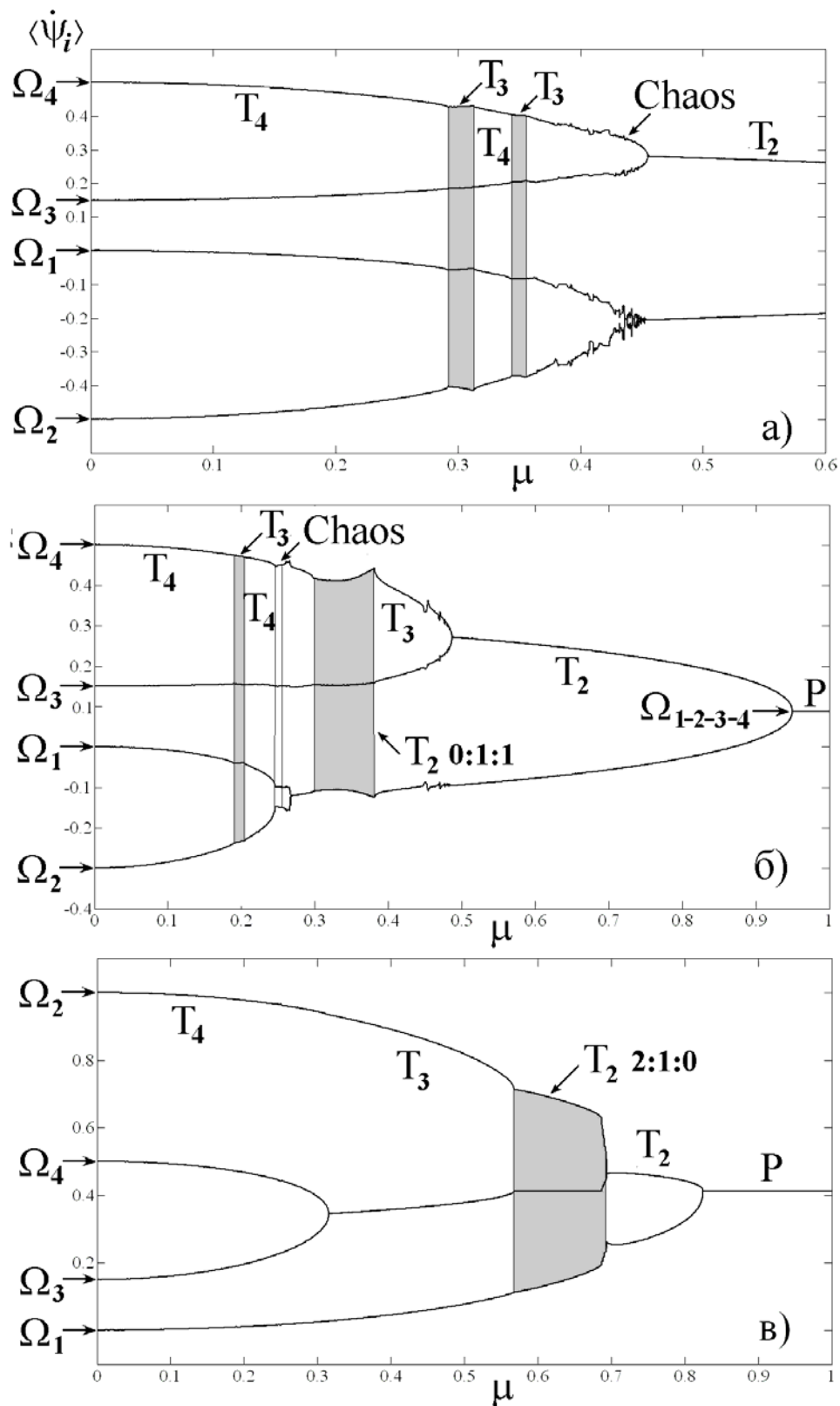
#### 1.2.4. Дерево синхронизации, кластеризация и резонансные квазипериодические режимы разной размерности

Примеры деревьев синхронизации, дающие зависимость наблюдаемых частот  $\langle \psi_i \rangle$  от параметра связи  $\mu$ , для системы четырех фазовых осцилляторов представлены на рис.1.24. Рисунки отвечают разным значениям возрастающей частотной расстройки первого и второго осцилляторов  $\Delta_1$ .

Первый рисунок 1.24а соответствует  $\Delta_1 = -1$ . Это значение выбрано из тех соображений, что линия  $\Delta_1 = -1$  на картах проходит через области режимов разного типа, включая хаос. При малой связи на рис.1.24а реализуются режимы с четырьмя наблюдаемыми частотами  $\langle \psi_i \rangle$ . В пределе нулевой связи они отвечают собственным частотам осцилляторов, для которых из (1.29) имеем:

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_i = \frac{\Delta_{i-1}}{2}. \quad (1.39)$$

Эти значения отмечены соответствующими стрелками по левому краю рисунка 1.24.



**Рис.1.24.** Дерево синхронизации четырех связанных фазовых осцилляторов (1.30): а)  $\Delta_1 = -1$ , б)  $\Delta_1 = -0.6$ , в)  $\Delta_1 = 2$ . Значения остальных параметров  $\Delta_2 = 0.3, \Delta_3 = 1$ .  $\Omega_i$  – собственные частоты автономных осцилляторов,  $\Omega_{1-2-3-4}$  – частота захвата осцилляторов в режиме полной синхронизации. Серым цветом показаны некоторые резонансные трех- и двухчастотные режимы.

С ростом параметра связи ветви дерева почти одновременно сливаются, и при  $\mu \approx 0.45$  возникает режим с двумя частотами  $\langle \psi_i \rangle$ . Это простейший режим с инвариантной кривой типа рис.1.19а. Как мы уже отмечали, в этом случае происходит частичный захват первого-второго и третьего-четвертого осцилляторов. Дерево синхронизации является еще одной иллюстрацией того, что в системе возникает именно такой тип кластеризации (см. подписи собственных частот по левому краю карты).

Особенность наблюдаемой на рис.1.24а картины состоит в том, что обе пары ветвей сливаются почти одновременно, поскольку на рис.1.18 выбранный маршрут проходит почти точно через точку *бифуркации коразмерности два*.

Дерево синхронизации на самом деле имеет *тонкую структуру*. Так еще в случае, когда вычисленные наблюдаемые частоты дают четыре несовпадающих значения, при  $\mu \approx 0.3$  выбранный маршрут проходит через область трехчастотной квазипериодичности. Для наглядности на дереве на рис.1.24а эта область обозначена символом  $T_3$  и показана серым цветом. Из рисунка можно видеть, что внутри этой области характер зависимости наблюдаемых частот от параметра связи меняется. Это наиболее хорошо заметно для нижней ветви, для которой график имеет излом, а возрастание частоты  $\langle \psi_2 \rangle$  с увеличением связи сменяется на убывание. Все четыре ветви дерева теперь не независимы: между ними выполняется определенное резонансное условие, справедливое до тех пор, пока величина связи отвечает области  $T_3$ .

Затем условия резонанса нарушаются, и снова возникает четырехчастотный режим. При дальнейшем росте связи опять возникает трехчастотный режим  $T_3$ , а затем и хаос. Интересно, что область хаоса на дереве также отвечает четырем наблюдаемым частотам  $\langle \psi_i \rangle$ . При этом характерным признаком хаотической области является сильная изрезанность и немонотонная зависимость наблюдаемых частот от параметра связи. Отметим, что на самом деле эта область имеет очень тонкую и сложную организацию, которая включает также и резонансные режимы квазипериодичности разной размерности с более сложно устроенными аттракторами. Таким образом, дерево синхронизации имеет тонкую структуру, которая не определяется простым числом наблюдаемых частот.

Увеличим теперь параметр частотной расстройки до значения  $\Delta_1 = -0.6$ , рис.1.24б. Теперь «грубая» картина эволюции режимов выглядит следующим образом. Сначала наблюдается четырехчастотный режим. Затем возникает



достаточно узкий по параметру резонансный трехчастотный режим, а затем и небольшая область хаоса. Затем две нижние ветви дерева сливаются. Это происходит, когда первый и второй осциллятор захватываются, и возникает характерный трехчастотный режим  $T_3$  с фазовым портретом типа показанного на рис.1.21д.

С ростом связи маршрут на плоскости параметров проходит через широкое резонансное окно уже двухчастотного режима с числом вращения  $w=0:1:1$ . На дереве синхронизации в соответствующей области  $T_2$ , однако, по-прежнему наблюдается три ветви, но они теперь не независимы, а связаны некоторыми резонансными условиями. Действительно, в соответствии с определением числа вращения

$$w = \left| \langle \dot{\psi}_2 \rangle - \langle \dot{\psi}_1 \rangle \right| : \left| \langle \dot{\psi}_3 \rangle - \langle \dot{\psi}_2 \rangle \right| : \left| \langle \dot{\psi}_4 \rangle - \langle \dot{\psi}_3 \rangle \right|. \quad (1.40)$$

Условие  $w=0:1:1$  означает, во-первых, что

$$\langle \dot{\psi}_1 \rangle = \langle \dot{\psi}_2 \rangle. \quad (1.41)$$

А, во вторых, что

$$\langle \dot{\psi}_3 \rangle - \langle \dot{\psi}_2 \rangle = \langle \dot{\psi}_4 \rangle - \langle \dot{\psi}_3 \rangle, \text{ или } \langle \dot{\psi}_3 \rangle = \frac{\langle \dot{\psi}_2 \rangle + \langle \dot{\psi}_4 \rangle}{2}. \quad (1.42)$$

Эти резонансные условия (1.41),(1.42) проявляются в устройстве дерева на рис.1.24б следующим образом. Во-первых, две нижние ветви совпадают. Во-вторых, центральная ветвь лежит точно посередине между крайними. Эти условия сохраняются в пределах всей выделенной серым цветом полосы.

Можно видеть, что при дальнейшем росте связи сливаются две верхние ветви дерева, и захватываются уже третий и четвертый осцилляторы. В системе возникает двухкластерное состояние типа рис.1.20а. Наконец, при еще большем значении параметра связи две оставшиеся ветви сливаются в одну, и возникает полная синхронизация.

Нетрудно показать, что полная синхронизация происходит на центральной частоте четырех осцилляторов. Действительно, из (1.28) и (1.31) легко получаем

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3 = \dot{\psi}_4 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{8}. \quad (1.43)$$

Используя выражения для собственных частот  $\Omega_1$  каждого осциллятора (1.39), находим, что частота захвата равна среднему арифметическому значению собственных частот всех четырех осцилляторов:

$$\Omega_{1-2-3-4} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4}{4}. \quad (1.44)$$

На рис.1.24б это значение отмечено соответствующей стрелкой в правой части рисунка.

Отметим, что и в этом случае «изрезанность» ветвей дерева сигнализирует о наличии хаоса и резонансных режимов более высокого порядка с узкими окнами по параметру связи.

Наконец, дерево на рис.1.24в отвечает значению  $\Delta_1 = 2$ . Если до этого выбранные маршруты на карте режимов лежали левее всех точек коразмерности два (цифры 1, 2 и 3 на рис.1.18а), то теперь маршрут проходит правее точек 1 и 2. В результате правила кластеризации изменяются. Теперь сначала наблюдается захват третьего и четвертого осцилляторов, и возникает режим  $T_3$  типа показанного на рис.1.20г. Затем на базе этого состояния возникает широкое резонансное окно двухчастотного режима с числом вращения  $w=2:1:0$ . В соответствии с формулами (1.40), центральная ветвь дерева лежит в пределах этого окна точно посередине между крайними. Затем сразу из этого режима возникает другой вариант двухчастотного квазипериодического режима, которому отвечают уже только две наблюдаемые частоты, а фазовый портрет имеет вид типа рис.1.19в.

Таким образом, двухпараметрическая картина синхронизации в системе достаточно сложна. Она проявляется как в тонкой организации дерева синхронизации, так и в изменении его вида при вариации частотного параметра.

### **1.2.5. Механизмы разрушения полной синхронизации и квазипериодичности разной размерности**

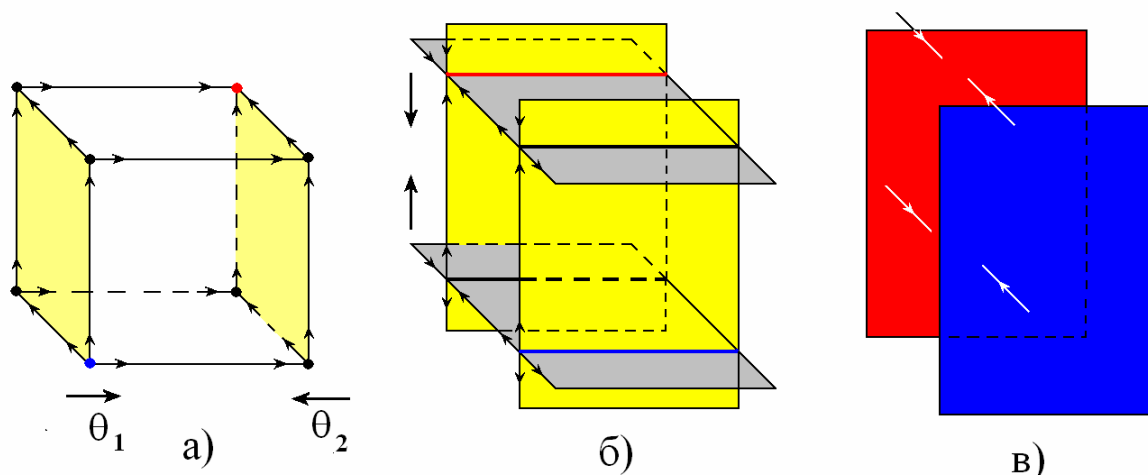
Обсудим теперь

- картину разрушения режима полной синхронизации,
- картину разрушения квазипериодических колебаний.

Для начала вернемся к области полной синхронизации  $P$ , рис.1.18. Внутри этой области система имеет восемь состояний равновесия: устойчивый и неустойчивый узел и шесть седел. Соответствующий схематический рисунок воспроизведен на рис.1.25а. Как мы отмечали, при вариации параметров положения равновесия могут сближаться, и наблюдается седло-узловая бифуркация  $SNP$ , когда все восемь состояний равновесия одновременно сливаются и исчезают. Негрубая ситуация (момент слияния граней) отвечает четырем состояниям равновесия.

Такая бифуркация отвечает за разрушение полной синхронизации. Она может быть трех типов  $SNP_{1,2,3}$ , отвечающих слиянию разных пар граней

параллелепипеда и приводящих к трем вариантам ориентации возникающей устойчивой инвариантной кривой.



**Рис.1.25.** а) Состояния равновесия системы (1.30) и их движение при приближении к точке бифуркации, случай  $SNP_1$  слияния граней  $\theta_1$  и  $\theta_2$ ; б) возникновение устойчивой, неустойчивой и седловых инвариантных кривых из общих многообразий; в) возникновение устойчивой и неустойчивой инвариантных поверхностей в результате седло-узловой бифуркации инвариантных кривых.

В результате этой бифуркации возникает картина, качественно показанная на рис.1.25б. Теперь сосуществуют *четыре инвариантные кривые*. При этом одна из них будет устойчива (показана красным цветом), одна неустойчива (синий цвет), а еще две будут седловыми (черный цвет). Устойчивая инвариантная кривая и будет отвечать за двухчастотный квазипериодический режим.

При уменьшении связи могут испытывать седло-узловые бифуркации уже инвариантные кривые. Действительно, устойчивая и одна из седловых инвариантных кривых могут сближаться, как показано стрелкой на рис.1.25б. В точке бифуркации они сливаются. Поскольку в системе имеются общие многообразия, то одновременно сливаются и неустойчивая кривая со второй седло-узловой кривой. В результате двумерные многообразия, показанные на рис.1.25б серым цветом, сливаются и исчезают. Из двух других возникают устойчивая и неустойчивая *инвариантные поверхности*, рис.1.25в<sup>37</sup>. Таким образом, двухчастотная квазипериодичность разрушается, и возникает трехчастотная.

Как мы отмечали, возможны три варианта ориентации устойчивых инвариантных кривых, как показано на рис.1.19а,б,в. Соответственно, для

<sup>37</sup> Отметим, что если посмотреть на рис.1.25б «слева сбоку», то получим картину, аналогичную рис.1.3.

каждой из них возможна описанная выше квазипериодическая седло-узловая бифуркация. Будем обозначать их  $Q_{1-3}^2$ , где верхний символ отвечает размерности разрушающейся квазипериодичности, а нижний индекс отвечает за ориентацию инвариантной кривой.

При дальнейшем уменьшении связи могут сближаться уже устойчивая и неустойчивая инвариантные поверхности на рис.1.25б. Они могут слиться и исчезнуть в результате новой седло-узловой квазипериодической бифуркации. Эта бифуркация отвечает уже *разрушению трехчастотной квазипериодичности*. Мы будем обозначать ее  $Q_{1-3}^3$ , где нижний индекс отвечает за три варианта ориентации инвариантных поверхностей, рис.1.21.

### **1.2.6. Двухпараметрическая картина разрушения полной синхронизации**

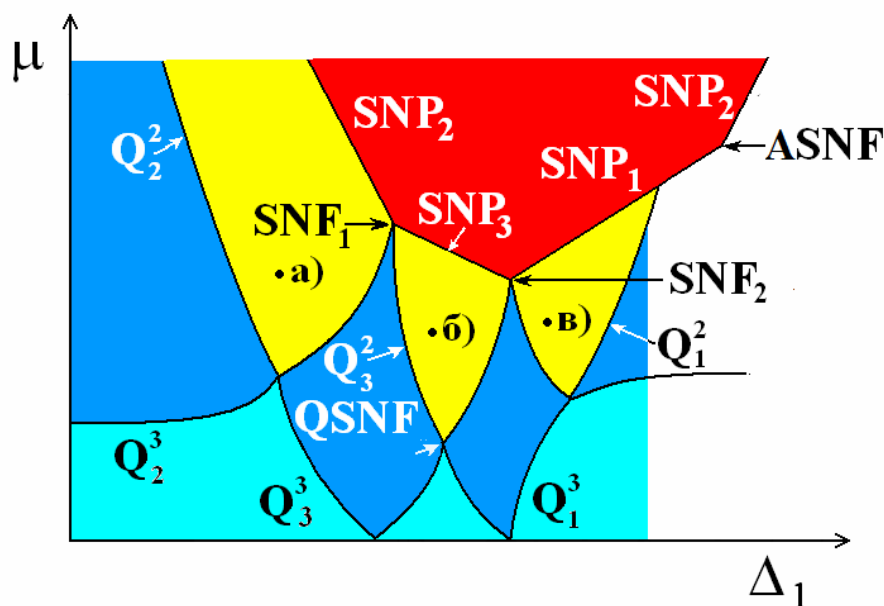
Изучим теперь более подробно картину различных режимов на плоскости параметров  $(\Delta_1, \mu)$  с учетом проведенного качественного обсуждения. Для этого удобно изобразить схематический рисунок плоскости параметров, аналогичный рис.1.18а, на котором покажем основные элементы этой плоскости. Такой рисунок дан на рис.1.26.

Отметим, что при двухпараметрическом анализе заметную роль играют выделенные точки коразмерности два. В их окрестности картина режимов оказывается наиболее емкой. Оказывается также, что такие точки могут возникать не только на базе режима полной синхронизации, но и для квазипериодических режимов.

Начнем обсуждение с области полной синхронизации. Ее границы образованы отрезками линий вырожденных седло-узловых бифуркаций  $SNP_{1-3}$ , формирующими ломаную линию. Эта линия имеет углы – точки коразмерности два. Их характерный признак – наличие двух негрубых равновесий в фазовом пространстве. Обсудим подробнее окрестности этих точек, поскольку они наиболее представительны с точки зрения наблюдаемых режимов.

Обратимся сначала к окрестности первой точки, которая в увеличенном масштабе в виде карты торов на плоскости параметров показана на рис.1.27а. Можно видеть, что картина режимов оказывается аналогичной случаю трех осцилляторов. При этом числа вращения имеют вид  $w = 0 : q : r$ . Это означает, что первый и второй осцилляторы частично захвачены, и система кластеризуется в соответствии с рис.1.20д. Таким образом, в окрестности этой

точки динамика системы аналогична случаю трех осцилляторов<sup>38</sup>, но при этом в качестве подсистемы выступают частично захваченные первый и второй осцилляторы. Поэтому ее можно ассоциировать с точкой *saddle node fan*. Соответственно, она обозначена  $SNF_1$  на рис.1.26.

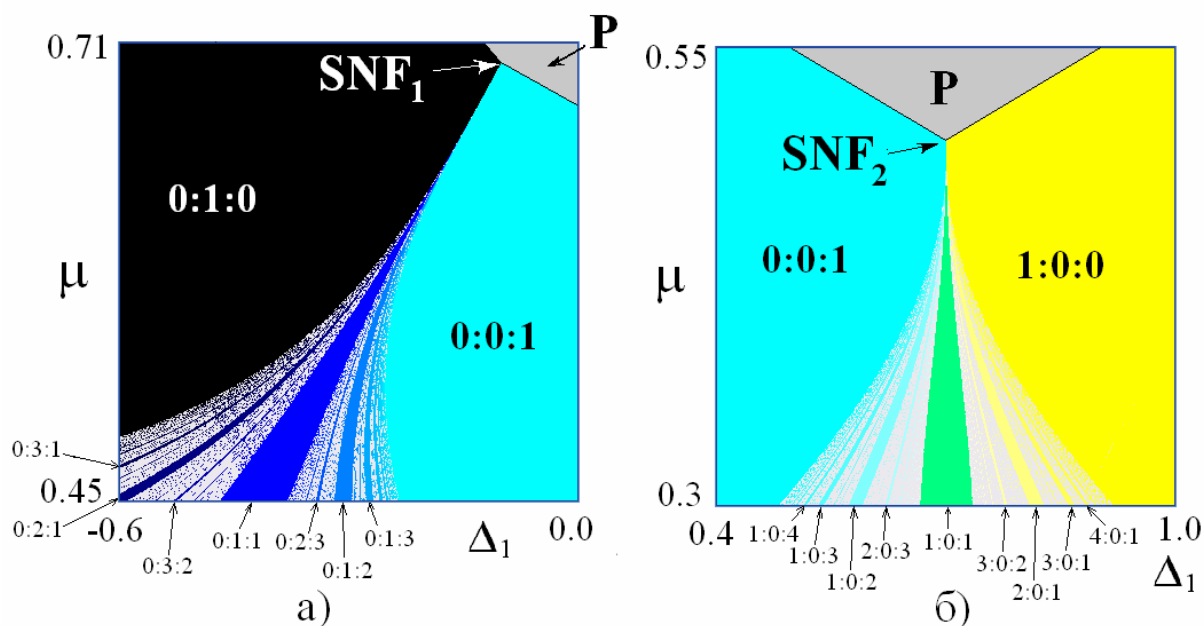


**Рис.1.26.** Схематическое изображение взаимного расположения некоторых линий и точек бифуркаций для четырех фазовых осцилляторов:  $SNP$  – седло-узловые бифуркации, отвечающие за разрушение полной синхронизации;  $SNF$  – точки *saddle node fan*,  $ASNF$  – точка *accumulation of saddle node fans*;  $Q^2$  и  $Q^3$  – линии квазипериодических седло-узловых бифуркаций для режимов разной размерности;  $QSNF$  – точка квазипериодической бифуркации *saddle node fan*.

Из рис.1.27б нетрудно видеть, что подобная ситуация имеет место и в окрестности второй точки  $SNF_2$ , только в этом случае частично захваченными оказываются второй и третий осцилляторы. При этом числа вращения имеют вид  $w = p : 0 : r$ .

Несколько иная ситуация имеет место в окрестности третьей характерной точки пересечения седло-узловых бифуркаций. Из рис.1.18б можно видеть, что в этом случае числа вращения равны  $w = p : q : 0$ , что соответствует ситуации частичного захвата третьего и четвертого осцилляторов в системе. Однако для нее области резонансных режимов с числами вращения  $2 : 1 : 0$ ,  $3 : 2 : 0, \dots$  имеют протяженный «контакт» с областью полной синхронизации. Таким образом, эту точку можно ассоциировать с точкой *accumulation of saddle node fans*  $ASNF$ .

<sup>38</sup> По крайней мере, на уровне проведенного численного исследования.



**Рис.1.27.** Увеличенные фрагменты карты торов системы (1.30) в окрестности точек  $SNF_1$  и  $SNF_2$ ;  $\Delta_2 = 0.3$ ,  $\Delta_3 = 1.1$ .

***Точки коразмерности три на границе области полной синхронизации***

Исследуемая система характеризуется также еще двумя частотными параметрами  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$ . Поэтому, варьируя частотную расстройку  $\Delta_2$ , можно добиться ситуации, когда два «угла» на границе области полной синхронизации сольются. Это будет ситуация коразмерности три. На рис.1.25б этот момент отвечает одновременному слиянию поверхностей, показанных как желтым, так и серым цветом. В фазовом пространстве при этом возникает негрубая ситуация более высокого порядка, отвечающая уже всего одному состоянию равновесия.

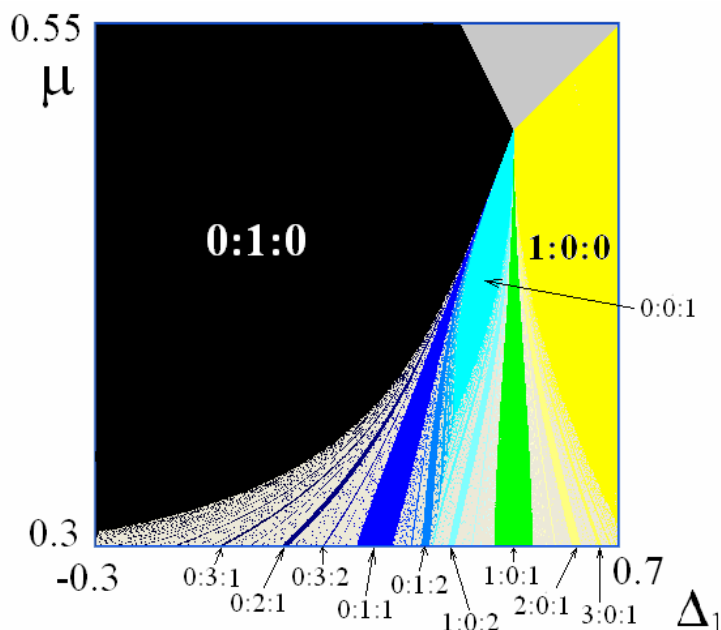
На плоскости параметров в точке коразмерности три пересекаются три линии  $SNP_{1-3}$  из семейства (1.32)-(1.34). Совмещая соответствующие уравнения, нетрудно получить условие реализации такой бифуркационной ситуации:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_3}{2}. \tag{1.45}$$

В соответствии с рис.1.26 и 1.27, она может быть проинтерпретирована, как слияние двух точек *saddle node fan*  $SNF_1$  и  $SNF_2$ .

Карта торов в окрестности такой точки на плоскости  $(\Delta_1, \mu)$  представлена на рис.1.28. Можно видеть, что теперь в одной точке сходятся области разных типов, отвечающие как частичному захвату первого-второго, так и второго-третьего осцилляторов (с числами вращения  $w = 0:q:r$  и  $w = p:0:r$ ). Эти два семейства четко разделены языком с числом вращения  $w = 0:0:1$ , для которого частично захвачены одновременно три осциллятора: первый, второй и третий.

Таким образом, окрестность этой точки оказывается более «представительной» с точки зрения наблюдаемых режимов. В ее окрестности реализуются все три типа попарной кластеризации.

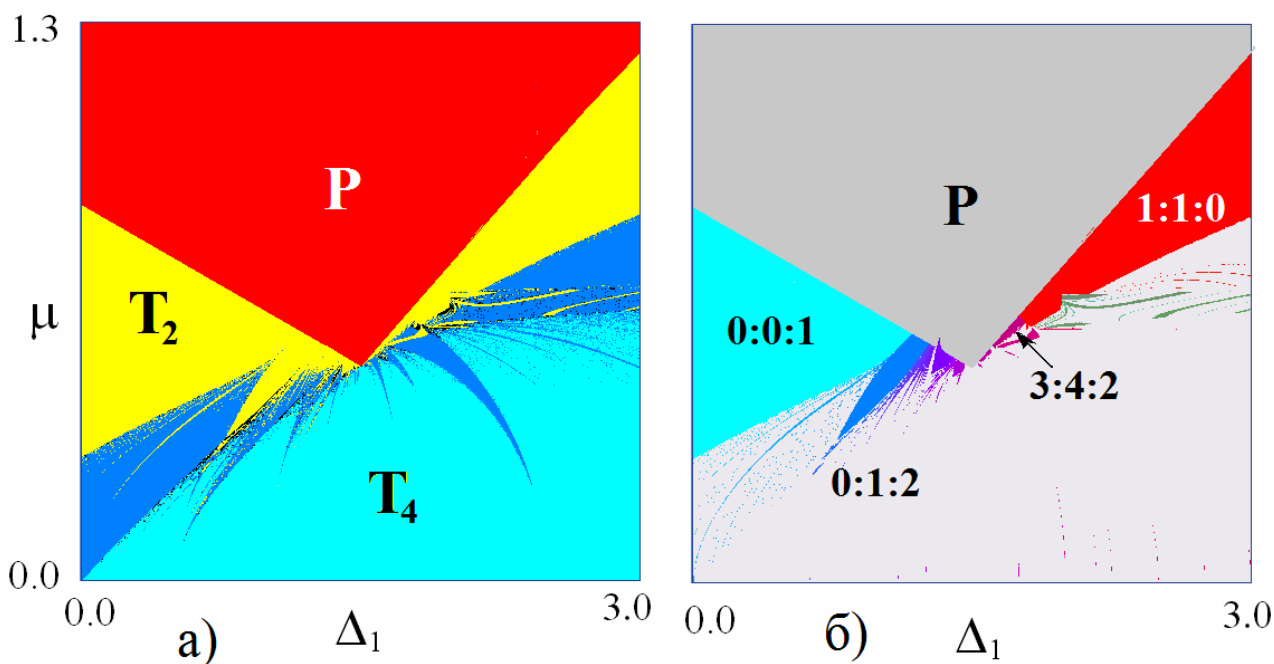


**Рис.1.28.** Карта торов системы (1.30) для ситуации, отвечающей бифуркации коразмерности три – слиянию двух точек  $SNF$ ,  $\Delta_2 = 0.5$ ,  $\Delta_3 = 1$ .

В свою очередь, варьируя параметр  $\Delta_2$ , можно добиться ситуации, когда сольются точка *saddle node fan*  $SNF_2$  и точка *accumulation of saddle node fans*  $ASNf$ . Это еще одна ситуация коразмерности три. Она возникает, если выполняется условие  $\Delta_2 = -\Delta_3/2$ . Карта ляпуновских показателей и карта торов для этого случая представлены на рис.1.29.

Точка коразмерности три на рисунке образует характерный «угол» на границе области полной синхронизации. Интересная особенность этой точки состоит в том, что сосуществуют «веерные» структуры языков как двухчастотных, так и трехчастотных режимов. Кроме того, области двухчастотной квазипериодичности разного порядка имеют протяженный контакт с областью полной синхронизации как слева, так и справа от найденной точки. (Например, языки с числами вращения 0:1:2 и 3:4:2).

Таким образом, в системе четырех фазовых осцилляторов на границе области полной синхронизации возможны точки коразмерности три, ассоциирующиеся со сложной картиной квазипериодических режимов разного типа.



**Рис.1.29** Ляпуновская карта (а) и карта торов (б) системы (1.30) для точки коразмерности три, отвечающей слиянию точек *SNF* и *ASNf*,  $\Delta_2 = -0.5$ ,  $\Delta_3 = 1$ .

### 1.2.7. Двухпараметрическая картина разрушения двухчастотной и трехчастотной квазипериодичности

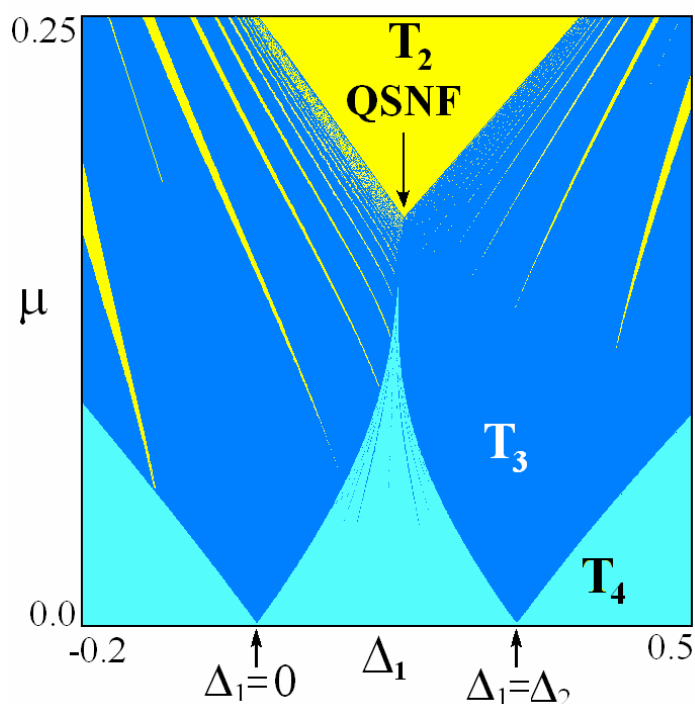
Перейдем теперь к двухчастотной области, что позволит обсудить картину разрушения двухчастотных квазипериодических режимов. Кроме того, дадим компьютерные иллюстрации для обсуждавшегося пока на качественном уровне соответствующего сценария на рис.1.25.

Вернемся к схематическому изображению плоскости параметров на рис.1.26. На этом рисунке три основные области двухчастотной квазипериодичности имеют вид трех характерных языков. Изучим более детально устройство центрального языка. Оно оказывается наиболее простым, вследствие того, что его основание располагается при небольших уровнях связи.

Карта торов в увеличенном виде в окрестности порогового значения режима двухчастотной квазипериодичности для этого случая показана на рис.1.30. Можно видеть, что наблюдаемая картина в значительной мере аналогична точке *saddle node fan*. Отличия состоят в повышении на единицу размерности квазипериодических режимов, т.е. вместо области полной синхронизации имеет место область двухчастотной квазипериодичности, вместо области двухчастотной квазипериодичности – режим трехчастотной квазипериодичности, а вместо системы веерообразных языков трехчастотных режимов – аналогичная система языков четырехчастотных режимов. Поэтому



мы будем называть такую точку *квазипериодическая точка saddle node fan* и обозначать  $QSNF$ <sup>39</sup>.



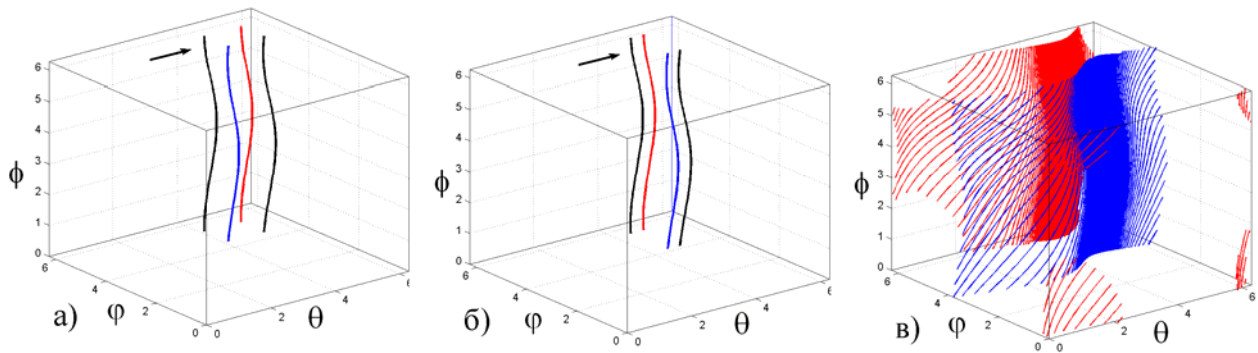
**Рис.1.30.** Карта торов системы (1.30) в окрестности *квазипериодической точки saddle node fan*  $QSNF$ ,  $\Delta_2 = 0.3, \Delta_3 = 1.1$ . Стрелками показаны основания трехчастотных языков, отвечающих резонансным условиям (1.47).

Отметим и определенное отличие, состоящее в том, что внутри областей  $T_3$  имеется новая система узких языков двухчастотных режимов. Эти резонансные режимы отвечают ситуации, когда инвариантные кривые разных типов возникают на соответствующей инвариантной поверхности.

Как мы отмечали, точка  $QSNF$  задает порог области двухчастотной квазипериодичности  $T_2$ . При выходе за пределы соответствующего языка двухчастотная квазипериодичность разрушается. Рис.1.31 иллюстрирует сценарий разрушения такого режима, отвечающий выходу из области  $T_2$  через ее правую границу. В этом случае при увеличении параметра  $\Delta_1$  устойчивая, неустойчивая и две седловые инвариантные кривые сближаются навстречу друг другу, как показано стрелкой на рис.1.31а,б. В результате они *одновременно и попарно* сливаются и исчезают<sup>40</sup>. В результате возникают устойчивая и неустойчивая инвариантные поверхности, показанные на рис.1.31в.

<sup>39</sup> Отметим, что обсуждение в этом и предыдущем разделах ведется с «физических» позиций, в стиле компьютерного эксперимента. В этом плане остается необходимость более строгого обоснования результатов, в частности, устройства точек коразмерности три, возможности квазипериодических точек  $QSNF$ , сценариев их разрушения и т.д.

<sup>40</sup> Для поиска седловых инвариантных кривых на рис.1.31 использовался метод Ньютона.

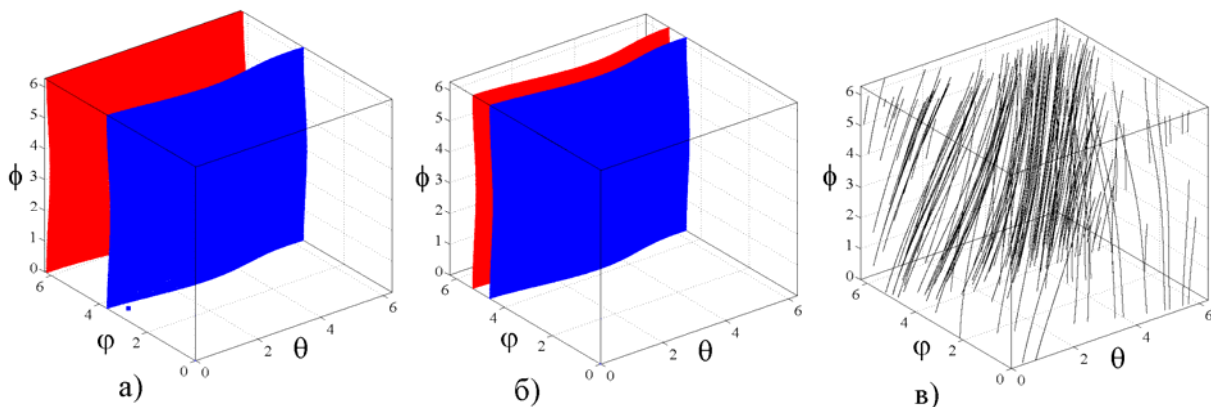


**Рис.1.31.** Седло-узловая квазипериодическая бифуркация, отвечающая за разрушение двухчастотной квазипериодичности. Устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые и поверхности показаны красным и синим цветом, а седловые кривые – черным;  $\mu = 0.2$   
 а)  $\Delta_1 = 0.16$ , б)  $\Delta_1 = 0.24$ , в)  $\Delta_1 = 0.26$ .

Если же выйти из области  $T_2$  через ее левую границу, то меняется порядок седловых кривых. Теперь отмеченная стрелкой на рис.1.31 седловая кривая сливается уже с неустойчивой инвариантной кривой. В результате возникают инвариантные поверхности, ориентированные другим образом.

Непосредственно в точке  $QSNF$  все четыре инвариантные кривые на рис.1.31а,б одновременно стягиваются в одну кривую. Это некоторое вырожденное (негрубое) состояние.

Рис.1.32 иллюстрирует дальнейшую эволюцию квазипериодического режима. Теперь происходит *разрушение трехчастотной квазипериодичности*. Это происходит в результате слияния устойчивой и неустойчивой инвариантных поверхностей. Этот сценарий наблюдается при выходе на плоскости параметров на рис.1.30 через левую границу языка трехчастотных режимов  $T_3$ .



**Рис.1.32.** Седло-узловая квазипериодическая бифуркация инвариантных поверхностей, приводящая к возникновению четырехчастотной квазипериодичности: а)  $\Delta_1 = 0.28$ , б)  $\Delta_1 = 0.22$ , в)  $\Delta_1 = 0.2$ . Остальные параметры  $\mu = 0.05$ ,  $\Delta_2 = 0.3$ ,  $\Delta_3 = 1.1$

На рис.1.32 можно видеть, что при переходе через точку бифуркации и от рисунка б) к в) при очень незначительном изменении частотной расстройки  $\Delta_1$  (всего 0.02) происходит скачкообразное исчезновение инвариантных поверхностей с возникновением картины траекторий, заполняющих весь фазовый куб. Это характерная особенность обсуждаемой бифуркации.

На рис.130 основания трехчастотных языков лежат на оси частотной расстройки. Их координаты легко найти аналитически. Им отвечают резонансные условия, когда второй осциллятор, частота которого варьируется на рис.130, оказывается в резонансе с первым или с третьим осцилляторами. Выписывая выражения (1.39) для собственных частот осцилляторов

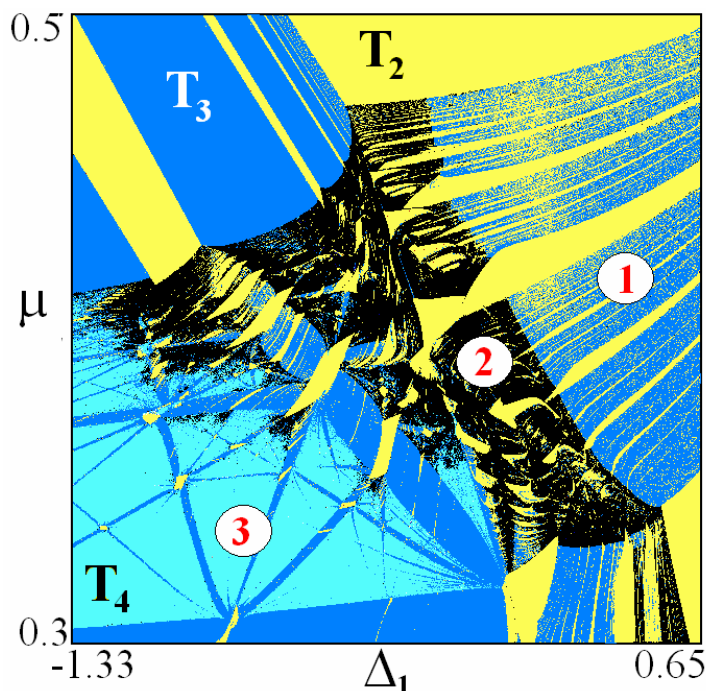
$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \frac{\Delta_1}{2}, \quad \Omega_3 = \frac{\Delta_2}{2}, \quad (1.46)$$

и резонансные условия  $\Omega_1 = \Omega_2$  и  $\Omega_2 = \Omega_3$ , получаем

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_1 = \Delta_2. \quad (1.47)$$

Эти значения отмечены стрелками на рис.1.30 и точно отвечают основаниям языков трехчастотных режимов.

Перейдем теперь к ляпуновской карте на рис.1.33, на которой показана окрестность основания другого языка двухчастотного режима. Он расположен при большем значении уровня связи, что приводит к заметному изменению картины режимов. На рисунке можно выделить области трех характерных типов, обозначенных соответствующими цифрами.



**Рис.1.33.** Карта торов системы (1.30) в окрестности второй пороговой точки двухчастотного режима.

- В первом случае имеется система языков резонансных двухчастотных режимов, погруженная в трехчастотную область. Отличие от случая рис.1.30 состоит в заметном увеличении ширины резонансных языков за счет большего уровня связи.

- Вторая область представляет собой сложную систему полос и островов двухчастотных режимов, погруженных в область хаоса.

- Третья область организована по принципу *резонансной паутины Арнольда*. Для нее имеет место система тонких линий трехчастотных режимов в области четырехчастотной квазипериодичности, образующая структуру типа паутины. В свою очередь, на пересечении «нитей» паутины возникают маленькие острова двухчастотной квазипериодичности.

Третья аналогичная точка на границе области двухчастотных режимов на рис.1.18 располагается при достаточно большой связи и также содержит в своей окрестности хаос.

### 1.2.8. Устройство пространства собственных частот

Как и в случае трех осцилляторов, интерес представляет и устройство пространства собственных частот. Область полной синхронизации для четырех осцилляторов дается уравнениями (1.32)-(1.34), которые теперь удобно разрешить относительно частотных параметров:

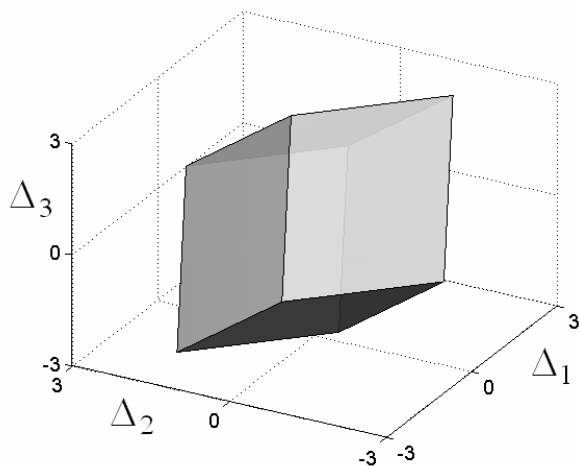
$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \pm 4\mu, \quad (1.48)$$

$$\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 = \pm 2\mu, \quad (1.49)$$

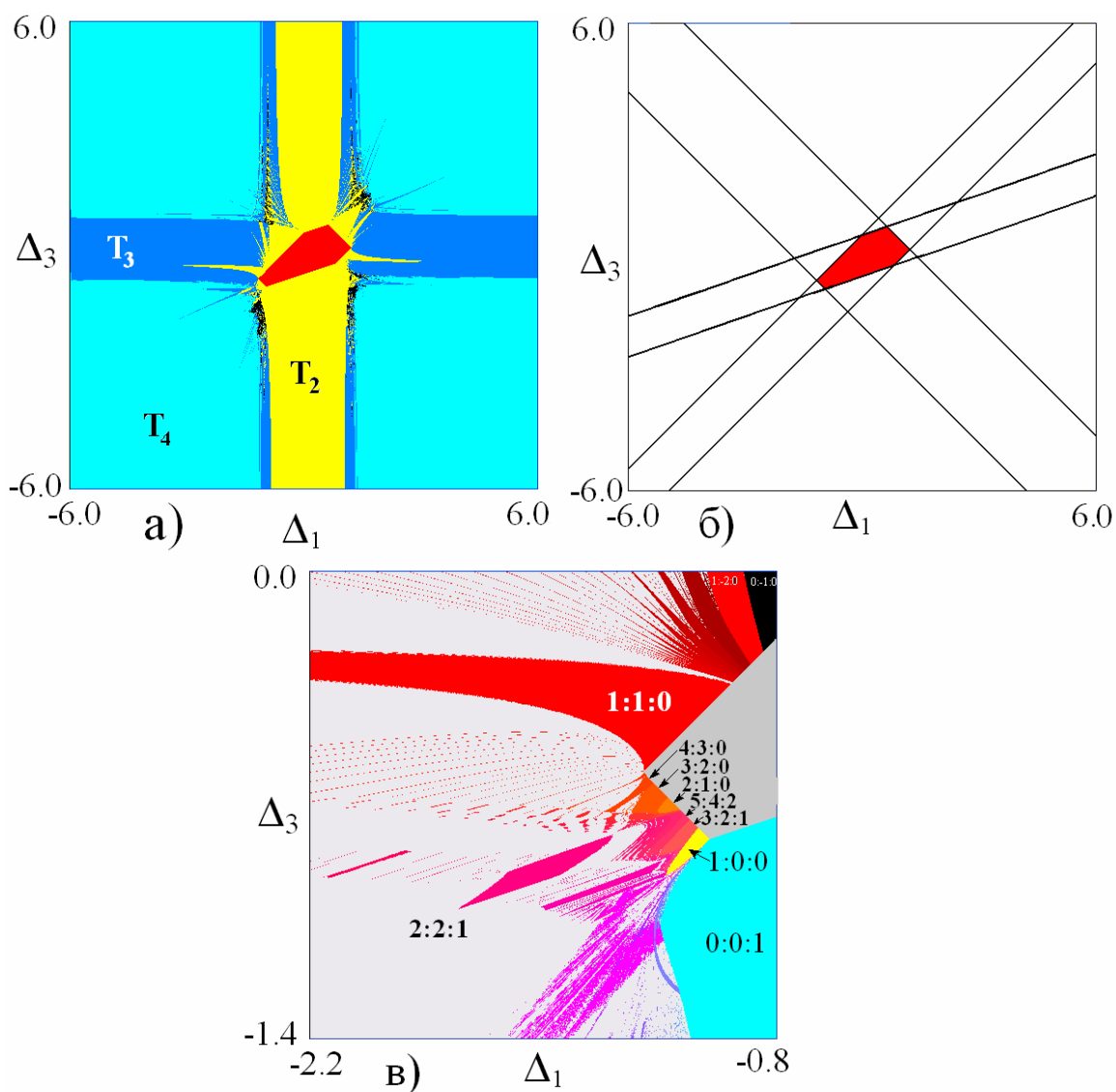
$$\Delta_1 + \Delta_2 - 3\Delta_3 = \pm 4\mu. \quad (1.50)$$

В пространстве частотных расстроек  $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  уравнения (1.48)-(1.50) задают три пары плоскостей, пересечение которых образует *многогранник* в форме *наклонного параллелепипеда*, рис.1.34. Его грани являются поверхностями и отвечают коразмерности один, ребра – коразмерности два, а вершины – коразмерности три.

Удобно изучить сечения  $\Delta_2 = const$  и рассмотреть устройство и эволюцию соответствующих плоскостей  $(\Delta_1, \Delta_3)$ . На рис.1.35а приведена ляпуновская карта для небольшого значения расстройки  $\Delta_2 = 0.2$ . Рядом, на рис.1.35б показаны линии, заданные уравнениями (1.48)-(1.50). Их пересечение образует *шестиугольник*, который отвечает области полной синхронизации и выявляется также и на ляпуновской карте. Таким образом, в рассматриваемом случае имеет место шесть точек коразмерности два – углов шестиугольника. Окрестность двух таких точек в увеличенном виде карты торов представлена на рис.1.35в.

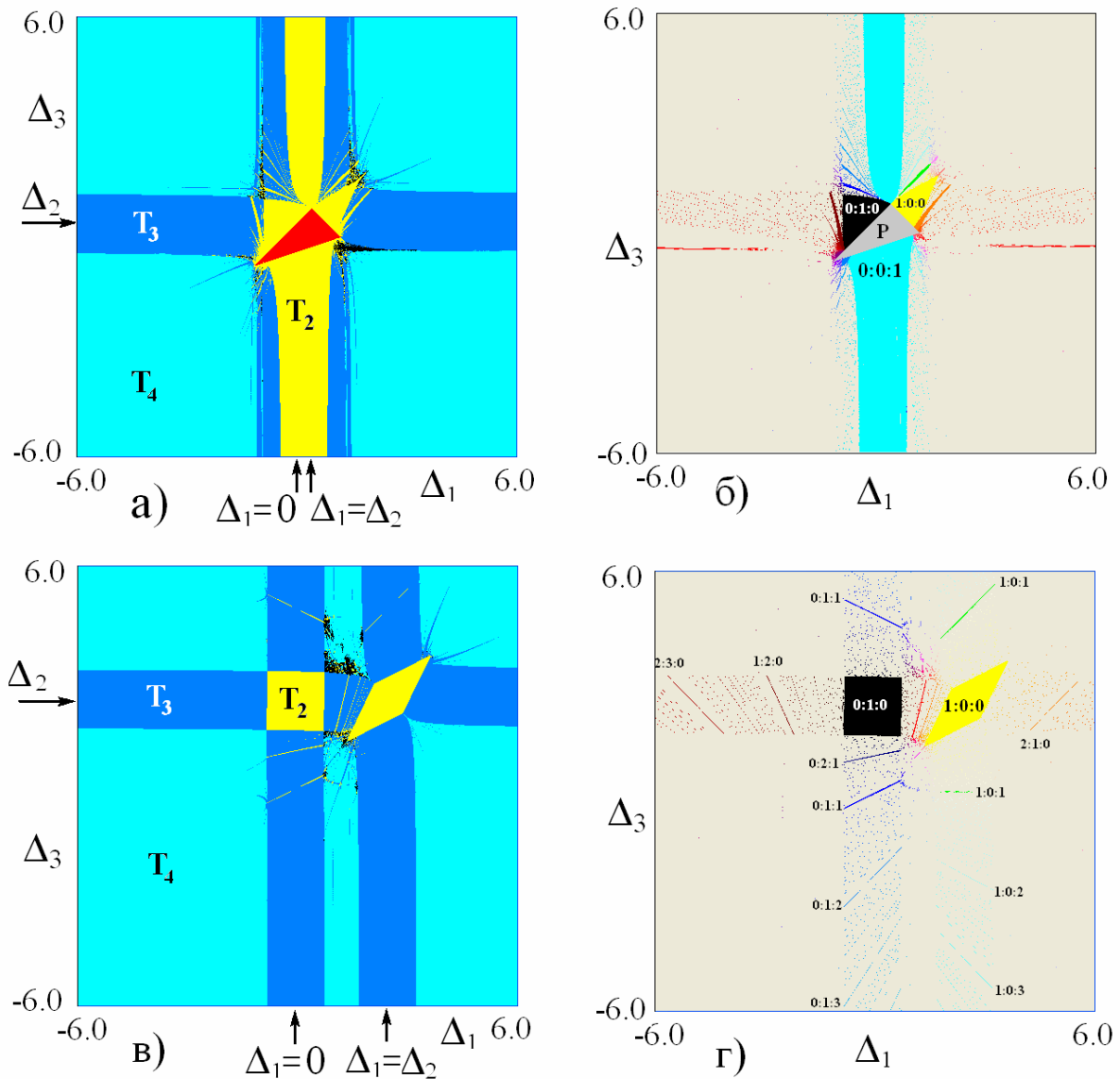


**Рис.1.34.** Область полной синхронизации четырех фазовых осцилляторов (1.30) в пространстве частотных расстроек  $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ . Параметр связи  $\mu=0.4$ .



**Рис.1.35.** а) Ляпуновская карта четырех диссипативно связанных фазовых осцилляторов (1.30) на плоскости двух частотных параметров  $(\Delta_1, \Delta_3)$ , б) конфигурация области полной синхронизации в рамках аналитического рассмотрения, в) увеличенная карта торов в окрестности двух углов шестиугольника. Значения параметров  $\mu = 0.4$ .  $\Delta_2 = 0.2$ .

При вариации частотного параметра  $\Delta_2$  линии на рис.1.35б будут смещаться: две пары – вниз и одна – вверх. Нетрудно показать аналитически, что при значении  $\Delta_2 = \mu$  вершины шестиугольника одновременно попарно сливаются, и область полной синхронизации превращается в треугольник. Пороговая ситуация показана на рис.1.36а,б в виде ляпуновской карты и карты торов. Верхняя вершина треугольника в этом случае представляет собой описанную в разделе 1.2.6 точку коразмерности три, отвечающую слиянию двух точек  $SNF$ .



**Рис.1.36.** Ляпуновские карты и карты торов четырех связанных фазовых осцилляторов (1.30) на плоскости частотных параметров  $(\Delta_1, \Delta_3)$ : а)  $\Delta_2 = 0.4$ , б)  $\Delta_2 = 2.4$ . Параметр связи  $\mu = 0.4$ .

Вдоль нижней и левой границ ляпуновской карты указаны возможные резонансные условия в этом случае. Обсудим их подробнее. Если варьировать частоту второго осциллятора  $\Delta_1$ , отложенную по оси абсцисс, то возможны два резонанса, отвечающие положению этого осциллятора в цепочке. Его частота

может совпасть с частотой первого осциллятора или с частотой третьего. Из (1.39), полагая  $\Omega_1 = \Omega_2$  и  $\Omega_2 = \Omega_3$ , получаем

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_1 = \Delta_2. \quad (1.52)$$

При небольшом значении  $\Delta_2$  эти резонансные точки близки. Наличие двух резонансов понижает размерность квазипериодического режима до двух. В результате на ляпуновской карте на рис.1.36а возникает достаточно широкая вертикальная полоса двухчастотных режимов в области  $\Delta_1 \approx 0 \approx \Delta_2$ .

При вариации частоты четвертого осциллятора  $\Delta_3$  возможен единственный резонанс, поскольку этот осциллятор находится на краю цепочки. Резонанс возникает, когда его частота совпадет с частотой третьего осциллятора. Из (1.39) легко находим резонансное соотношение  $\Omega_3 = \Omega_4$ :

$$\Delta_3 = \Delta_2. \quad (1.53)$$

Соответственно, в окрестности резонансной точки  $\Delta_3 = \Delta_2$  на рис.1.36а возникает горизонтальная полоса, но теперь уже трехчастотных режимов. Область полной синхронизации лежит на пересечении вертикальной и горизонтальных резонансных полос.

Если теперь увеличить параметр  $\Delta_2$ , то область полной синхронизации сохраняет форму треугольника. Однако при  $\Delta_2 = 2\mu$  наступает следующее качественное изменение: нижняя сторона треугольника достигает его вершины, и область полной синхронизации исчезает вообще. Запороговый случай  $\Delta_2 = 2.4$  показан на рис.1.36в,г.

На ляпуновской карте рис.1.36в можно видеть, что резонансные точки (1.52) разошлись вдоль горизонтальной оси. Ситуация перекрытия резонансов разрушилась, двухчастотная полоса исчезла и заменилась двумя вертикальными трехчастотными полосами. Соответственно, исчезает и область полной синхронизации. Теперь пересечение полос трехчастотных режимов дает две двухчастотные области в форме квадрата и параллелограмма. Как можно видеть из соответствующей карты торов на рис.1.36г, для них числа вращения  $w=0:1:0$  и  $w=1:0:0$ , так что возникают режимы частичной синхронизации, типа показанных на рис.1.20а и 1.20в.

Интересно отметить, что вторая двухчастотная область качественно аналогична области полной синхронизации трех осцилляторов, т.е. образует «параллелограмм Ланды» (рис.1.14), только уже для двухчастотного режима, а не для случая полной синхронизации. Также аналогична и картина вне этого параллелограмма, но размерность квазипериодичности повышается на единицу.

### 1.2.9. Обобщение на случай большего числа осцилляторов

Выше был развит определенный алгоритм аналитического исследования области полной синхронизации, который включал поиск системы вспомогательных линий, отрезки которых ограничивают область полной синхронизации. Этот алгоритм может быть распространен на случай большего числа осцилляторов. Обратимся, например, к случаю пяти осцилляторов. Действуя в рамках метода медленно меняющихся амплитуд, в этом случае вместо уравнений (1.28) можно получить:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\
 \dot{\phi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \phi, \\
 \dot{\phi} &= \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi - \mu \sin \phi + \frac{\mu}{2} \sin \vartheta, \\
 \dot{\vartheta} &= \frac{\Delta_3 - \Delta_4}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \phi - \mu \sin \vartheta.
 \end{aligned}
 \tag{1.54}$$

Для неподвижных точек полагаем  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = \dot{\phi} = \dot{\vartheta} = 0$ . Далее следуем описанному алгоритму. В первом уравнении выражаем  $\sin \varphi$  через  $\sin \theta$ , подставляем во второе. Оттуда выражаем  $\sin \phi$  через  $\sin \theta$  и так далее, «вниз» по цепочке уравнений. В результате, после некоторых преобразований получаются следующие выражения для синусов всех четырех фазовых переменных:

$$\begin{aligned}
 \mu \sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}{5}, \\
 \mu \sin \varphi &= \frac{3\Delta_1 - 2\Delta_2 - 2\Delta_3 - 2\Delta_4}{2}, \\
 \mu \sin \phi &= \frac{2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 3\Delta_3 - 3\Delta_4}{5}, \\
 \mu \sin \vartheta &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - 4\Delta_4}{5}.
 \end{aligned}
 \tag{1.55}$$

Если все уравнения (1.54) имеют решения, то система имеет 16 неподвижных точек, расположенных в вершинах *четырёхмерного параллелепипеда* в четырёхмерном фазовом пространстве  $(\theta, \varphi, \phi, \vartheta)$ .

Аналогично случаю трех и четырех осцилляторов, при вариации соответствующих комбинаций параметров в (1.54), трехмерные грани этого параллелепипеда могут сближаться. В результате, происходит седло-узловая



бифуркация такого типа, что все 16 точек сливаются попарно и одновременно исчезают.

Условие обращения каждого синуса в  $\pm 1$  приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}\mu &= \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}{5}, \\ \mu &= \pm \frac{3\Delta_1 - 2\Delta_2 - 2\Delta_3 - 2\Delta_4}{2}, \\ \mu &= \pm \frac{2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 3\Delta_3 - 3\Delta_4}{5}, \\ \mu &= \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - 4\Delta_4}{5}.\end{aligned}\tag{1.56}$$

Система линий (1.56) дает на плоскости параметров  $(\Delta_1, \mu)$  четыре языка. Эти языки являются очень удобными вспомогательными линиями для построения области полной синхронизации. Их основания располагаются в точках

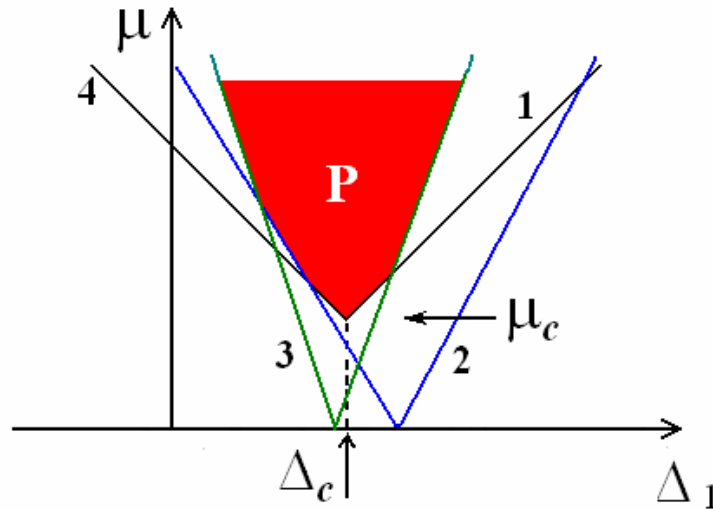
$$\begin{aligned}\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 &= 0, \\ 3\Delta_1 - 2\Delta_2 - 2\Delta_3 - 2\Delta_4 &= 0, \\ 2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 3\Delta_3 - 3\Delta_4 &= 0, \\ \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - 4\Delta_4 &= 0.\end{aligned}\tag{1.57}$$

В соответствии с (1.56) на плоскости  $(\Delta_1, \mu)$  два языка имеют наименьший одинаковый наклон, а два других – больший наклон. Несложно показать, что картина пересечения этих языков может иметь не более четырех «углов» – точек коразмерности два. На рис.1.37 представлен качественный рисунок, иллюстрирующий соответствующую конфигурацию.

Наличие такой конфигурации можно выявить в результате следующих рассуждений. Разбиение плоскости параметров первой и четвертой линиями (1.56), дополненное третьей линией, аналогично случаю трех осцилляторов. Из (1.56) можно показать, что случай с тремя «углами» для этой области имеет место при условии  $\Delta_3 < \Delta_4/2$ . При этом имеет место порог полной синхронизации по величине связи, который определяется соотношениями:

$$\mu_c = \frac{\Delta_4}{2}, \quad \Delta_c = \frac{3}{2}\Delta_4 - \Delta_3 - \Delta_2.$$

Эта картина должна быть дополнена двумя линиями, задающими второй язык (1.56), как показано на рис.1.20. При этом если этот язык охватывает точку (1.57), то она и определяет порог полной синхронизации пяти осцилляторов.

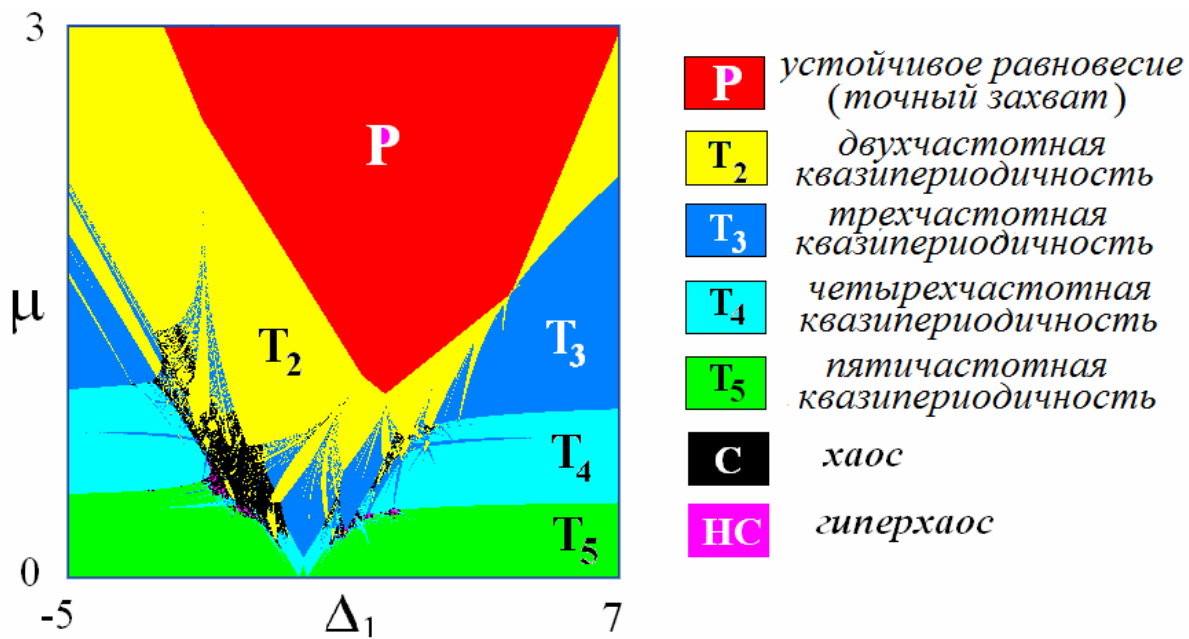


**Рис.1.37.** Качественная картина возможного расположения линий седло-узловых бифуркаций и области точного захвата  $P$  для пяти осцилляторов. Цифры отвечают соответствующим по порядку уравнениям (1.56),  $\mu_c$  – порог полной синхронизации.

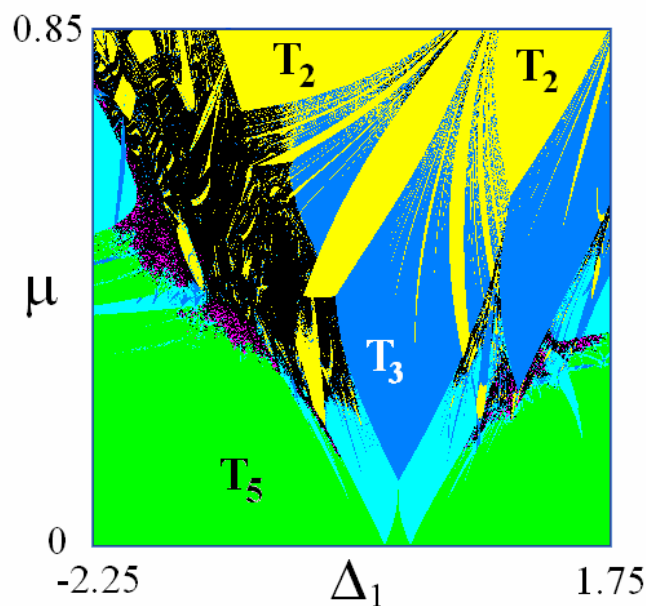
Отметим, что приведенные рассуждения обобщаются на случай  $(N+1)$ -го осциллятора. В этом случае имеется  $N$  вспомогательных языков. Область полной синхронизации получается как пересечение *всех внутренних областей* языков. Границы области полной синхронизации будут иметь «углы» – точки коразмерности два, в которых сходятся линии седло-узловых бифуркаций разных типов. Варьируя параметры, можно добиваться ситуаций более высокой коразмерности.

Теперь представим ляпуновскую карту для пяти фазовых осцилляторов, показанную на рис.1.38. Можно видеть, что картина в качественном плане аналогична случаю четырех осцилляторов. В частности, в области больших расстроек  $\Delta_1$  (правый обрез карты) можно наблюдать последовательный *каскад седло-узловых бифуркаций квазипериодических режимов* все более высокой размерности. Он завершается возникновением *пятичастотной квазипериодичности*.

На увеличенном фрагменте карты на рис.1.39 можно видеть характерные языки трехчастотных торов, которые теперь тоже имеют порог по величине связи. Основание языка  $T_3$ , расположенного при наименьшем значении параметра связи, образует квазипериодическую точку  $QSNF$ , но уже на базе трехчастотного режима. Справа от него расположен еще один такой язык, окрестность основания которого устроена более сложно, в частности, возникает возможность *гиперхаоса* с двумя положительными ляпуновскими показателями. В свою очередь, два языка четырехчастотных режимов имеют основания на оси частот. Эти точки отвечают резонансам, когда варьируемая частота второго осциллятора совпадает с частотой первого или третьего.



**Рис.1.38.** Ляпуновская карта для пяти диссипативно связанных фазовых осцилляторов (1.54);  $\Delta_2 = 0.2$ ,  $\Delta_3 = 0.9$ ,  $\Delta_4 = 2$ .



**Рис.1.39.** Увеличенный фрагмент ляпуновской карты рис.1.38.

Таким образом, при увеличении числа осцилляторов до пяти, сохраняются основные тенденции, характерные для системы из четырех осцилляторов: наличие высокоразмерных квазипериодических режимов в области малой связи, организация квазипериодических режимов разной размерности в систему языков, наличие порога для областей низкоразмерных квазипериодических режимов, наличие точек коразмерности два и возможности хаоса, локализованного, в основном, в окрестности таких точек.

## 1.3. Реактивно связанные фазовые осцилляторы

### 1.3.1. Фазовые уравнения трех реактивно связанных осцилляторов

Перейдем теперь к другому *типу* связи осцилляторов. Рассмотрим вместо (1.1) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \varepsilon(y - x) + \varepsilon(y - z) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \varepsilon(z - y) &= 0.\end{aligned}\quad (1.58)$$

Здесь связь осуществляется не через скорости изменения переменных, а непосредственно через их значения,  $\varepsilon$  – параметр связи. При радиофизической реализации связь такого типа возникает, если в цепи связи присутствует не резистор, а реактивный элемент (емкость) [2]. Поэтому такую связь называют *реактивной*. Иногда ее называют также и *консервативной*, имея в виду, что она не вносит в систему дополнительную диссипацию.

Несмотря на, казалось бы, незначительное изменение исходных уравнений, вид фазовых уравнений и картина режимов при переходе к реактивной связи существенно изменяются. Получим, прежде всего, фазовые уравнения. Действуя стандартным образом (см. раздел 1.1.1), приходим к следующим укороченным уравнениям:

$$\begin{aligned}2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a + i\varepsilon(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_1 b + i\varepsilon(2b - a - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_2 c + i\varepsilon(c - b).\end{aligned}\quad (1.59)$$

Параметр  $\lambda$  в этом случае может быть убран перенормировкой. Переходя, кроме того, к действительным амплитудам и фазам, получаем:

$$\begin{aligned}2\dot{R} &= R - R^3 - \varepsilon r \sin \theta, \\ 2\dot{r} &= r - r^3 + \varepsilon R \sin \theta - \varepsilon v \sin \varphi, \\ 2\dot{v} &= v - v^3 + \varepsilon r \sin \varphi, \\ 2\dot{\psi}_1 &= \varepsilon - \varepsilon \frac{r}{R} \cos \theta, \\ 2\dot{\psi}_2 &= 2\varepsilon + \Delta_1 - \varepsilon \frac{R}{r} \cos \theta - \varepsilon \frac{v}{r} \cos \varphi, \\ 2\dot{\psi}_3 &= \varepsilon + \Delta_2 - \varepsilon \frac{r}{v} \cos \varphi.\end{aligned}\quad (1.60)$$

Здесь  $\theta = \psi_1 - \psi_2$ ,  $\varphi = \psi_2 - \psi_3$  – относительные фазы осцилляторов.

Вычитая фазовые уравнения (1.60) друг из друга, получаем уравнения для относительных фаз:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + \varepsilon \left( \frac{R}{r} - \frac{r}{R} \right) \cos \theta + \varepsilon \frac{v}{r} \cos \varphi, \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 + \varepsilon \left( \frac{r}{v} - \frac{v}{r} \right) \cos \varphi - \varepsilon \frac{R}{r} \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Как мы отмечали во Введении, особенность двух реактивно связанных осцилляторов состоит в том, что эффект синхронизации возникает только во втором порядке по параметру связи  $\varepsilon$ . Поэтому проведем вывод для случая трех осцилляторов так, чтобы в конечных фазовых уравнениях были сохранены члены второго порядка. При этом необходимо учесть отклонения орбит осцилляторов от невозмущенных связью значений  $R = r = v = 1$ .

С этой целью положим  $R = 1 + \tilde{R}$ ,  $r = 1 + \tilde{r}$  и  $v = 1 + \tilde{v}$ , где знаком «тильда» отмечены возмущения стационарных орбит. Из амплитудных уравнений (1.60) тогда получаем для возмущений:

$$\begin{aligned} 2\tilde{R} &= -\varepsilon \sin \theta, \\ 2\tilde{r} &= \varepsilon \sin \theta - \varepsilon \sin \varphi, \\ 2\tilde{v} &= \varepsilon \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.62)$$

В свою очередь, из фазовых уравнений получаем:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + 2\varepsilon(\tilde{R} - \tilde{r}) \cos \theta + \varepsilon(1 + \tilde{v} - \tilde{r}) \cos \varphi, \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 + 2\varepsilon(\tilde{r} - \tilde{v}) \cos \varphi - \varepsilon(1 + \tilde{R} - \tilde{r}) \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Подставляем теперь сюда выражения для возмущений орбит (1.62). После некоторых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + \varepsilon \cos \varphi - \varepsilon^2 \sin 2\theta + \\ &+ \varepsilon^2 \left( \sin \varphi \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right), \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 - \varepsilon \cos \theta - \varepsilon^2 \sin 2\varphi + \\ &+ \varepsilon^2 \left( \sin \theta \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Это и есть фазовые уравнения трех реактивно связанных осцилляторов.

Если в первом уравнении (1.64) отбросить члены, содержащие фазу  $\varphi$ , т.е. «отключить» третий осциллятор, то получаем

$$\dot{\theta} = -\Delta_1 - \varepsilon^2 \sin 2\theta. \quad (1.65)$$

Это уравнение описывает синхронизацию первого и второго осцилляторов. Как мы уже отмечали, синхронизация в этом случае – это эффект второго

порядка по величине связи, причем возникает возможность как синфазной, так и противофазной синхронизации.

Интересно отметить, что в системе уравнений (1.64) в отличие от случая двух осцилляторов (1.65), присутствует и члены первого неисчезающего порядка по параметру связи. Однако если сохранить только эти члены, то мы получим «нефизическое» решение. Действительно, отбрасывая члены второго порядка в (1.64), получаем:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + \varepsilon \cos \varphi, \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 - \varepsilon \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Условие полной синхронизации отвечает состояниям равновесия этой системы  $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$ . При этом матрица Якоби (1.66) в такой точке имеет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0, & -\varepsilon \sin \varphi \\ \varepsilon \sin \theta, & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.67)$$

След этой матрицы  $S = 0$ . Как известно [70], в этом случае возникает своего рода «нейтральное» состояние на границе между устойчивым и неустойчивым решениями. Таким образом, в этом приближении в системе вообще нет основного резонанса. Поэтому для описания возможности синхронизации в системе трех реактивно связанных осцилляторов необходимо учитывать эффекты второго порядка по величине связи.

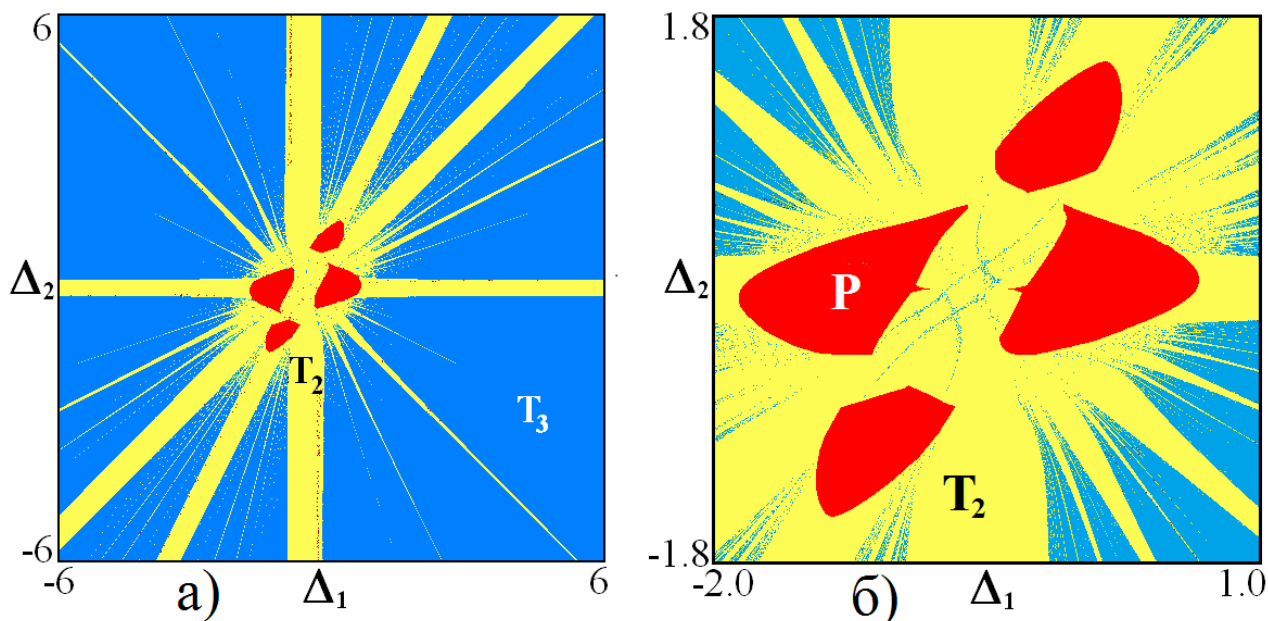
### 1.3.2. Устройства пространства собственных частот трех реактивно связанных осцилляторов

Обсудим основные свойства системы трех реактивно связанных осцилляторов и продемонстрируем их отличия от случая диссипативной связи. Условия полной синхронизации в этом случае аналитически найти не удастся, и поэтому обратимся к численному исследованию.

Удобно обсудить устройство плоскости параметров частотных расстройек автономных осцилляторов  $(\Delta_1, \Delta_2)$ . На рис.1.40а показана полученная численно карта ляпуновских показателей системы (1.64) для значения параметра связи  $\varepsilon = 0.6$ . Ее необходимо сравнить с аналогичной картой для случая диссипативной связи на рис.1.14а.

Можно видеть ряд отличий. Во-первых, область полной синхронизации теперь состоит из четырех элементов. Во-вторых, вместо двух основных полос двухчастотных режимов возникает целая система «лучей» двухчастотных режимов. Эти особенности обусловлены возможностью существования в случае реактивной связи как синфазных, так и противофазных режимов

колебаний соседних осцилляторов. При этом могут сосуществовать не только разные устойчивые равновесия, но и инвариантные кривые<sup>41</sup>. Обсудим эти вопросы более подробно.



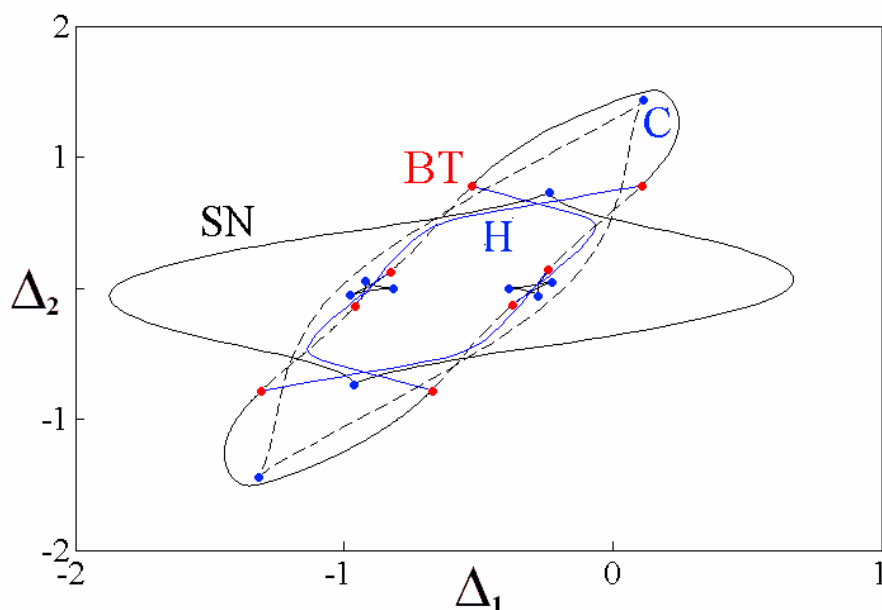
**Рис.1.40.** Ляпуновская карта (а) и ее увеличенный фрагмент (б) трех реактивно связанных фазовых осцилляторов (1.64) на плоскости частотных расстройок  $(\Delta_1, \Delta_2)$ ,  $\varepsilon = 0.6$ .

При наличии мультистабильности карты режимов целесообразно дополнять бифуркационным анализом. Система бифуркационных линий и точек для состояний равновесия исследуемой системы на плоскости  $(\Delta_1, \Delta_2)$  показана на рис.1.41. На рисунке представлены линии *седло-узловых бифуркаций*  $SN$ , которые отвечают слияниям устойчивого узла и седла. Пунктиром показаны аналогичные линии, но для случая неустойчивых узлов. Теперь возникает также возможность *бифуркации Андронова-Хопфа*  $H$  потери устойчивости равновесия с рождением устойчивого предельного цикла. Кроме того, указаны точки коразмерности два: *точки сборки*  $C$  и *точки Богданова-Тakensа*  $BT$ . Точки сборки, как известно, отвечают слиянию двух линий седло-узловых бифуркаций с характерным полукубическим «острием», а точки Богданова-Тakensа являются общими точками седло-узловых бифуркаций и линий бифуркаций Андронова-Хопфа. Для удобства на рис.1.41 использована цветовая палитра, расшифрованная в подписи к рисунку.

Бифуркационные линии могут образовывать структуры, включающие три точки сборки типа катастрофы «бабочка» [71]. Кроме того, эта структура

<sup>41</sup> Поэтому рис.1.40 на самом деле представляет собой композицию четырех карт, отвечающих четырем вариантам начальных условий и четырем возможным типам полной синхронизации в такой системе.

включает две точки Богданова-Тakensа с отходящими от них линиями бифуркаций Андронова-Хопфа.



**Рис.1.41.** Бифуркационные линии и точки для трех реактивно связанных фазовых осцилляторов (1.64) на плоскости частотных расстройек,  $SN$  – линии седло-узловых бифуркаций устойчивых равновесий (черный цвет) и неустойчивых равновесий (пунктир),  $H$  – линии бифуркаций Андронова-Хопфа (синий цвет),  $C$  – точки сборки (синий цвет),  $BT$  – точки Богданова-Тakensа (красный цвет). Значение параметра связи  $\varepsilon = 0.6$ .

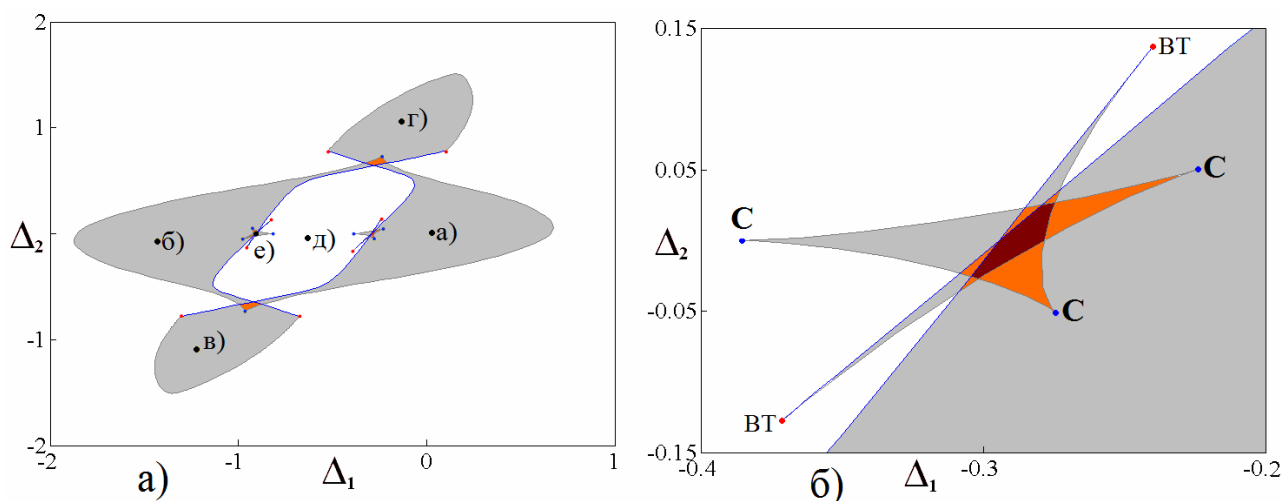
Суммарный рисунок, показывающий область полной синхронизации, приведен на рис.1.42а, а его увеличенный фрагмент – на рис.1.42б. Отмечаем, что в случае реактивной связи граница области полной синхронизации может быть как линией седло-узловой бифуркации, так и линией бифуркации Андронова-Хопфа. Таким образом, в системе с реактивной связью возможны два разных бифуркационных механизма разрушения полной синхронизации.

На рис.1.41 и 1.42 область полной синхронизации имеет вид четырех характерных «островов». Физическую природу наблюдаемых режимов помогают понять фазовые портреты в отмеченных буквами точках на плоскости параметров и представленные на рис.1.43.

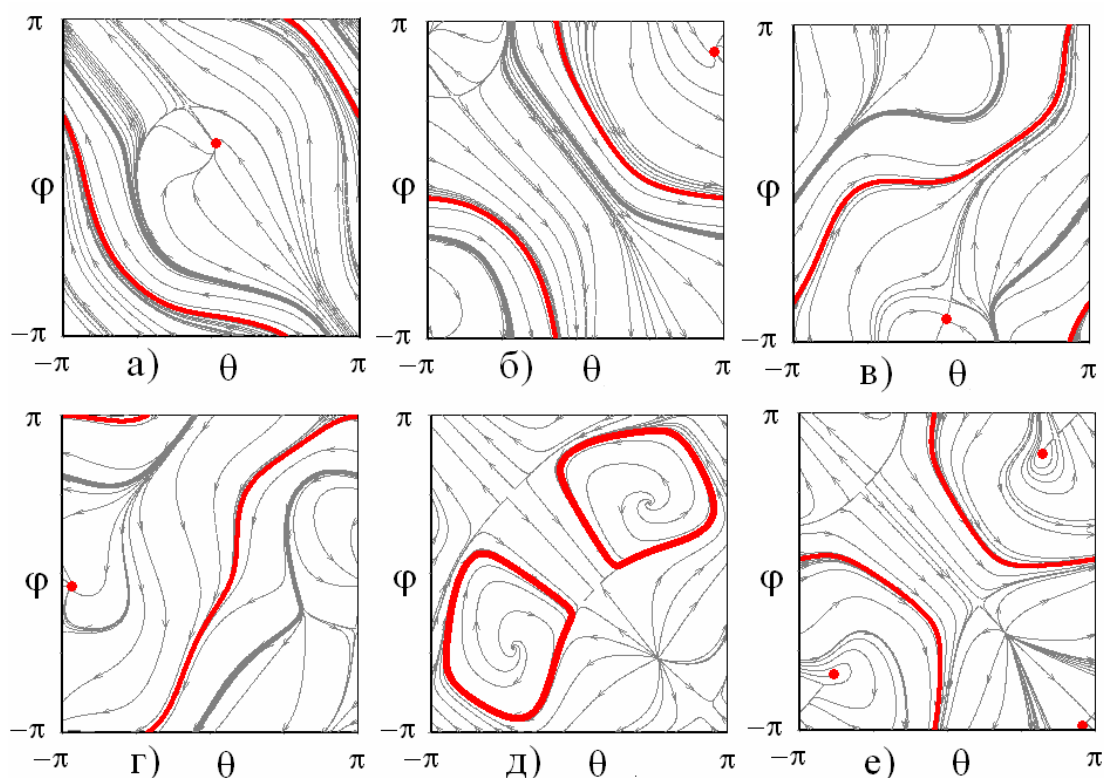
В точке а) относительные фазы обоих осцилляторов близки к нулю:  $\theta \approx 0, \varphi \approx 0$ . Это означает, что фазы всех трех осцилляторов близки друг к другу, и в системе наблюдается *синфазный* режим колебаний. Этот тип режима качественно показан на рис.1.44а. В точке б)  $\theta \approx \pi, \varphi \approx \pi$ . В соответствии с определением относительных фаз (1.11), это означает, что первый и третий осциллятор колеблются примерно в фазе, а центральный осциллятор – в противофазе. Это *противофазный* тип колебаний, рис.1.44б. Два оставшихся



«острова» отвечают случаям в) и г) и соответствуют двум возможным смешанным<sup>42</sup> типам колебаний, схематически показанным на рис.1.44в,г.

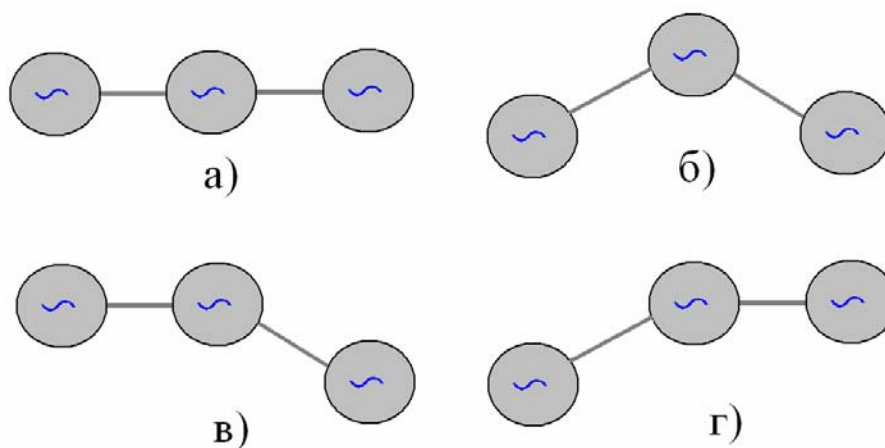


**Рис.1.42.** Область существования полной синхронизации трех реактивно связанных фазовых осцилляторов на плоскости частотных расстройк (а) и ее увеличенный фрагмент (б). Серый цвет отвечает единственному устойчивому равновесию, оранжевый – двум, а коричневый – трем. Фазовые портреты в отмеченных буквами точках даны на рис.1.43. Параметр  $\varepsilon = 0.6$ .



**Рис.1.43.** Фазовые портреты трех реактивно связанных осцилляторов в избранных точках плоскости параметров: а)  $\Delta_1 = 0.18, \Delta_2 = -0.2$ , б)  $\Delta_1 = -1.3, \Delta_2 = 0.2$ , в)  $\Delta_1 = 0.18, \Delta_2 = -0.2$ , г)  $\Delta_1 = -1.2, \Delta_2 = -1.4$ , д)  $\Delta_1 = -0.5, \Delta_2 = 0$ , е)  $\Delta_1 = -0.91, \Delta_2 = 0.01$ .

<sup>42</sup> Представления о смешанных типах колебаний в цепочках в достаточно общем контексте обсуждаются в [30].



**Рис.1.44.** Схематическое изображение основных мод трех реактивно связанных осцилляторов, а) синфазные колебания, б) противофазные колебания, в),г) два смешанных типа колебаний.

Как видно из фазовых портретов, все четыре рассмотренных случая отвечают сосуществованию как устойчивого равновесия, так и устойчивой инвариантной кривой. Таким образом, в системе возможна мультистабильность такого типа, когда сосуществуют режим полной синхронизации и квазипериодический режим.

Различные типы режимов полной синхронизации могут также сосуществовать в некоторых областях пространства параметров. В частности, такая мультистабильность возможна в окрестности структуры «бабочка», что иллюстрирует рис.1.42б. Отметим, что области мультистабильности состояний равновесия увеличиваются при уменьшении величины связи.

Продолжим обсуждение фазовых портретов. Интересный пример демонстрирует рис.1.43д. В этом случае можно наблюдать новый тип режима, которого не было для диссипативной связи. Портретом аттрактора теперь является инвариантная кривая (предельный цикл), которая может быть стянута в точку. Таким образом, она топологически отличается от обсуждавшихся выше примеров, характерных для частичного захвата двух осцилляторов. Для данного режим ни одна из относительных фаз  $\theta$  и  $\varphi$  не нарастает неограниченно, как в случаях частичного захвата осцилляторов. При этом точного захвата все же нет: обе относительные фазы совершают осцилляции около некоторых равновесных значений. Таким образом, в этом случае имеет место *частичный захват всех трех осцилляторов*. В этом режиме частотный спектр будет содержать набор составляющих, связанных с новым характерным масштабом времени – периодом обращения изображающей точки по предельному циклу на плоскости относительных фаз.

На рис.1.43д возможно сосуществование двух таких режимов захвата всех трех осцилляторов, которым отвечают две инвариантные кривые указанного

типа. В первом случае относительные фазы колеблются около значения  $\theta \approx -\pi/2, \varphi \approx -\pi/2$ , а во втором – около значений  $\theta \approx \pi/2, \varphi \approx \pi/2$ . Таким образом, средняя разность фаз между первым и вторым, и вторым и третьим осцилляторами составляет  $\pi/2$ .

Отметим, что карта ляпуновских показателей рис.1.40 и система бифуркационных линий рис.1.41 обладают симметрией относительно линий  $\Delta_2 = 0$  и  $\Delta_2 = 2(\Delta_1 + \varepsilon)$ . Для значений параметров, отвечающих этим линиям, фазовые портреты также характеризуются симметрией, см. пример на рис.1.43д. Соответственно, при движении вдоль указанных линий будут наблюдаться бифуркации, характерные для систем с симметрией. Кроме того, могут происходить также и разнообразные нелокальные бифуркации, которые, однако, здесь не рассматриваются.

#### 1.4. Влияние геометрии связи: сеть из фазовых осцилляторов. Случай диссипативной и активной связи

Выше мы рассматривали динамику ансамблей осцилляторов, соединенных в цепочку. Обсудим теперь, как проявится изменение *геометрии связи* на динамику системы. Рассмотрим популярный в последнее время тип связи – «каждый с каждым», что отвечает объединению осцилляторов в сеть, как показано на рис.1.45<sup>43</sup>.

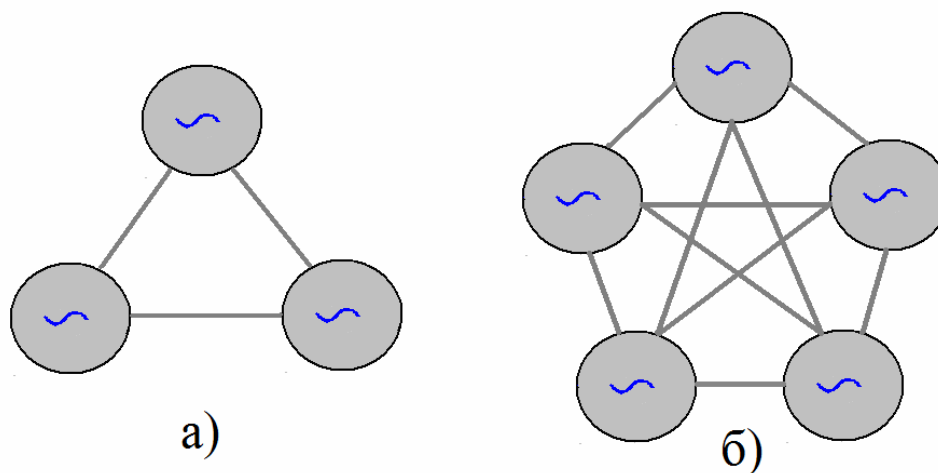


Рис.1.45. Низкоразмерные ансамбли в форме сети, случаи трех (а) и пяти (б) осцилляторов.

Пусть сначала сеть образована из трех осцилляторов<sup>44</sup>:

<sup>43</sup> В более общем случае связи в сети могут иметь разную величину, в зависимости от направления. Это приводит к значительному увеличению возможных вариантов. Некоторое обсуждение этого вопроса можно найти в [72,73].

<sup>44</sup> Отметим, что для трех осцилляторов случай кольца и сети не различимы.

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(2\dot{x} - \dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\
\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(2\dot{y} - \dot{x} - \dot{z}) &= 0, \\
\ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(2\dot{z} - \dot{y} - \dot{x}) &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.68}$$

Здесь смысл переменных и параметров такой же, как и в соотношении (1.1).

Действуя стандартным образом, получаем фазовые уравнения

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_1 &= \frac{\mu}{2}\sin(\psi_2 - \psi_1) + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_3 - \psi_1), \\
\dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_1 - \psi_2) + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_3 - \psi_2), \\
\dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_2 - \psi_3) + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_1 - \psi_3).
\end{aligned}
\tag{1.69}$$

Вводя относительные фазы  $\theta = \psi_1 - \psi_2$ ,  $\varphi = \psi_2 - \psi_3$ , приходим к фазовой модели сети из трех осцилляторов:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu\sin\theta + \frac{\mu}{2}\sin\varphi - \frac{\mu}{2}\sin(\theta + \varphi), \\
\dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} - \mu\sin\varphi + \frac{\mu}{2}\sin\theta - \frac{\mu}{2}\sin(\theta + \varphi).
\end{aligned}
\tag{1.70}$$

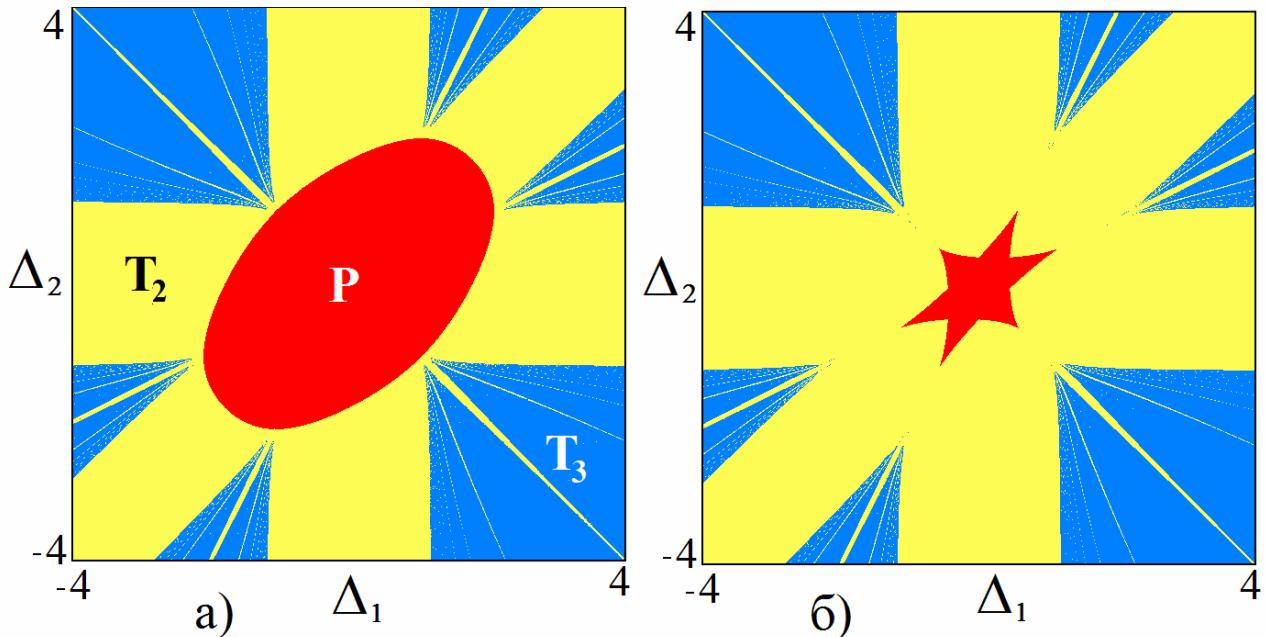
По сравнению со случаем цепочки (1.12), появляются дополнительные члены, содержащие сумму относительных фаз. Поэтому строгое аналитическое рассмотрение полной синхронизации в этом случае выполнить не удастся, и необходим численный анализ.

Карта ляпуновских показателей системы (1.70) на плоскости частотных расстроек показана на рис.1.46а для значения параметра связи  $\mu = 0.6$ . Сравним ее со случаем цепочки на рис.1.14а. Прежде всего, отмечаем изменение вида области полной синхронизации. Характерный для цепочки «параллелограмм Ланды» теперь заменяется на эллипс.

Вторая особенность системы – увеличение числа основных полос двухчастотных режимов, на пересечении которых лежит область полной синхронизации. Причина состоит в геометрии системы, которая определяет число возможных резонансов. Действительно, для сети возможны три варианта основных резонансов:

- совпадают частота первого и второго осцилляторов:  $\Delta_1 = 0$ ,
- совпадают частоты второго и третьего осцилляторов:  $\Delta_2 = 0$ ,
- совпадают частоты первого и третьего осциллятора  $\Delta_1 = \Delta_2$ .

Эти три ситуации и определяют три широкие полосы двухчастотных режимов на рис.1.46а. Для цепочки в силу геометрии связи существенными будут только два первых резонансных условия.



**Рис.1.46.** Карта ляпуновских показателей для сети из трех фазовых осцилляторов (1.70) на плоскости частотных расстройк; а) случай диссипативной связи  $\mu=0.6$ , б) случай активной связи  $\mu = -0.6$ ;  $\Delta_2=1$ .

Как мы отмечали во введении, для задач лазерной физики представляет интерес случай *активной* связи, когда синхронизация двух элементов описывается уравнением Адлера (4), но с отрицательной константой связи. В этом случае устойчивой становится *противофазная* синхронизация элементов. Изменение знака связи оказывается принципиально существенным именно для сети.

Действительно, если изменить знак в фазовом уравнении цепочки (1.12), то устройство карты режимов не изменится. Причина в том, что замена переменных  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ ,  $\psi \rightarrow \psi + \pi$  эквивалентна изменению знака параметра связи  $\mu$ . Таким образом, картина режимов в цепочке для диссипативной и активной связи полностью эквивалентна, при этом только синфазные режимы превращаются в противофазные.

Иная ситуация имеет место для сети. В этом случае такая замена переменных меняет вид уравнений (1.70), а это означает, что при активной связи наблюдается другое устройство пространства параметров. Этот факт иллюстрирует рис.1.46б, на котором показана карта ляпуновских показателей сети для отрицательного параметра связи  $\mu = -0.6$ . Можно видеть радикальное изменение области полной синхронизации, которая представляет собой теперь

шестиконечную «звезду»<sup>45</sup>. Интересно отметить, что для сети с активной связью точки *saddle node fan* не лежат на границе области полной синхронизации, а располагаются вне ее. Их локализация теперь, по-видимому, связана с бифуркациями неустойчивых равновесий и нелокальными бифуркациями (см. [22]), однако, этот вопрос требует специального дополнительного исследования.

Дадим также иллюстрации для сети из пяти осцилляторов:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \frac{\mu}{4}(4\dot{x} - \dot{y} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \frac{\Delta}{4})y + \frac{\mu}{4}(4\dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
\ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \frac{\Delta}{2})z + \frac{\mu}{4}(4\dot{z} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
\ddot{w} - (\lambda - w^2)\dot{w} + (1 + \frac{3\Delta}{4})w + \frac{\mu}{4}(4\dot{w} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{v}) &= 0, \\
\dot{v} - (\lambda - v^2)\dot{v} + (1 + \Delta)v + \beta v^3 + \frac{\mu}{4}(4\dot{v} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w}) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Фазовая модель в этом случае имеет вид:

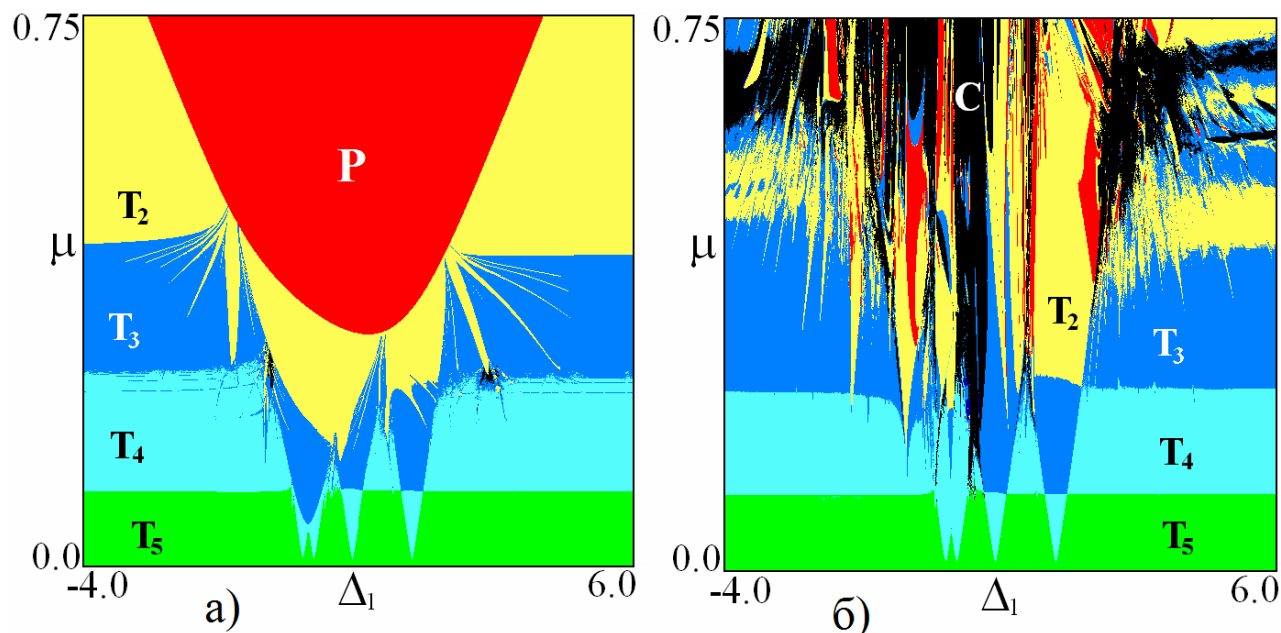
$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2}[-2\sin\theta + \sin\varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + \alpha + \beta) - \sin(\theta + \varphi) \\
&\quad - \sin(\theta + \varphi + \alpha) - \sin(\theta + \varphi + \alpha + \beta)], \\
\dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2}[-2\sin\varphi + \sin\theta + \sin\alpha - \sin(\theta + \varphi) - \sin(\varphi + \alpha) \\
&\quad + \sin(\alpha + \beta) - \sin(\varphi + \alpha + \beta)], \\
\dot{\alpha} &= \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2}[-2\sin\alpha + \sin\varphi + \sin\beta + \sin(\theta + \varphi) - \sin(\varphi + \alpha) \\
&\quad - \sin(\alpha + \beta) - \sin(\theta + \varphi + \alpha)], \\
\dot{\beta} &= \frac{\Delta_3 - \Delta_4}{2} + \frac{\mu}{2}[-2\sin\beta + \sin\alpha + \sin(\varphi + \alpha) - \sin(\varphi + \alpha + \beta) - \sin(\alpha + \beta) \\
&\quad + \sin(\theta + \varphi + \alpha) - \sin(\theta + \varphi + \alpha + \beta)].
\end{aligned} \tag{1.72}$$

где  $\theta = \psi_1 - \psi_2$ ,  $\varphi = \psi_2 - \psi_3$ ,  $\alpha = \psi_3 - \psi_4$ ,  $\beta = \psi_4 - \psi_5$  – относительные фазы осцилляторов.

На рис.1.47 дана карта режимов системы (1.72) на плоскости частота второго осциллятора – величина связи  $(\Delta_1, \mu)$  для случаев диссипативной и

<sup>45</sup> Такая картина возникает в результате наложения двух областей треугольной формы, что говорит о возможности фазовой бистабильности в системе. Мы, однако, не будем детально обсуждать этот вопрос.

активной связи. Использован тот же набор собственных частот остальных осцилляторов, что и для случая цепочки.



**Рис.1.47.** Карта ляпуновских показателей для сети из пяти фазовых осцилляторов (1.72) на плоскости частотная расстройка – величина связи; а) случай диссипативной связи  $\mu=0.6$ , б) случай активной связи  $\mu = -0.6$ ;  $\Delta_2 = 0.2$ ,  $\Delta_3 = 0.9$ ,  $\Delta_4 = 2$ .

Сопоставим случай сети и цепочки с диссипативной связью (сравним рис.1.47а и рис.1.38). Область полной синхронизации теперь имеет вид плавной линии, а не ломаной, как в случае цепочки. Порог области полной синхронизации по параметру связи в сети оказывается ниже. Это связано с тем, что чем больше связей, тем сильнее диссипация в системе.

Весьма характерно также увеличение числа языков четырехчастотных режимов, основания которых лежат на оси частот: с двух для цепочки до четырех для сети. Причина также состоит в геометрии связи. Действительно, при построении карты варьируется частота второго осциллятора  $\Delta_1$ . В случае цепочки возможны только два основных резонанса, когда частота этого осциллятора совпадает с частотами первого и третьего. Для сети, благодаря глобальной связи, второй осциллятор может оказаться в резонансном условии с любым другим из четырех. Отсюда вытекает, что число основных резонансных языков такого типа для сети на единицу меньше числа элементов.

Обсудим теперь особенности сети с активной связью, рис.1.47б. Область малой связи для диссипативной и активной связи устроена во многом аналогично. Однако при большой связи наступают существенные отличия: для активной связи область полной синхронизации почти полностью исчезает. Это

несложно объяснить. Действительно, пусть два элемента в сети синхронизованы. В случае активной связи это будет противофазный режим. Тогда любой третий элемент окажется в фазе либо с первым, либо со вторым, что нарушит условия синхронизации всего ансамбля. Таким образом, полная синхронизация осцилляторов в сети с активной связью затруднена<sup>46</sup>.

## 1.5. Физические системы

Системы в виде ансамблей автоколебательных элементов и в виде соответствующих фазовых моделей встречаются во многих областях физики. Мы рассмотрим несколько примеров, которые приводятся к моделям, аналогичным рассмотренным.

**Лазерная физика. Оптически связанные лазеры с инжекцией внешнего излучения.** Задачи, связанные с синхронизацией, как небольшого числа лазеров, так и достаточно больших их массивов, весьма популярны в лазерной физике. Причина состоит в том, что синхронизация позволяет существенно увеличить интенсивность и качество излучения. Отдельный лазер является, фактически, автоколебательной системой. Роль отрицательного трения выполняет *активная среда*. Лазеры могут взаимодействовать за счет излучения, что приводит, как говорят, к *оптически связанным лазерам*. Для двух элементов может быть получено и соответствующее *уравнение Адлера*. При этом природа лазера может быть различной. Это могут быть полупроводниковые лазеры, СО<sub>2</sub> лазеры и т.д. Добиться синхронной генерации лазеров можно разными способами. Это может быть *инжекция* внешнего поля от одночастотного лазера, синхронизирующего ансамбль, использование так называемого *пространственного фильтра, резонатора Гальбо* и др.

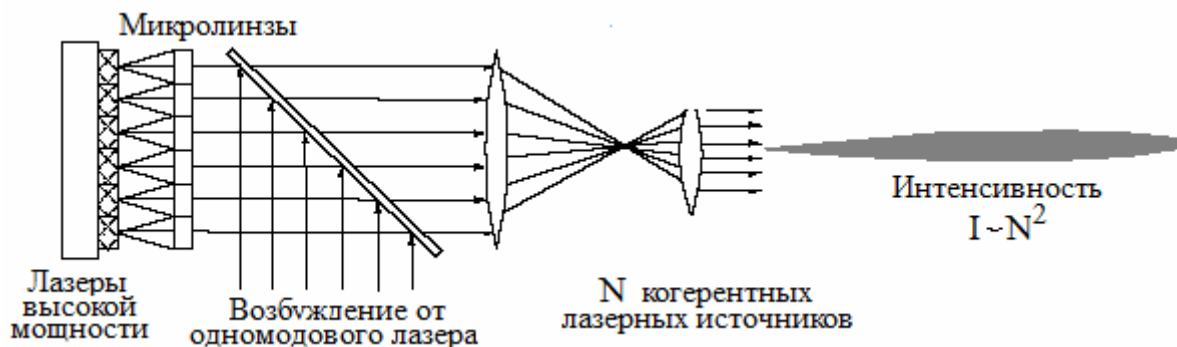
Обратимся сначала к системе полупроводниковых лазеров с инжекцией внешнего поля от одночастотного лазера, рис.1.48 [21,73,74]. Имеется массив лазеров (*laser array*) в виде цепочки, между которыми существует оптическая связь. Внешнее излучение от одночастотного лазера поступает в систему через полупрозрачное зеркало. В простейшем случае двух лазеров можно прийти к следующей фазовой модели [21]:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \Omega + \Delta + \mu \sin(\psi_1 - \psi_2) - b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \Omega - \Delta + \mu \sin(\psi_2 - \psi_1) - b \sin \psi_2.\end{aligned}\tag{1.73}$$

<sup>46</sup> По этой причине размер области полной синхронизации для сети из трех элементов в случае активной связи на рис.1.46б заметно меньше, чем в случае диссипативной рис.1.46а.



Здесь  $b$  – параметр амплитуды воздействия инжектируемого поля,  $\Omega$  – его частота,  $\mu$  – параметр оптической связи лазеров. Отметим, что система (1.73) аналогична обсуждаемым ниже моделям (3.10) и (3.49).



**Рис.1.48.** Схема ансамбля лазеров, возбуждаемых внешним одномодовым лазером [21,73,74].

Если выключить внешнее воздействие, то система (1.73) сводится к единственному уравнению для относительной фазы лазеров  $\theta = \psi_1 - \psi_2$ :

$$\dot{\theta} = 2\Delta + \theta + 2\mu \sin \theta. \quad (1.74)$$

Это уравнение Адлера, однако связь не диссипативная, а *активная*. При этом устойчивому состоянию равновесия соответствует не синфазная, а противофазная синхронизация, когда  $\theta \approx \pi$ . С точки зрения качества излучения синфазная синхронизация лазеров предпочтительнее, а она может быть достигнута за счет инжекции внешнего поля, что явилось одной из основных мотиваций работы [21].

Действительно, если отбросить связь в (1.73), то получим два несвязанных уравнения возбуждаемых лазеров:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \Omega - b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \Omega - b \sin \psi_2. \end{aligned} \quad (1.75)$$

При этом оба лазера будут синхронизованы одинаковым образом: синфазно относительно внешнего поля. Таким образом, увеличивая внешнее поле в (1.73), можно перевести лазеры в синфазный режим.

В работе [21] представлен бифуркационный анализ системы (1.73) в некоторых случаях. Отметим также последующую работу [22], посвященную данной модели, в которой авторы исследуют ее с более общих позиций теории бифуркаций, как систему с двухчастотной динамикой и простейшими резонансами.

**Лазерная физика. Системы с пространственным фильтром.** Еще один способ осуществления оптической связи между волноводными лазерами – использование *пространственного фильтра* [76-79]. В этом случае в линзовую систему помещают дифракционную решетку, играющую роль

пространственного фильтра, рис.1.49. Дифракция излучения на ней и обеспечивает оптическую связь.

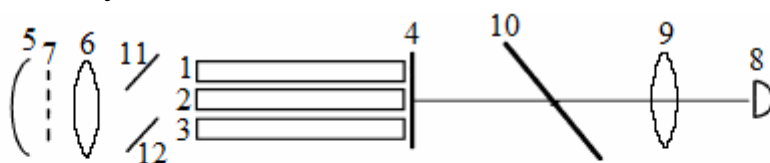


Схема эксперимента:

1, 2, 3 - разрядные трубки; 4 - выходное зеркало; 5 - вогнутое сферическое зеркало; 6,9 - фокусирующие линзы; 7 - пространственный фильтр; 8 - приемник излучения; 10 - светоделительный клин; 11,12 - тонкие пленки.

**Рис.1.49.** Схема синхронизации набора волноводных CO<sub>2</sub> лазеров за счет использования пространственного фильтра [76-79].

В рамках такой системы можно придти к следующей фазовой модели:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \Delta_1 - \mu_1 \sin \theta + \mu_2 \sin \varphi - m \sin(\theta + \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \Delta_2 - \mu_1 \sin \varphi + \mu_2 \sin \theta - m \sin(\theta + \varphi). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Здесь  $\theta$  и  $\varphi$  – относительные фазы лазеров,  $\Delta_1, \Delta_2$  – частотные расстройки первого-второго и второго-третьего лазеров,  $\mu_1, \mu_2$  – параметры связи лазеров, выражающиеся через использованные в [76] параметры с помощью соотношений:

$$\mu_1 = \left(c + \frac{1}{c}\right)M, \quad \mu_2 = \frac{M}{c}. \quad (1.77)$$

Параметры  $M$  и  $c$  могут быть рассчитаны оптическими методами [76].

Система (1.76) представляет собой фазовый поток на торе. Заметим, что по сравнению с (1.70) связь между элементами (лазерами) несимметрична. Кроме того, коэффициент  $m$  учитывает возможность оптической связи крайних лазеров (первого и третьего). При этом предполагается, что эта дополнительная связь может быть как пассивной, так и активной. Соответственно, параметр  $m$  может быть как положительным, так и отрицательным.

Отметим, что лазерные системы представляют многочисленные возможности для различных вариантов оптической связи, как небольшого числа, так и многих лазеров. Используются цепочки лазеров, системы в виде кольца, с глобальной связью «каждый с каждым» и т.д. Соответствующие вопросы обсуждаются, например, в обзорах [77,80]. Связь между лазерами может быть организована с помощью специальной системы зеркал, что также приводит к уравнениям для фазового потока на торе [81] и т.д.

**Микроволновая электроника.** Примеры взаимодействующих осцилляторов известны в микроволновой электронике, например, при описании виркаторов. *Виркатор* (от английского «*virtual cathode oscillator*»), осциллятор с

виртуальным катодом) – это приборы сверхвысокочастотной электроники с положительно заряженной сеткой и существенным объёмным зарядом. В такой системе часть электронов отражается полем пространственного заряда и полями электродов. Формируется поверхность, потенциал которой равен потенциалу катода (виртуальный катод). При генерации возникает модуляция коллекторного и отражённого токов, группировка электронов и осцилляции точки разворота частиц. Виркаторы используются как мощные (до  $10^{10}$ – $10^{12}$  Вт) генераторы излучения в СВЧ и рентгеновском диапазонах. Имеются работы, в которых показано, что отдельный виркатор может вести себя аналогично осциллятору Ван-дер-Поля [82]. При учете обратной связи по потоку электронов можно придти к модели связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга [83]. Два связанных виркатора в рамках уравнений Адлера исследованы в [84]. Объединение нескольких виркаторов в систему может приводить к увеличению мощности в режиме синхронных колебаний [85]. В работе [85] для описания взаимодействия трех виркаторов, работающих на общую нагрузку, использована фазовая модель в виде трех связанных фазовых уравнений. При этом имеет место диссипативная связь по типу кольца. Необходимо также учитывать запаздывание сигнала при распространении излучения от одного генератора к другому. Отметим, что в ситуации вынужденной синхронизации ансамбля автогенераторов могут быть использованы различные устройства. Например, в [104] описаны экспериментальные результаты по фазовой синхронизации набора виркаторов сигналом релятивистского магнетрона.

**Ионные ловушки.** Пример системы, описываемой укороченными уравнениям Ландау-Стюарта с реактивной связью, дают ионные ловушки [86]. В таких ловушках ионы «заперты» с помощью переменных СВЧ полей, ограничивающих радиальные колебания ионов и постоянного электрического поля, ограничивающего осевое движение. При использовании сегментированной ловушки со множеством электродов возникает цепочка ионов, расположенных в своих потенциальных ямах. Число элементов в цепочке может быть различным. При этом нелинейность обеспечивает негармоничность ловушки. Внешнее лазерное излучение может приводить как к диссипации, так и к «раскачиванию» ионов в зависимости от его частоты. Ионы в цепочке связаны через кулоновское отталкивание, так что связь является чисто консервативной. В случае двух или трех ионов получается система укороченных уравнений с реактивной связью. Для большого числа элементов возникает комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау с реактивной

связью. Авторы отмечают, что подобные системы привлекают внимание для целей квантовых компьютеров, а также, что подобная модель также применима к описанию массива наноразмерных резонаторов [87].

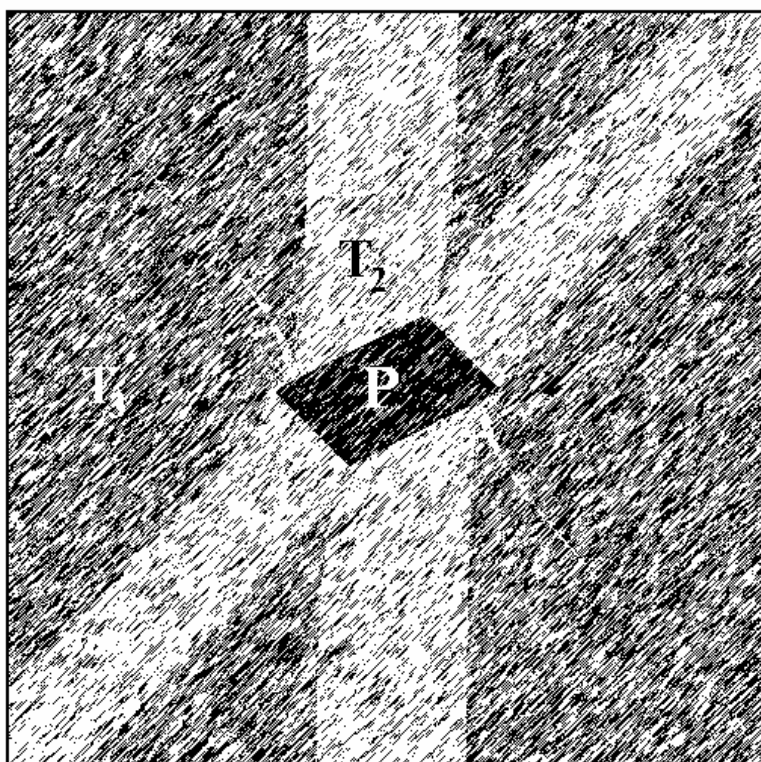
**Контакты Джозефсона.** Контакты Джозефсона используют эффект Джозефсона, состоящий в протекании сверхпроводящего тока через тонкий слой диэлектрика, разделяющий два сверхпроводника [1,88]. При постоянном напряжении на переходе возникают высокочастотные колебания (джозефсоновская генерация). Обратный эффект известен как джозефсоновское поглощение. Таким образом, контакты используют как генераторы, так и как приемники электромагнитных волн очень высокочастотного диапазона.

Контакт Джозефсона под действием внешнего тока приводится к уравнению маятника с нелинейностью синуса под действием постоянного момента [1]. Для протемпированной системы при отбрасывании второй производной получается уравнение *активного ротатора*, эквивалентное уравнению Адлера. В связанных контактах наблюдаются эффекты синхронизации разного типа (см. [1] с. 155 и цитированную литературу, а также [89]). Существует множество вариантов объединения контактов в общую цепь, что приводит к различным моделям в виде связанных фазовых уравнений.

**Синхронизация часов.** Задача о синхронизации часов является классической для теории синхронизации, поскольку именно на этом примере Х.Гюйгенс обнаружил возможность синхронизации. Тем не менее, она продолжает привлекать внимание в разных аспектах, например, построение различных моделей связи часов, более тщательное описание конструкции самой системы и ее автоколебательных механизмов [90-94] и т.д. Достаточно фундаментальный обзор проблемы можно найти в недавней работе [92]. В [94] обсуждается возможность квазипериодических колебаний двух часов. Интересные результаты для ансамблей можно найти в [93,94] Так в [94] представлены наброски карт на плоскости параметров, дающих положение областей синхронных режимов с различными фазовыми сдвигами для трех и четырех элементов. Интересные особенности синхронизации ансамбля из пяти метрономов можно обнаружить на видеоролике [95]. Хотя в этом случае устанавливается самый простой режим полной синфазной синхронизации, хорошо видно, что достаточно большое число элементов в ансамбле приводит к значительному усложнению переходного процесса. Когда система «почти» синхронизовалась, один из метрономов может снова выйти из синхронного состояния, нарушая общую картину.

# Часть II

## Взаимная синхронизация в ансамблях осцилляторов



## 2.1. Три диссипативно связанных осциллятора Ван-дер-Поля

Теперь мы обсудим свойства ансамблей осцилляторов Ван-дер-Поля в рамках исходных дифференциальных уравнений. Нас будет интересовать вопрос о том, какие элементы картины, выявленные с помощью фазовых уравнений, сохраняются, а какие модифицируются. Мы обсудим также, какие принципиально новые моменты демонстрируют низкоразмерные ансамбли осцилляторов.

Обратимся к сначала к системе из трех диссипативно связанных в цепочку осцилляторов Ван-дер-Поля, рис.1.1. Эту систему описывают уравнения (1.1), которые мы воспроизводим для удобства изложения:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь  $\lambda$  – параметр возбуждения автономных осцилляторов,  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – частотные расстройки,  $\mu$  – коэффициент диссипативной связи.

Укороченные уравнения и фазовая модель не зависят от управляющего параметра  $\lambda$ , который устраняется перенормировкой (1.6). В случае исходной системы (2.1) это не так – требуется рассматривать разные значения параметра  $\lambda$ . При этом эффективность укороченных уравнений тем лучше, чем меньше величина  $\lambda$ . Поэтому мы рассмотрим два случая.

Во-первых,  $\lambda \approx 0.1$ . Это значение достаточно мало, чтобы проявились основные свойства фазовой модели, что позволит сделать вывод о ее эффективности и полезности. В то же время это значение все же не очень мало по сравнению с единицей, так что возможны и определенные отличия.

Во-вторых,  $\lambda \approx 1$ . Это уже большие значения параметра, и фазовая модель, формально говоря, неприменима. Возникают существенно новые эффекты типа резонансов на гармониках и т.д. В то же время, в автономной системе Ван-дер-Поля колебания еще далеки от релаксационных, и предельный цикл не сильно искажен по сравнению с окружностью. Поэтому можно проследить некоторые «наследуемые» свойства фазовой модели<sup>47</sup>.

При нашем обсуждении существенное внимание уделяется квазипериодичности разной размерности. Для фазовой модели в этом случае

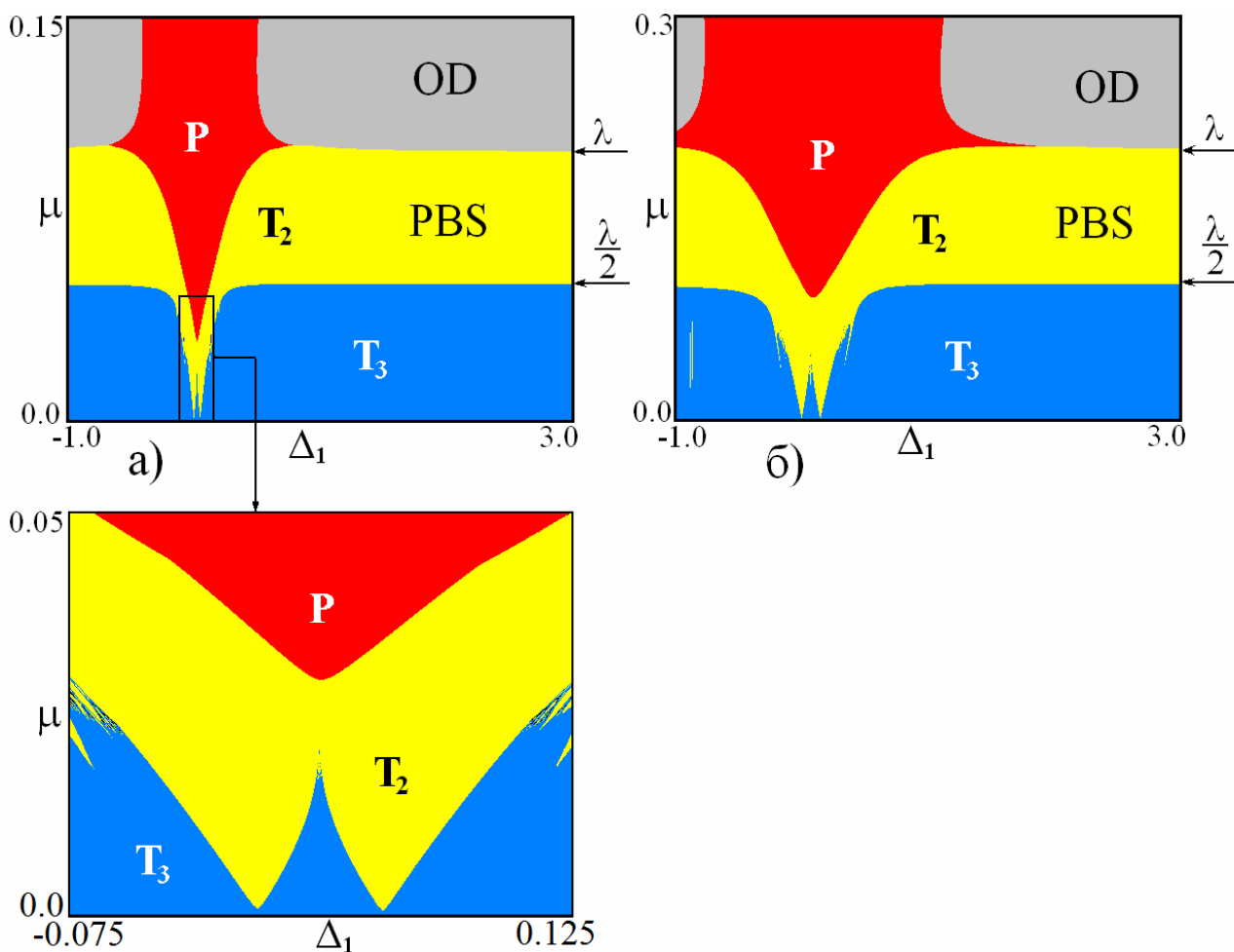
---

<sup>47</sup> В принципе, существуют подходы, которые позволяют оценивать эффективность укороченных уравнений и фазового приближения. Однако, когда речь идет о качественной картине различных типов режимов, использование метода карт ляпуновских показателей и их визуального сравнения оказывается вполне адекватным [66,67].

наблюдаются инвариантные кривые, инвариантные поверхности и т.д. В исходной системе им отвечают двумерные торы, трехмерные торы и т.д. Для их выявления также будем использовать анализ спектра ляпуновских показателей.

### 2.1.1. Случай малого управляющего параметра

Как и для фазовой модели, обратимся сначала к плоскости параметров частотная расстройка второго осциллятора – величина связи  $(\Delta_1, \mu)$ . Управляющий параметр выбираем малым  $\lambda = 0.1$ , а частотную расстройку третьего осциллятора  $\Delta_2 = 0.05$ . Ляпуновская карта и ее увеличенный фрагмент приведены на рис.2.1а. Цветовая палитра аналогична использованной выше для фазовых систем, только теперь область  $P$  отвечает устойчивому предельному циклу, а  $T_2$  и  $T_3$  - двумерному и трехмерному тора.



**Рис.2.1.** Ляпуновские карты системы трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (2.1);  $OD$  – область гибели колебаний,  $PBS$  – область частичной широкополосной синхронизации. Значения параметров а)  $\lambda = 0.1$ ,  $\Delta_2 = 0.05$ , б)  $\lambda = 0.2$ ,  $\Delta_2 = 0.15$ .

Отметим, что размерность системы (2.1) достаточна для возникновения хаоса, однако в рассматриваемом случае он не наблюдался.

Увеличенный фрагмент карты демонстрирует картину, аналогичную фазовому приближению на рис.1.5. Так, область полной синхронизации и в исходной системе имеет порог по величине связи. В тоже время наблюдаются и определенные отличия, которые обсудим более подробно.

Прежде всего, на рис.2.1а появилась *область гибели колебаний (oscillator death) OD*. Гибель колебаний – это эффект, который состоит в подавлении колебаний за счет большой диссипативной связи [1,96]. Из физических соображений понятно, что он имеет место при условии  $\mu > \lambda$ , когда трение между осцилляторами превышает отрицательное трение, свойственное автоколебательным элементам. Для удобства восприятия пороговое значение  $\mu = \lambda$  отмечено стрелкой на правой границе карты. Этот режим реализуется при достаточно больших частотных расстройках<sup>48</sup>.

Новый момент состоит в появлении при  $\lambda/2 < \mu < \lambda$  полосы двухчастотной квазипериодичности *PBS*, рис.2.1а. Это новый тип режима, который будем называть *частичной широкополосной синхронизацией (partial broadband synchronization)*. Термин «широкополосный» означает возможность синхронизации при сколь угодно большой расстройке  $\Delta_1$ . Для двух диссипативно связанных осцилляторов также возможна широкополосная синхронизация. Однако она возникает для случая принципиально неравных управляющих параметров, когда  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Природа такого режима в этом случае состоит в *доминировании* одного из осцилляторов, характеризующегося наибольшим значением управляющего параметра [31,32].

Появление аналогичных особенностей в устройстве плоскости параметров в (2.1) на первый взгляд кажется парадоксальным, поскольку все осцилляторы идентичны по управляющим параметрам. Причина состоит в том, что связь по-разному возмущает осцилляторы в цепочке, даже если их параметры возбуждения одинаковы. Дадим качественное объяснение этого эффекта.

«Выключим» последовательно в каждом уравнении системы (2.1) воздействие двух оставшихся осцилляторов. Физически это можно реализовать, например, сильно отстроив эти осцилляторы по частоте. В этом случае мы приходим к уравнению одиночных осцилляторов, но с уменьшенным за счет связи управляющим параметром  $\lambda^*$ , так что

- для первого и третьего осцилляторов:  $\lambda^* = (\lambda - \mu)$ ,
- для второго осциллятора:  $\lambda^* = (\lambda - 2\mu)$ .

---

<sup>48</sup> Он характерен и для двух диссипативно связанных осцилляторов (см. Введение, рис.11)



Таким образом, условие того, что первый или третий осцилляторы демпфированы связью имеет вид  $\mu > \lambda$ . Для второго осциллятора это условие отличается и имеет вид  $2\mu > \lambda$ . Выделенную роль этого осциллятора легко понять физически. Действительно, первый и третий осцилляторы испытывают трение со стороны только одного соседа, а второй – со стороны двух соседей, рис.1.1. Именно поэтому центральный осциллятор более протемпфирован связью, чем крайние осцилляторы. Понятно, что этот факт определяется геометрией цепочки, например, для связанных в сеть осцилляторов (глобальная связь) такая особенность наблюдаться не будет.

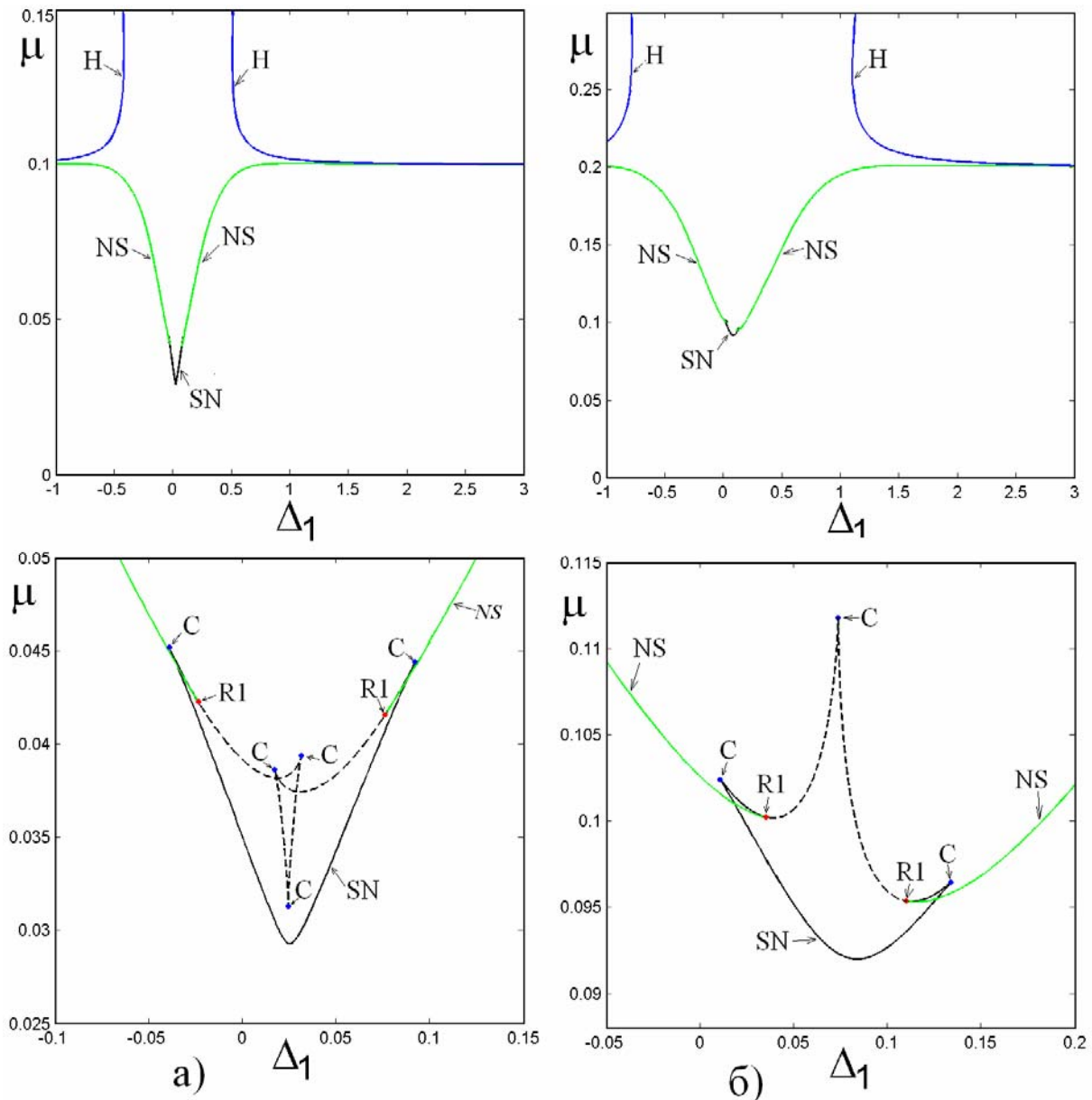
Итак, в полосе  $\lambda/2 < \mu < \lambda$  второй осциллятор подавлен связью, легко захватывается одним из соседей, и возникает режим частичной широкополосной синхронизацией *PBS*.

Наличие «неидентичности», связанной с неравноправием положения осцилляторов в цепочке, может приводить к нарушению условий применимости фазового приближения, даже если управляющий параметр мал. Для примера на рис.2.1б показана ляпуновская карта для случая  $\lambda = 0.2$ ,  $\Delta_2 = 0.15$ . При таком значении параметра  $\Delta_2$  порог области полной синхронизации практически равен значению  $\mu = \lambda/2$ , что отвечает ситуации, когда первый осциллятор уже полностью подавлен связью. Соответственно, фазовая модель, основанная на приближении невозмущенных связью орбит, уже не применима. Как следствие, характерная форма «угла», типичная для точки *SNF* в фазовой модели, теперь не наблюдается, и нижняя граница области синхронизации на рис.2б выглядит как плавная линия.

Обратимся теперь к бифуркационному анализу области полной синхронизации. В случае фазовых уравнений мы имели достаточно простую картину, выявляемую аналитически и представленную на рис.1.4. Для исходной системы (2.1) линии основных бифуркаций показаны на рис.2.2. В нижнем ряду даны соответствующие увеличенные фрагменты.

Картина бифуркаций на рис.2.2а показывает, что область полной синхронизации устроена сложнее, чем в фазовой модели. Теперь седло-узловые бифуркации устойчивого и неустойчивого режимов происходят *не одновременно*, а каждая на своей линии (сплошная черная и пунктирная линии). Порогу полной синхронизации в больших масштабах отвечает уже не характерный для фазовой модели «угол», а плавная линия. Таким образом,

точка *saddle node fan SNF* оказывается, вообще говоря, разрушенной<sup>49</sup>. При этом в окрестности пороговой точки области полной синхронизации располагается *точка сборки неустойчивых режимов C*, в которой сливаются одновременно три неустойчивых предельных цикла. Еще одна особенность состоит в том, с ростом амплитуды линия седло-узловой бифуркации сменяется линией Неймарка-Сакера *NS*, которая оканчивается в точке резонанса 1:1, что, однако, аналогично случаю классической синхронизации [1,65].



**Рис.2.2** Бифуркационные линии системы (2.1), значения параметров отвечают рис.2.1а,б. SN – линии бифуркации седло-узел, *H* – линии бифуркации Андронова-Хопфа *C* – точки сборки, *NS* – линии бифуркации Неймарка-Сакера, *R1* – точки резонанса 1:1. Пунктиром показана линия седло-узловой бифуркации для неустойчивого цикла.

<sup>49</sup> По крайней мере, на границе области полной синхронизации. Более детальная картина системы «веерных» областей двухчастотных режимов, приходящая на смену случаю фазовой модели, требует дополнительного исследования.

Для другого набора параметров, отвечающего ляпуновской карте рис.2.1б, система бифуркационных линий показана на рис.2.2б. В этом случае граница порога полной синхронизации становится еще более плавной. Точка сборки неустойчивых циклов уходит далеко в область большой связи, так что говорить о картине, характерной для точки *SNF* в фазовой модели, уже не приходится.

### 2.1.2. Случай большого управляющего параметра

Мы обсудили случай, когда значение управляющего параметра  $\lambda$  невелико. Пусть теперь величина этого параметра сопоставима с единицей, так что фазовое приближение заведомо неэффективно. Кроме того, для общности рассмотрим ситуацию, когда осцилляторы характеризуются разной степенью возбуждения, т.е. их управляющие параметры не равны друг другу:

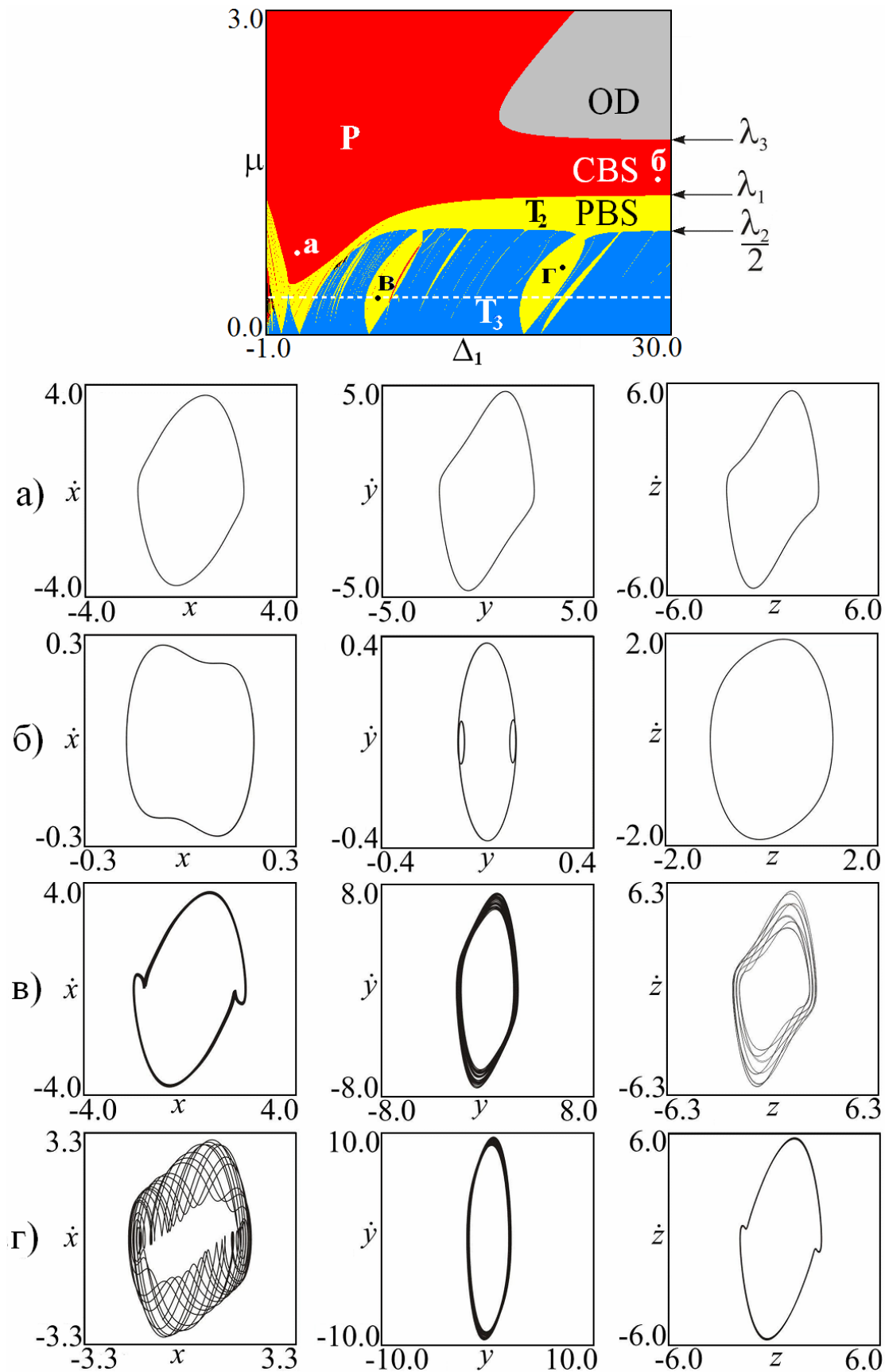
$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda_3 - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Карта ляпуновских показателей и характерные фазовые портреты трех таких осцилляторов показаны на рис.2.3. Набор параметров  $\lambda_1 = 1.3$ ,  $\lambda_2 = 1.9$ ,  $\lambda_3 = 1.8$ ,  $\Delta_2 = 1.5$ . В этом случае внутри основной области полной синхронизации все осцилляторы, в определенной мере, равноправны, так что они имеют орбиты примерно одинакового размера, что можно видеть из фазовых портретов на рис.2.3а. Однако вид фазовых портретов заметно отличается от окружности, что связано с отклонением от квазигармонического приближения.

Благодаря неравенству управляющих параметров, с ростом величины связи  $\mu$  осцилляторы в (2.2) поэтапно оказываются подавленными (демпфированными) диссипативной связью, что проявляется существенным образом в устройстве областей различных режимов. В рассматриваемом случае выполняется неравенство  $\lambda_2 / 2 < \lambda_1 < \lambda_3$ . Поэтому сначала продемпфированным связью будет второй осциллятор (хотя его управляющий параметр и максимален), затем – первый, и лишь потом – третий. Вследствие этого, на рис.2.3 возникают две разновидности режима широкополосной синхронизации:

- *полная широкополосная синхронизация CBS* в интервале  $\lambda_1 < \mu < \lambda_3$ ,
- *частичная широкополосная синхронизация PBS* в интервале  $\lambda_2 / 2 < \mu < \lambda_1$ .

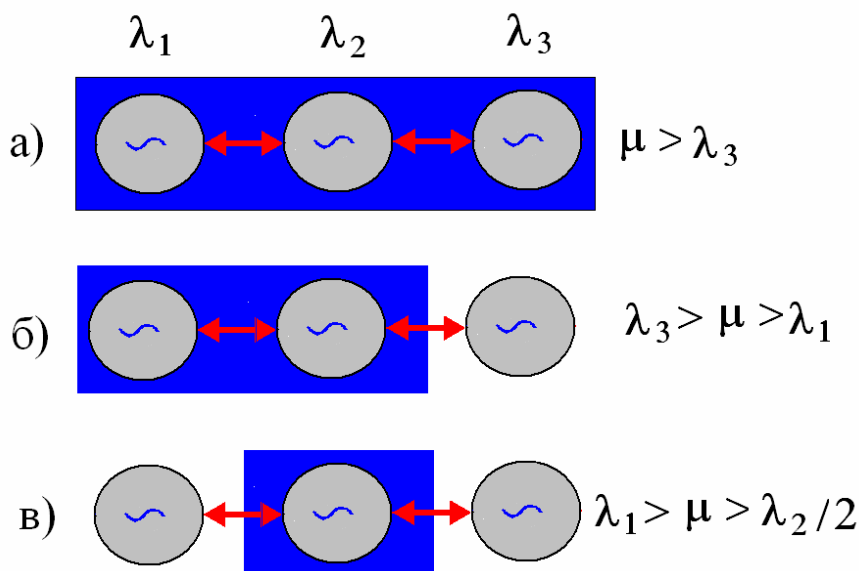
Для удобства восприятия соответствующие значения связи отмечены стрелками вдоль правой границы карты на рис.2.3.



**Рис.2.3.** Ляпуновская карта для трех неидентичных по управляющему параметру связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (2.2),  $\lambda_1 = 1.3$ ,  $\lambda_2 = 1.9$ ,  $\lambda_3 = 1.8$ ,  $\Delta_2 = 1.5$ ; а)-г) – фазовые портреты в соответствующих точках; *OD* – область гибели колебаний; *CBS* – полная и *PBS* – частичная широкополосная синхронизация.

В первом случае все три осциллятора взаимно захвачены, и демонстрируют регулярные колебания и предельные циклы. Характерный широкополосный режим обусловлен доминированием третьего осциллятора, когда два остальных подавлены связью. Соответственно, на фазовых портретах рис.2.3б размеры предельных циклов первого и второго осцилляторов примерно равны, но много меньше, чем третьего. (Обратите внимание на масштабы по осям координат на фазовых портретах.)

В свою очередь, в полосе  $\lambda_2/2 < \mu < \lambda_1$  подавлен связью только один (второй) осциллятор. Он легко захватывается наиболее возбужденным первым, и возникает режим частичной широкополосной синхронизации, отвечающий двухчастотной квазипериодичности. Схематический рисунок, иллюстрирующий иерархию наблюдаемых режимов, дан на рис.2.4.



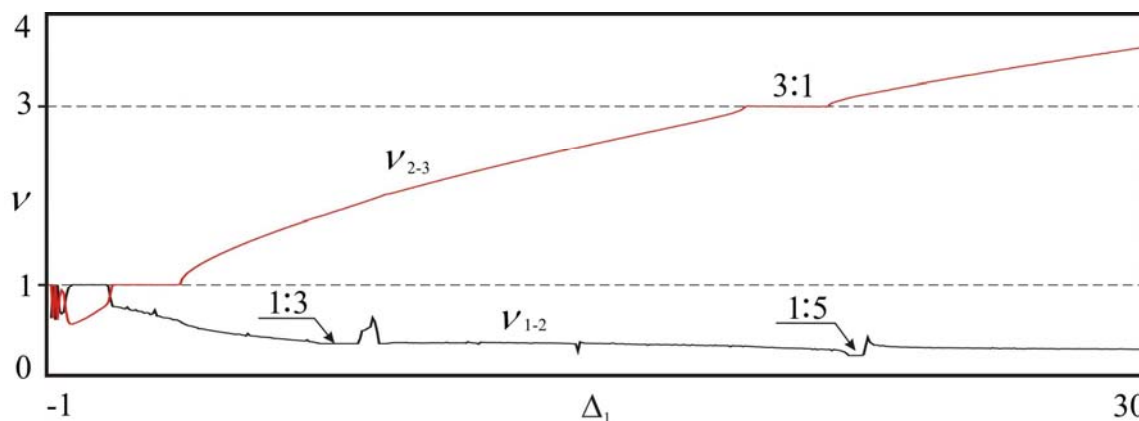
**Рис.2.4.** Иерархия демпфированных связью режимов в случае неидентичных управляющих параметров  $\lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_1$ : а) связь подавляет все осцилляторы, гибель колебаний *OD*; б) связь подавляет два осциллятора, полная широкополосная синхронизация *CBS*; в) связь подавляет центральный осциллятор, частичная широкополосная синхронизация *PBS*.

Вернемся к обсуждению общего устройства карты на рис.2.3. Наиболее существенные изменения по сравнению со случаем фазовых уравнений происходят в области трехчастотной квазипериодичности (трехчастотных торов). Внутри нее появляются новые выраженные языки резонансных двухчастотных торов, например, отвечающие точкам в) и г) на карте. Соответствующие фазовые портреты представлены на рис.2.3в и 2.3г. В этом случае демпфирующее влияние связи невелико для всех осцилляторов. Поэтому теперь доминирует второй (центральный) осциллятор, у которого наибольшее значение управляющего параметра:  $\lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_1$ . При этом внутри

двух указанных языков наиболее возмущены квазипериодическим образом разные осцилляторы: третий – на рис.2.3в, и первый – на рис.2.3г. Это отвечает тому, что в первом случае взаимно захвачены первый-второй осцилляторы, а во втором – второй-третий осцилляторы.

Этот факт легко обосновать, если ввести относительные числа вращения осцилляторов<sup>50</sup>. Для этого выберем для каждого осциллятора свое сечение Пуанкаре, по обращению в ноль его скорости. За некоторый большой промежуток времени подсчитываем числа возвратов  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$  в каждое сечение. Затем определяем числа вращения первого осциллятора относительно второго  $\nu_{1-2} = \frac{N_x}{N_y}$ , и второго относительно третьего  $\nu_{2-3} = \frac{N_y}{N_z}$ .

На рис.2.5 даны графики зависимости чисел вращения  $\nu_{1-2}$  и  $\nu_{2-3}$  от частотной расстройки  $\Delta_1$  для уровня связи, отвечающего белой пунктирной линии на карте рис.2.3. На них можно видеть характерные полочки  $\nu_{1-2} = 1/3$  и  $\nu_{2-3} = 3$ . Таким образом, в этом случае наблюдается кратная синхронизация соответствующих осцилляторов с соотношением основных частот 1:3, хотя фазовым портретом системы в целом является двухчастотный тор. Эти режимы не имеют аналога в фазовом приближении. Границы соответствующих языков на рис.2.3 в области трехчастотных торов отвечают квазипериодическим седло-узловым бифуркациям двухчастотных торов. (По крайней мере, в случае небольших значений параметра связи.)



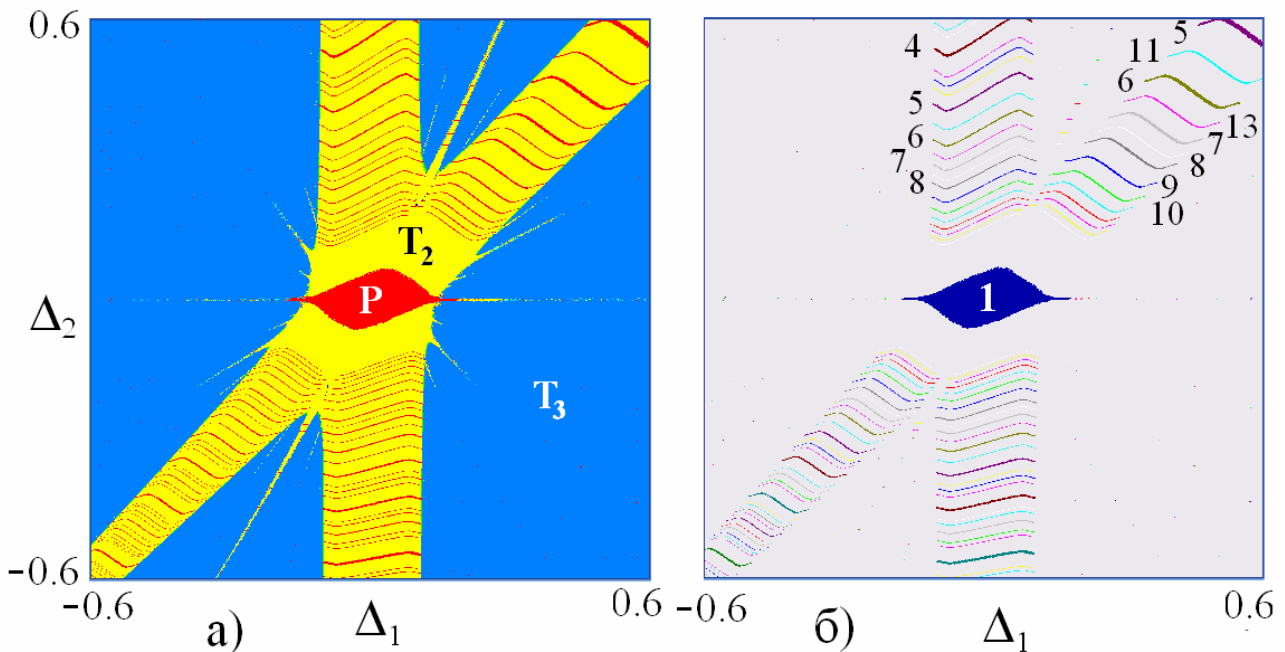
**Рис.2.5.** Зависимости чисел вращения  $\nu_{1-2}$  и  $\nu_{2-3}$  от частотной расстройки  $\Delta_1$  для системы (2.2);  $\lambda_1 = 1.3$ ,  $\lambda_2 = 1.9$ ,  $\lambda_3 = 1.8$ ,  $\Delta_2 = 1.5$ . Значение параметра связи  $\mu = 0.32$ .

<sup>50</sup> Их не следует путать с введенным в разделе 1.3. в рамках фазового приближения фактором  $w$ . Величина  $w$  характеризует взаимное расположение основных спектральных компонент в малой окрестности центральной частоты осцилляторов, т.е. при  $\Delta \approx 0$  на рис.2.3.

### 2.1.3. Плоскость частотных расстройк

Обратимся теперь к плоскости параметров  $(\Delta_1, \Delta_2)$ , определяющих собственные частоты второго и третьего осцилляторов. (Напомним, что частота первого осциллятора принята за единицу.) Соответствующая карта ляпуновских показателей для небольшого значения управляющего параметра  $\lambda = 0.1$  показана на рис.2.6а. Этот рисунок следует сравнить с рис.1.14а, на котором показана аналогичная плоскость параметров для фазовой системы.

Можно видеть, что некоторые черты картины, характерные для фазовой модели, сохраняются. А именно, форма области полной синхронизации близка к параллелограмму, имеют место две основные полосы двухчастотных режимов, погруженные в область трехчастотных торов, наблюдаются веерообразные структуры резонансных двухчастотных торов высокого порядка. Имеются, однако, и определенные отличия. Область полной синхронизации все же трансформируется по сравнению с параллелограммом на рис.1.14а. Так характерные для рис.1.14а вершины параллелограмма исчезают. При этом точки  $SNF$  сменяются плавными линиями, а для точек  $ASNf$ , наоборот, возникают тонкие вытянутые острия.

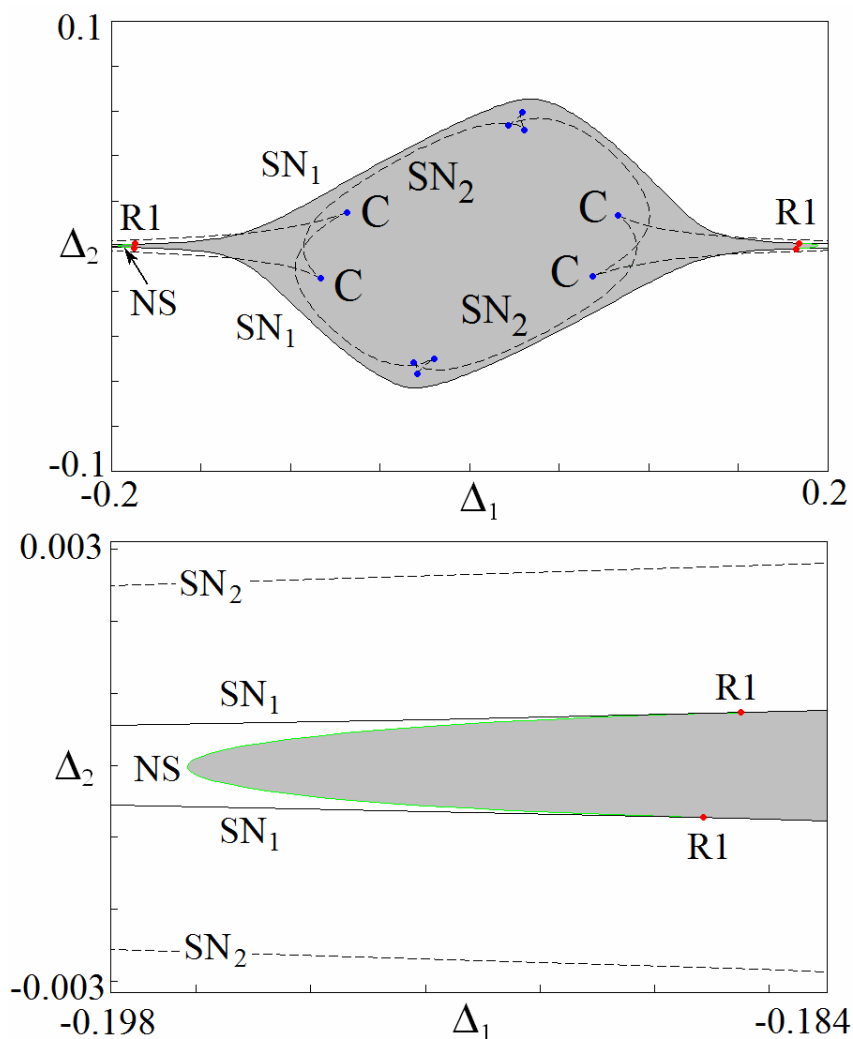


**Рис.2.6.** Карта ляпуновских показателей трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (2.1) на плоскости частотных расстройк (а) и карта периодических режимов (б). Значения параметров  $\lambda = 0.1, \mu = 0.04$ .

Удобно дополнить ляпуновскую карту *картой периодических режимов*, которая представлена на рис.2.6б. На этой карте показаны периодические режимы разных типов, причем цвет и цифры отвечают периодам в сечении

Пуанкаре. При этом области синхронизации с соотношением частот 1:1:1 отвечает неподвижная точка (период 1) в сечении Пуанкаре. На этой карте можно видеть наличие узких резонансных областей периодических режимов более высокого порядка. Они встроены в две полосы двухчастотных режимов<sup>51</sup>.

Карта ляпуновских показателей «сигнализирует» о более сложном устройстве области полной синхронизации по сравнению с фазовой моделью. Поэтому приведем результаты соответствующего бифуркационного анализа, представленные на рис.2.7. Это, своего рода, бифуркационный сценарий разрушения «параллелограмма Ланды», изображенного на рис.1.14б.



**Рис.2.7.** Бифуркационное устройство области полной синхронизации трех связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (2.1).  $SN$  – линии седло-узловых бифуркаций ( $SN_1$  отвечает слиянию устойчивого узла и седла,  $SN_2$  – неустойчивого узла и седла),  $C$  – точки сборки,  $NS$  – линии Неймарка-Сакера,  $R1$  – точки резонанса 1:1. Значения параметров  $\lambda=0.1$ ,  $\mu=0.04$ . Серым цветом показана область существования устойчивого предельного цикла.

<sup>51</sup> Для улучшения восприятия система высших резонансов перенесена и с карты режимов на ляпуновскую карту, так что рис.2.6а это, своего рода, комбинированная карта. На самом деле резонансы очень узкие и при расчете ляпуновских показателей с приемлемой точностью практически не видны.



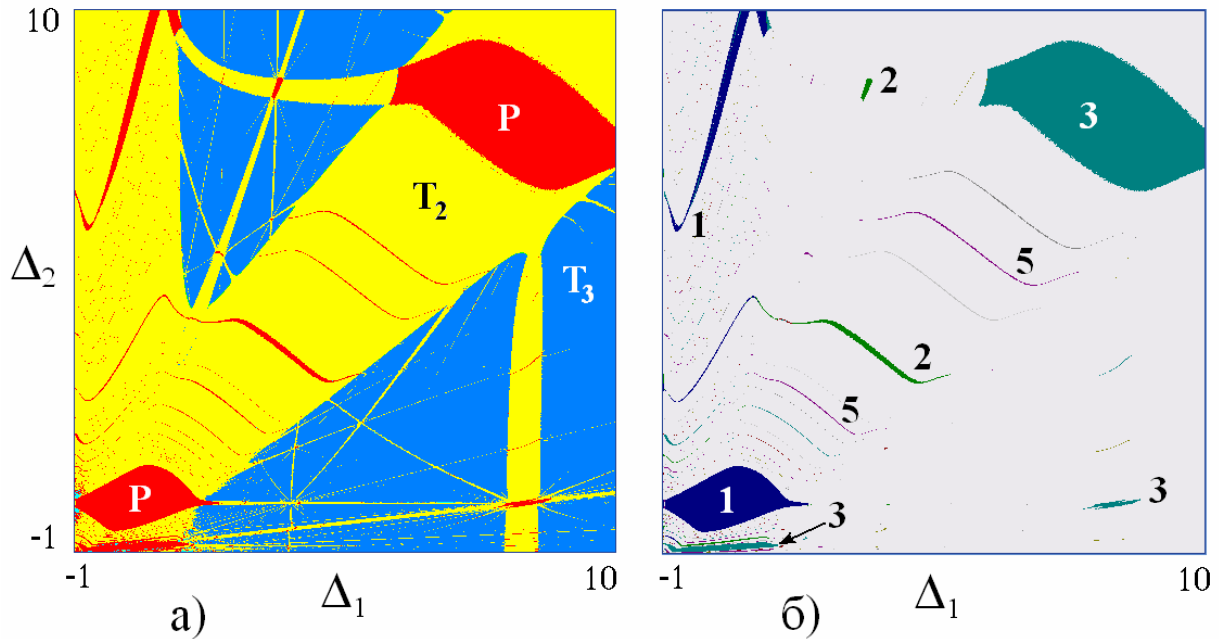
Из рис.2.7 можно видеть, что в отличие от фазовой модели, седло-узловые бифуркации устойчивого и неустойчивых предельных циклов происходят не одновременно, а на разных линиях  $SN_1$  и  $SN_2$ , показанных сплошной линией и пунктиром. Соответственно, верхний и нижний «угол» параллелограмма заменяется на плавную линию  $SN_1$ . При этом внутри области полной синхронизации располагаются три сборки  $C$  линии неустойчивых режимов.

В разрушение левой и правой точек  $ASNF$  вовлечены также линии бифуркации Неймарка-Сакера  $NS$ , которые имеют общие точки с линиями седловых бифуркаций – обозначенные  $R1$  точки резонанса 1:1. При этом вытянутые узкие области полной синхронизации ограничены линиями бифуркации Неймарка-Сакера  $NS$ , что хорошо видно на увеличенном фрагменте рисунка. В результате область полной синхронизации, показанная серым цветом, ограничена как линиями седло-узловых бифуркаций, так и Неймарка-Сакера, и принимает характерную для ляпуновской карты форму.

Перейдем теперь к случаю большого значения управляющего параметра  $\lambda = 1$ . Карта ляпуновских показателей для этого случая показана на рис.2.8. Отметим, что в соответствии с правилами нормировки параметров (1.6), по сравнению с рис.2.6 в 10 раз увеличен и параметр связи  $\mu$ , чтобы можно было сопоставить два этих рисунка. При этом, однако, согласно (2.1), частотные расстройки  $\Delta$  не могут превышать минус единицу, что учтено при выборе масштабов.

Несмотря на большое значение управляющего параметра, область полной синхронизации, в основном, сохраняет свою форму. Однако возникают другие существенные отличия. Наряду с областью синхронизации 1:1:1, в пределах самой широкой двухчастотной полосы возникает еще одна большая область полной синхронизации. Ей отвечает резонанс на гармониках, когда собственные частоты трех осцилляторов соотносятся, как 1:3:3. Действительно, в соответствии с (2.1), собственные частоты осцилляторов  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_{2,3} = \sqrt{1 + \Delta_{1,2}}$ . Значения  $\Delta_1 = \Delta_2 = 8$  как раз отвечают указанному соотношению частот. При этом второй и третий осциллятор колеблются с одинаковой частотой.

На рис.2.7 становится заметной структура *резонансной паутины Арнольда*. Полосы двухчастотных режимов разной толщины образуют «ажурную» систему, погруженную в область трехчастотных режимов. На пересечении этих полос возникает множество областей периодических режимов высокого порядка.



**Рис.2.8.** Карта ляпуновских показателей (а) и карта динамических режимов (б) трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (2.1) на плоскости частотных расстройек. Значения параметров  $\lambda = 1, \mu = 0.4$ .

## 2.2. Четыре диссипативно связанных осциллятора Ван-дер-Поля

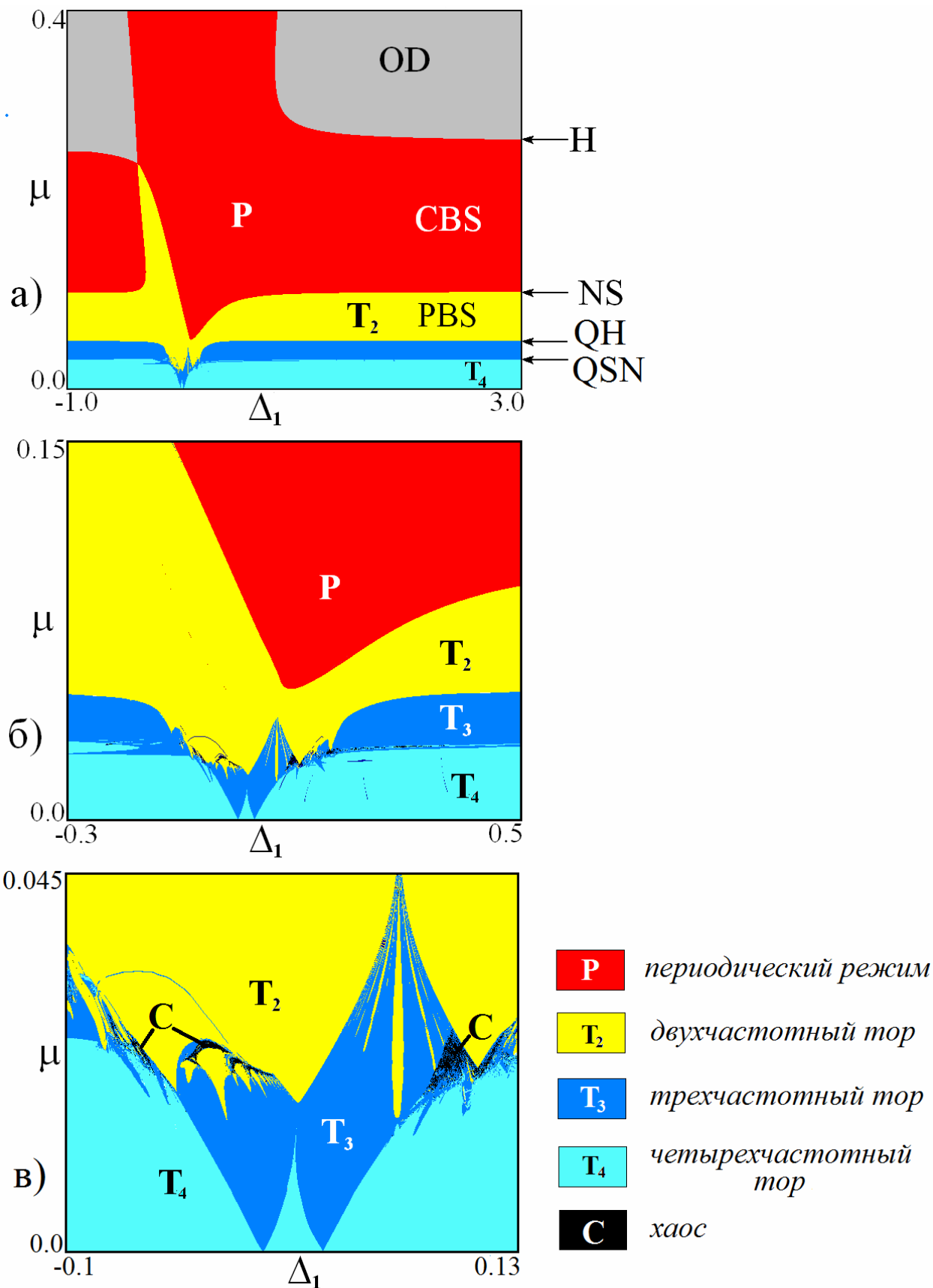
Перейдем теперь к системе из четырех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\
 \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\
 \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) + \mu(\dot{z} - \dot{w}) &= 0, \\
 \ddot{w} - (\lambda - w^2)\dot{w} + (1 + \Delta_3)w + \mu(\dot{w} - \dot{z}) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Рассмотрим случай малых значений управляющего параметра  $\lambda = 0.1$ . Остальные параметры выбираем так, чтобы они соответствовали карте для фазового приближения на рис.1.18 с учетом правила нормировки (1.6). Поэтому теперь  $\Delta_2 = 0.03, \Delta_3 = 0.1$ . Карта ляпуновских показателей для этого набора параметров в разных масштабах показана на рис.2.9<sup>52</sup>. Цветовая палитра аналогична использованной для фазовой модели, только теперь область  $P$  отвечает устойчивому предельном циклу, а  $T_2, T_3$  и  $T_4$  – двумерному,

<sup>52</sup> Заметим, что даже для больших значений управляющего параметра  $\lambda=1$  картина в масштабах рис.2.9б оказывается достаточно похожей, так что мы не приводим соответствующий рисунок.

трехмерному и четырехмерному торам,  $C$  – области хаоса. Начнем обсуждение со случая больших масштабов, рис.2.9а.



**Рис.2.9.** Карты динамических режимов четырех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (2.3) в разных масштабах,  $\lambda = 0.1$ ,  $\Delta_2 = 0.03$ ,  $\Delta_3 = 0.1$ .

### 2.2.1. Эффект повышения порога области «гибели колебаний»

В первую очередь, отличие от фазовой модели на рис.2.9 проявляется в возможности эффекта гибели колебаний  $OD$ . При этом возникает парадоксальная, на первый взгляд, ситуация: граница области гибели колебаний при большой частотной расстройке  $\Delta_1$  не стремится к значению  $\mu = \lambda$ , когда диссипация компенсирует собственные автоколебания, а довольно значительно превышает этот порог. Таким образом, для четырех осцилляторов по сравнению со случаем двух и трех осцилляторов наблюдается *эффект повышения порога гибели колебаний*. Из рис.2.9а можно видеть, что это превышение значительное: граница области гибели колебаний (точка  $H$  на рисунке) отвечает примерно  $\mu \approx 2.6\lambda$ .

Обсудим этот эффект подробнее. В случае трех осцилляторов увеличение частоты центрального  $\Delta_1$  приводит к существенной рассинхронизации, как пары первый-второй, так и пары второй-третий осцилляторы. В результате граница области гибели колебаний в асимптотике  $\Delta_1 \rightarrow \infty$  определяется просто как условие компенсации отрицательного трения диссипацией, т.е.  $\mu = \lambda$ . В случае четырех осцилляторов ситуация усложняется. Действительно, третий и четвертый осцилляторы могут эффективно взаимодействовать в режимах, близких к синхронным. В результате пара этих осцилляторов, в определенном смысле, может образовать более существенно возбужденную автоколебательную подсистему. А значит, пороговое значение уровня связи, обеспечивающее эффект гибели колебаний в цепочке в целом, может повышаться.

Проиллюстрируем это некоторыми оценками. Запишем укороченные уравнения, не устраняя параметр  $\lambda$  перенормировкой. Для определения области гибели колебаний, как известно, достаточно линейного приближения [1]. Кроме того, полагаем  $\Delta_1 \rightarrow \infty$ , а частотные расстройки остальных осцилляторов малыми по сравнению с  $\Delta_1$ . Для оценок положим, что они просто равны нулю, т.е.  $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ .

Тогда

$$\begin{aligned}2\dot{a} &= \lambda a - \mu(a - b), \\2\dot{b} &= \lambda b + i\Delta_1 b - \mu(2b - a - c), \\2\dot{c} &= \lambda c - \mu(2c - b - d), \\2\dot{d} &= \lambda d - \mu(d - c).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Ищем решение этой линейной системы в виде экспоненциальной подстановки  $\exp(\alpha t/2)$ . Тогда получаем:

$$\begin{aligned}(\alpha - \lambda + \mu)a &= \mu b, \\(\alpha - \lambda + 2\mu - i\Delta_1)b &= \mu(a + c), \\(\alpha - \lambda + 2\mu)c &= \mu(b + d), \\(\alpha - \lambda + \mu)d &= \mu c.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Условие рассинхронизма второго осциллятора  $\Delta_1 \rightarrow \infty$  в соответствии со вторым уравнением (2.5) требует, чтобы  $a/b \rightarrow \infty$ , либо  $c/b \rightarrow \infty$ . Переменные  $a, b, c$  отвечают комплексным амплитудам соответствующих осцилляторов. Поэтому два указанных условия отвечают тому, что либо первый, либо третий осциллятор доминируют над вторым.

Оценим первое отношение. Из первого уравнения (2.5) получаем

$$a/b = \frac{\mu}{\alpha - \lambda + \mu}.\tag{2.6}$$

Отсюда видим, что  $a/b \rightarrow \infty$ , если  $\alpha = \lambda - \mu$ . Условие гашения колебаний определяется отрицательным декрементом затухания  $\alpha < 0$ , так что получаем  $\mu > \lambda$ , т.е. точно такое условие, как для двух или трех осцилляторов.

Оценим теперь второе отношение, связанное с доминированием третьего осциллятора. Из второго и третьего уравнений (2.5) получаем

$$c/b = \frac{\mu}{\alpha - \lambda + 2\mu - \frac{\mu^2}{\alpha - \lambda + \mu}}.\tag{2.7}$$

Условие  $c/b \rightarrow \infty$  выполняется при обращении в нуль знаменателя, что приводит к квадратному уравнению относительно декремента затухания  $\alpha$ , которое легко решается:

$$\alpha = \lambda - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \mu.\tag{2.8}$$

Для возникновения режима гашения колебаний должно быть  $\alpha < 0$  для обеих корней, что приводит к условию

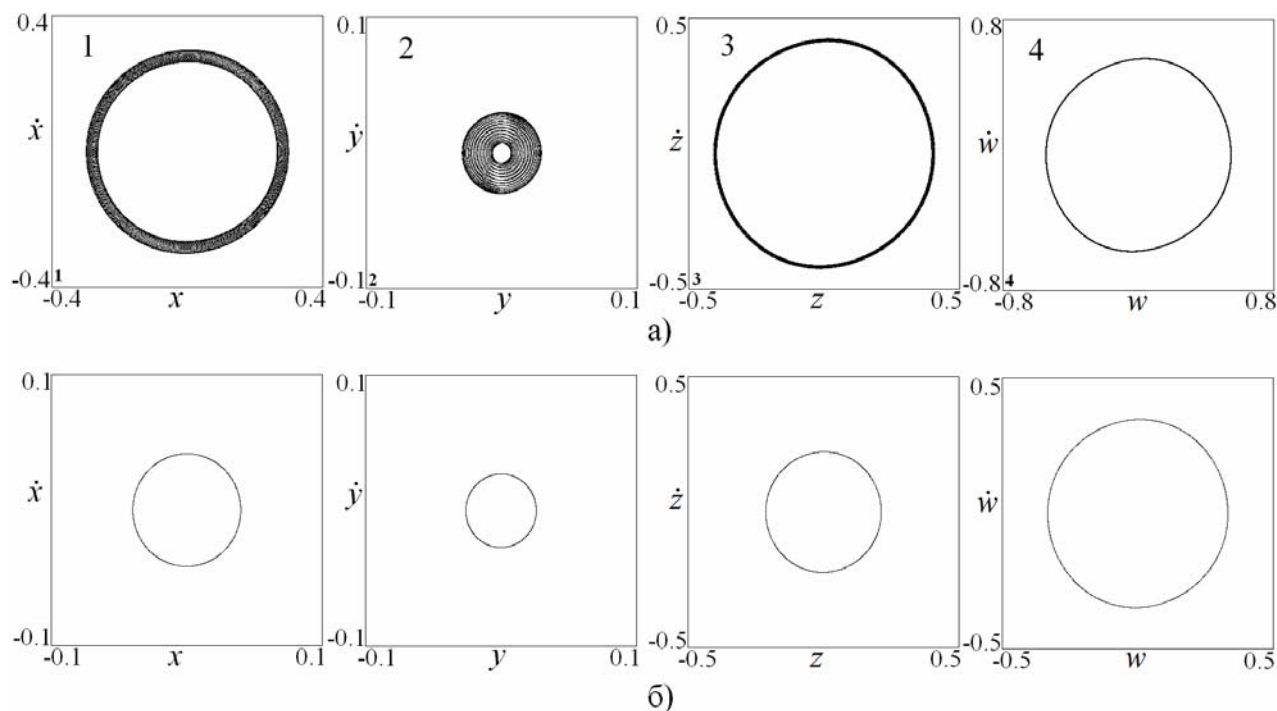
$$\mu > \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \lambda \approx 2.618 \cdot \lambda.\tag{2.9}$$

Таким образом, ситуация доминирования третьего осциллятора при условии его эффективного взаимодействия с четвертым значительно повышает порог эффекта гибели колебаний – более, чем в два раза.

Заметим, что если  $\Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$ , то можно провести аналогичное рассмотрение, хотя получаются более громоздкие выражения. При этом оценка

(2.9) довольно эффективна для случая, представленного на рис.2.9. Действительно, при  $\lambda = 0.1$  она дает  $\mu \approx 0.26$ , что очень близко к асимптотической границе области гибели колебаний на рис.2.9а. Это неудивительно, так как соответствующие частотные параметры малы:  $\Delta_2 = 0.03$ ,  $\Delta_3 = 0.1$ .

На рис.2.10 показаны фазовые портреты всех четырех осцилляторов для разного уровня связи при достаточно большой частотной расстройке второго осциллятора  $\Delta_1 = 2$ . Рисунок а) отвечает случаю, когда  $\mu < \lambda$ , но близко к этому значению. На карте это отвечает области частичной широкополосной синхронизации *PBS*. Можно видеть, что второй осциллятор, выведенный из условий синхронизации за счет большой собственной частоты, достаточно сильно подавлен связью. (При обсуждении рис.2.10 обратите внимание на разные масштабы по осям координат на фазовых портретах.) При этом его траектория сильно возмущена квазипериодическим образом по сравнению с автономным случаем. Все остальные осцилляторы возбуждены примерно равноценно. Причем это относится и к третьему осциллятору, испытывающему двойное трение со стороны соседей и для которого порог  $\mu = \lambda/2$  для выбранного значения параметра связи превышен.



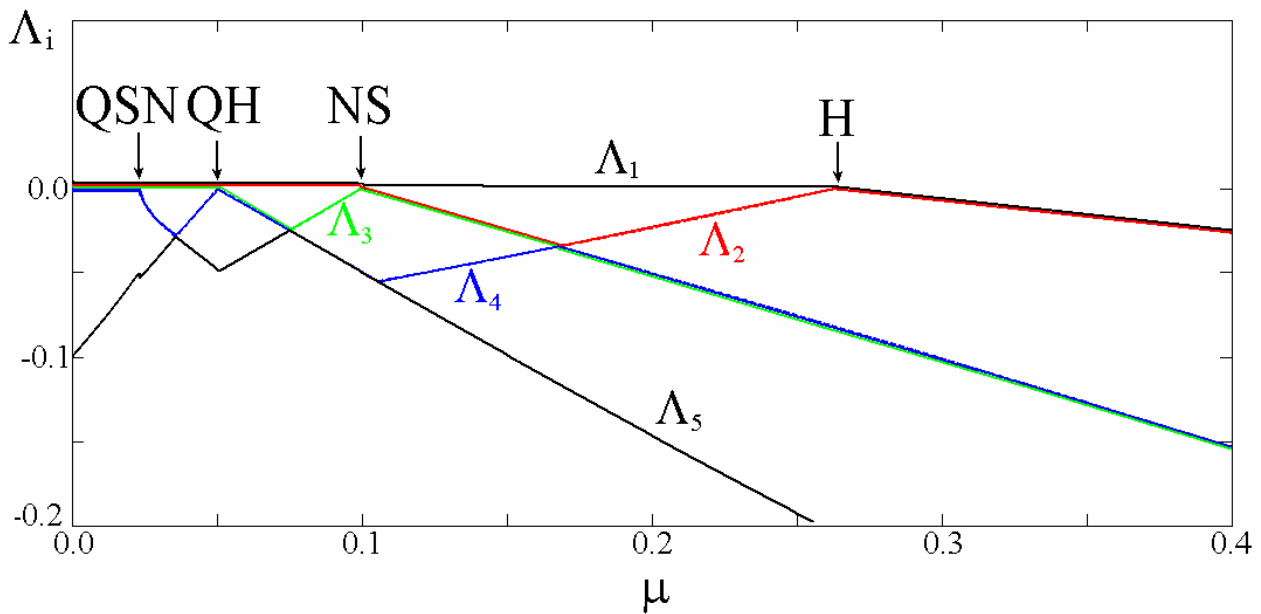
**Рис.2.10.** Фазовые портреты четырех осцилляторов (2.3) а) в режиме частичной широкополосной синхронизации  $\mu = 0.08$ , б) в режиме полной широкополосной синхронизации,  $\mu = 0.2$ . Цифры отвечают номеру осциллятора. Значения параметров  $\lambda = 0.1$ ,  $\Delta_1 = 2$ ,  $\Delta_2 = 0.03$ ,  $\Delta_3 = 0.1$ .

Рисунок б) дает фазовые портреты четырех осцилляторов в области, когда значение параметра связи  $\mu = 0.2$  заметно превышает пороговое значение  $\mu = \lambda$ , отвечающее компенсации диссипативной связью отрицательного трения отдельного осциллятора. Можно видеть, что за счет возрастания связи квазипериодический режим сменился периодическим. Теперь сильно подавленными связью оказываются, как второй, так и первый осцилляторы. При этом, несмотря на сильную диссипацию и условие  $\mu > \lambda$ , третий и четвертый осциллятор достаточно сильно возбуждены. Их орбиты примерно одинакового (по порядку величины) радиуса и не отличаются существенно от случая а). Таким образом, действительно возникло заметное взаимодействие третьего и четвертого осцилляторов, которое и задерживает реализацию режима гибели колебаний.

Описанный механизм приводит также к еще одному эффекту, а именно к возможности *полной широкополосной синхронизации* в системе из четырех осцилляторов Ван-дер-Поля (2.3), даже для случая *идентичных* управляющих параметров  $\lambda$ . Действительно, на ляпуновской карте на рис.2.9а можно видеть характерную полосу периодического режима *CBS* такого типа в диапазоне значений параметра связи  $0.1 < \mu < 0.27$ . На карте она располагается между линиями, обозначенными *H* и *NS* и отвечающими, соответственно, бифуркациям Андронова-Хопфа и Неймарка-Сакера. Подчеркнем, что в случае трех (как и двух) идентичных осцилляторов такой режим не возможен, что видно из сравнения рис.2.9а и рис.2.1а. Причина – в существенном повышении в случае четырех осцилляторов порога эффекта «гибели колебаний», дающего верхнюю границу области полной широкополосной синхронизации.

### 2.2.2. Квазипериодические бифуркации

Продолжим обсуждение рис.2.9а. При больших частотных расстройках  $\Delta_1$  при уменьшении параметра связи  $\mu$  наблюдается каскад бифуркаций рождения инвариантных торов все более высокой размерности. Обсудим картину бифуркаций, сопровождающих наблюдаемый эффект. Для этого обратимся к графику зависимости четырех старших ляпуновских показателей от величины связи, приведенному на рис.2.11. Параметр частоты второго осциллятора выберем достаточно большим,  $\Delta_1 = 2$ , чтобы наблюдалась существенная рассинхронизация этого осциллятора с остальными.



**Рис.2.11.** Графики пяти старших ляпуновских показателей системы четырех связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (2.3),  $\lambda = 0.1$ ,  $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = 0.03, \Delta_3 = 0.1$ . Буквами обозначены  $H$  – точка бифуркации Андронова-Хопфа,  $NS$  – точка бифуркации Неймарка-Сакера,  $QH$  – точка квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера,  $QSN$  – точка седло-узловой бифуркации трехчастотного тора.

При большой связи наблюдается эффект гибели колебаний, и все четыре показателя на рис.2.11 отрицательны. В точке  $\mu \approx 0.27$  первый показатель обращается в ноль, и происходит *бифуркация Андронова-Хопфа*  $H$  рождения устойчивого (многомерного) предельного цикла.

При дальнейшем уменьшении связи в точке  $NS$  происходит *бифуркация Неймарка-Сакера*, и рождается устойчивый двухчастотный тор. При этом в ноль обращаются уже два показателя: первый и второй.

Затем в точке  $QH$  в ноль обращается и третий показатель  $\Lambda_3$ . При этом наблюдается характерное поведение: до точки бифуркации два показателя равны друг другу, так что  $\Lambda_3 = \Lambda_4$ . За точкой бифуркации показатель  $\Lambda_3$  обращается в ноль, а четвертый показатель  $\Lambda_4$ , коснувшись горизонтальной оси, снова уходит в отрицательную область. Это характерная картина *квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера*  $QH$  [38], приводящей к мягкому возникновению трехчастотного тора из двухчастотного.

В точке  $QSN$  размерность тора вновь повышается. Однако, это бифуркация другого типа – теперь четвертый показатель просто обращается в ноль, а пятый показатель все время остается отрицательным. Это означает, что имеет место *седло-узловая бифуркация торов*: устойчивый трехмерный тор сливается с седловым, и возникает четырехмерный устойчивый тор. Отметим, что такая бифуркация описывается и фазовой моделью, см. на рис.1.18 характерную



границу между трех- и четырехчастотными режимами по правому краю карты. Остальные бифуркации в фазовой модели невозможны.

Для удобства восприятия тип бифуркаций указан по правому обрезу карты на рис.2.9а. Можно видеть, что описанные бифуркации приводят, фактически, к картине режимов широкополосной синхронизации на базе квазипериодичности разной размерности.

### **2.2.3. Сравнение с фазовой моделью**

Перейдем теперь к рис.2.9б. Картина в этих масштабах близка к случаю фазовой модели рис.1.18. Однако «углы» области полной синхронизации, отвечающие точкам коразмерности два, как и в случае трех осцилляторов исчезают и заменяются плавной линией. В тоже время сохраняется система верных языков двухчастотных режимов в окрестности нижнего порога области полной синхронизации.

Сильно увеличенный рисунок 2.9в позволяет провести сопоставление более детально. В поле зрения на рис.2.9в попадают два основных языка трехчастотных режимов, характерные и для фазовой модели (рис.1.30). Эти языки отвечают простейшим резонансам, когда варьируемая частота второго осциллятора  $\Delta_1$  совпадает с частотой первого или третьего. Как и для фазовой модели, в эти языки, в свою очередь, встроена система языков двухчастотных торов. Однако имеет место и существенное отличие. Для системы осцилляторов Ван-дер-Поля на рис.2.9в в левой области двухчастотные языки заметно расширяются с ростом связи, и начинают перекрываться. В области перекрытия двухчастотных языков возникает хаос. Такой картины нет в фазовой модели на рис.1.30.

### **2.3. Сценарий Ландау-Хопфа в ансамбле осцилляторов**

В описанной выше системе наблюдался следующий каскад бифуркаций: рождение предельного цикла в результате бифуркации Андронова-Хопфа, рождение предельного цикла в результате бифуркации Неймарка-Сакера и возникновение двумерного тора в результате квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера (квазипериодической бифуркации Хопфа). Таким образом, в рассмотренном случае наблюдаются три первых «шага» в *сценарии Ландау-Хопфа*. Может ли продолжиться этот каскад? Или, иначе говоря, возможен ли сценарий Ландау-Хопфа мягкого рождения все более высокоразмерных торов с выходом за порог все новых колебательных мод?

Такой сценарий возможен, однако, требуется выполнение некоторых дополнительных условий.

Во-первых, сама концепция сценария Ландау-Хопфа требует неидентичности по управляющим параметрам  $\lambda$ . Действительно, разные моды должны иметь разную степень возбуждения. Именно тогда, варьируя параметр, отвечающий за диссипацию в системе (аналог числа Рейнольдса), можно наблюдать последовательный выход за порог новых мод.

Во-вторых, все моды должны быть достаточно разнесены по частоте. В противном случае возникают эффекты синхронизации, которые приводят к различным резонансам, и, как следствие, к изменению бифуркационных сценариев.

В третьих, желательно устранить эффекты, связанные с наличием разного числа соседей у каждого осциллятора в цепочке. Тогда управляющий параметр каждого отдельного осциллятора  $\lambda_i$  будет строго управлять соответствующей квазипериодической бифуркацией.

Построим модель, которая удовлетворяет всем перечисленным требованиям. Это будет система из пяти осцилляторов с эквидистантным спектром собственных частот. При этом оставим единственный частотный параметр  $\Delta$ , который будет управлять рассинхронизмом сразу всех осцилляторов. Все осцилляторы будут неидентичными по управляющим параметрам, что обеспечит поэтапный вывод за порог возмущения соответствующих мод. Кроме того, выберем объединение осцилляторов в ансамбль в виде связи «каждый с каждым», т.е. в форме сети. Это позволяет обеспечить одинаковое число соседей у каждого осциллятора.

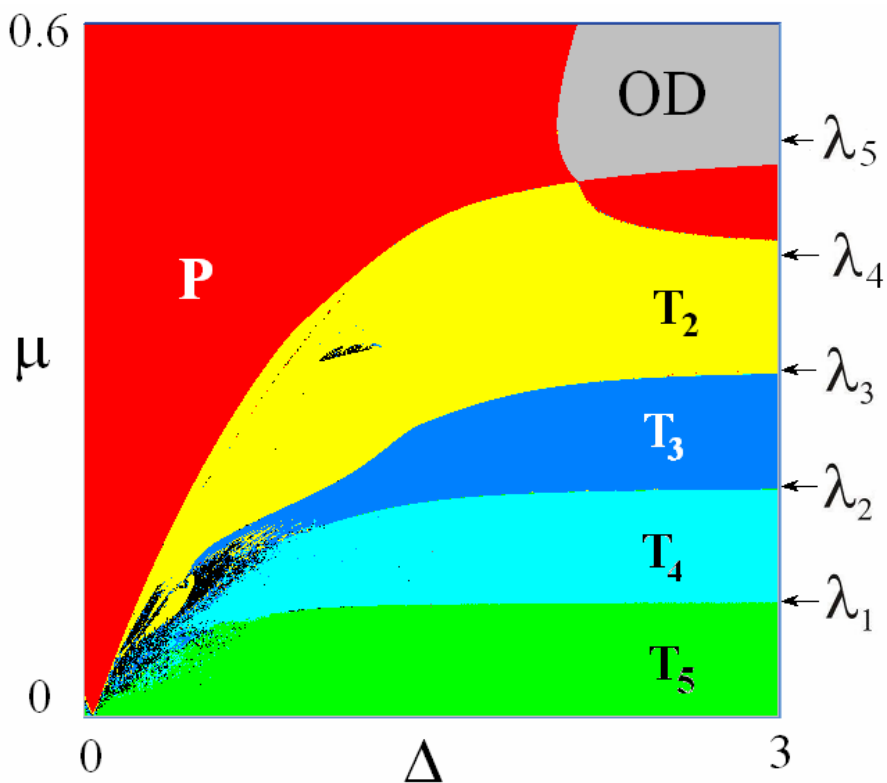
Уравнения такой модели имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \frac{\mu}{4}(4\dot{x} - \dot{y} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
 \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \frac{\Delta}{4})y + \frac{\mu}{4}(4\dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
 \ddot{z} - (\lambda_3 - z^2)\dot{z} + (1 + \frac{\Delta}{2})z + \frac{\mu}{4}(4\dot{z} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
 \ddot{w} - (\lambda_4 - w^2)\dot{w} + (1 + \frac{3\Delta}{4})w + \frac{\mu}{4}(4\dot{w} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{v}) &= 0, \\
 \ddot{v} - (\lambda_5 - v^2)\dot{v} + (1 + \Delta)v + \frac{\mu}{4}(4\dot{v} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w}) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь  $\lambda_i$  – параметры возбуждения автономных осцилляторов,  $\Delta$  – определяет частотную отстройку осцилляторов, а частота первого осциллятора принята за

единицу. Положим далее  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = 0.3, \lambda_4 = 0.4, \lambda_5 = 0.5$ . Карта ляпуновских показателей системы (2.10) в этом случае на плоскости  $(\Delta, \mu)$  показана на рис.2.12.

Можно видеть, что в системе действительно устранены основные резонансные эффекты. Достаточно выраженный язык резонансного двухчастотного тора можно видеть лишь в области  $\Delta \leq 0.5$ , между областью пятичастотных торов и полной синхронизации. Интересно отметить, что он погружен в область хаоса, возникающую при малых связях.<sup>53</sup> При этом трехчастотные, четырехчастотные и отчасти пятичастотные торы разрушены, хотя хаос и является слабым. (Типичные значения положительного ляпуновского показателя составляют величины порядка  $10^{-3}$ - $10^{-2}$ .) Отметим, однако, что возможен и небольшой островок хаоса в области двухчастотных торов при величине связи порядка 0,3-0.4.



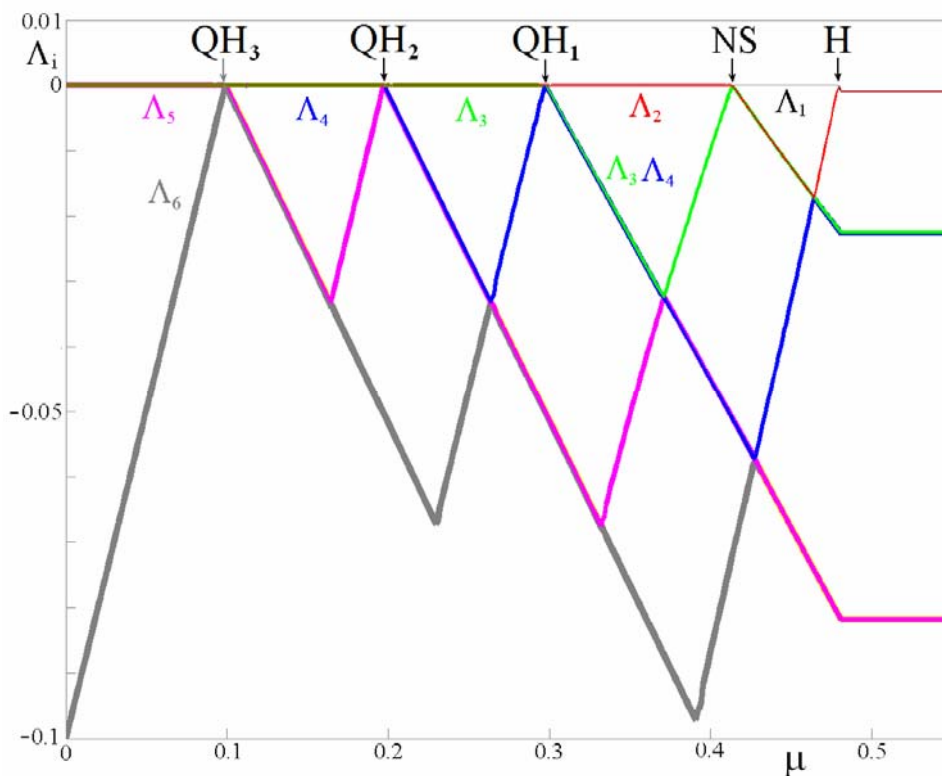
**Рис.2.12.** Карта ляпуновских показателей сети из пяти неидентичных осцилляторов Ван-дер-Поля с глобальной связью (2.10);  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = 0.3, \lambda_4 = 0.4, \lambda_5 = 0.5$ .

В свою очередь, в области большого рассинхронизма осцилляторов  $\Delta \geq 1$  наблюдается система торов все более высокой размерности. Границы этих областей в асимптотике  $\Delta \rightarrow \infty$  отвечают значениям соответствующих

<sup>53</sup> Наличие хаоса при малой связи в сетях из небольшого числа элементов было обнаружено в работах [47,48], и там этот эффект получил название «фазовый хаос» (phase chaos).

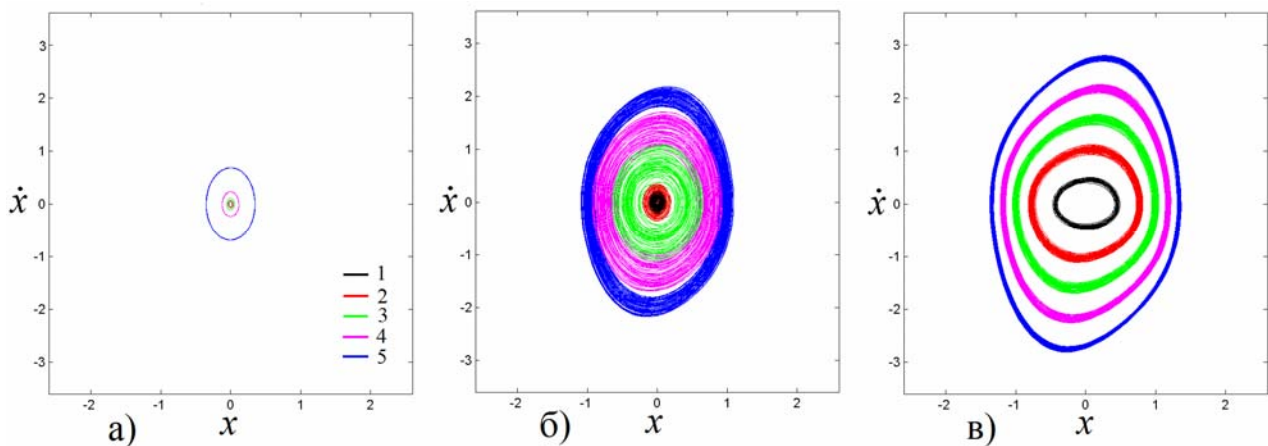
управляющих параметров  $\lambda_i$ . Для удобства восприятия эти значения отмечены стрелками по правому обрезу карты.

Убедимся, что здесь имеет место именно каскад квазипериодических бифуркаций Неймарка-Сакера  $QH$  для торов все более высокой размерности. Для этого обратимся к графикам ляпуновских показателей на рис.2.13, построенным вдоль линии  $\Delta = 3$ . Можно видеть, что при больших значениях величины связи все показатели отрицательные, и имеет место режим гибели колебаний. Затем в точке  $H$  происходит бифуркация Андронова-Хопфа, и один показатель  $\Lambda_1$  становится нулевым. Далее в точке  $NS$  происходит бифуркация Неймарка-Сакера и еще один показатель  $\Lambda_2$  становится нулевым. В точке  $QH_1$  становится равным нулю показатель  $\Lambda_3$ , и рождается трехмерный тор. Чтобы идентифицировать характер бифуркации замечаем, что до бифуркации показатели  $\Lambda_3$  и  $\Lambda_4$  совпадали. Это характерно для квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера [38]. Далее совершенно аналогично ведут себя оставшиеся показатели, так что в точке  $QH_2$  в результате второй квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера рождается четырехмерный тор, а в точке  $QH_3$  – пятимерный.



**Рис.2.13.** Графики зависимости ляпуновских показателей системы (2.10) от величины диссипативной связи,  $\Delta = 3$ .  $QH_i$  – каскад квазипериодических бифуркаций Неймарка-Сакера (квазипериодических бифуркаций Хопфа).

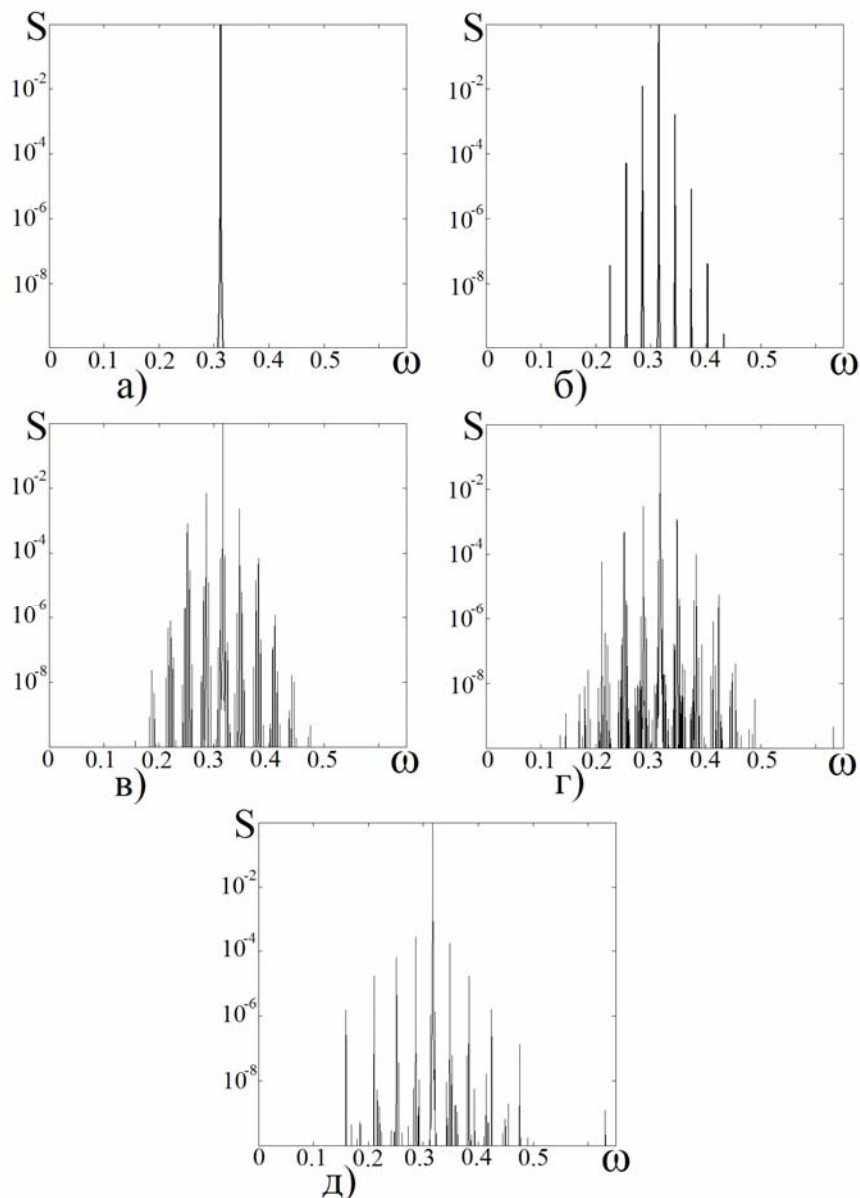
Рис.2.14 и рис.2.15 иллюстрируют развитие сценария Ландау-Хопфа в такой системе. На рис.2.14 показана эволюция фазовых портретов осцилляторов, наблюдающаяся при уменьшении параметра диссипации. На каждом рисунке даны одновременно портреты всех пяти осцилляторов на плоскости «динамическая переменная – скорость ее изменения». Траектории разных осцилляторов показаны разным цветом. Рис.2.14а отвечает достаточно большой диссипации  $\mu = 0.45$ . В этом случае наблюдается вложенный в многомерное пространство состояний предельный цикл. Хорошо видно, что колебания пятого осциллятора наиболее интенсивные. Это обусловлено тем, что его управляющий параметр  $\lambda$  самый большой. Интенсивность колебаний для остальных осцилляторов последовательно убывает. На рис.2.14б для случая  $\mu = 0.25$ , отвечающего трехчастотному тору, траектории всех осцилляторов возмущены квазипериодическим образом. Однако, на рис.2.14в, при  $\mu = 0.05$ , когда реализуется пятичастотный тор, размер возмущений снова падает: малая связь слабо возмущает орбиты.



**Рис.2.14.** Эволюция фазовых портретов системы (2.10) при уменьшении диссипации в системе: а) предельные циклы  $\mu=0.45$ , б) трехчастотный тор  $\mu=0.25$ , в) пятичастотный тор  $\mu=0.05$ . Цифры отвечают номеру осциллятора. Параметр частотной расстройки  $\Delta=3$ .

На рис.2.15 показан спектр Фурье колебаний пятого осциллятора, отвечающий развитию сценария Ландау-Хопфа в системе (2.10). Можно видеть последовательное обогащение спектра колебаний все новыми линиями, отвечающими квазипериодичности все более высокой размерности. Отметим, однако, что в случае рис.2.15д степень «сложности» спектра на визуальном уровне не увеличивается, а, скорее, уменьшается, хотя в системе имеет место пятимерный тор. Причина состоит в существенном уменьшении уровня связи. При очень малой связи аттрактор оказывается слабо возмущенным, и становится близким к предельному циклу системы автономных осцилляторов,

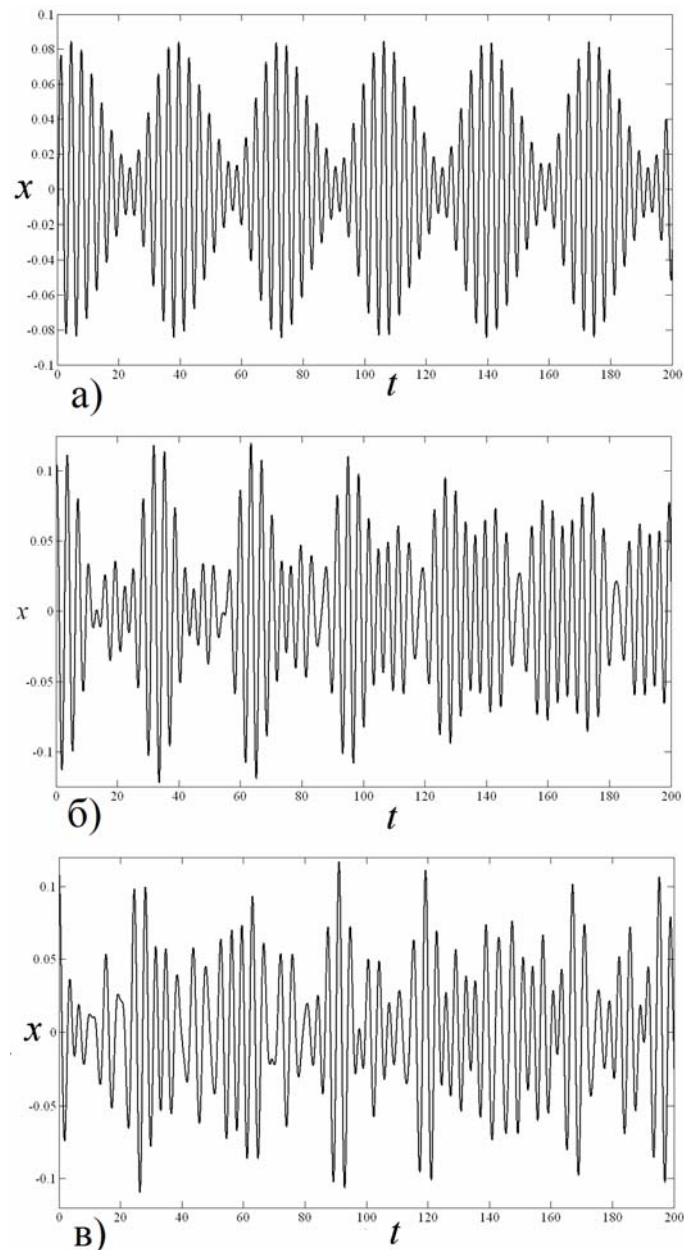
рис.2.14в. Поэтому высота соответствующих линий в спектре становится меньше, хотя в более мелких масштабах спектр остается сложным.



**Рис.2.15** Спектр колебаний пятого осциллятора системы (2.10), отвечающий развитию сценария Ландау-Хопфа: а) режим полной синхронизации  $\mu=0.45$ ; б) двумерный тор  $\mu=0.35$ ; в) трехмерный тор  $\mu=0.25$ ; г) четырехмерный тор  $\mu=0.15$ ; д) пятимерный тор  $\mu=0.05$ . Остальные параметры соответственно  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.2$ ,  $\lambda_3 = 0.3$ ,  $\lambda_4 = 0.4$ ,  $\lambda_5 = 0.5$  и  $\Delta = 3$ .

На рис.2.16 приведены примеры реализаций, а именно, зависимостей обобщенной координаты первого осциллятора  $x(t)$  от времени. Представленные графики отвечают режимам двухчастотного, трехчастотного и четырехчастотного торов. На рис.2.16а можно видеть типичную картину биений, характерную для двухчастотных колебаний. Рис.2.16б и рис.2.16в демонстрируют заметно более сложный сигнал. Интересно отметить, что для двухчастотного режима процессы установления происходят очень быстро:

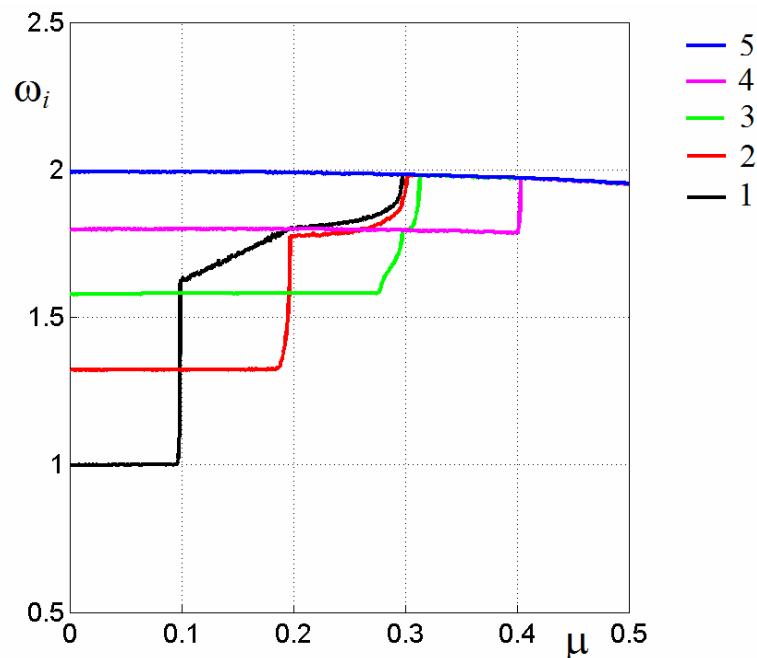
практически сразу система выходит на квазипериодический аттрактор. Однако уже для трехчастотного тора время установления колебаний заметно увеличивается ( $t \approx 100$  по визуальной оценке для рисунка 2.16б).



**Рис.2.16.** Реализации для первого осциллятора в системе (2.10), случаи а) двухчастотного тора,  $\mu=0.35$ ; б) трехчастотного тора,  $\mu=0.25$ ; в) четырехчастотного тора,  $\mu=0.15$ .

На рисунке 2.17 показана зависимость наблюдаемых частот (дерево синхронизации) от параметра диссипативной связи  $\mu$  для рассматриваемой системы. Частоты определялись, как средние скорости изменения фазы соответствующих осцилляторов. Они найдены путем подсчета числа пересечений секущих Пуанкаре, отвечающих нулевым значениям координат соответствующих осцилляторов. Из рис.2.17 видно, что при достаточно большой связи все частоты совпадают и примерно равны собственной частоте

наиболее возбужденного пятого осциллятора<sup>54</sup>. С уменьшением силы связи в точке бифуркации Неймарка-Сакера наблюдается появление новой частоты, близкой к собственной частоте четвертого осциллятора. Затем возникает новая ветвь (зеленый цвет на рисунке), частота для которой быстро приближается к собственной частоте третьего осциллятора. Интересные особенности наблюдаются для оставшихся двух осцилляторов. Их частоты претерпевают резкое изменение практически одновременно с третьим осциллятором, но они примерно близки к более высокой частоте четвертого осциллятора. Другими словами, возникновение нового режима заставляет слабо возбужденные осцилляторы корректировать свои частоты. Затем возникает четвертая, и, наконец, пятая ветви. Как видим, устройство дерева синхронизации позволяет проследить последовательность бифуркаций в системе, сопровождающихся увеличением наблюдаемых частот. Однако это дерево имеет специфический вид, существенно отличающийся от традиционного (см. рис.1.24, а также рис.11.1 в [1]). В рассматриваемом случае, одна из частот остается почти постоянной в ходе каждой бифуркации, а новая компонента, наоборот, возникает практически скачком. Эта разница обусловлена типом бифуркаций: теперь это не седло-узловые бифуркации инвариантных торов, а вторичные квазипериодические бифуркации Неймарка-Сакера  $QH$ .



**Рис.2.17** Дерево синхронизации для системы (2.10) с каскадом квазипериодических бифуркаций Неймарка-Сакера. Цифры отвечают номерам осцилляторов,  $\Delta = 3$ .

<sup>54</sup> В соответствии с (2.10) собственная частота пятого осциллятора  $\omega_5 = \sqrt{1 + \Delta}$ , четвертого –  $\omega_4 = \sqrt{1 + 3\Delta/4}$  и т.д.

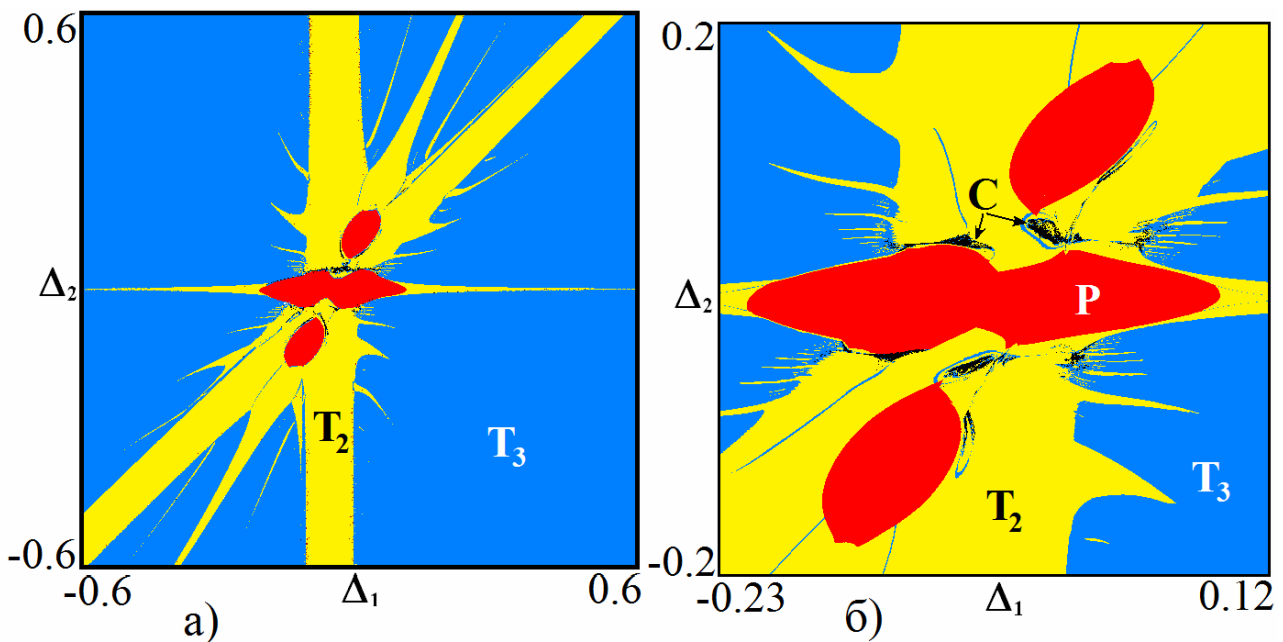


## 2.4. Реактивно связанные осцилляторы Ван-дер-Поля

Обратимся теперь к случаю трех реактивно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля:

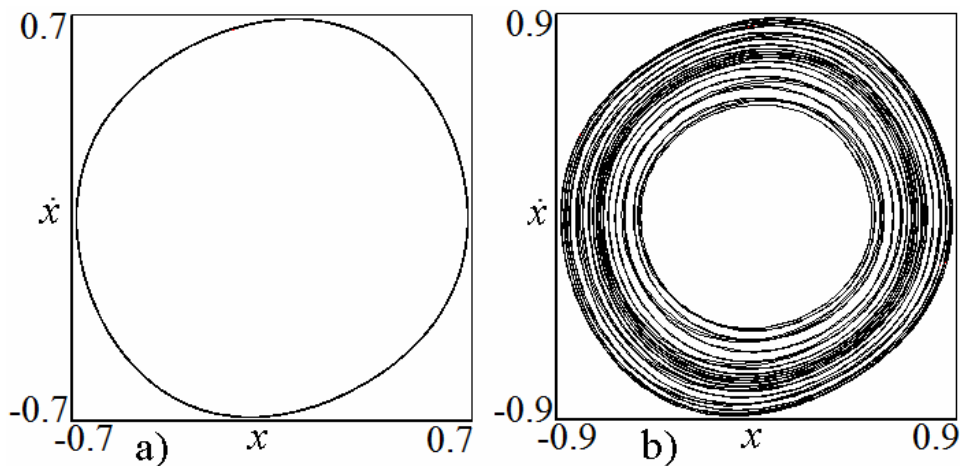
$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \varepsilon(y - x) + \varepsilon(y - z) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \varepsilon(z - y) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

На рис.2.17 показана ляпуновская карта для значения параметров  $\lambda=0.1$  и  $\varepsilon=0.06$ . Ее следует сравнить с аналогичной картой для фазовой модели на рис.1.40. Можно видеть определенное соответствие, а также некоторые отличия. Так в исходной системе при нулевых расстройках, в отличие от фазовой модели, становится возможной полная синхронизация всех трех осцилляторов. При этом две области полной синхронизации, отвечающие синфазным и противофазным колебаниям, на рис.2.18б перекрываются. Кроме того, возникают хотя и небольшие, но заметные области хаоса  $C$ .



**Рис.2.18.** Карта ляпуновских показателей (а) и ее увеличенный фрагмент (б) для трех реактивно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (2.11);  $\lambda=0.1$ ,  $\varepsilon=0.06$ .

В исходной системе (2.11) квазипериодические аттракторы, как и в фазовой модели, могут сосуществовать с предельными циклами. Этот факт иллюстрируют фазовые портреты на рис.2.19 на плоскости переменных первого осциллятора  $(x, \dot{x})$ , наблюдающиеся при одних и тех же значениях параметров, но для разных начальных условий. Отметим, что предельный цикл близок по форме к окружности, что обусловлено сравнительно небольшим значением  $\lambda=0.1$ .



**Рис.2.19.** Сосуществующие аттракторы системы трех реактивно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (2.11) в виде предельного цикла (а) и тора (б) в проекции на плоскость переменных первого осциллятора  $(x, \dot{x})$ ;  $\lambda=0.1$ ,  $\varepsilon=0.06$ ,  $\Delta_1=0.01$ ,  $\Delta_2=0.01$ .

Отметим также, что при увеличении управляющего параметра до значения  $\lambda=1$ , как и в случае диссипативной связи возникает картина резонансной паутины Арнольда.

## 2.5. Влияние характера нелинейности

До этого момента в качестве парциальной подсистемы при построении ансамблей мы использовали осциллятор Ван-дер-Поля, который является одной из эталонных моделей теории колебаний и нелинейной динамики. Однако даже два связанных таких осциллятора характеризуются некоторыми особенностями. Так высшие резонансные языки являются очень узкими, причем достаточно выраженными являются лишь языки нечетного порядка, начиная с резонанса 1:3. Причина состоит в характере нелинейности, которая учитывается только в рамках нелинейной диссипации и является *кубической*, поскольку отвечает члену вида  $x^2 \dot{x}$ . Еще один момент состоит в том, что для взаимодействующих осцилляторов Ван-дер-Поля практически не наблюдается хаос.

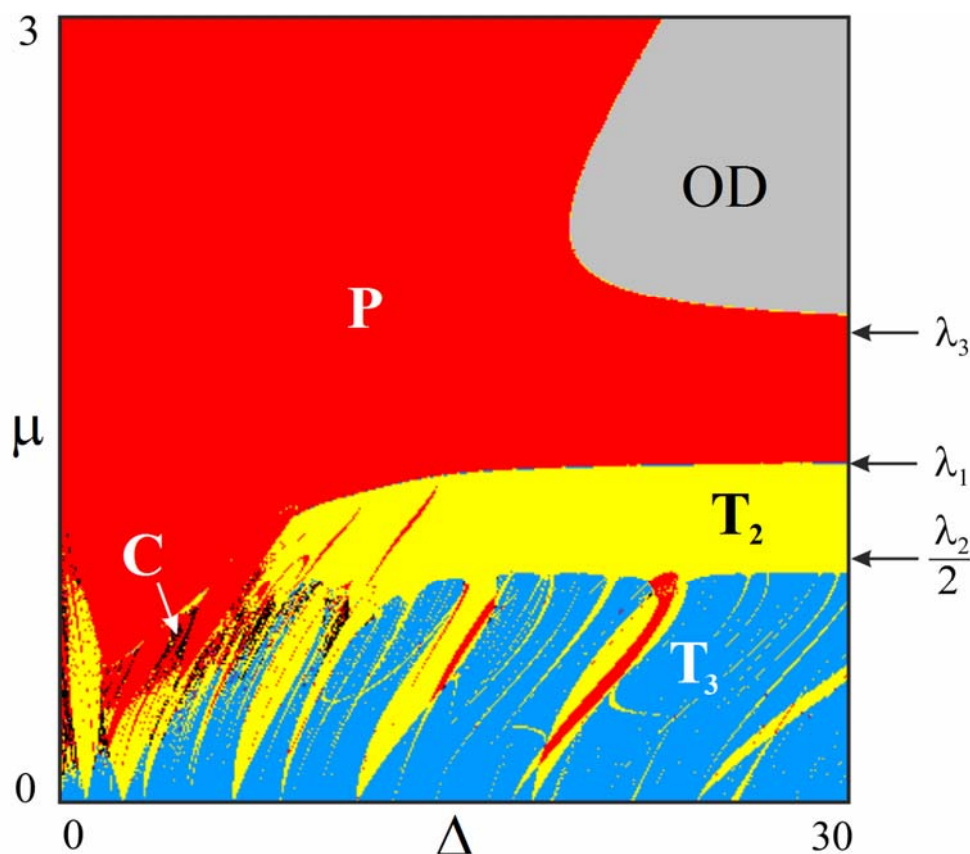
Эти особенности можно исключить, если рассмотреть *обобщенные осцилляторы Ван-дер-Поля и Ван-дер-Поля-Дуффинга*. Для трех таких осцилляторов приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 + cx - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 + cy - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \beta y^3 + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda_3 + cz - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \beta z^3 + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь учтен член вида  $sx\dot{x}$  в диссипативной функции, так что нелинейность содержит и *квадратичную* компоненту. Кроме того, учтена дополнительная

нелинейность  $\beta x^3$ , введенная по типу осциллятора Дуффинга. Физически она отвечает за неизохронность колебаний [1,27,66,67]

На рис.2.20 показана ляпуновская карта для обобщенного осциллятора Ван-дер-Поля для случая  $c=1, \beta=0$ . Остальные параметры отвечают рис.2.3. Сравним эти два случая. Можно видеть, что введение квадратичной нелинейности привело к появлению достаточно широких языков двухчастотных режимов, отвечающих не только захватам первой-второй или второй-третьей осцилляторы типа 3:1 и 1:3, как на рис.2.3. Появилась и возможность областей хаоса, однако, очень небольшого размера. Можно видеть также, что пересечение двухчастотных языков высшего порядка может приводить к точным резонансам (периодическим режимам), имеющим порог по величине связи.

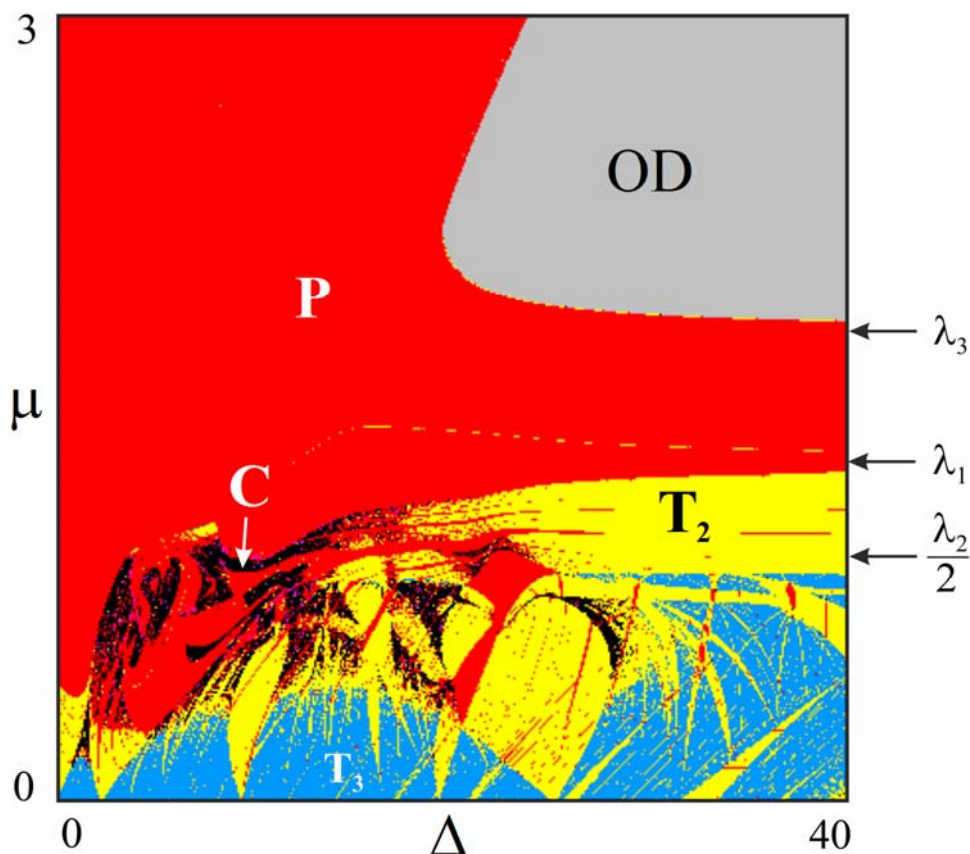


**Рис.2.20.** Ляпуновская карта трех обобщенных осцилляторов Ван-дер-Поля (2.12) для случая  $c=1, \beta=0$ . Остальные параметры  $\lambda_1 = 1.3, \lambda_2 = 1.9, \lambda_3 = 1.8, \Delta_2 = 1.5$ .

Отметим, что анализ графиков ляпуновских показателей позволяет заключить, что при больших частотных расстройках переход от полосы двухчастотных торов к полосе трехчастотных при  $\mu \approx \frac{\lambda_2}{2}$  связан с квазипериодической бифуркацией Неймарка-Сакера. На рисунке хорошо видно, как

резонансные двухчастотные языки примыкают к этой линии своими вершинами.

На рис.2.21 показана карта, построенная с учетом нелинейности по типу осциллятора Дуффинга для  $c=1$  и  $\beta=1$ . Можно видеть, что нелинейность такого типа приводит к заметным изменениям. Резонансные двухчастотные языки стали заметно более широкими. Возникли обширные области хаоса, которые лежат предпочтительно в области перекрытия двухчастотных языков.

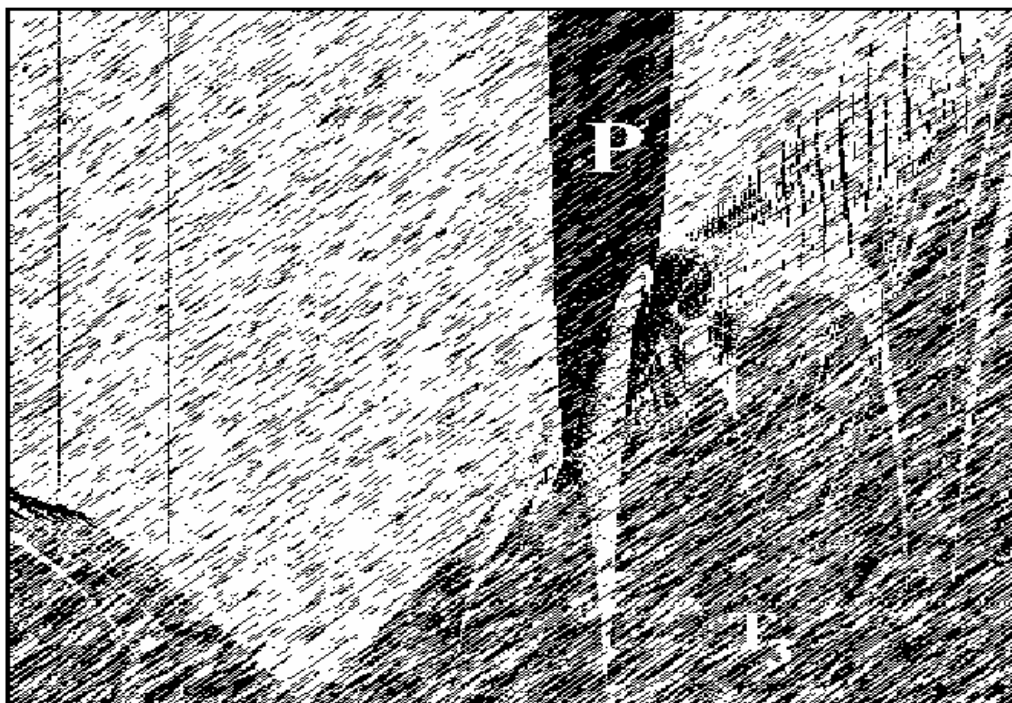


**Рис.2.21.** Ляпуновская карта трех обобщенных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга (2.12) для случая  $c=1$ ,  $\beta=1$ . Остальные параметры  $\lambda_1 = 1.3$ ,  $\lambda_2 = 1.9$ ,  $\lambda_3 = 1.8$ ,  $\Delta_2 = 1.5$ .

Существенный момент – появление заметной структуры резонансной паутины Арнольда в правой части карты внутри трехчастотной области. Она образована тонкой «ажурной» структурой линий двухчастотных торов, на пересечении которых лежат небольшие области периодических резонансов высших порядков. Интересно, что в этом случае такая картина возникает не на плоскости собственных частот, а на плоскости частота – величина связи, что можно объяснить зависимостью наблюдаемых частот от уровня связи.

# Часть III

## Вынужденная синхронизация фазовых систем и ансамблей осцилляторов



### 3.1. Фазовые уравнения возбуждаемой системы двух диссипативно связанных осцилляторов

Перейдем теперь к задачам о вынужденной синхронизации ансамблей осцилляторов. Для двух осцилляторов задача об их взаимной синхронизации и задача о возбуждении одного осциллятора внешним сигналом в фазовом приближении оказываются эквивалентными [1]. В обоих случаях система приводится к уравнению Адлера. При увеличении числа осцилляторов ситуация усложняется, и оказывается целесообразным рассматривать задачу о взаимной и вынужденной синхронизации отдельно.

Обратимся, прежде всего, к системе из двух, возбуждаемых гармоническим сигналом диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. Будем считать, что внешний сигнал непосредственно действует только на первый осциллятор:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $\lambda$  – параметр отрицательного трения автономных осцилляторов,  $\Delta$  – их относительная частотная расстройка,  $\mu$  – коэффициент диссипативной связи,  $B$  – амплитуда воздействия,  $\omega = 1 + \Omega$  – частота воздействия. Обратим внимание, что в рассматриваемом случае *центральная* частота осцилляторов принята за единицу, так что  $\Omega$  представляет собой отстройку частоты сигнала от центральной. Такой выбор в данном случае является наиболее удобным.

Применим для анализа уравнений (3.1) метод медленно меняющихся амплитуд. Для этого представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{i\omega t} + a^* e^{-i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t} + b^* e^{-i\omega t}, \quad (3.2)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  – комплексные амплитуды осцилляторов, медленно меняющиеся на фоне колебаний с частотой сигнала  $\omega$ . Наложим стандартные дополнительные условия

$$\dot{a}e^{i\omega t} + \dot{a}^* e^{-i\omega t} = 0, \quad \dot{b}e^{i\omega t} + \dot{b}^* e^{-i\omega t} = 0. \quad (3.3)$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i\omega ae^{i\omega t} - i\omega a^* e^{-i\omega t}, \quad \dot{y} = i\omega be^{i\omega t} - i\omega b^* e^{-i\omega t}. \quad (3.4)$$

Подставим соотношения (3.2), (3.4) в уравнения (3.1), умножим полученные выражения на  $e^{-i\omega t}$  и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. При этом удобно представить внешнее воздействие в

виде  $B \sin \omega t = B \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$ . После соответствующих преобразований, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a + i \frac{1 - \omega^2 - \Delta/2}{\omega} a - \mu(a - b) - \frac{B}{2\omega}, \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i \frac{1 - \omega^2 + \Delta/2}{\omega} b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (3.5)$$

При условии  $\lambda \ll 1$  можно использовать, что  $\omega \approx 1$ , и положить  $\frac{1 - \omega^2 \mp \Delta/2}{2\omega} \approx 1 - \omega \mp \frac{\Delta}{4}$  и  $\frac{B}{\omega} \approx B$ . Тогда уравнения (3.5) упрощаются:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - 2i \left( \frac{\Delta}{4} + \Omega \right) a - \mu(a - b) - \frac{B}{2}, \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + 2i \left( \frac{\Delta}{4} - \Omega \right) b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (3.6)$$

В уравнениях (3.6) управляющий параметр  $\lambda$  может быть убран перенормировкой переменных и параметров

$$a = \sqrt{\lambda} \bar{a}, \quad b = \sqrt{\lambda} \bar{b}, \quad t = \bar{t}/\lambda, \quad \mu = \lambda \bar{\mu}, \quad \Delta = \lambda \bar{\Delta}, \quad \Omega = \lambda \bar{\Omega}, \quad B = \sqrt{\lambda} \bar{B}, \quad (3.7)$$

что приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} 2\dot{\bar{a}} &= \bar{a} - |\bar{a}|^2 \bar{a} - 2i \left( \frac{\bar{\Delta}}{4} + \bar{\Omega} \right) \bar{a} - \bar{\mu}(\bar{a} - \bar{b}) - \frac{\bar{B}}{2}, \\ 2\dot{\bar{b}} &= \bar{b} - |\bar{b}|^2 \bar{b} + 2i \left( \frac{\bar{\Delta}}{4} - \bar{\Omega} \right) \bar{b} - \bar{\mu}(\bar{b} - \bar{a}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для сокращения записи черту над новыми переменными и параметрами опускаем. Это укороченные уравнения для двух возбуждаемых диссипативно связанных осцилляторов.

Положим далее  $a = R e^{i\psi_1}$  и  $b = r e^{i\psi_2}$ , где  $R$ ,  $r$  и  $\psi_{1,2}$  – действительные амплитуды и фазы осцилляторов относительно сигнала. Тогда находим:

$$\begin{aligned} 2\dot{R} &= R - R^3 + \mu(r \cos(\psi_2 - \psi_1) - R) - \frac{B}{2} \cos \psi_1, \\ 2\dot{r} &= r - r^3 + \mu(R \cos(\psi_1 - \psi_2) - r), \\ \dot{\psi}_1 &= -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{r}{2R} \mu \sin(\psi_2 - \psi_1) + \frac{B}{4} \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= -\Omega + \frac{\Delta}{4} + \frac{R}{2r} \mu \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Как обычно, в уравнениях для фаз считаем, что осцилляторы движутся по своим стационарным невозмущенным орбитам  $R = r = 1$ . Тогда получаем:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_2 - \psi_1) + b\sin\psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= -\Omega + \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_1 - \psi_2),\end{aligned}\tag{3.10}$$

где  $b = B/4$  – нормированная амплитуда воздействия. Это фазовые уравнения возбуждаемой внешним гармоническим сигналом системы двух диссипативно связанных осцилляторов<sup>55</sup>.

Для дальнейшего нам понадобятся значения собственных частот осцилляторов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в использованной здесь нормировке. Они определяются из (3.10) при выключенном воздействии:

$$\Omega_1 = -\frac{\Delta}{4}, \quad \Omega_2 = \frac{\Delta}{4}.\tag{3.11}$$

Частота захвата автономных осцилляторов в отсутствие сигнала равна среднему арифметическому их собственных частот, так что данной нормировке она равна нулю:  $\Omega_{1-2} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} = 0$ .

## 3.2. Полная синхронизация двух осцилляторов внешней силой

Получим теперь условие точного захвата обоих фазовых осцилляторов внешней силой. Ему отвечает состояние равновесия  $\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_1 = 0$  системы (3.10), так что получаем

$$\begin{aligned}-\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_2 - \psi_1) + b\sin\psi_1 &= 0, \\ -\Omega + \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_1 - \psi_2) &= 0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Исключим из первого уравнения  $\sin(\psi_2 - \psi_1)$ . Тогда

$$\begin{aligned}2\Omega &= b\sin\psi_1, \\ \Omega - \frac{\Delta}{4} &= \frac{\mu}{2}\sin(\psi_1 - \psi_2).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Отсюда легко находим условия на границы области полной синхронизации, как условия обращения синусов в  $\pm 1$ . В результате получаем два соотношения:

---

<sup>55</sup> Как мы отмечали во Введении, фазовые уравнения для данной задачи получены в [14,15]. Мы здесь используем несколько иную технику и, в частности, приходим к несколько более простой, с точки зрения используемых параметров, форме фазовой модели.

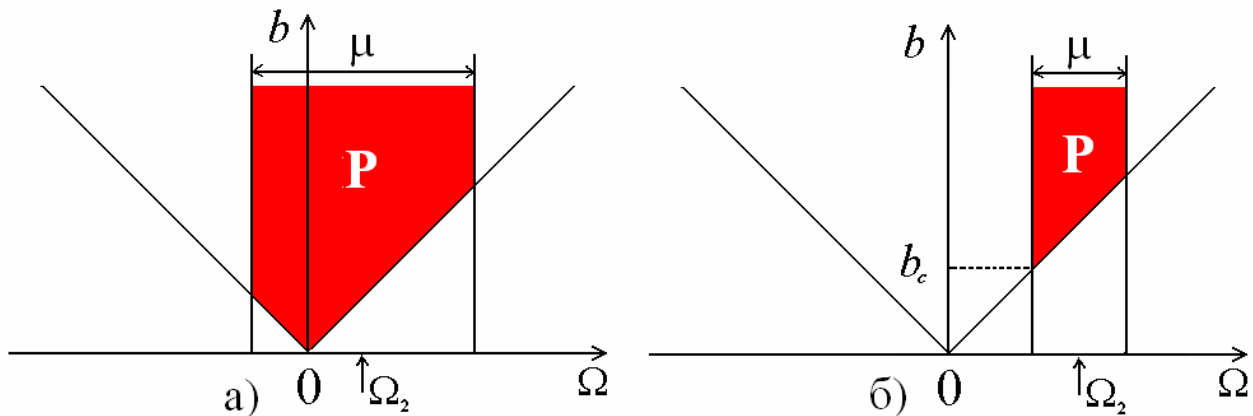


$$b = \pm 2\Omega, \quad (3.14)$$

$$\Omega = \frac{\Delta}{4} \pm \frac{\mu}{2}. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.14) задает на плоскости частота – амплитуда воздействия  $(\Omega, b)$  классический по форме «язык», показанный на рис.3.1 тонкими линиями. Он имеет основанием точку  $\Omega = \Omega_{1-2} = 0$ , отвечающую частоте захвата автономных осцилляторов. Второе условие (3.15) дополняет (3.14) и определяет *частотную ширину полосы захвата* осцилляторов внешней силой. Центр этой полосы лежит на собственной частоте второго осциллятора  $\Omega_2 = \frac{\Delta}{4}$ , а сама она имеет ширину, равную константе связи  $\mu$ , как показано на рис.3.1.

Область полной синхронизации осцилляторов внешней силой ограничена линиями (3.14), (3.15). На рис.3.1 она показана красным цветом.



**Рис.3.1.** Область точного захвата  $P$  системы двух возбуждаемых фазовых осцилляторов (3.10): а) взаимная синхронизация автономных осцилляторов, б) режим биений автономных осцилляторов.  $\Omega_2$  – собственная частота второго осциллятора,  $\mu$  – величина связи,  $b_c$  – амплитудный порог синхронизации квазипериодических колебаний.

Возможны две конфигурации области полной синхронизации, показанные соответственно на рис.3.1а и б. Первый случай имеет место, если левая граница полосы (3.15) проходит левее вершины языка  $\Omega = 0$ , а второй – если она лежит правее этой вершины. Из (3.14), (3.15) следует, что первый случай реализуется при  $|\Delta| < 2\mu$ , а второй – при  $|\Delta| > 2\mu$ . Можно видеть, что одновременно эти неравенства соответствуют условиям *захвата* и режима *биений* двух автономных связанных осцилляторов. Таким образом, первый тип устройства области полной синхронизации отвечает ситуации, когда в отсутствие внешнего сигнала осцилляторы взаимно захвачены, а второй – когда они совершают квазипериодические колебания с несоизмеримыми частотами.

Итак, внешний сигнал может точно захватить не только синхронизованные

между собой осцилляторы, но и осцилляторы в режиме биений. Во втором случае, однако, режим полной синхронизации носит пороговый характер по амплитуде. Из (3.14), (3.15) легко находим порог синхронизации квазипериодических колебаний:

$$b_c = \frac{\Delta}{2} - 2\mu. \quad (3.16)$$

### 3.3. Устройство плоскости параметров частота – амплитуда воздействия

Обратимся теперь к более детальному анализу традиционной для задач вынужденной синхронизации плоскости параметров частота – амплитуда воздействия  $(\Omega, b)$ . Соответствующие карты ляпуновских показателей системы возбуждаемых фазовых осцилляторов (3.10) приведены на рис.3.2. При этом рисунок а) отвечает случаю, когда автономные осцилляторы захвачены, рисунок б) – граничной ситуации между режимами захвата и биений, а рисунок в) – случаю биений осцилляторов. Карта ляпуновских показателей в первом случае дополняется фазовыми портретами системы на плоскости фаз осцилляторов  $(\psi_1, \psi_2)$ , примеры которых даны на рис.3.3.

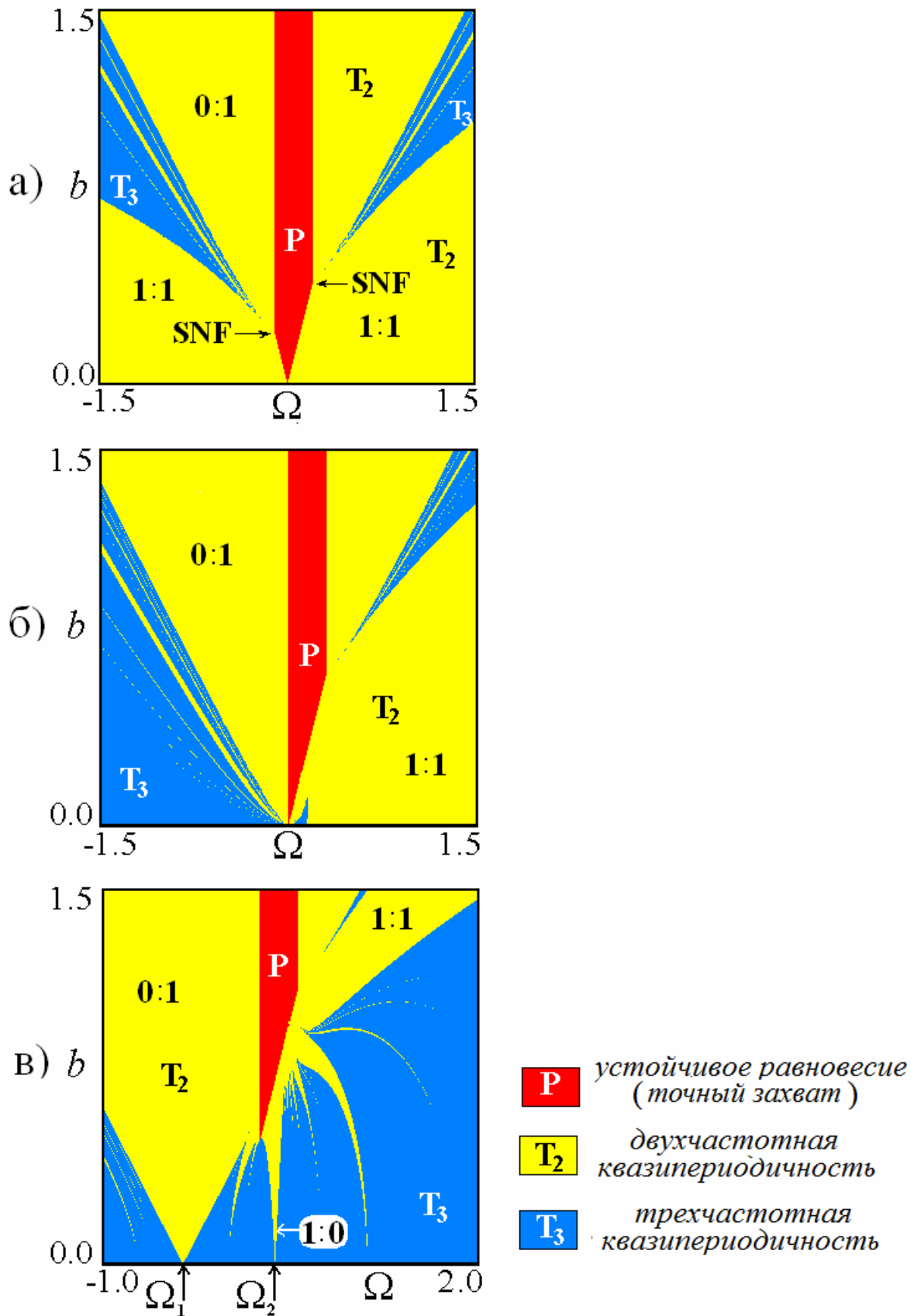
#### 3.3.1. Случай захвата автономных осцилляторов

Обсудим сначала случай захвата автономных осцилляторов. На ляпуновской карте рис.3.2а область  $P$  отвечает приведенному выше аналитическому рассмотрению. В этой области в системе имеются три неустойчивых и одно устойчивое положения равновесия, что иллюстрирует рис.3.3а, причем последнее и определяет режим полного захвата обоих осцилляторов внешним сигналом.

Построение фазовых портретов выявляет два основных типа двухчастотных квазипериодических режимов:

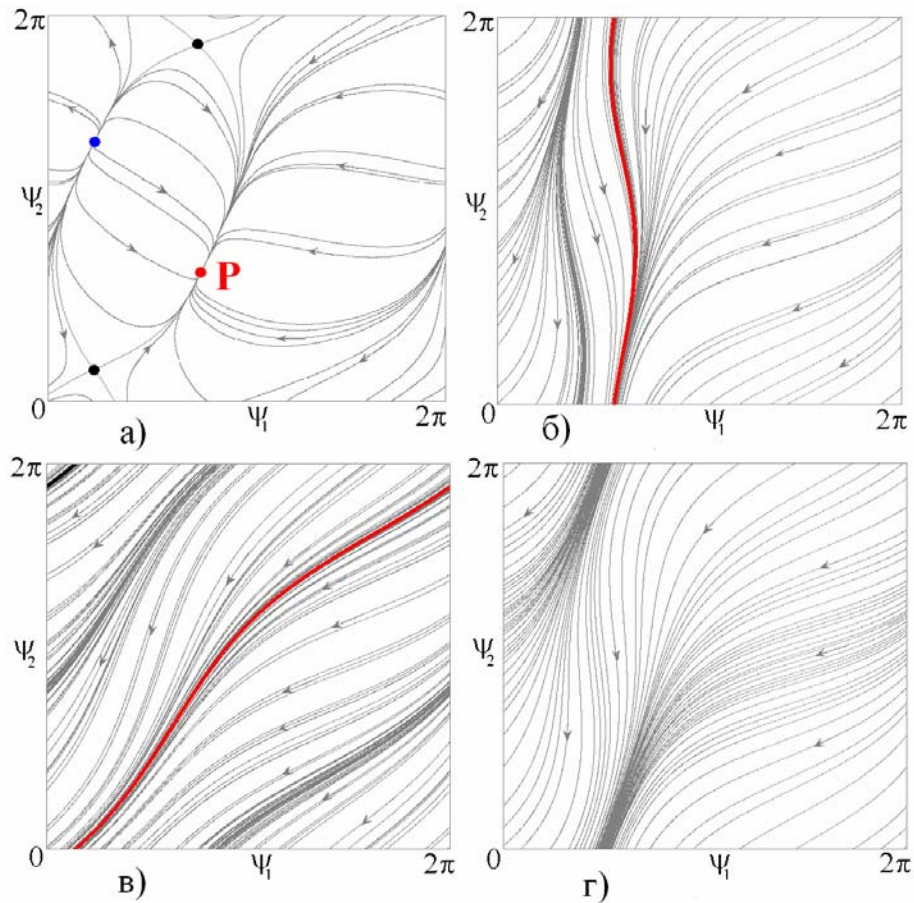
1) рис.3.3б. В этом случае в установившемся режиме фаза первого осциллятора  $\psi_1$  колеблется около некоторого стационарного значения, в то время как фаза второго  $\psi_2$  меняется во всем интервале от 0 до  $2\pi$ . Это режим *частичного захвата первого осциллятора* внешней силой;

2) рис.3.3в. В этом случае обе фазы меняются во всем доступном интервале, однако относительная фаза осцилляторов  $\theta = \psi_1 - \psi_2$  колеблется около некоторого значения. Это режим *частичного захвата относительной фазы* осцилляторов.



**Рис.3.2.** Карты ляпуновских показателей системы двух возбуждаемых фазовых осцилляторов (3.10): а) режим захвата автономных осцилляторов,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 0.2$ ; б) пороговая ситуация,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 0.6$ ; в) режим биений автономных осцилляторов,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 1.6$ .  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – собственные частоты первого и второго осцилляторов.

Будем характеризовать режимы двухчастотной квазипериодичности числом вращения  $w = p : q$ , где числа  $p$  и  $q$  отвечают количеству пересечений инвариантной кривой с вертикальной и горизонтальной сторонами фазового квадрата. Тогда первый из указанных режимов имеет тип  $0 : 1$ , а второй –  $1 : 1$ <sup>56</sup>.



**Рис.3.3.** Фазовые портреты системы (3.10) в режиме захвата автономных осцилляторов: а) полный захват обоих осцилляторов внешней силой,  $P$  – устойчивая неподвижная точка,  $\Omega = 0.1$ ,  $b = 0.3$ ; б) частичный захват фазы первого осциллятора,  $\Omega = 0.75$ ,  $b = 0.9$ ; в) частичный захват относительной фазы осцилляторов,  $\Omega = 0.75$ ,  $b = 0.4$ ; г) трехчастотная квазипериодичность,  $\Omega = 0.75$ ,  $b = 0.75$ . Значения остальных параметров  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 0.2$ .

На плоскости  $(\Omega, b)$  на рис.3.2а можно видеть пару точек *saddle node fan SNF*, в которых сходятся области двухчастотной квазипериодичности, трехчастотной квазипериодичности и периодических режимов. Они легко могут быть найдены аналитически из соотношений (3.14), (3.15), как условия пересечения двух линий седло-узловых бифуркаций, так что

$$b = \frac{\Delta}{2} \pm \mu, \quad \Omega = \frac{\Delta}{4} \pm \frac{\mu}{2}. \quad (3.17)$$

<sup>56</sup> Благодаря периодичности фазы, иллюстрации рис.3.3 можно рассматривать, как динамику на торе, как это сделано в разделе 1.1.7. Таким образом, используемое здесь число вращения  $w$  можно интерпретировать в соответствии с рис.1.10.

В рассматриваемом случае точки (3.17) определяют *пороговый уровень* амплитуды сигнала, при котором становятся возможными трехчастотные квазипериодические режимы.

Выходящие из этих точек языки трехчастотных режимов  $T_3$  разделяют две двухчастотные области. Первая из них располагается в области малых амплитуд. Внутри нее имеет место частичный захват относительной фазы осцилляторов и  $w=1:1$ . Вторая располагается в области больших амплитуд. Внутри нее имеет место режим частичного захвата первого осциллятора и  $w=0:1$ . При этом картина в качественном отношении симметрична – указанные режимы реализуются как слева, так и справа от области полной синхронизации.

Физически появление двух таких режимов понятно: маленькая внешняя сила не может разрушить сильный захват автономных осцилляторов, но может синхронизовать их, как единое целое. Если же амплитуда воздействия велика, то взаимная синхронизация разрушается, и внешняя сила захватывает непосредственно возбуждаемый первый осциллятор. Стоит отметить, что отсутствует (по крайней мере, на визуальном уровне) возможность частичного захвата второго осциллятора – он может захватываться внешней силой только точно и одновременно с первым внутри области  $P$ .

### 3.3.2. Случай биений автономных осцилляторов

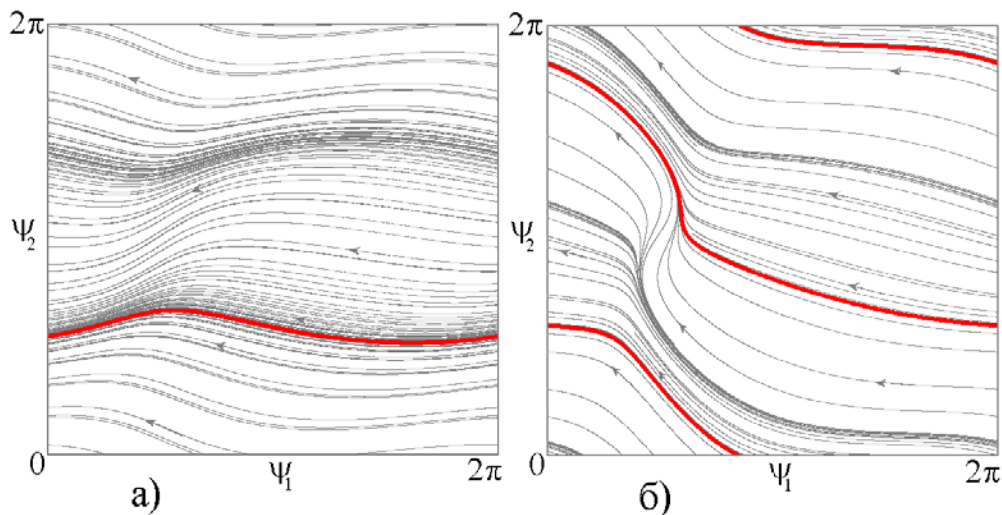
Увеличим теперь взаимную частотную расстройку осцилляторов  $\Delta$ . При этом будет наблюдаться переход от режима захвата автономных осцилляторов к режиму биений. Карта ляпуновских показателей для порогового значения  $\Delta = 2\mu$  показана на рис.3.2б. Сравнивая его с рис.3.2а, заключаем, что произошли заметные изменения. Теперь в области частот, меньших центральной частоты автономных осцилляторов  $\Omega < 0$ , область трехчастотных режимов не имеет амплитудного порога. Однако полосы двухчастотных резонансных режимов более высокого порядка все еще достаточно узкие.

Увеличим расстройку осцилляторов еще больше и перейдем в режим биений автономных осцилляторов, рис.3.2в. Теперь точный захват возможен в окрестности собственной частоты второго осциллятора  $\Omega_2 = \frac{\Delta}{4}$ . Область полной синхронизации имеет пороговый по амплитуде характер, величина которого определяется формулой (3.16).

Существенно изменились области трехчастотных режимов. Теперь амплитудный порог возникновения таких режимов полностью исчезает, и они занимают всю нижнюю часть плоскости частота – амплитуда воздействия.

Область частичного захвата первого осциллятора  $w=0:1$  приобрела вид традиционного языка, погруженного в область трехчастотных режимов. Острие языка отвечает собственной частоте первого осциллятора  $\Omega_1 = -\frac{\Delta}{4}$ . Эта область вытесняет режимы синхронизации относительной фазы.

Особенностью рассматриваемого случая является возможность двухчастотного режима, фазовый портрет которого дан на рис.3.4а. В этом случае фаза второго осциллятора  $\psi_2$  совершает колебания, в то время как фаза первого  $\psi_1$  меняется от нуля до  $2\pi$ . Таким образом, это режим *частичного захвата второго осциллятора* с числом вращения  $w=1:0$ . Область существования этого режима имеет вид языка, который продолжает область точного захвата  $P$ , а острие располагается на оси частот в точке, отвечающей собственной частоте второго осциллятора  $\Omega_2 = \frac{\Delta}{4}$ .



**Рис.3.4.** Фазовые портреты системы (3.10) в режиме биений автономных осцилляторов: а) частичный захват фазы второго осциллятора,  $\Omega = 0.35$ ,  $b = 0.45$ ; б) резонансный двухчастотный режим с числом вращения  $w = 2:1$ ,  $\Omega = 0.22$ ,  $b = 0.41$ . Значения параметров  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 1.6$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае можно осуществить частичный захват второго осциллятора, непосредственно не возбуждаемого внешней силой. При этом может быть использована даже малая амплитуда сигнала. Это существенное отличие от случая, когда автономные осцилляторы демонстрируют взаимный захват. Тогда связь осцилляторов сильная, и при воздействии на частоте  $\Omega \approx \Omega_2$  при малых амплитудах сигнала возможен только режим захвата относительной фазы. Если же частотная расстройка осцилляторов велика настолько, что автономные осцилляторы переходят в режим биений, то первый осциллятор не оказывает столь сильного воздействия на второй. При

этом внешняя сила может захватить второй осциллятор на фоне фазового дрейфа первого.

Продолжим обсуждение. Режим частичного захвата относительной фазы осцилляторов  $w=1:1$  сохраняется, но соответствующая область лежит теперь только справа от языка полной синхронизации, и ее размер заметно уменьшается по сравнению со случаем захвата автономных осцилляторов. Имеется также множество языков других резонансных двухчастотных режимов с основаниями на оси частот, погруженных в область трехчастотных колебаний. В качестве примера на рис.3.4б показан фазовый портрет режима, для которого  $w=2:1$ .

Дополним теперь ляпуновскую карту в случае режима биений автономных осцилляторов картой торов, на которой разными цветами указаны режимы с разными числами вращения  $w$ , рис.3.5. Числа вращения некоторых основных языков подписаны на рисунке<sup>57</sup>. Можно видеть визуализированными обсуждавшиеся выше режимы с числами вращения  $w=0:1$ ,  $w=1:0$  и  $w=1:1$ . Точка равенства частоты сигнала собственной частоте второго осциллятора  $\Omega=\Omega_2$  является центром системы языков двухчастотных режимов более высокого порядка. Они образуют пары с одинаковыми числами вращения, располагающиеся по разные стороны основного языка  $w=1:0$ . Это хорошо видно на примере двух наиболее широких языков  $w=2:1$ . Фазовые портреты для них отличаются наклоном инвариантных кривых в разные стороны.

Можно установить правило расположения оснований языков двухчастотных режимов на оси частот. Пусть связь осцилляторов и амплитуда сигнала исчезающе малы. Тогда уравнения (3.10) описывают простое вращение осцилляторов с частотами

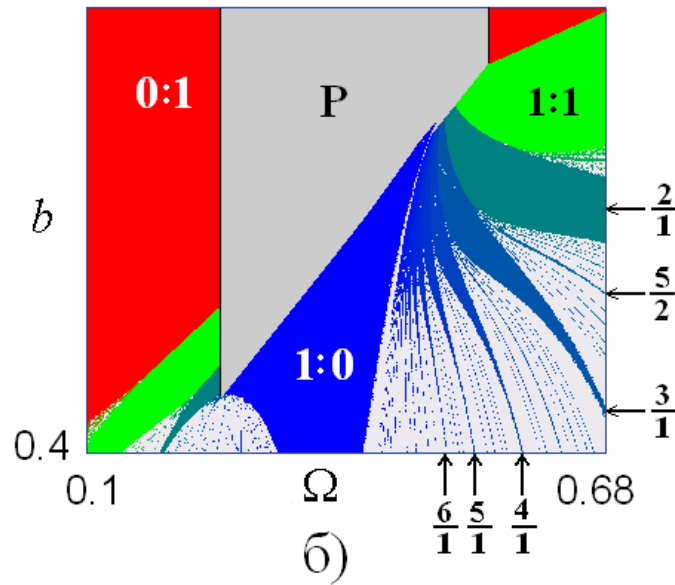
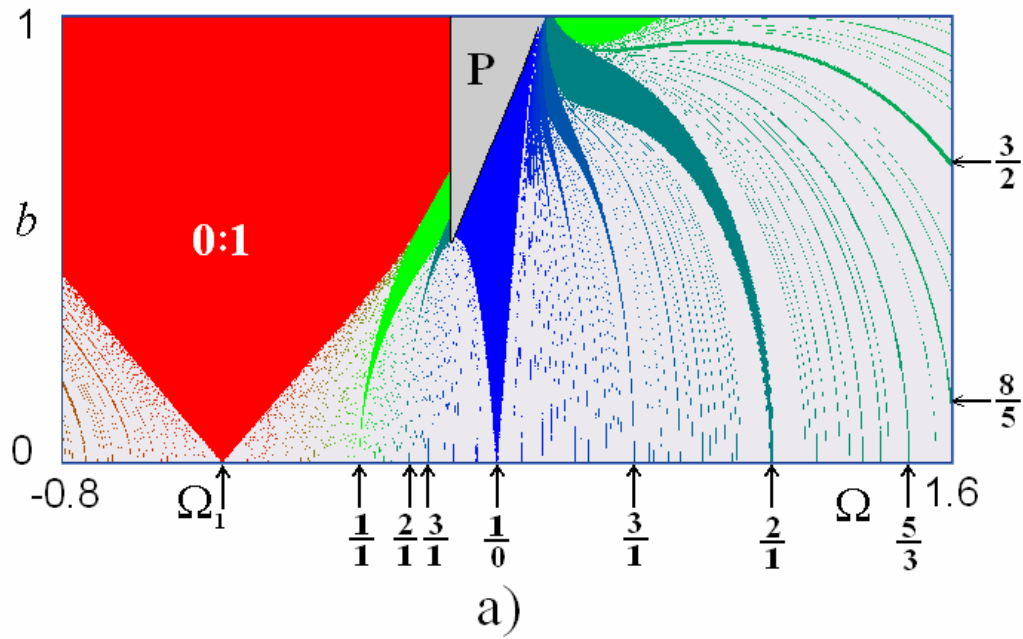
$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\frac{\Delta}{4} - \Omega, \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta}{4} - \Omega.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Резонансу порядка  $w=p:q$  отвечает условие  $\frac{p}{q} = \pm \frac{\dot{\psi}_1}{\dot{\psi}_2}$ . Тогда из (3.18) следует:

$$\Omega = \frac{p+q}{p-q}\Omega_2, \text{ или } \Omega = \frac{p-q}{p+q}\Omega_2.\tag{3.19}$$

В Таблице 3.1 приведены полученные с помощью (3.19) координаты оснований некоторых языков резонансных двухчастотных режимов. Можно видеть, что карта на рис.3.5а находится в соответствии с данной таблицей.

<sup>57</sup> Цветовая палитра соответствует рис.1.12.



**Рис.3.5.** а) Карта торов двух возбуждаемых фазовых осцилляторов (3.10) в режиме биений автономных осцилляторов,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 1.6$ ; б) увеличенный фрагмент карты торов, иллюстрирующий устройство нижней границы области полной синхронизации. Указаны числа вращения основных резонансных двухчастотных режимов.

**Таблица 3.1.** Основания языков резонансных двухчастотных режимов на оси частоты воздействия;  $\Omega_2 = \Delta/4$  – собственная частота второго осциллятора.

$w = 0:1$	$w = 1:0$	$w = 1:1$	$w = 2:1$	$w = 3:1$	$w = 3:2$
$\Omega = -\Omega_2 = \Omega_1$	$\Omega = \Omega_2$	$\Omega = 0$	$\Omega = 3\Omega_2$	$\Omega = 2\Omega_2$	$\Omega = 5\Omega_2$
			$\Omega = \frac{1}{3}\Omega_2$	$\Omega = \frac{1}{2}\Omega_2$	$\Omega = \frac{1}{5}\Omega_2$



Отметим, что пары значений частот  $\Omega$  в таблице для одного числа вращения отвечают двум разным знакам в соотношении  $\frac{p}{q} = \pm \frac{\dot{\psi}_1}{\dot{\psi}_2}$ . Поэтому для каждой пары потоки фазовых траекторий оказываются разнонаправленными.

Как можно видеть из увеличенного фрагмента карты на рис.3.5, наиболее сложно устроена нижняя граница области полной синхронизации, которая имеет протяженный «контакт» с областями с числами вращения 1:1, 2:1 и т.д. Однако наиболее характерным при выходе через нижнюю границу области полной синхронизации является возникновение режима частичной синхронизации второго осциллятора.

### 3.4. Два возбуждаемых осциллятора Ван-дер-Поля

#### 3.4.1. Фазовые портреты и динамика фазы в исходной системе

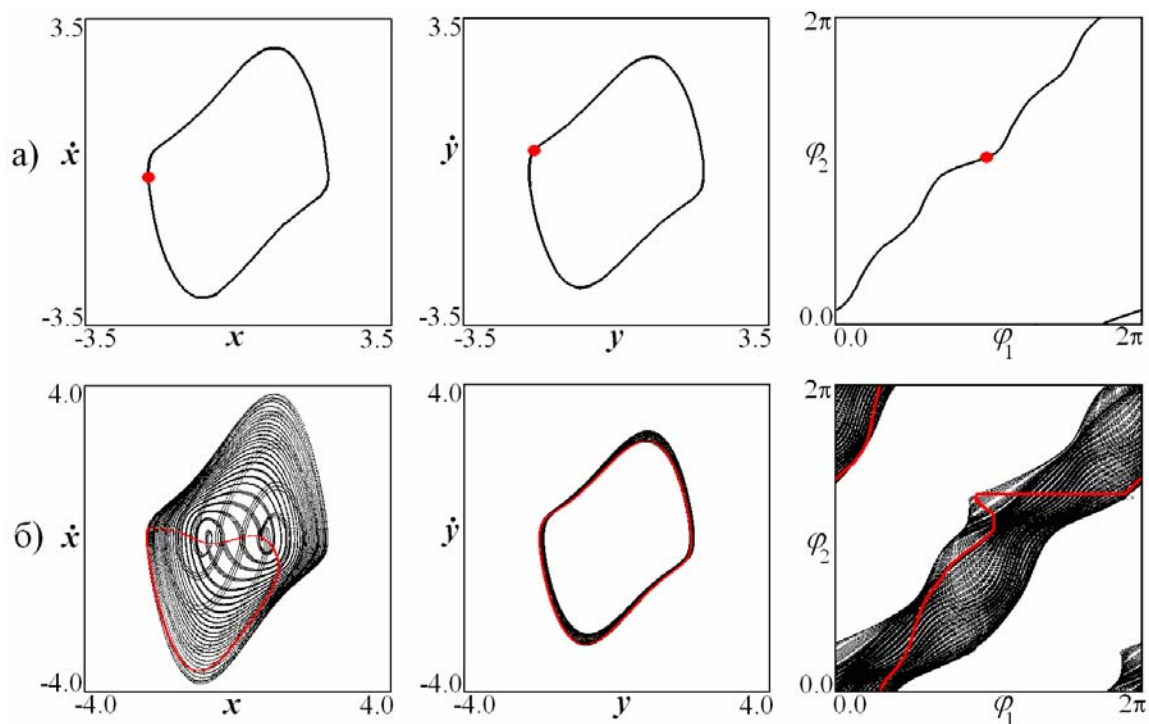
Перейдем теперь к обсуждению исходной системы возбуждаемых осцилляторов Ван-дер-Поля (3.1) и сравним результаты со случаем фазовой модели. Управляющий параметр сразу выберем достаточно большим,  $\lambda = 1$ . Тогда отклонения от фазовой модели должны быть значительными.

Фазовое пространство системы (3.1)  $(x, \dot{x}, y, \dot{y}, t)$  имеет размерность пять. Фазовые портреты можно представить в виде проекций траекторий на плоскости переменных первого и второго осцилляторов  $(x, \dot{x})$  и  $(y, \dot{y})$ . Поскольку система (3.1) неавтономна, то информативными иллюстрациями являются также *стробоскопические сечения* в этих проекциях, построенные через период внешнего воздействия. Для примера на рис.3.6 в первых двух колонках черным цветом показаны фазовые траектории системы (3.1), а красным – соответствующие стробоскопические сечения.

Для исходной системы (3.1) анализ динамики фаз осцилляторов можно провести только численным образом. С этой целью на плоскостях  $(x, \dot{x})$  и  $(y, \dot{y})$  введем фазу первого и второго осцилляторов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , как углы, под которыми изображающая точка видна из начала координат. Аналогичным образом можно ввести и *фазы для стробоскопических сечений*. Соответствующие иллюстрации даны в третьей колонке рис.3.6.

Серия рисунков 3.6а иллюстрирует режим полной синхронизации обоих осцилляторов внешней силой. В этом случае фазовые портреты осцилляторов представляют собой предельные циклы, близкие по форме к портретам изолированного осциллятора. В стробоскопическом сечении наблюдается

неподвижная точка. Как видно из третьей колонки, численно определенные фазы осцилляторов примерно близки друг к другу, а фазы в стробоскопическом сечении также дают неподвижную точку. Таким образом, фазы, как первого, так и второго осцилляторов захвачены внешней силой.



**Рис.3.6.** Фазовые портреты системы (3.1) в проекции на плоскости переменных отдельных осцилляторов и на плоскости фаз. Портреты в стробоскопическом сечении показаны красным цветом.  $\lambda=1$ ,  $\mu=0.1$ ,  $\Delta=0.1$  а)  $\Omega=-0.05$ ,  $V=0.15$ , б)  $\Omega=0.25$ ,  $V=1.161$ .

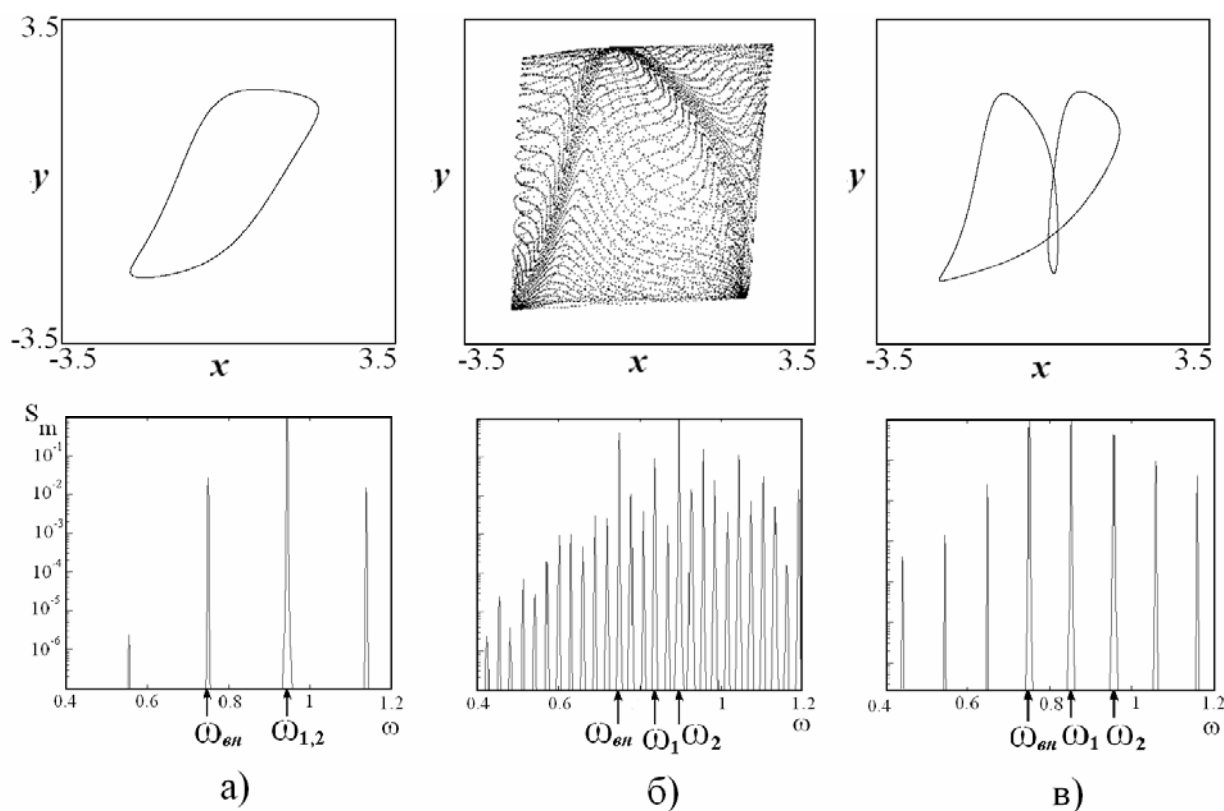
Второй пример на рис.3.6б отвечает режиму другого типа. Аттрактором для фазы в стробоскопическом сечении на самом правом фрагменте рис.3.6б является инвариантная кривая, что позволяет классифицировать этот режим, как двухчастотный. Таким образом, в исходном фазовом пространстве ему отвечает двумерный тор. Отметим, что инвариантная кривая в стробоскопическом сечении пересекает на плоскости фаз вертикальную и горизонтальную границы области по одному разу, что дает число вращения  $w=1:1$ . При этом, однако, внешняя сила велика, так что фазовый портрет первого осциллятора в левой колонке на рис.3.6б очень сильно возмущен внешним сигналом. Это с очевидностью означает, что описание с помощью фазовой модели в рамках метода медленных амплитуд не применимо.

### 3.4.2. Двухчастотные и трехчастотные торы и Фурье-спектры

Представим некоторые иллюстрации, характеризующие торы разной размерности и разных типов для системы (3.1). Для этого используем проекции

фазовых портретов в стробоскопическом сечении на плоскость координат обоих осцилляторов  $(x, y)$  – своего рода *фигуры Лиссажу*. Кроме того, представим спектры Фурье первого осциллятора. Соответствующие иллюстрации даны на рис.3.7.

Случай (а) отвечает двухчастотному тору, когда осцилляторы взаимно захвачены и число вращения  $w=1:1$ . Соответственно, фигура Лиссажу имеет по одной точке поворота по вертикали и горизонтали. В спектре колебаний доминирует отмеченный стрелкой пик на частоте  $\omega_{1,2}$ , связанной с взаимным захватом осцилляторов. Частота воздействия  $\omega_{вн}$  отмечена другой стрелкой. Остальные пики представляют собой комбинационные составляющие.



**Рис.3.7.** Фигуры Лиссажу для системы (3.1) и Фурье-спектры: а) двухчастотный тор  $\Omega=-0.25$ ,  $V=0.15$ , б) трехчастотный тор  $\Omega=-0.25$ ,  $V=0.45$ , в) двухчастотный резонансный тор  $\Omega=-0.25$ ,  $V=0.5$ . Остальные параметры  $\lambda=1$ ,  $\mu=0.1$ ,  $\Delta=0.1$ .

Случай (б) отвечает трехчастотному тору. Фигура Лиссажу для такого режима оказывается незамкнутой. На рисунке хорошо видны многочисленные точки поворота, как по вертикальной, так и по горизонтальной оси. В дополнение к частоте сигнала  $\omega_{вн}$ , вместо  $\omega_{1,2}$  в спектре появляется две несоизмеримые частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а также многочисленные комбинационные составляющие.

Случай (в) относится к *резонансному двухчастотному тору*, который возникает на поверхности трехчастотного. На фигуре Лиссажу в этом случае имеются две точки поворота по вертикали и одна по горизонтали, что соответствует числу вращения  $w = 1:2$ . Пик на частоте  $\omega_1$  располагается точно посередине между частотой воздействия  $\omega_{вн}$  и частотой  $\omega_2$ :

$$\frac{\omega_1 - \omega_{вн}}{\omega_2 - \omega_{вн}} = \frac{1}{2}, \quad (3.20)$$

что и соответствует числу вращения  $w = 1:2$ . При этом при движении по плоскости параметров в пределах данного языка частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  меняются, но соотношение (3.20) сохраняется, что отвечает резонансному характеру такого тора.

### ***Замечание о числах вращения***

Здесь целесообразно дать «мелким шрифтом» комментарий об определении чисел вращения с физических позиций. Для одиночного возбуждаемого осциллятора проблема решается, фактически, однозначно – числом вращения служит отношение частоты осциллятора  $\omega_{осц}$  к частоте сигнала  $\omega_{вн}$ :  $v = \omega_{осц} / \omega_{вн}$ . При увеличении числа осцилляторов задача становится уже неоднозначной. Один из вариантов, например, состоит в том, чтобы использовать две величины, а именно, нормированные на частоту сигнала частоты осцилляторов:  $v_1 = \omega_1 / \omega_{вн}$  и  $v_2 = \omega_2 / \omega_{вн}$ . Удобно дополнительно ввести фактор  $\theta = \omega_1 / \omega_2$ , своего рода, относительное число вращения. Такой подход развивается в [16,17], причем авторы резервируют термин число вращения именно для фактора  $\theta = \omega_1 / \omega_2$ , характеризующего взаимодействие осцилляторов.

Как мы видели, в рамках фазовой модели логичным образом возникает другое число вращения  $w$ , характеризующее динамику фаз на торе. С точки зрения наблюдаемых частот исходной системы оно дается отношением разностей частот

$$w = \frac{\omega_1 - \omega_{вн}}{\omega_2 - \omega_{вн}}.$$

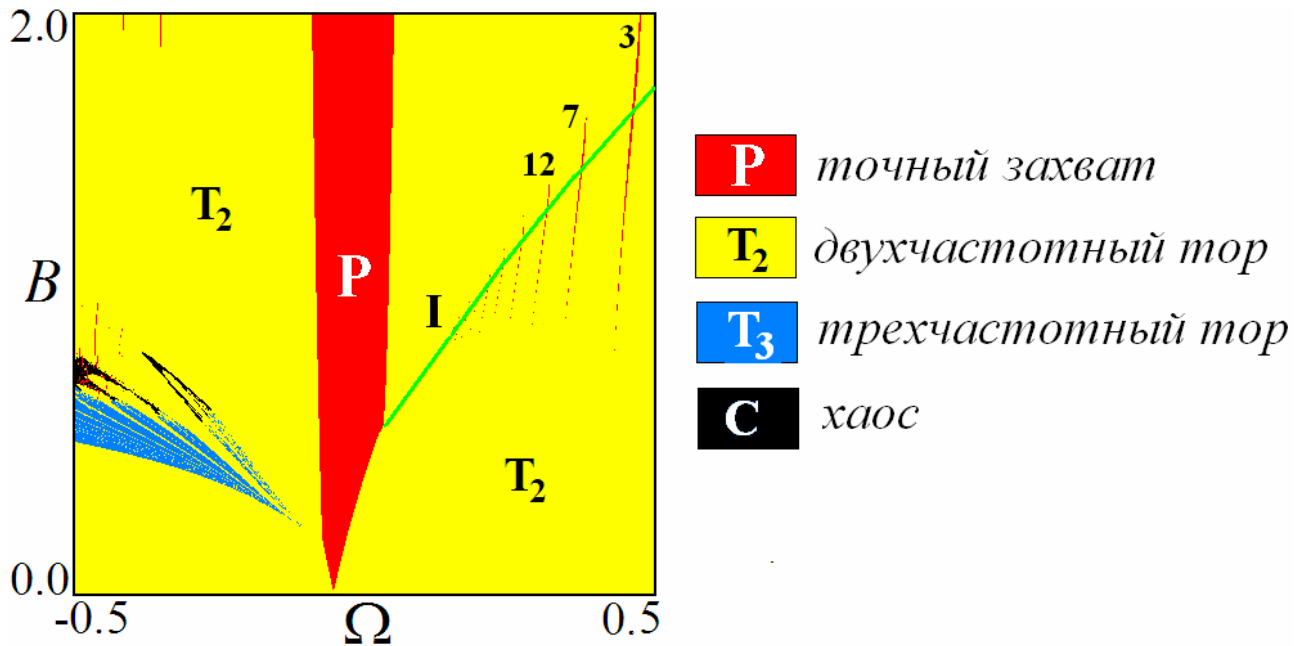
При этом в рамках фазовой модели оказывается, что *единственного* фактора  $w$  достаточно для классификации двухчастотных режимов. В тоже время нетрудно видеть, что нет однозначной связи чисел вращения  $w$  и  $\theta$ , а чтобы определить  $w$  нужно задать оба фактора  $v_1$  и  $v_2$ .

Таким образом, определение чисел вращения для нескольких осцилляторов не является однозначным и может быть разным при разных постановках задачи. Так если в поле зрения попадают различные резонансы взаимодействующих осцилляторов (например,  $\theta=1:3$ ,  $\theta=1:4$  и т.д.), то удобно использовать набор  $v_1$ ,  $v_2$  и  $\theta$ . Если проводится сопоставление свойств фазовой модели и исходной системы в области примерного равенства частот осцилляторов, то целесообразно выбрать число вращения  $w$ . Такое определение используется в пределах данной главы. В следующей главе, однако, будет использоваться и другой вариант.

### 3.4.3. Режим захвата автономных осцилляторов

Обсудим теперь устройство плоскости параметров частота – амплитуда внешнего сигнала для системы (3.1). Как и для фазовой модели, для исходной системы характерны два случая: режим захвата и режим биений автономных осцилляторов. Для определения границы между ними можно использовать оценку на основе фазового приближения  $\Delta \approx 2\mu$ . Для исходной системы (3.1) она является приближенной, хотя и работает с достаточно высокой точностью даже для не малых  $\lambda$ .

Обратимся сначала к случаю *захвата* автономных осцилляторов и выберем набор параметров  $\lambda=1$ ,  $\Delta=0.1$ ,  $\mu=0.1$ . На рис.3.8. показана соответствующая карта ляпуновских показателей. Отметим, что наряду с периодическими, двух- и трехчастотными квазипериодическими режимами, теперь возможен и хаос с положительным показателем Ляпунова.



**Рис.3.8.** Карта ляпуновских показателей системы (3.1). Цифрами показаны периоды некоторых высших резонансов в стробоскопическом сечении,  $I$  – линия, отвечающая синхронизации через подавление колебаний первого осциллятора внешней силой, см. соответствующее обсуждение. Значения параметров  $\lambda=1$ ,  $\mu=0.1$  и  $\Delta=0.1$ .

Сравнивая рис.3.8 и рис.3.2а, можно видеть, что некоторые черты, выявленные в рамках фазового приближения, сохраняются и в случае больших управляющих параметров, однако, возникают и определенные отличия. Так характерная для низкочастотной точки  $SNF$  картина областей сохраняется. Однако в верхней части области трехчастотных торов возникают, хотя и незначительные, области хаоса, невозможные в фазовой системе. С другой стороны, характерная для фазового приближения картина областей в

окрестности высокочастотной точки  $SNF$  полностью разрушается. В этом случае на смену трехчастотным режимам приходит двухчастотная область со встроенной системой очень узких языков полной синхронизации высоких периодов: 3, 7, 12 и т.д.

Карту ляпуновских показателей полезно дополнить анализом бифуркаций, отвечающих за разрушение полной синхронизации. Как мы отмечали, в случае фазового приближения это вырожденные линии седло-узловых бифуркаций  $SNP$  состояний равновесия, которые пересекаются в точках коразмерности два  $SNF$ . Вырождение состоит в совпадении линии бифуркации устойчивого узла и седла с линией для неустойчивого узла и седла.

Для исходной системы картина бифуркаций представлена на рис.3.9а, а на рис.3.9б,в показаны увеличенные фрагменты, отвечающие как раз областям, для которых в рамках фазового приближения наблюдались точки  $SNF$  – низкочастотная и высокочастотная.

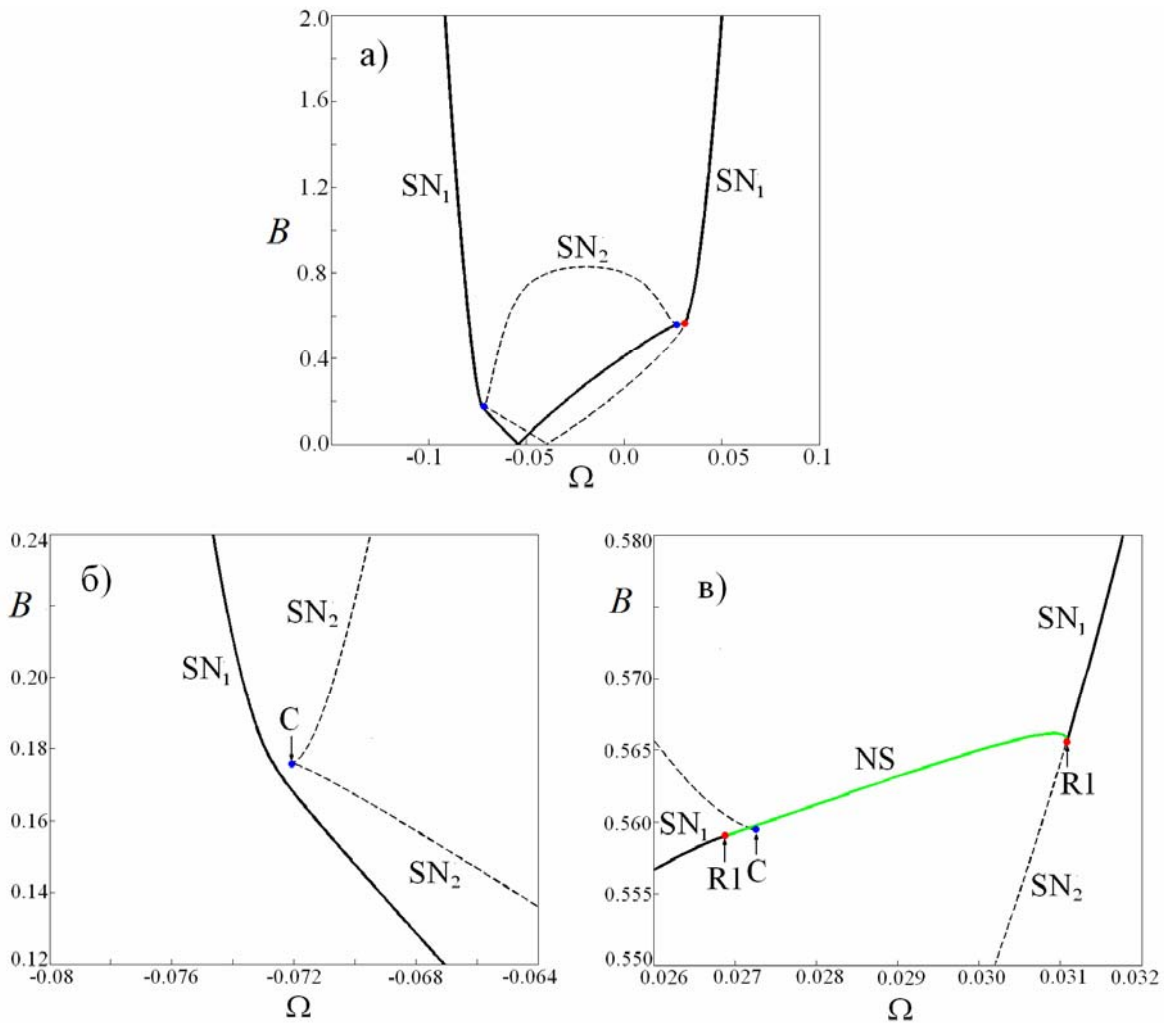
Обратимся сначала к низкочастотной области. Бифуркационный анализ выявляет картину, аналогичную случаю трех взаимно связанных осцилляторов. А именно, линия вырожденной бифуркации расщепляется на плавную (без «угла») линию седло-узловой бифуркации устойчивого узла и седла  $SN_1$  и линию седло-узловой бифуркации неустойчивого узла и седла  $SN_2$ <sup>58</sup>. Последняя имеет точку сборки в окрестности локализации точки  $SNF$  в фазовой модели.

Таким образом, характерная для фазовой модели картина бифуркаций, вообще говоря, разрушается. Ясно, что чем больше управляющий параметр, тем больше соответствующие отличия.

Если перейти к высокочастотной области, для которой характерная для фазовой системы картина разрушена уже полностью, то можно отметить и существенные изменения картины бифуркаций, хотя визуально на рис.3.9а также можно все еще видеть характерный «излом». В мелких масштабах на рис.3.9в выявляются следующие детали. Линия седло-узловых бифуркаций, являющаяся нижней границей языка полной синхронизации, локально превращается в небольшой отрезок линии Неймарка-Сакера  $NS$ , ограниченный точками бифуркаций коразмерности два  $R1$  – резонансов 1:1. В этой окрестности также наблюдается точка сборки на основе неустойчивых режимов. Таким образом, в высокочастотной области картина бифуркаций уже совершенно не соответствует фазовой модели, что в данном случае наглядно подтверждается и ляпуновской картой на рис.3.8.

---

<sup>58</sup> Здесь термины седло и узел относятся к сечению Пуанкаре, чтобы было удобно сопоставлять со случаем фазовой модели. Собственно, в исходной системе (3.1) будут иметь место соответствующие предельные циклы.

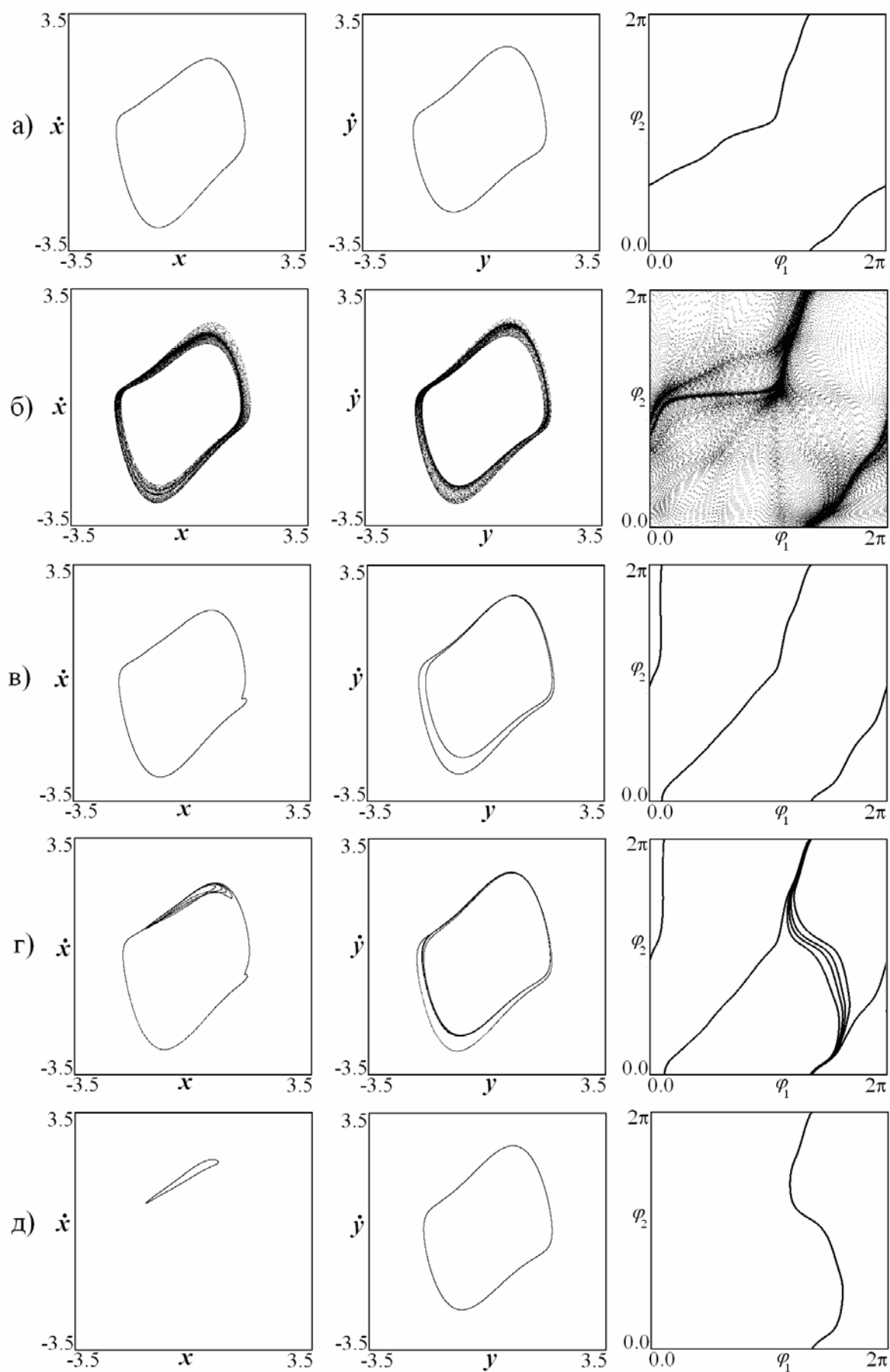


**Рис.3.9.** Бифуркационные линии и точки системы (3.1) на плоскости  $(\Omega, b)$ ;  $\lambda=1$ ,  $\mu=0.1$ ,  $\Delta=0.1$ . Сплошные линии отвечают бифуркациям устойчивых режимов, пунктирные – неустойчивых. Буквами обозначены:  $SN$  – линии седло-узловых бифуркаций,  $SN_1$  отвечает слиянию устойчивого узла и седла,  $SN_2$  – неустойчивого узла и седла,  $C$  – точка сборки неустойчивых равновесий,  $NS$  – линия Неймарка-Сакера,  $R1$  – резонанс 1:1.

### 3.4.4. Механизмы синхронизации и ее разрушения

Обсудим возможные сценарии изменения колебательных режимов в соответствии с представленной на рис.3.8 картой. Иллюстрации удобно проводить в стробоскопическом сечении, поскольку для них визуально можно оценить тип наблюдаемого режима.

Первая серия рис.3.10 показывает эволюцию стробоскопических сечений на плоскостях координат и фаз осцилляторов в низкочастотной области, когда отстройка частоты сигнала от центральной частоты осцилляторов  $\Omega$  невелика. Фиксируем значение  $\Omega = -0.1$  и постепенно увеличиваем амплитуду сигнала. При малой амплитуде наблюдается взаимный захват осцилляторов с числом вращения  $w = 1:1$  (а). При увеличении амплитуды возникают режимы

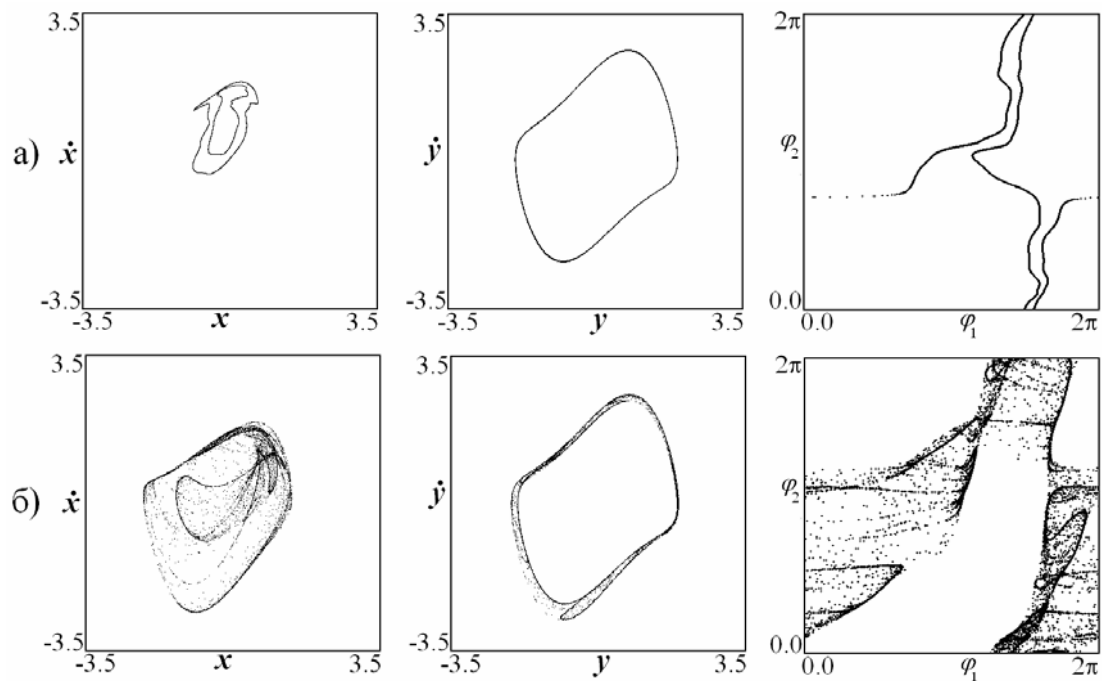


**Рис.3.10.** Эволюция портретов двух осцилляторов и их фаз в стробоскопическом сечении для системы (3.1) с ростом амплитуды сигнала: а)  $B=0.212$ , б)  $B=0.21284$ , в)  $B=0.213$ , г)  $B=0.2155$ , д)  $B=0.216$ . Значения остальных параметров  $\Omega=-0.1$ ,  $\lambda=1$ ,  $\mu=0.1$ ,  $\Delta=0.1$ .



трехчастотной квазипериодичности (б), чередующиеся с резонансными двухчастотными режимами разного порядка (в,г). Наиболее широкое «окно» отвечает резонансному тору и числу вращения  $w=1:2$  (в). С ростом амплитуды можно наблюдать окна резонансных торов с числами вращения  $w=1:N$ . Так на рисунке (г) представлен пример с  $w=1:6$ . В этом случае, как на фазовом портрете первого осциллятора, так и на фазовой диаграмме, появляется область «сгущения» траекторий. При некотором пороговом значении амплитуды воздействия из этого сгущения возникает инвариантная кривая (д). Динамика фаз при этом перестраивается так, что наблюдается режим захвата первого осциллятора внешней силой, так что число вращения становится  $w=0:1$ . Заметим, что вблизи порога такого перехода колебания первого осциллятора происходят вблизи орбиты автономной системы, так что внешнее воздействие возмущает в основном его фазу. Соответственно, в случае (д) имеет место и неустойчивая инвариантная кривая. Столкновение с ней и приводит к возникновению режимов типа (г). Таким образом, в этом случае наблюдается сценарий, качественно аналогичный фазовому приближению.

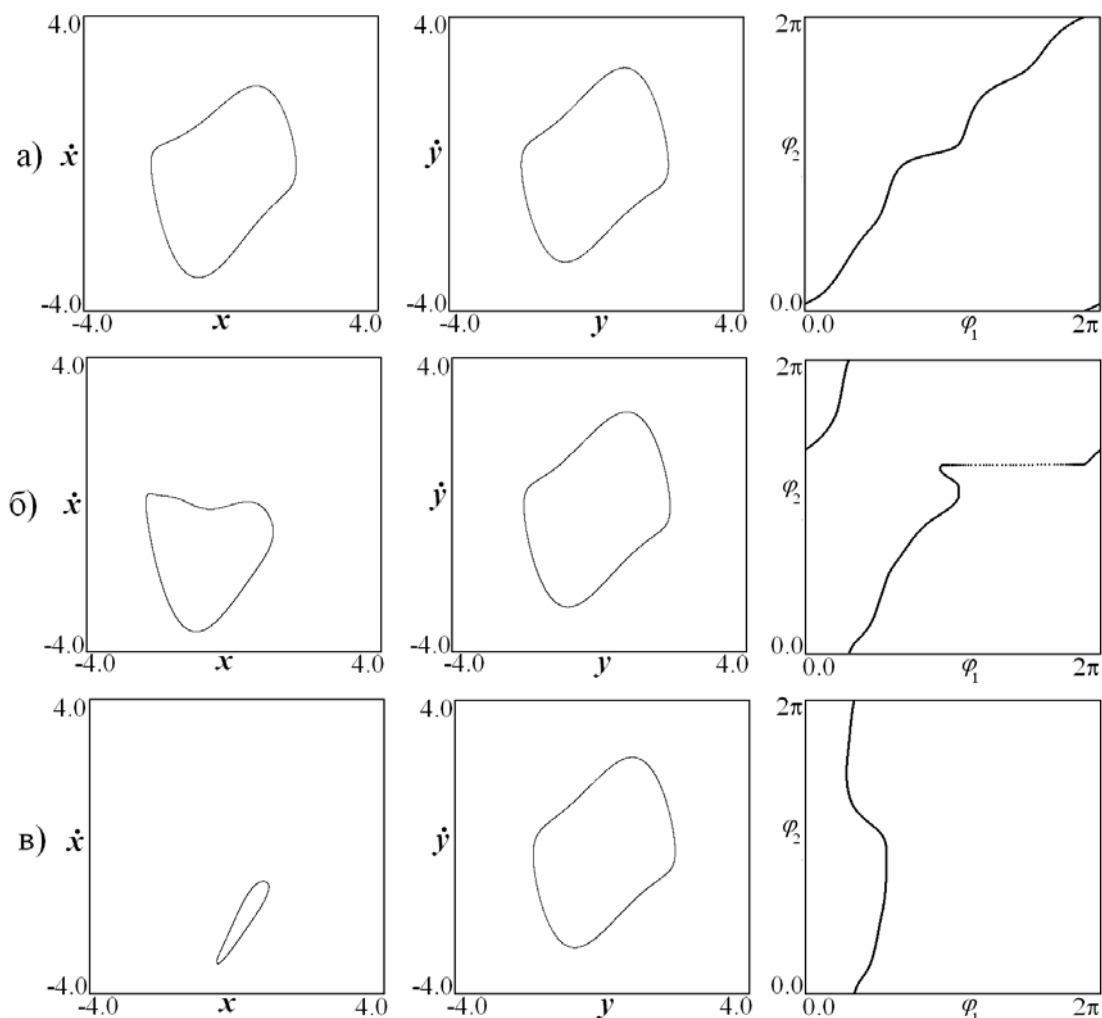
Изменим теперь частоту сигнала, увеличив (в отрицательную область) частотную отстройку, так что  $\Omega = -0.45$ . Это значение достаточно большое и близко к «обрезу» карты на рис.3.8. В этом случае области трехчастотных и резонансных двухчастотных торов отвечают большому диапазону и значениям амплитуды сигнала, в результате чего можно наблюдать режимы, не реализующиеся в фазовом приближении. Примеры представлены на рис.3.11.



**Рис.3.11.** Примеры портретов первого и второго осцилляторов и их фаз в стробоскопическом сечении для системы (3.1) при  $\Omega = -0.45$ ,  $\lambda=1$ ,  $\mu=0.1$ ,  $\Delta=0.1$ ; а)  $B=0.947$ , б)  $B=0.75$ .

Рис.3.11а демонстрирует *удвоенный тор* в первом осцилляторе. Интересная особенность картины состоит в том, что одна ветвь инвариантной кривой охватывает начало координат, а вторая – нет. Это отражается в устройстве соответствующей фазовой диаграммы в правой колонке. На рис.3.11б представлен портрет *хаотического режима*. Можно видеть, что орбита первого осциллятора сильно возмущена хаотическим образом, в то время как для второго возмущение не очень сильное.

Перейдем теперь к высокочастотной области на плоскости параметров рис.3.8. (Правее области полной синхронизации.) Фиксируем частоту внешнего сигнала  $\Omega=0.25$  и будем постепенно увеличивать его амплитуду. Эволюция фазовых портретов в этом случае иллюстрируется рис.3.12.

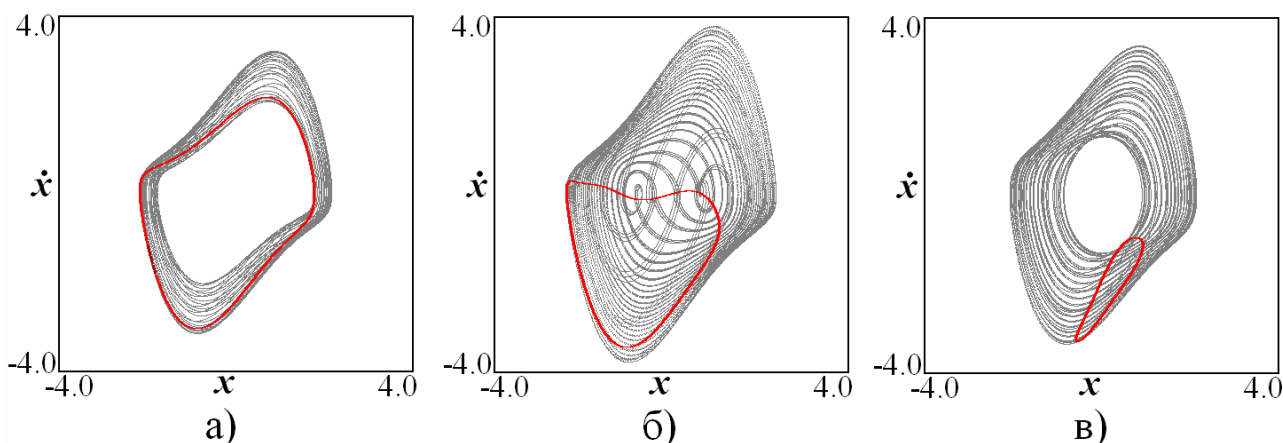


**Рис.3.12.** Эволюция портретов первого и второго осцилляторов и их фаз в стробоскопическом сечении системы (3.1) при  $\Omega=0.25$  с ростом амплитуды сигнала; а)  $B=0.5$ , б)  $B=1.161$ , в)  $B=1.25$ .

Теперь с ростом амплитуды воздействия трехчастотные режимы не возникают. Тем не менее, наблюдается переход от режима захвата относительной фазы к захвату внешней силой первого осциллятора. Этот

переход осуществляется в результате другого механизма. С ростом амплитуды воздействия инвариантная кривая первого осциллятора уменьшается в размере. Затем наступает момент, когда она перестает охватывать начало координат, рис.3.12б. На плоскости фаз при этом происходит «перезакрытие» ветвей притягивающей инвариантной кривой, с переходом к виду, характерному для захвата первого осциллятора, рис.3.12в. Таким образом, захват первого осциллятора происходит через *подавление автоколебаний* за счет большой амплитуды внешней силы.

Рис.3.13 иллюстрирует эволюцию фазового портрета первого осциллятора, отвечающую этому механизму. На этом рисунке показано, как взаимно расположены фазовые портреты аттрактора и инвариантная кривая в стробоскопическом сечении для этого осциллятора. Сначала амплитуда собственных колебаний осцилляторов возмущена не очень сильно, рис.3.13а. С ростом амплитуды воздействия возмущение орбиты первого осциллятора возрастает и становится настолько сильным, что изображающая точка начинает посещать начало координат. Инвариантная кривая в стробоскопическом сечении проходит через начала координат, рис.3.13б. С дальнейшим ростом внешней силы траектории снова уходят из окрестности начала координат, но теперь инвариантная кривая не охватывает начало координат, рис.3.13в. Возникает ситуация, когда внешняя сила существенно подавляет собственные автоколебания первого осциллятора, возмущая не только их фазу, но и амплитуду.



**Рис.3.13.** Фазовые портреты первого осциллятора и инвариантные кривые в стробоскопическом сечении (красный цвет) системы (3.1); а)  $B=0.5$ , б)  $B=1.161$ , в)  $B=1.25$ .

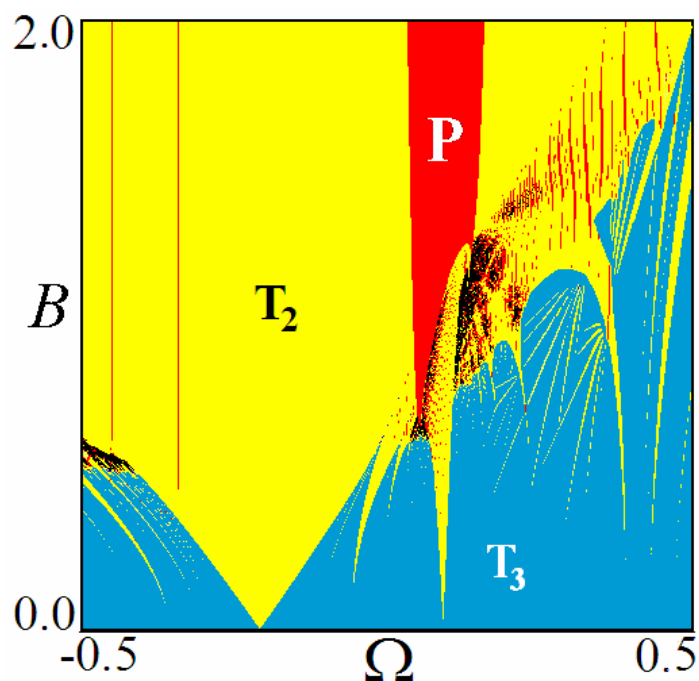
Отметим, что в определенной мере аналогичный механизм реализуется и в возбуждаемом внешней силой одиночном осцилляторе, однако, в очень узком диапазоне изменения параметров. (См. раздел 7.2.2 из [1] и соответствующее обсуждение.) В случае двух осцилляторов такие режимы занимают

значительную часть плоскости параметров. Причина состоит в наличии второго осциллятора – он своими колебаниями разрушает точный захват первого осциллятора внешней силой.

Положение линии  $I$ , отвечающей моменту прохождения инвариантной кривой через начало координат, в высокочастотной области показано на рис.3.8 зеленым цветом.

### 3.4.5. Режим биений автономных осцилляторов

Обратимся теперь к случаю режима биений автономных осцилляторов, когда их относительная частотная расстройка достаточно велика. Ляпуновская карта для  $\lambda = 1$ ,  $\Delta = 0.6$ ,  $\mu = 0.1$  приведена на рис.3.14. Ее надо сравнить с картой фазовой модели рис.3.2в. Несмотря на большое значение управляющего параметра, основные элементы картины фазовой модели «наследуются»: можно видеть характерное устройство областей полной синхронизации, трехчастотных режимов и систему языков резонансных двухчастотных режимов. Новым моментом является обогащение системы различными резонансами. В первую очередь, появляется множество узких окон периодических режимов в высокочастотной области. Еще один новый момент – появление веерообразных систем областей двухчастотных торов, которые возникают на границах двухчастотных языков, характерных для фазовой модели. Также можно отметить появление небольших областей хаоса, сконцентрированных, в основном, у нижней границы области полной синхронизации.



**Рис.3.14.** Карта ляпуновских показателей системы (3.1) в режиме биений автономных осцилляторов;  $\lambda = 1, \Delta = 0.6, \mu = 0.1$ .

### 3.4.6. Резонанс на гармониках внешней силы

Возбуждаемая система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля может демонстрировать большое количество различных резонансных ситуаций, выходящих за рамки фазовой модели. Эта модель применима к случаю, когда собственные частоты обоих осцилляторов и частота внешней силы близки. Можно, однако, существенно менять частоту второго осциллятора, так чтобы собственные частоты осцилляторов относились как  $p:q$ , где  $p$  и  $q$  – целые числа. Такой случай для соотношения частот 1:3 экспериментально исследован в [15]. При этом полученная картина оказалась качественно аналогична основному резонансу. Мы, однако, будем последовательно развивать подход к системе из двух осцилляторов с близкими собственными частотами, варьируя существенно лишь частоту внешнего сигнала. Это иная постановка задачи, и она приводит к заметному изменению устройства высших резонансов.

В этом плане мы обсудили пока лишь небольшую область, отвечающую близким значениям частот сигнала и взаимодействующих осцилляторов. Если говорить о глобальной организации плоскости параметров, то для нее существенными будут различные резонансы, когда частота внешней силы соотносится с центральной частотой осцилляторов, как  $p:q$ , где  $p$  и  $q$  – целые. В какой мере сценарии синхронизации осцилляторов, установленные в рамках фазовой модели в разделах 3.1-3.3 пригодны для других резонансов? Для ответа на этот вопрос обратимся к резонансу 1:3, который наиболее выражен при возбуждении одиночного осциллятора Ван-дер-Поля, что связано с кубическим характером нелинейности в (3.1). В этом случае частота сигнала примерно равна утроенной собственной частоте:  $\omega \approx 3$ .

Для анализа резонанса 1:3 такого типа в системе (3.1) по аналогии с [97] сначала находим нерезонансный отклик на частоте  $\omega$ , для чего вполне достаточно линейного приближения, причем величиной связи и отрицательным трением можно пренебречь. При проведении выкладок удобнее использовать (3.1) с вынуждающим членом  $B \cos \omega t$ , что, конечно, непринципиально. Подставим в (3.1) с вынуждающим членом такого вида решение  $x(t) = -A \cos \omega t$ . Тогда в рамках указанной оценки получаем  $(\omega^2 - 1)A = B$ , откуда при  $\omega \approx 3$  имеем  $A = B/8$ .

Далее ищем отклик системы на частоте  $\omega/3$ , для чего полагаем

$$x = ae^{i\omega t/3} + a^* e^{-i\omega t/3} - \frac{A}{2}(e^{i\omega t} + ae^{-i\omega t}), \quad y = be^{i\omega t/3} + b^* e^{-i\omega t/3}. \quad (3.21)$$

Налагая традиционное дополнительное условие, исключаящее члены с производными по времени от комплексных амплитуд  $a$  и  $b$ , получаем для

скоростей изменения переменных

$$\dot{x} = \frac{i\omega}{3}(ae^{i\omega t/3} - a^* e^{-i\omega t/3}) - \frac{i\omega A}{2}(e^{i\omega t} - ae^{-i\omega t}), \quad \dot{y} = \frac{i\omega}{3}(be^{i\omega t/3} - b^* e^{-i\omega t/3}). \quad (3.22)$$

Подставим соотношения (3.21) и (3.22) в исходные уравнения (3.1) и в полученном уравнении оставим лишь резонансные члены вида  $e^{i\omega t/3}$ . С линейными членами поступим аналогично обычному резонансу в уравнении Ван-дер-Поля. В результате некоторых преобразований, аналогичных [2,97], получим:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - 2i(\Delta/4 + \bar{\Omega})a - a^2 a^* + \frac{1}{2}(a^*)^2 A - \frac{1}{2}aA^2 - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b + 2i(\Delta/4 - \bar{\Omega})b - |b|^2 b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь  $\bar{\Omega} = \omega/3 - 1$  – параметр частоты внешнего сигнала.

Как обычно, параметр  $\lambda$  может быть убран нормировкой. Положим, кроме того,  $a = Re^{i\psi_1}$  и  $b = re^{i\psi_2}$ , где  $R, r$  и  $\psi_{1,2}$  – действительные амплитуды и фазы осцилляторов. Тогда из (3.23) находим:

$$\begin{aligned} 2\frac{dR}{dt} &= R(1 - 2\varepsilon^2) - R^3 + \varepsilon R^2 \cos 3\psi_1 + \mu(r \cos(\psi_2 - \psi_1) - R), \\ 2\frac{dr}{dt} &= r - r^3 + \mu(R \cos(\psi_1 - \psi_2) - r), \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -\bar{\Omega} - \frac{\Delta}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon R \sin 3\psi_1 + \frac{r}{2R}\mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\bar{\Omega} + \frac{\Delta}{4} + \frac{R}{2r}\mu \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь  $\varepsilon = A/2 = B/16$  – нормированная амплитуда внешнего сигнала.

Получим теперь независимые уравнения для фаз осцилляторов. Для этого из амплитудных уравнений в (3.24) получаем оценку для орбит осцилляторов

$R \approx \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}$  и  $r \approx 1$ . Подставим эти соотношения в фазовые уравнения (3.24):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\bar{\Omega} - \frac{\Delta}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1 - 2\varepsilon^2} \sin 3\psi_1 + \frac{\mu}{2\sqrt{1 - 2\varepsilon^2}} \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\bar{\Omega} + \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu\sqrt{1 - 2\varepsilon^2}}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Это и есть искоемые уравнения для фаз осцилляторов, описывающие резонанс 1:3.

Если осцилляторы не связаны и  $\mu = 0$ , то из (3.25) находим для фазы первого осциллятора известное соотношение [97]:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\bar{\Omega} - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{1-2\varepsilon^2} \sin 3\psi_1. \quad (3.26)$$

Условие обращения синуса в  $\pm 1$  в (3.26) дает границы области синхронизации отдельного возбуждаемого осциллятора  $\bar{\Omega} = \pm \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{1-2\varepsilon^2}$ . Она представляет собой язык, занимающий конечный диапазон частот и имеющий характерную «округлую» вершину в точке  $\bar{\Omega} = 0, \varepsilon = 1/\sqrt{2}$  [65,97].

Вернемся к связанным осцилляторам и найдем границы области их полной синхронизации внешней силой для резонанса 1:3. Из (3.25) для состояний равновесия можно получить

$$\bar{\Omega} + \frac{\Delta}{4} + \frac{\bar{\Omega} - \frac{\Delta}{4}}{1-2\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{1-2\varepsilon^2} \sin 3\psi_1 = 0,$$

$$\bar{\Omega} - \frac{\Delta}{4} - \frac{\mu \sqrt{1-2\varepsilon^2}}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2) = 0.$$

Отсюда, как условия обращения синусов в  $\pm 1$ , получаем уравнения границ области точного захвата фаз:

$$\bar{\Omega} = \frac{\Delta}{4} \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \pm \frac{\varepsilon}{2} \frac{(1-2\varepsilon^2)^{3/2}}{1-\varepsilon^2}, \quad (3.27)$$

$$\bar{\Omega} = \frac{\Delta}{4} \pm \frac{\mu}{2} \sqrt{1-2\varepsilon^2}.$$

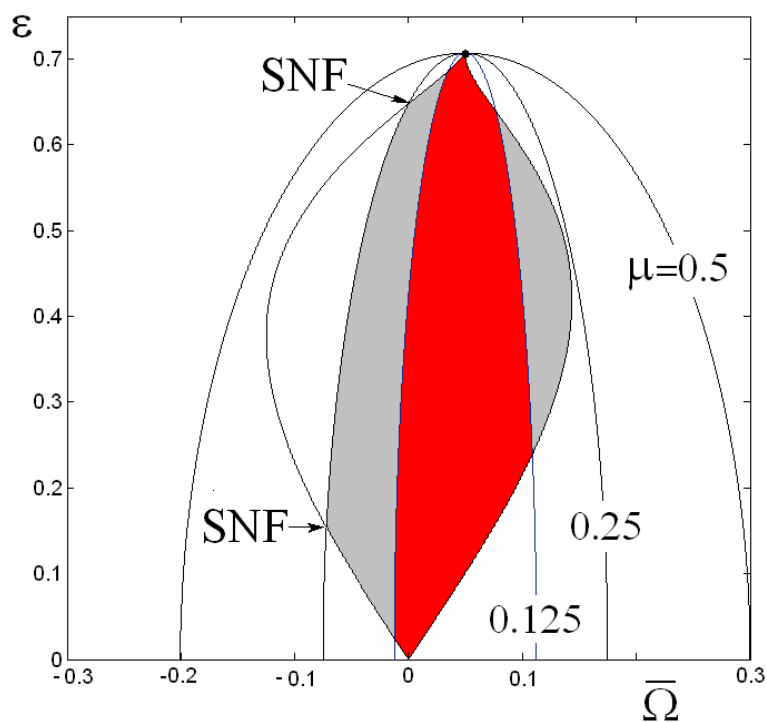
Первое из условий (3.27) задает на плоскости частота – амплитуда воздействия  $(\bar{\Omega}, \varepsilon)$  замкнутый язык, показанный на рис.3.15. Он устроен следующим образом. Центральная линия дается соотношением  $\bar{\Omega} = \frac{\Delta}{4} \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ . Вдоль нее язык сначала расширяется, а затем сужается, так что обе его границы сходятся в точке  $\bar{\Omega} = \frac{\Delta}{4}, \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , которая отвечает вершине языка и отмечена точкой на рис.3.15.

Второе условие (3.27) определяет ширину полосы захвата. При малых амплитудах сигнала  $\bar{\Omega} = \frac{\Delta}{4} \pm \frac{\mu}{2}$ , как и в случае резонанса 1:1. Однако с ростом амплитуды ширина полосы уменьшается и стремится к нулю в той же точке, где расположена вершина языка.

Область, образованная этими двумя линиями и отвечает полной синхронизации. На рис.3.15 показаны три варианта взаимного расположения

линий (3.27), отвечающие возрастающему уровню связи. Можно видеть следующие особенности. При небольшой связи  $\mu = 0.125$  имеются четыре точки пресечения линий (3.27). Таким образом, на обеих границах языка (на рисунке он показан красным цветом) имеются по две точки коразмерности два. При увеличении связи полоса захвата расширяется, и две правые точки сливаются и исчезают. Теперь область полной синхронизации (показана серым и красным цветом) имеет такие точки только на своей левой границе<sup>59</sup>. При еще большем увеличении уровня связи сливаются и они, так что при  $\mu = 0.5$  граница области полной синхронизации не содержит изломов. Теперь весь язык синхронизации целиком лежит внутри полосы захвата.

Таким образом, ситуация существенно отличается от фазовой модели для основного резонанса 1:1. Для него с ростом связи полоса точного захвата расширяется, но точки *SNF* на границах языка существуют всегда, только при большей связи. Для резонанса 1:3 существует пороговое значение связи, выше которой точки *SNF* исчезают, а значит, можно ожидать, что исчезнут и ассоциирующиеся с ними области трехчастотной квазипериодичности.



**Рис.3.15.** Область полной синхронизации для резонанса 1:3 и ее границы (3.27), случай захвата автономных осцилляторов. Значения параметра связи  $\mu = 0,125, 0,25, 0,5$ ;  $\Delta = 0,2$ .

Отметим, что на рис.3.15 выбраны значения параметров, отвечающие захвату автономных осцилляторов. В случае биений картина аналогична, но только область полной синхронизации имеет порог по амплитуде.

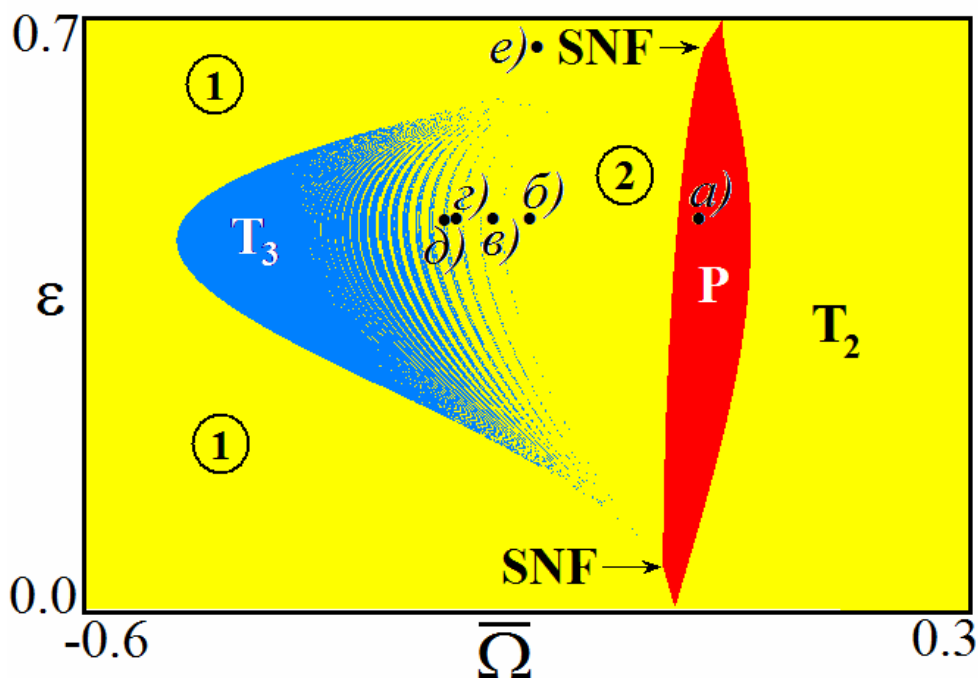
<sup>59</sup> Как видно из представленных ниже иллюстраций, они являются точками *SNF*.



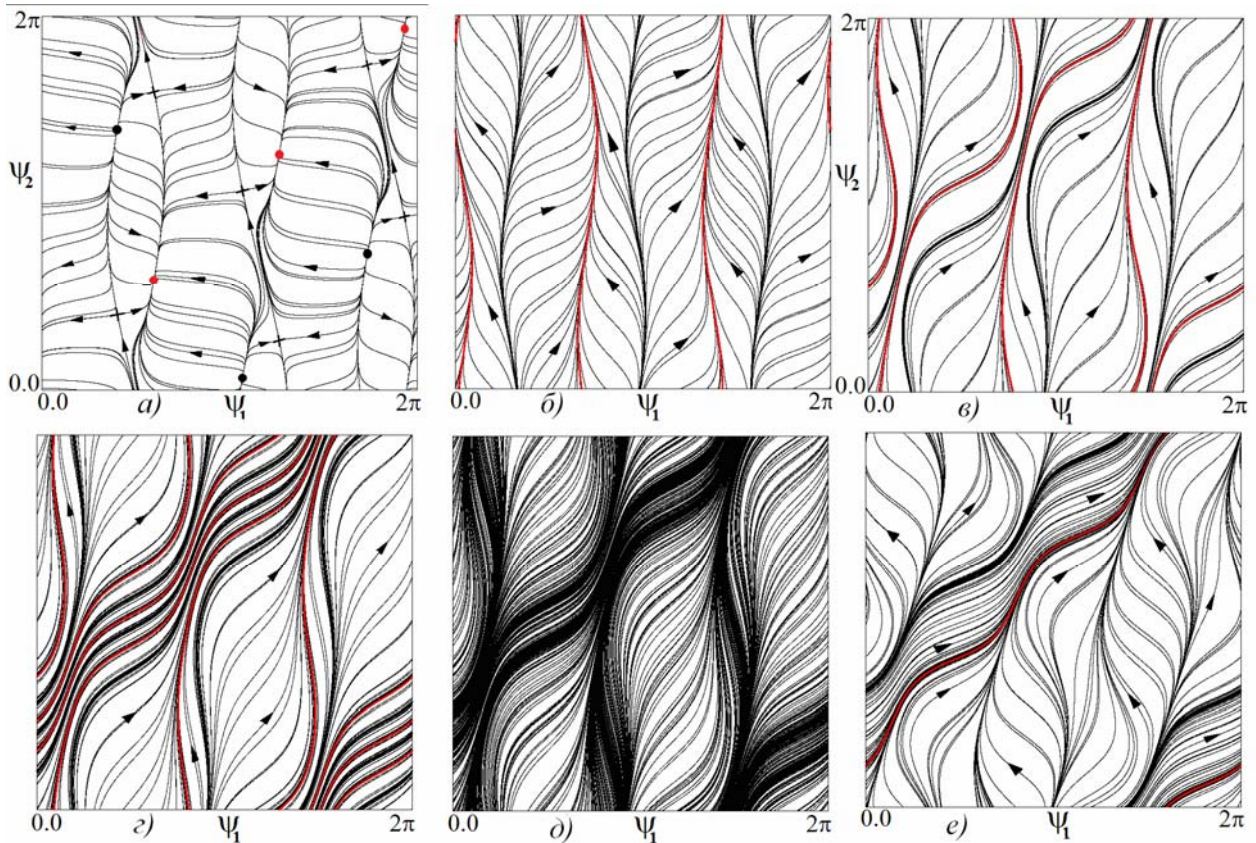
На рис.3.16 показаны карты ляпуновских показателей системы (3.25) на плоскости параметров частота – амплитуда сигнала  $(\bar{\Omega}, \varepsilon)$ . Значение параметров отвечают «промежуточному» уровню связи  $\mu = 0.25$ , когда имеют место две точки коразмерности два.

Прежде всего, отмечаем наличие области полной синхронизации, форма которой отвечает аналитическому рассмотрению. Соответствующий фазовый портрет дан на рис.3.17а. В этом случае имеется три устойчивых состояний равновесия, что отвечает порядку рассматриваемого резонанса 1:3. Кроме того, имеется три неустойчивых равновесия и шесть седел.

Если уменьшить частоту воздействия, то на плоскости параметров попадаем в точку б). При этом устойчивые равновесия сливаются с тремя седлами, а неустойчивые с тремя другим седлами, в результате чего возникают три устойчивых и три неустойчивые инвариантные кривые, рис.3.17б. Эта область отмечена цифрой 2 на карте. Устойчивые кривые отвечают возникновению частичного захвата первого осциллятора внешней силой, когда фаза  $\psi_1$  осциллирует около некоторых равновесных значений. Таким образом, бифуркационный механизм возникновения такой синхронизации аналогичен случаю основного резонанса, отличие состоит лишь в увеличении в три раза числа равновесий и числа ветвей инвариантных кривых.



**Рис.3.16.** Карта ляпуновских показателей для фазовой модели (3.25), описывающей резонанс 1:3; случай захвата автономных осцилляторов,  $\Delta = 0.2$ ,  $\mu = 0.125$ .



**Рис.3.17.** Фазовые портреты системы (3.25) в избранных точках, буквы отвечают рис.3.16: а)  $\bar{\Omega}=0.05$ ,  $\varepsilon=0.4$ ; б)  $\bar{\Omega}=-0.16$ ,  $\varepsilon=0.4$ , в)  $\bar{\Omega}=-0.18$ ,  $\varepsilon=0.4$ ; г)  $\bar{\Omega}=-0.22$ ,  $\varepsilon=0.4$ ; д)  $\bar{\Omega}=-0.23$ ,  $\varepsilon=0.4$ , е)  $\bar{\Omega}=-0.1$ ,  $\varepsilon=0.65$ . Остальные параметры  $\Delta = 0.2$ ,  $\mu = 0,125$ .

Если продолжать уменьшать частоту воздействия, то попадаем в область, где чередуются трехчастотные и двухчастотные режимы. Примеры даны на рис.3.17в,г,д. Можно видеть, что при этом последовательно возрастает число пересечений устойчивой инвариантной кривой со сторонами фазового квадрата, что отвечает резонансным двухчастотным режимам разного порядка. В свою очередь, трехчастотный режим дает поток фазовых траекторий и представлен на рис.3.17д.

Увеличим теперь амплитуду воздействия и выйдем за пределы трехчастотной области в точку е). В этом случае на рис.3.17е возникает простая устойчивая инвариантная кривая, имеющая по единственному пересечению с горизонтальной и вертикальной границами фазового квадрата. При этом обе фазы меняются во всем возможном диапазоне, и инвариантная кривая уже не состоит из трех ветвей. Этот режим отвечает захвату относительных фаз осцилляторов. Такая область отмечена цифрой 1 на карте.

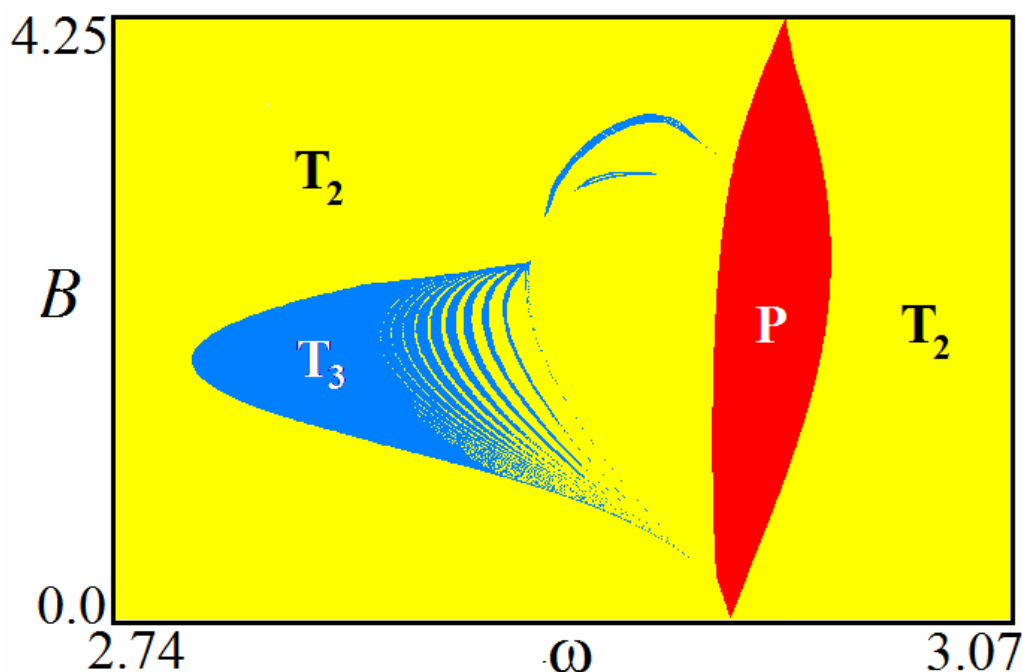
Область трехчастотных режимов на рис.3.16 образует два узких языка, вытянутых к точкам изломов на левой границе области полной синхронизации. Таким образом, обе они ассоциируются с точками *SNF*. При этом система языков резонансных двухчастотных режимов является общей для двух точек

$SNF$ , так что возникают характерные структуры резонансных полос «серповидной» формы. Область 2, отвечающая захвату первого осциллятора внешней силой, образует остров внутри трехчастотной области, и ограничена как по амплитуде, так и по частоте. В свою очередь область взаимного захвата осцилляторов 1 (захвата относительной фазы) занимает как область малых амплитуд, так и область больших амплитуд.

Еще одна особенность картины на рис.3.16 состоит в том, что высокочастотная трехчастотная область вообще не визуализируется в численных экспериментах. Хотя на правой стороне языка имеются характерные «углы», представляющие собой точки коразмерности два, в которых все равновесия стягиваются друг к другу<sup>60</sup>.

Можно ожидать, что подобные особенности будут характерны и для резонансов более высокого порядка. Таким образом, отличия основного языка определяются его уникальным устройством в рамках фазовой модели: он может быть неограничен по частоте. Все остальные языки имеют конечный размер по частоте, и при надлежащем выборе связи трехчастотные режимы исчезают. При этом, чем выше порядок языка, тем быстрее наступает описанный эффект.

Покажем, что описанные особенности имеют место и для исходной системы (3.1). В качестве иллюстрации на рис.3.18 показана карта для этой системы в диапазоне частот  $\omega$ , в который попадает исследуемый резонанс 1:3.



**Рис.3.18.** Карта ляпуновских показателей для исходной системы (3.1) в окрестности резонанса 1:3;  $\lambda=0.1$ ,  $\Delta=0.02$ ,  $\mu=0,0125$ .

<sup>60</sup> Причина может быть в том, что трехчастотные области очень узкие, однако, этот вопрос требует дополнительного исследования.

Использовано небольшое значение управляющего параметра  $\lambda=0.1$ . Значения остальных параметров по сравнению с рис.3.16 пересчитаны с учетом правил нормировки на величину  $\lambda$ . Сравнивая рис.3.18 и рис.3.16, можно видеть, что форма основного резонанса в рамках фазовой модели предана правильно. Так же подтверждается и тот факт, что область трехчастотных торов лежит слева от резонанса, а справа – отсутствует. Наблюдаются и характерные серповидные структуры резонансных областей двухчастотных режимов. При этом, однако, устройство этих структур полностью аналогично фазовой модели для области малых амплитуд воздействия. При больших амплитудах наблюдаются определенные отличия.

Как мы отмечали, можно ожидать, что исчезновение областей трехчастотной квазипериодичности при возрастании связи будут характерны и для резонансов более высокого порядка, поскольку они занимают ограниченный частотный диапазон. Действительно, в численных экспериментах для параметров  $\lambda=0.1$ ,  $\Delta=0.02$ ,  $\mu=0,0125$ , отвечающих рис.3.18, области трехчастотной квазипериодичности для других субгармонических резонансов не выявляются.

### 3.5. Система трех возбуждаемых диссипативно связанных фазовых осцилляторов

Обратимся теперь к задаче о возбуждении трех осцилляторов внешним сигналом. Понятно, что для этой задачи существенное значение будет иметь возможность разных типов «настройки» автономной системы из трех осцилляторов. Задачу рассмотрим в фазовом приближении.

Уравнение возбуждаемой системы из трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Действуя аналогично случаю двух осцилляторов, нетрудно получить соответствующие укороченные уравнения

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= a - |a|^2 a - 2i\Omega - \mu(a - b) - \frac{B}{2\omega}, \\ 2\dot{b} &= b - |b|^2 b - i(2\Omega - \Delta_1)b - \mu(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= c - |c|^2 c - i(2\Omega - \Delta_2)c - \mu(c - b). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Полагаем в (3.29)  $a = Re^{i\psi_1}$ ,  $b = re^{i\psi_2}$  и  $c = ve^{i\psi_3}$ . В этом случае фазы  $\psi_i$  определены относительно внешнего сигнала. Считая, что осцилляторы движутся вблизи автономных орбит  $R = r = v = 1$ , для фаз осцилляторов получаем

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\Omega - \frac{\mu}{2} \sin \theta + b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= -\Omega + \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\psi}_3 &= -\Omega + \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Здесь введены относительные фазы осцилляторов

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3.\tag{3.31}$$

Найдем условие полной синхронизации всех трех осцилляторов внешней силой. Полагая в (3.30)  $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3$ , получаем

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{\mu}{2} \sin \theta + b \sin \psi_1, \\ \Omega - \frac{\Delta_1}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \theta - \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \Omega - \frac{\Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Разрешим эти уравнения относительно синусов фаз:

$$\begin{aligned}3\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} &= b \sin \psi_1, \\ 2\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \theta, \\ \Omega - \frac{\Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{3.33}$$

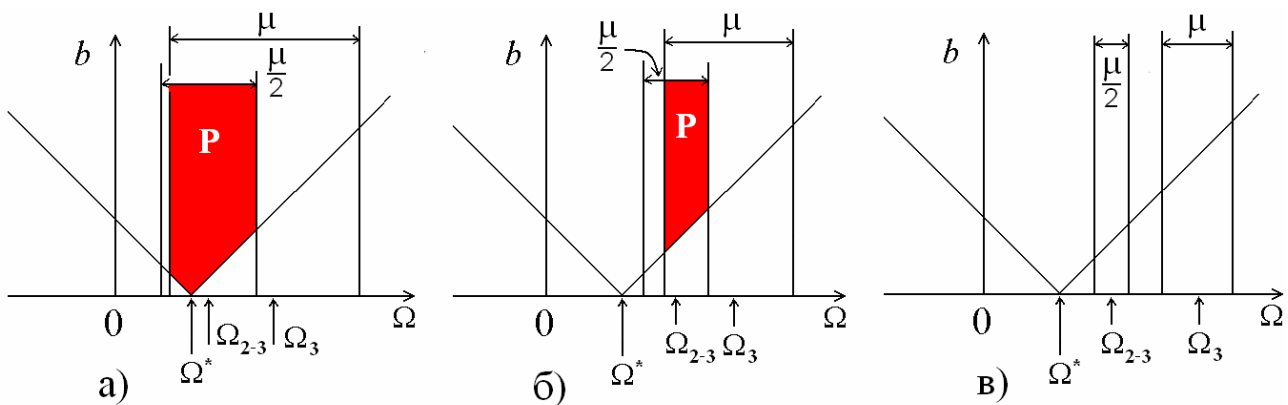
Отсюда легко находим условия седло-узловых бифуркаций:

$$\begin{aligned}b &= \pm 3\left(\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}\right), \\ \Omega &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4} \pm \frac{\mu}{4}, \\ \Omega &= \frac{\Delta_2}{2} \pm \frac{\mu}{2}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Входящие в эти уравнения значения частотных расстройек имеют простой физический смысл:  $\Omega^* = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}$  – частота захвата трех автономных

осцилляторов, равная среднему арифметическому их собственных частот,  $\Omega_{2-3} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4}$  – частота захвата второго и третьего при отключенном первом, а  $\Omega_3 = \frac{\Delta_2}{2}$  – собственная частота третьего осциллятора.

Обратимся теперь к устройству плоскости параметров частота – амплитуда воздействия  $(\Omega, b)$ . Первое условие (3.34) задает на ней язык с вершиной, отвечающей центральной частоте трех осцилляторов  $\Omega^*$ , как показано на рис.3.19. Второе условие (3.34) определяет полосу, центр которой отвечает частоте взаимного захвата второго и третьего осцилляторов  $\Omega_{2-3}$ , а ширина  $\frac{\mu}{2}$  определяется величиной связи. Третье условие (3.34) также задает полосу, центр которой отвечает собственной частоте третьего осциллятора  $\Omega_3$ , а ширина равна параметру связи  $\mu$ .



**Рис.3.19.** Три основных типа устройства плоскости параметров частота – амплитуда воздействия системы трех возбуждаемых осцилляторов (3.30).

При вариации параметров осцилляторов  $(\Delta_1, \Delta_2, \mu)$  взаимное положение языка и двух указанных полос будет меняться. При этом реализуется достаточно большое количество вариантов. Они, однако, разбиваются на три характерные группы в соответствии с рис.3.19:

- а) полосы имеют общую область, которая захватывает вершину языка, рис.3.19а;
- б) полосы имеют общую область, однако она не захватывает вершину языка, рис.3.19б;
- в) обе полосы не имеют общей области, рис.3.19в.

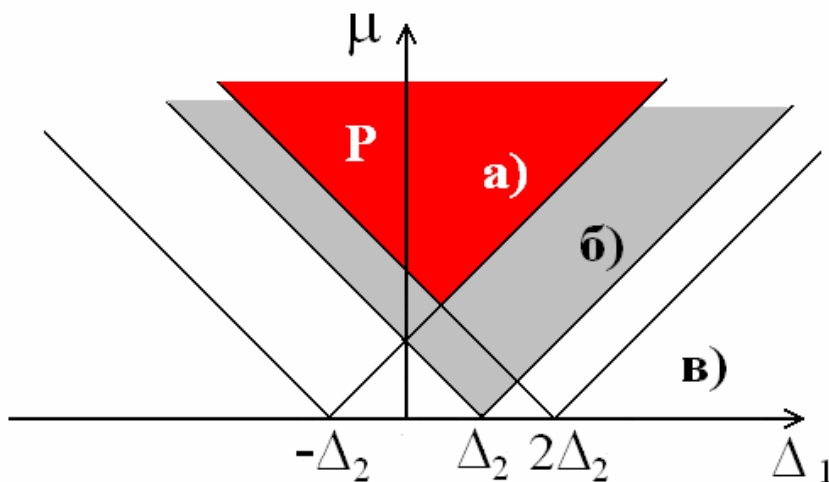
Эти три ситуации определяют три типа динамики возбуждаемых осцилляторов. В случае а) в системе возможен полный захват трех осцилляторов внешней силой, причем амплитудный порог синхронизации

отсутствует. В случае б) полный захват также возможен, но имеет место порог по амплитуде. В случае в) полный захват невозможен.

Отметим, что первые два случая имеют аналоги для задачи о возбуждении двух осцилляторов, а третий – нет. Итак, особенность системы из трех осцилляторов в том, что их можно «настроить» так, что полный захват внешней силой невозможен ни при каких значениях частоты и амплитуды сигнала.

Какой тип поведения из трех перечисленных реализуется, зависит от параметров автономных осцилляторов. Полезно указать конфигурацию соответствующих областей в пространстве этих параметров.

Из (3.34) нетрудно получить, что две полосы не имеют общей области, если  $\mu < \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{3}$  или  $\mu < \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{3}$ . В свою очередь, первая полоса захватывает вершину языка, если  $\mu > \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3}$ . Если  $\mu > \frac{2\Delta_2 - \Delta_1}{3}$ , то вторая полоса захватывает вершину языка. Суммарный рисунок показан на рис.3.20. На нем красным цветом указана область, отвечающая ситуации а). Она одновременно отвечает взаимному захвату всех трех осцилляторов в отсутствие внешнего сигнала. Светло-серым цветом показаны значения параметров, которые отвечают ситуации б), и белым – ситуации в).



**Рис.3.20.** Области на плоскости «внутренних» параметров системы трех осцилляторов, отвечающие трем типам а), б), в) устройства плоскости частота – амплитуда воздействия неавтономной системы на рис.3.19.

Построим теперь карты ляпуновских показателей системы трех возбуждаемых фазовых осцилляторов (3.30) на плоскости частота – период внешнего воздействия. Прежде всего, необходимо выбрать «внутренние» параметры системы из трех осцилляторов. Фиксируем частотные расстройки осцилляторов  $\Delta_1 = 0.3$ ,  $\Delta_2 = 1$ , а также используем три значения величины

связи: а)  $\mu = 0.65$ ; б)  $\mu = 0.4$ ; в)  $\mu = 0.15$ . В этом случае как раз реализуются режимы, отвечающие ситуациям, представленным на рисунках 3.19а,б,в и обозначенным соответствующими буквами.

На рис.3.21 показаны полученные численно карты ляпуновских показателей для этих трех вариантов. Отметим, что размерность системы (3.30) равна трем, поэтому она характеризуется тремя ляпуновскими показателями, так что для нее возможны режимы двух- и трехчастотной квазипериодичности и хаоса.

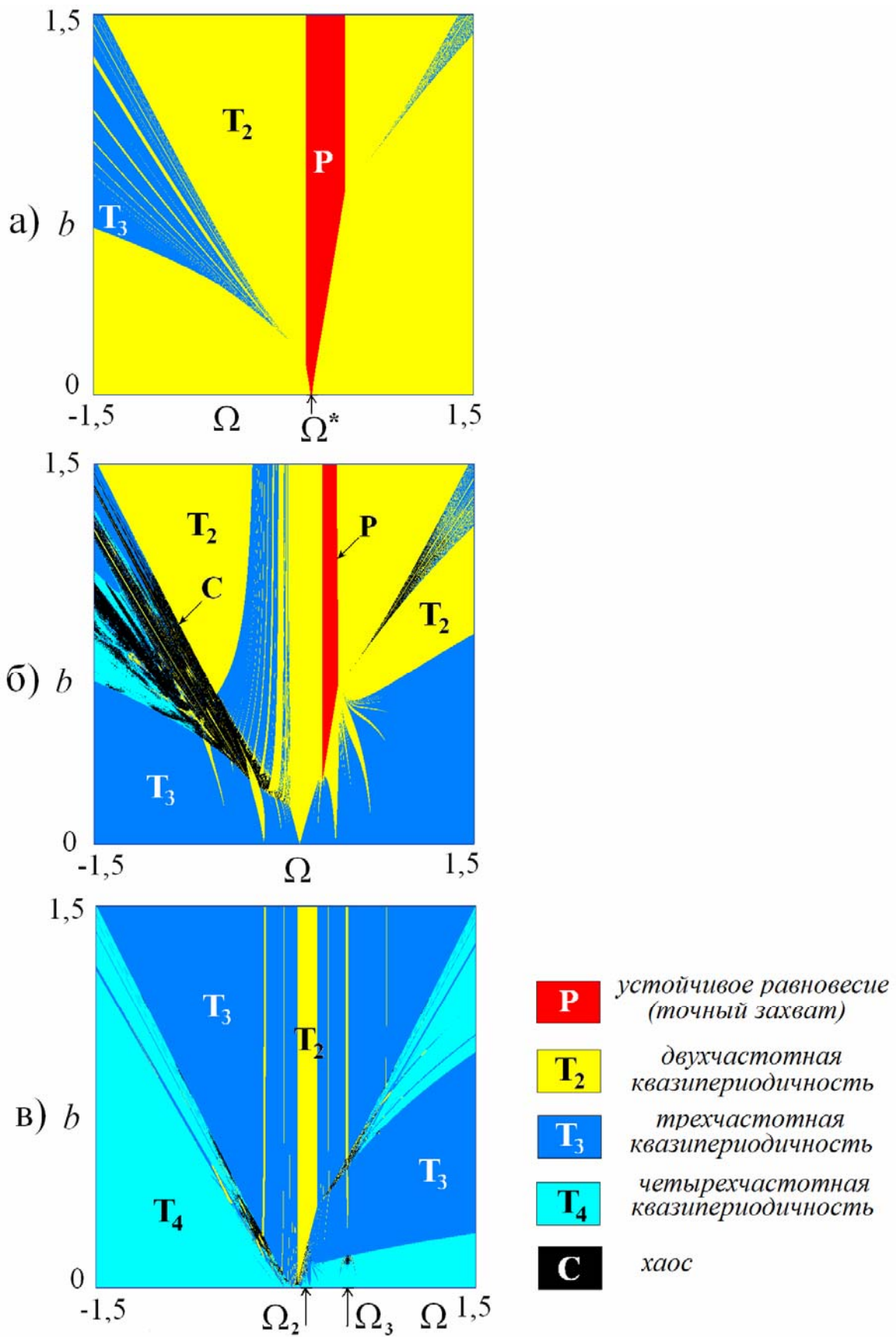
Если связь между осцилляторами велика, то вид карты на рис.3.21а аналогичен случаю возбуждения двух осцилляторов, рис.3.2а. При этом область полной синхронизации  $P$  имеет вид языка с острием точно на частоте взаимного захвата трех автономных осцилляторов  $\Omega^*$ . Более детальный анализ типов двухчастотных режимов выявляет и определенные отличия, см. ниже обсуждение карты торов для этого случая.

Ситуация существенным образом меняется при переходе к случаю «умеренной» связи, когда осцилляторы в отсутствие внешнего сигнала не захвачены, что иллюстрирует рис.3.21б. Появляются два новых типа режимов: четырехчастотная квазипериодичность и хаос. Они приходят на смену областей трехчастотных режимов и располагаются как раз в области их локализации. Кроме того, появляется амплитудный порог области полной синхронизации. В нижней части карты на смену двухчастотным режимам приходят трехчастотные.

Если еще больше уменьшить связь, то четырехчастотные режимы начинают доминировать, рис.3.21в. Они вытесняют области хаоса, которые становятся очень незначительными. Четырехчастотные режимы наблюдаются теперь и в области малых амплитуд воздействия. Режим полной синхронизации осцилляторов исчезает вообще. Вместо него наблюдается теперь узкая полоса двухчастотных режимов в окрестности собственной частоты второго осциллятора  $\Omega_2$ .

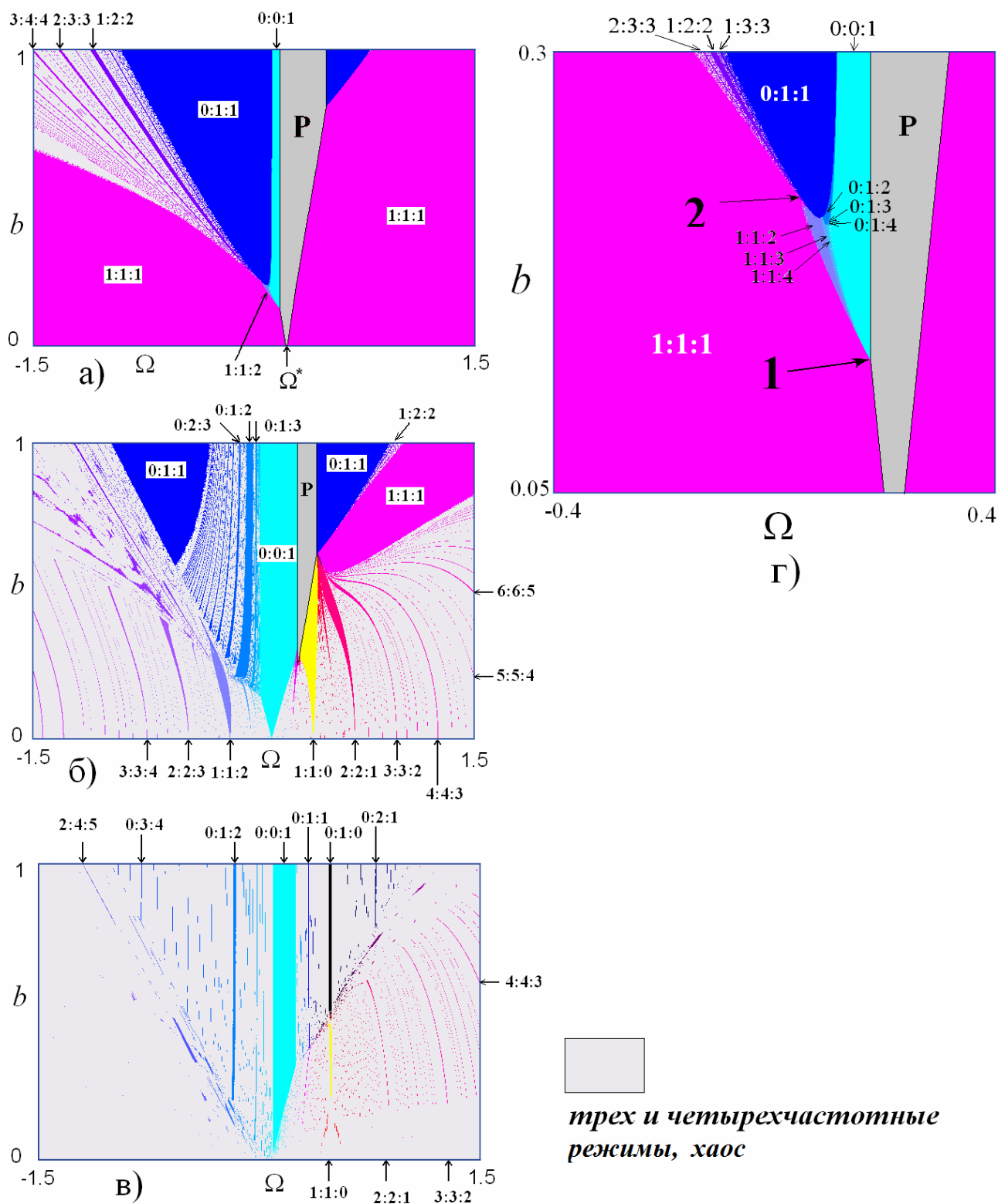
Дополним теперь карты ляпуновских показателей «картами торов», чтобы более детально обсудить двухчастотные режимы. Параметры системы осцилляторов выбраны такими же, как и для приведенных выше ляпуновских карт. Трехкомпонентные числа вращения  $w = p : q : r$ , определенные аналогично разделу 1.2.3, для основных двухчастотных режимов подписаны на рисунке.





**Рис.3.21.** Карты ляпуновских показателей системы трех возбуждаемых осцилляторов (3.30),  $\Delta_1 = 0.3$ ,  $\Delta_2 = 1$ , а)  $\mu = 0.65$ , б)  $\mu = 0.4$ , в)  $\mu = 0.15$ .  $\Omega^*$  – частота захвата автономных осцилляторов,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  – собственные частоты второго и третьего осцилляторов.

Сначала обсудим случай большой связи рис.3.22а. В области малых амплитуд доминируют режимы типа  $w=1:1:1$ , так что первый, второй и третий осциллятор демонстрируют частичный взаимный захват, но система в целом внешней силой не захвачена.



**Рис.3.22.** Карты торов возбуждаемой системы трех связанных фазовых осцилляторов (3.30). Случаи а),б),в) относятся к соответствующим конфигурациям на рис.3.19, а значения параметров выбраны, как для рис.3.21. Рис. г) представляет увеличенный фрагмент рис.а).

В области больших амплитуд в левой части карты имеется область трехчастотных режимов, которую пересекают языки резонансных двухчастотных режимов. Основные их типы характеризуются числами вращения  $w = p : q : r$ , где выполнено условие  $q = r$ . Это означает, что второй и третий осциллятор взаимно (частично) захвачены. Система в определенном смысле ведет себя как два осциллятора: первый и взаимно захваченные второй и третий.

Именно поэтому картина на рис.3.21а так похожа на случай двух осцилляторов. При увеличении частоты (движение слева направо на карте) из этих резонансов остается режим с числом вращения  $w = 0 : 1 : 1$ . Это означает, что внешняя сила произвела частичный захват первого осциллятора, а второй и третий по-прежнему взаимно захвачены, но их фазы неограниченно нарастают. Эта область достаточно широка. При дальнейшем увеличении частоты наступает момент, когда частично захваченным внешней силой оказывается и второй осциллятор, а фаза третьего неограниченно растет, так что  $w = 0 : 0 : 1$ . Наконец, захватываются внешней силой все три осциллятора, при этом захват оказывается уже не частичным, а полным – область  $P$  на рис.3.22а.

Как мы отмечали, карта ляпуновских показателей в случае трех осцилляторов в случае сильной связи похожа на случай двух осцилляторов, но карты торов выявляют определенные отличия. Обратимся к рис.3.22г, на котором показан в увеличенном виде соответствующий фрагмент карты торов. Цифрами указаны две характерные точки, причем первая отвечает «углу» области полной синхронизации, образованному пересечением линий седло-узловых бифуркаций состояний равновесия. В окрестности точек 1 и 2 выявляются различные резонансы, указанные на рисунке, так что картина оказывается значительно сложнее случая двух возбуждаемых осцилляторов.

Перейдем теперь к случаю «умеренной» связи на рис.3.22б. Этот случай наиболее богат различными резонансами. В области частот, близких к частоте захвата трех осцилляторов  $\Omega^*$ , значительная часть резонансов  $w = 0 : 1 : 1$  оказывается разрушенной. Вместо не возникает целая система областей, отвечающих частичному захвату внешним сигналом первого осциллятора при различном соотношении с частотой второго и третьего. Наиболее широкие окна отвечают резонансам  $0 : 2 : 3$ ,  $0 : 1 : 2$ ,  $0 : 1 : 3$ , которые окружены областями трехчастотных режимов.

Область одновременного частичного захвата внешней силой первого и второго осцилляторов  $w = 0 : 0 : 1$  заметно увеличилась по ширине, и практически исчез амплитудный порог возбуждения таких колебаний. Область

же полного и точного захвата всех трех осцилляторов  $P$ , наоборот, уменьшилась в размере и приобрела конечный амплитудный порог.

В области малых амплитуд наиболее широкие окна отвечают резонансам типа  $w = p : p : q$ , для которых, как нетрудно понять, взаимно захваченным (частично) является относительное движение первого и второго осцилляторов. При этом, для третьего осциллятора, как правило  $q = p \pm 1$ . Таким образом, первый и второй осцилляторы сильно связаны. Поэтому картина в области малых амплитуд также напоминает случай двух осцилляторов.

Случай малой связи представлен на рис.3.22в. Как мы видели из аналитического рассмотрения и карты ляпуновских показателей, область полной синхронизации всех трех осцилляторов внешней силой исчезает вообще. Двухчастотные режимы практически вытеснены более высокоразмерными. Резонансы типа  $w = 0 : 1 : 1$  и  $w = 1 : 1 : 1$ , которым в предыдущих случаях отвечали самые большие области, практически полностью исчезают. Наиболее широкое оставшееся окно отвечает числу вращения  $w = 0 : 0 : 1$  – первый и второй осциллятор частично захвачены внешней силой. Эта область приходит на смену области полной синхронизации осцилляторов. Остальные резонансы, как правило, отвечают частичному захвату только первого осциллятора, им отвечают очень узкие области в виде вертикальных полос. При малой амплитуде воздействия резонансные области, фактически, сохраняются только при  $\Omega > 0$  в виде традиционных языков, которые, однако, очень узкие.

### 3.6. Возбуждение двух осцилляторов с реактивной связью

Мы обсудили случай возбуждаемых осцилляторов с диссипативной связью. Обратимся теперь к случаю *реактивной* связи. Автономная система из двух осцилляторов с такой связью демонстрирует бистабильность – возможность сосуществования устойчивых режимов синфазной и противофазной синхронизации. Эти особенности существенным образом проявляются в картине режимов возбуждаемой системы.

Система двух осцилляторов Ван-дер-Поля с реактивной связью с внешним воздействием имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \varepsilon(x - y) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \varepsilon(y - x) &= 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Здесь обозначения те же, что и в (3.1), а  $\varepsilon$  – коэффициент реактивной связи.

Действуя традиционным методом, получаем следующие укороченные уравнения для действительных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned} 2\frac{dR}{d\tau} &= R - R^3 - \varepsilon r \sin \theta - \frac{B}{2} \cos \psi_1, \\ 2\frac{dr}{dt} &= r - r^3 + \varepsilon R \sin \theta, \\ 2\frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\Delta}{2} + \varepsilon - \frac{r}{R} \varepsilon \cos \theta + \frac{B}{2} \sin \psi_1, \\ 2\frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\Delta}{2} + \varepsilon - \frac{R}{r} \varepsilon \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Здесь  $\theta = \psi_1 - \psi_2$  – относительная фаза осцилляторов.

Получим уравнения в фазовом приближении. Напомним, что особенность реактивной связи состоит в необходимости учета членов второго порядка по величине связи. При этом необходимо учитывать отклонение размеров орбит осцилляторов от автономного случая. Поэтому считаем, что осцилляторы движутся в окрестности этих орбит, так что  $R = 1 + \tilde{R}$  и  $r = 1 + \tilde{r}$ . Подставляя в (3.36), получаем для возмущенных орбит

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{R}}{dt} &= -\tilde{R} - \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta - \frac{B}{4} \sin \psi_1, \\ \frac{d\tilde{r}}{dt} &= -\tilde{r} + \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Осцилляторы в (3.37) сильно демпфированы за счет связи, и поэтому возмущения быстро выходят на стационарные значения

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= -\frac{\varepsilon}{2} \sin \theta - \frac{B}{4} \sin \psi_1, \\ \tilde{r} &= \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Теперь подставляем  $R = 1 + \tilde{R}$  и  $r = 1 + \tilde{r}$  с учетом (3.38) в фазовые уравнения (3.36). Проводя некоторые преобразования, получаем искомые фазовые уравнения возбуждаемых фазовых осцилляторов с реактивной связью:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin 2\theta + b \sin \psi_1, \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2} (1 - \cos \theta) - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \sin 2\theta + b \sin \psi_1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Здесь  $b = B/4$  – нормированная амплитуда воздействия, а  $\Omega = \omega - 1$  – отстройка частоты сигнала от принятой за единицу центральной частоты осцилляторов. Заметим, что при выводе (3.39) отброшен член порядка  $b\varepsilon^2$ , поскольку в соответствии с первым уравнением величины  $b$  и  $\varepsilon^2$  одного порядка.

Отметим, что в отсутствие внешнего сигнала первое уравнение (3.39) превращается в уравнение для двух реактивно связанных фазовых осцилляторов

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2\theta.$$

Найдем теперь условия полной синхронизации осцилляторов в фазовой системе (3.39). Ищем состояния равновесия, полагая  $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$ , и из (3.39) получаем уравнения для определения захваченных фаз осцилляторов:

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2\theta + b \sin \psi_1 &= 0, \\ -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta) - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin(2\theta) + b \sin \psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Определим условия седло-узловых бифуркаций состояний равновесия. Для этого нужно записать матрицу возмущений системы (3.39):

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 \cos 2\theta, & b \cos \psi_1 \\ \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos 2\theta, & b \cos \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Условием седло-узловых бифуркаций является обращение в ноль якобиана этой матрицы, так что  $\det \hat{M} = \cos \psi_1 [\varepsilon \cos 2\theta + \sin \theta] = 0$ . Полученное уравнение распадается на два:

$$\varepsilon \cos 2\theta + \sin \theta = 0 \quad \text{и} \quad \cos \psi_1 = 0. \quad (3.42)$$

Пусть сначала выполняется первое условие (3.42). Тогда, используя равенство  $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ , находим

$$\sin \theta = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}. \quad (3.43)$$

При  $\varepsilon < 1$  уравнение (3.43) имеет решение, только если оставить верхний знак. Тогда вычитая уравнения (3.40) друг из друга, приходим к следующим условиям седло-узловой бифуркации:

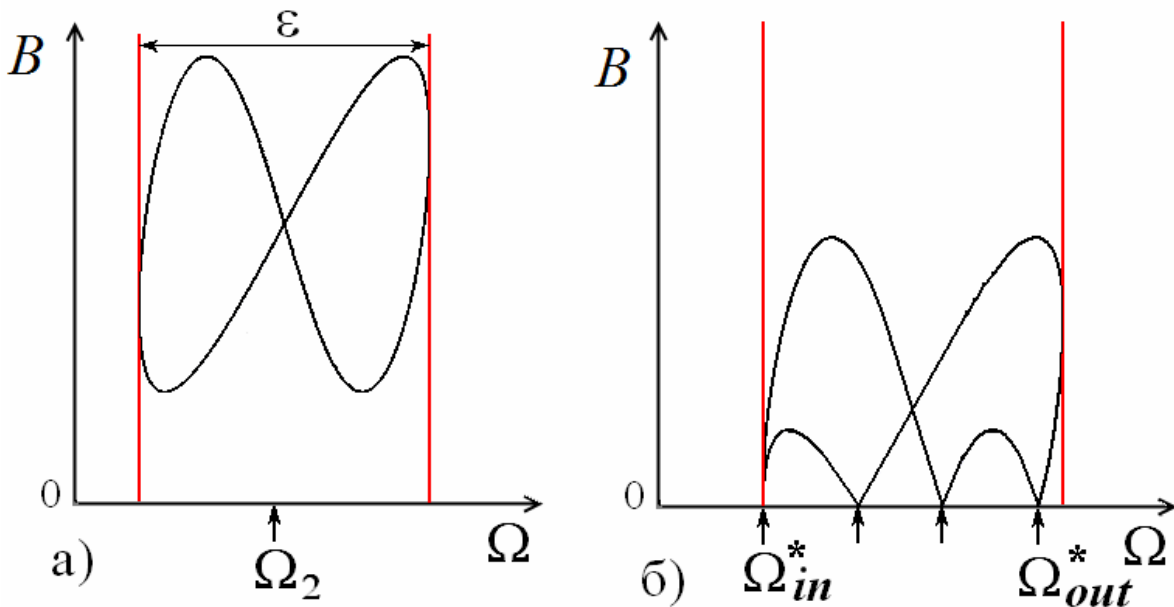
$$\Omega = \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta) + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin 2\theta, \quad (3.44)$$

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right), \quad \theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right). \quad (3.45)$$

Условия (3.44),(3.45) задают на плоскости  $(\Omega, b)$  ограниченную двумя вертикальными линиями полосу захвата, так что  $\Omega_{\min} < \Omega < \Omega_{\max}$ . Ширина полосы захвата определяется величиной связи. Так при малой связи  $\theta_1 \approx 0$  и  $\theta_2 \approx \pi$ , что при подстановке в (3.44) дает

$$\Omega_{\min} \approx \frac{\Delta}{4}, \quad \Omega_{\max} \approx \frac{\Delta}{4} + \varepsilon. \quad (3.46)$$

Отметим, что в соответствии с (3.46) частота второго осциллятора, «подправленная» связью,  $\Omega_2 \approx \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}$ . Таким образом, полоса захвата имеет ширину, примерно равную величине связи, и располагается симметрично относительно значения частоты второго осциллятора, рис.3.23а.



**Рис.3.23.** Линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия возбуждаемых реактивно связанных фазовых осцилляторов: а) режим биений автономных осцилляторов,  $\varepsilon=0.3$  и  $\Delta=0.3$ ; б) режим захвата автономных осцилляторов,  $\varepsilon=0.3$  и  $\Delta=0.05$ .  $\Omega_2$  – частота второго осциллятора с учетом влияния связи,  $\Omega_{in}^*$  и  $\Omega_{out}^*$  – собственные частоты синфазной и противофазной мод. Стрелками без подписи показаны частоты захвата неустойчивых режимов.

Обратимся теперь ко второму условию (3.42)  $\cos \psi_1 = 0$ . Тогда  $\sin \psi_1 = \pm 1$  и из (3.40) и (3.41) можно получить

$$2b = \pm[\Delta + \varepsilon^2 \sin 2\theta],$$

$$\Omega = \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta) + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin 2\theta. \quad (3.47)$$

Эти линии имеют различную конфигурацию, в зависимости от того, находятся ли автономные осцилляторы в режиме биений ( $\Delta > \varepsilon^2$ ), или захвата ( $\Delta < \varepsilon^2$ ). Оба этих случая представлены на рис.3.23, соответственно, слева и справа.

В случае биений  $\Delta > \varepsilon^2$  и, как видно из первого уравнения (3.47), всегда выполняется условие  $b \neq 0$ . Поэтому кривая (3.47) не имеет «контакта» с осью частот. Таким образом, в режиме биений автономных осцилляторов область полной синхронизации будет иметь амплитудный порог, как и в случае диссипативной связи. Как можно видеть из рис.3.23а, линия (3.47) образует замкнутую кривую в форме характерной «восьмерки». Нетрудно показать, что определяющие полосу частотного захвата вертикальные линии (3.44) будут касаться этой кривой.

В случае захвата автономных осцилляторов конфигурация линий усложняется, рис.3.23б. Теперь они имеют четыре характерных острия при  $b = 0$ , отмеченных стрелками на рисунке. Можно показать, что при стремлении амплитуды воздействия к нулю  $b \rightarrow 0$ , уравнения (3.47) превращаются в условия для определения частот захвата двух автономных реактивно связанных осцилляторов. Как мы отмечали, такие осцилляторы имеют две устойчивые моды – синфазную и противофазную и две неустойчивые. Значения, отмеченные стрелками на рис.3.23б как раз и отвечают собственным частотам этих мод. При этом буквами  $\Omega_{in}^*$  и  $\Omega_{out}^*$  отмечены частоты двух устойчивых режимов, а аналогичные точки для неустойчивых режимов обозначены стрелками без подписей.

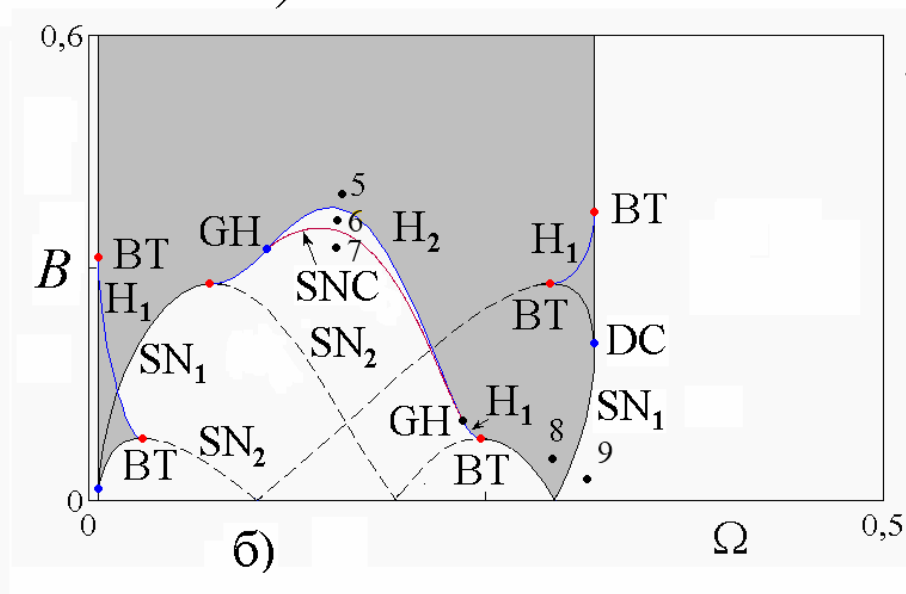
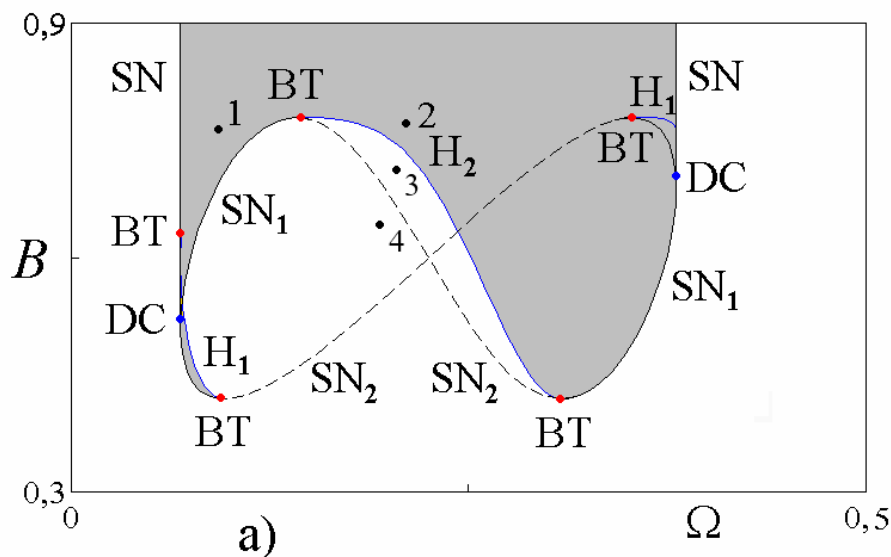
Кроме седло-узловых бифуркаций в системе с реактивной связью возможна и бифуркация Андронова-Хопфа. Поэтому обратимся к более полной картине бифуркаций анализируемой системы, показанной на рис.3.24 и выявленной численными методами<sup>61</sup>.

На этом рисунке также представлены два случая: биений и захвата автономных осцилляторов. В случае биений на рис.3.24а имеются две ветви линий седло-узловых бифуркаций  $SN$ , которые были найдены аналитически. Эти две ветви касаются друг друга в вырожденных точках сборки  $DC$ . Особенность системы состоит в том, что линии седло-узловых бифуркаций в форме «восьмерки» содержат отрезки  $SN_1$ , которые отвечают слиянию устойчивого равновесия и седла, и отрезки  $SN_2$ , отвечающие слиянию

<sup>61</sup> Отметим, что в силу сложности картины аналитическое рассмотрение является удобным дополнением численного анализа.



неустойчивого равновесия и седла. Возможна также бифуркация Андронова-Хопфа. Она может быть как *прямой* и отвечать за возникновение устойчивого предельного цикла (обозначена  $H_1$ ), так и *обратной* и отвечать за возникновение неустойчивого предельного цикла (обозначена  $H_2$ ). Линии бифуркации Андронова-Хопфа имеют общие точки с линией седло-узловых бифуркаций – точки Богданова-Такенса  $BT$ .



**Рис.3.24.** Бифуркационные линии и точки системы (3.39) на плоскости  $(\Omega, B)$  для  $\varepsilon=0.3$ ; а) режим биений,  $\Delta=0.3$ ; б) режим захвата автономных осцилляторов,  $\Delta=0.05$ . Сплошные линии отвечают бифуркациям устойчивых режимов, пунктирные – неустойчивых,  $SN$  – седло-узловые бифуркации состояний равновесия,  $H_1$  – прямая бифуркация Андронова-Хопфа,  $H_2$  – обратная бифуркация Андронова-Хопфа  $SNC$  – седло-узловая бифуркация предельных циклов,  $DC$  – вырожденная точка сборки,  $BT$  – точка Богданова-Такенса,  $GH$  – обобщенная точка бифуркации Андронова-Хопфа.

Таким образом, границей области полной синхронизации могут быть как линии седло-узловых бифуркаций, так и линии бифуркаций Андронова-Хопфа.

В соответствии с приведенным обсуждением, на рис.3.24 серым цветом выделены области, отвечающие возможности устойчивого состояния равновесия, т.е. режиму полной синхронизации осцилляторов внешним сигналом<sup>62</sup>.

Примеры фазовых портретов в некоторых точках, обозначенных цифрами на рис.3.24, даны на рис.3.25. Простейший механизм разрушения полной синхронизации связан с седло-узловой бифуркацией  $SN_1$  состояний равновесия, когда сливаются устойчивое равновесие и седло, в результате чего возникает устойчивая инвариантная кривая, отвечающая за возникновение квазипериодических колебаний (переход от точки 1 к точке 4). Отличие от случая диссипативной связи состоит в том, что при этом вторая пара равновесий сохраняется. При уменьшении амплитуды сигнала они также могут слиться, но теперь уже на нижней ветви линии седло-узловой бифуркации  $SN_2$ .

Второй механизм наблюдается при переходе от точки 2 к 3 и состоит в следующем. Сначала в результате нелокальной бифуркации рождается неустойчивый предельный цикл, который затем стягивается к устойчивому равновесию, которое исчезает в результате обратной бифуркации Андронова-Хопфа  $H_2$ .

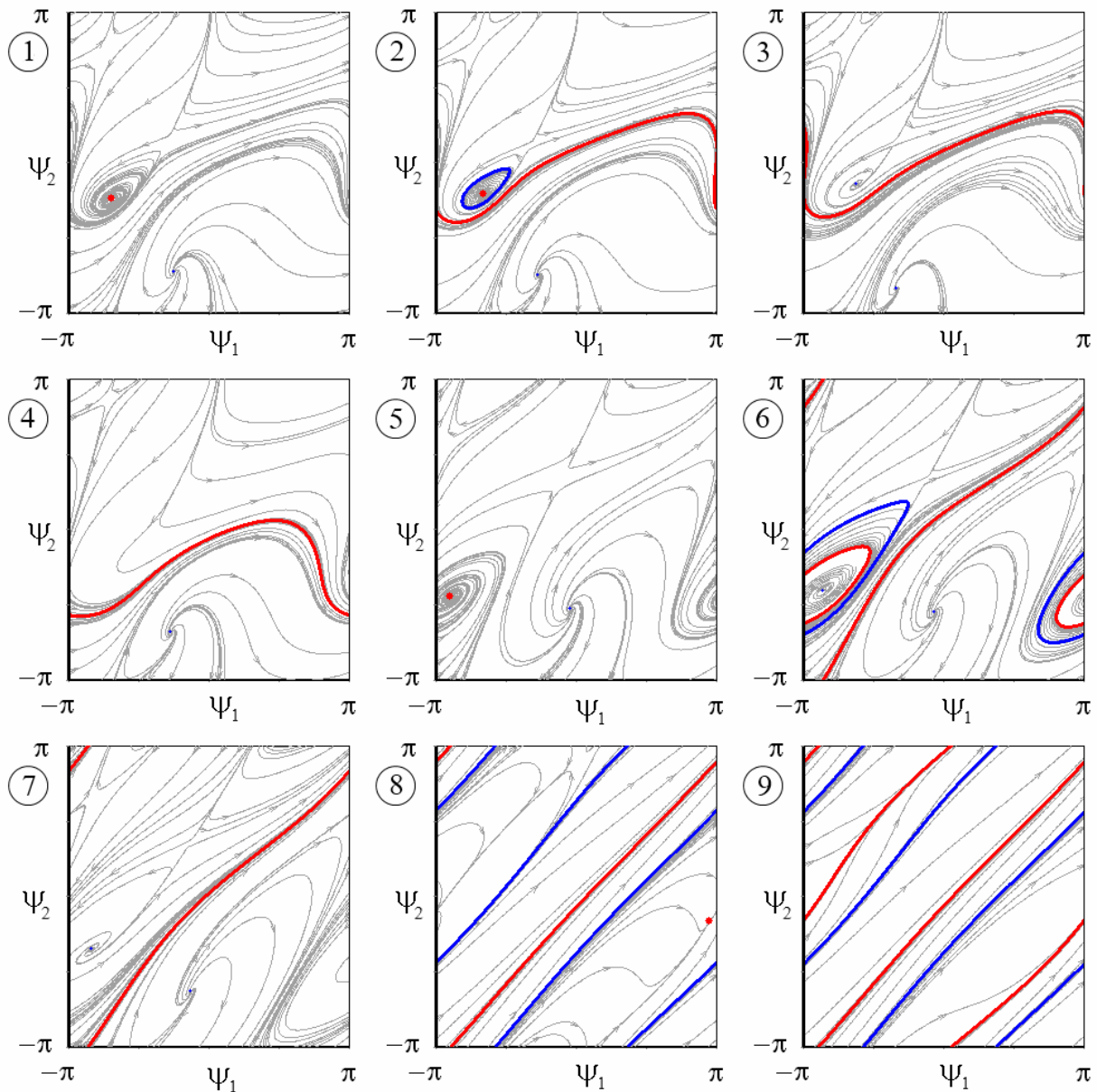
Обратимся теперь к более сложному случаю, когда в системе наблюдается захват автономных осцилляторов, рис.3.24б. Здесь возможен еще один механизм разрушения синхронизации (переход от 5 к 6 и 7). В этом случае при уменьшении амплитуды внешнего сигнала на линии  $H_1$  происходит прямая бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой устойчивый фокус становится неустойчивым, а в системе рождается устойчивый предельный цикл. Он в свою очередь исчезает на линии  $SNC$  седло-узловой бифуркации предельных циклов, где сливается с неустойчивым циклом, возникшим в результате нелокальной бифуркации. Таким образом, в фазовом пространстве остается неустойчивый фокус, который, превратившись в неустойчивый узел, сольется с седлом и исчезнет на линии  $SN_2$ .

Отметим, что при двухпараметрическом анализе количество вариантов достаточно велико, и зависит от маршрута на плоскости параметров. При этом возможные сценарии зависят от расположения точек коразмерности два – точек Богданова-Такенса  $BT$  и обобщенных точек бифуркации Андронова-Хопфа  $GH$ , в которых прямая бифуркация Андронова-Хопфа превращается в обратную. В

---

<sup>62</sup> Отметим, что в небольших областях плоскости параметров для устойчивых равновесий возможна бистабильность.

точку  $GH$  приходит и линия седло-узловых бифуркаций предельных циклов  $SNC$ .



**Рис.3.25.** Фазовые портреты двух возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов (3.39). Цифры отвечают точкам на рис.3.24, значения параметров приведены в таблице.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.05	0.05	0.05	0.05
$\Omega$	0.21	0.21	0.22	0.17	0.15	0.15	0.16	0.29
$B$	0.8	0.75	0.67	-0.66	0.5	0.355	0.23	0.07

Еще одно отличие от фазовых уравнений с диссипативной связью связано с возможностью *бистабильности* в системе. При этом она может отвечать сосуществованию аттракторов разных типов.

Так в точке, обозначенной цифрой 8, сосуществуют устойчивая инвариантная кривая и устойчивое состояние равновесия. Состояние

равновесие отвечает сдвигу фаз между осцилляторами, примерно равному  $\pi$ . Таким образом, в этом случае внешний сигнал захватывает противофазные колебания осцилляторов. Квазипериодические же колебания происходят для случая примерного равенства фаз осцилляторов. Если же выйти за пределы рассматриваемого языка (точка 9), то возникнет ситуация сосуществования двух устойчивых инвариантных кривых, отвечающих синфазному и противофазным захватам относительной фазы осцилляторов. Аналогично у второго острия на рис.3.24б внешний сигнал захватывает уже синфазные колебания осцилляторов.

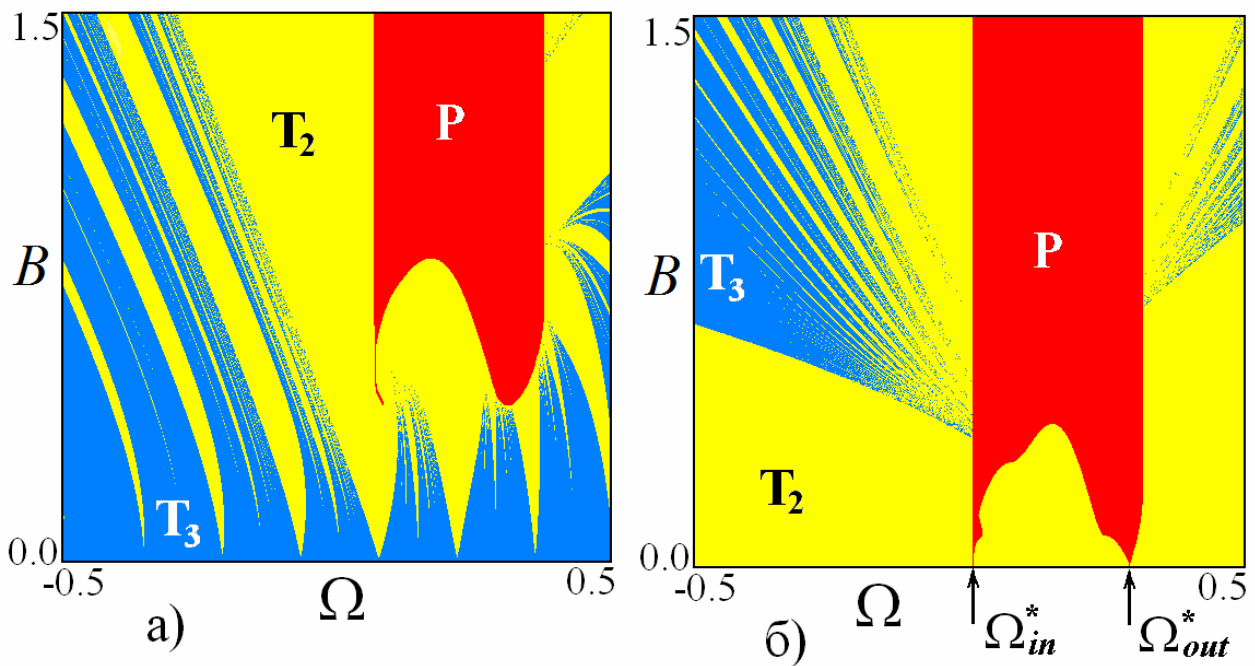
Таким образом, интересная особенность системы по сравнению со случаем диссипативной связи – это возможность в зависимости от частоты сигнала захвата как синфазных, так и противофазных колебаний взаимодействующих осцилляторов. Соответствующие языки на плоскости параметров разнесены по оси частот. Кроме того, имеются и два обсуждавшихся выше языка, отвечающие неустойчивым режимам. На рис.3.24б они образованы пунктирными линиями.

Более детально сложные режимы визуализируются на ляпуновских картах, показанных на рис.3.26. Также представлены случаи биений и захвата автономных осцилляторов. Можно видеть, что ляпуновские карты выявляют как общую картину, так и тонкие детали устройства области полной синхронизации. Особенно характерна в этом плане на рис.3.26б сложная граница области полной синхронизации, состоящая из отрезков линий бифуркаций разных типов.

На ляпуновских картах можно видеть также характерную для реактивно связанных осцилляторов картину трехчастотных и резонансных двухчастотных режимов. В случае биений автономных осцилляторов на рис.3.26а представлена система двухчастотных языков с основаниями на оси частот, погруженная в трехчастотную область. Для режима захвата на рис.3.26б «веерные» системы резонансных двухчастотных режимов не стягиваются в отдельные точки, а образуют протяженный контакт с левой и правой границами области полной синхронизации<sup>63</sup>.

---

<sup>63</sup> Отметим, что некоторые интересные результаты для исходной системы с реактивной связью (3.35) можно найти в [16,17]. При этом, однако, рассмотрен только случай захвата автономных осцилляторов и сравнительно больших амплитуд сигнала, когда картина бифуркаций рис.3.24б не попадает в поле зрения.



**Рис.3.26.** Ляпуновские карты системы возбуждаемых реактивно связанных фазовых осцилляторов (3.39);  $\Omega_{in}^*$  и  $\Omega_{out}^*$  – частоты захвата синфазной и противофазной мод автономной системы,  $\varepsilon=0.3$ ; а)  $\Delta=0.3$ ; б)  $\Delta=0.05$ .

### 3.7. Случаи индивидуального и коллективного возбуждения

Внешнее воздействие может возбуждать набор осцилляторов по-разному. В этом и следующем разделах обсудим, хотя бы кратко, некоторые возможные варианты. Выше была рассмотрена ситуация, когда внешний сигнал воздействует на один осциллятор в ансамбле. Ее можно назвать случаем *индивидуального* возбуждения. Возможен альтернативный вариант, когда внешний сигнал одновременно воздействует на все осцилляторы. Это ситуация *коллективного* возбуждения ансамбля. Если амплитуда и частота внешнего сигнала одинаковы для всех осцилляторов, то в этом случае можно сказать, что осцилляторы находятся в некотором едином *общем внешнем поле*.

Так для случая двух диссипативно связанных осцилляторов в случае коллективного возбуждения вместо (3.1) имеем:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= B \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.48)$$

По аналогии с разделом 3.1 можно получить соответствующую фазовую модель:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1) + b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= -\Omega + \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2) + b \sin \psi_2.\end{aligned}\tag{3.49}$$

Отличие от (3.10) состоит в появлении дополнительного члена с внешней силой в уравнении для фазы второго осциллятора. Теперь, однако, использованный для анализа (3.10) прием по разделению уравнений для синусов фаз не применим, так что аналитическое рассмотрение режима полной синхронизации невозможно.

Численное исследование (3.49) можно провести, используя методологию и подходы, изложенные в разделах 3.1-3.4. Этот случай, однако, менее интересен – полученная картина оказывается заметно более близкой к традиционной задаче о возбуждении единственного осциллятора внешним сигналом. Причины физически понятны – синфазная синхронизация осцилляторов за счет диссипативной связи и существование общего поля. В этом плане система (3.1) оказывается более удачной с точки зрения новых свойств, поскольку индивидуальное возбуждение инициирует рассинхронизацию осцилляторов.

Интересные свойства системы (3.49) проявляются для случая *активной связи*, когда коэффициент связи  $\mu$  отрицательный. Теперь автономные осцилляторы захватываются в *противофазе*. Внешний сигнал при достаточно большой амплитуде вызывает новый эффект – переводит осцилляторы в синфазный режим. Эта ситуация важна для задач лазерной физики с точки зрения управления качеством излучения, поскольку синфазная синхронизация дает большие его интенсивности. Она обсуждается в [21], где можно найти некоторые интересные детали<sup>64</sup>.

### 3.8. Случай модуляции частоты осциллятора

Рассмотрим теперь случай возбуждения осцилляторов, когда внешний сигнал модулирует частоту одного из них:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta + \varepsilon \cos \omega t)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0.\end{aligned}\tag{3.50}$$

<sup>64</sup> Отметим, что система (3.49) тождественная полученной в [21] фазовой лазерной модели, см. уравнение (7) в [21].

Здесь частота первого осциллятора фиксирована и принята за единицу,  $\Delta$  – постоянная часть расстройки осцилляторов,  $\varepsilon$  – амплитуда модуляции частоты второго осциллятора,  $\omega$  – частота этой модуляции.

Пусть частота воздействия  $\omega$  мала по сравнению с собственными частотами осцилляторов:  $\omega \ll 1$ . Тогда можно применить метод медленно меняющихся амплитуд. Действуя стандартным образом<sup>65</sup>, нетрудно получить соответствующие уравнения для фаз первого и второго осцилляторов:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta + \varepsilon \cos \omega t}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2).\end{aligned}\tag{3.51}$$

Отметим, что здесь все параметры нормированы на  $\lambda$  аналогично (3.7). Для относительной фазы  $\theta = \psi_2 - \psi_1$  теперь можно записать

$$\dot{\theta} = \frac{\Delta}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\varepsilon}{2} \cos \omega t.\tag{3.52}$$

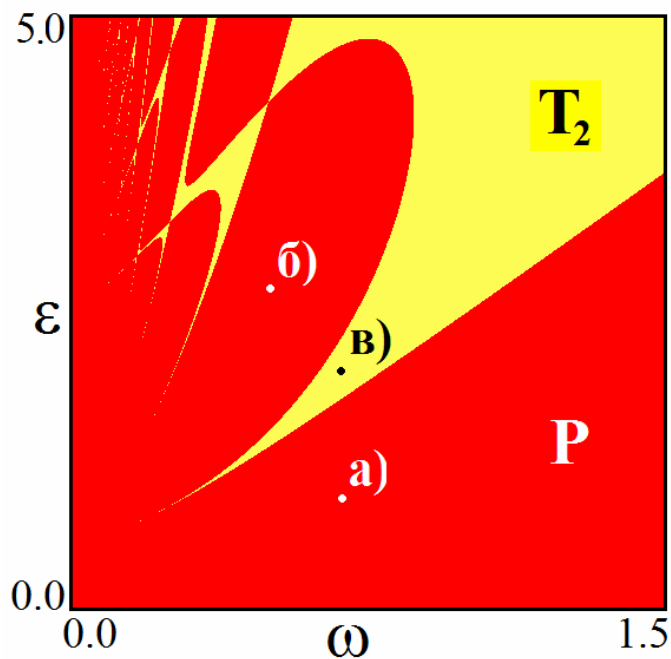
Таким образом, мы получили *неавтономное уравнение Адлера* с возбуждением в виде гармонического сигнала<sup>66</sup>.

При анализе неавтономного уравнения Адлера также следует выделять два случая: захвата и биений автономных осцилляторов, которые реализуются, соответственно, при  $2\mu > |\Delta|$  и  $2\mu < |\Delta|$ .

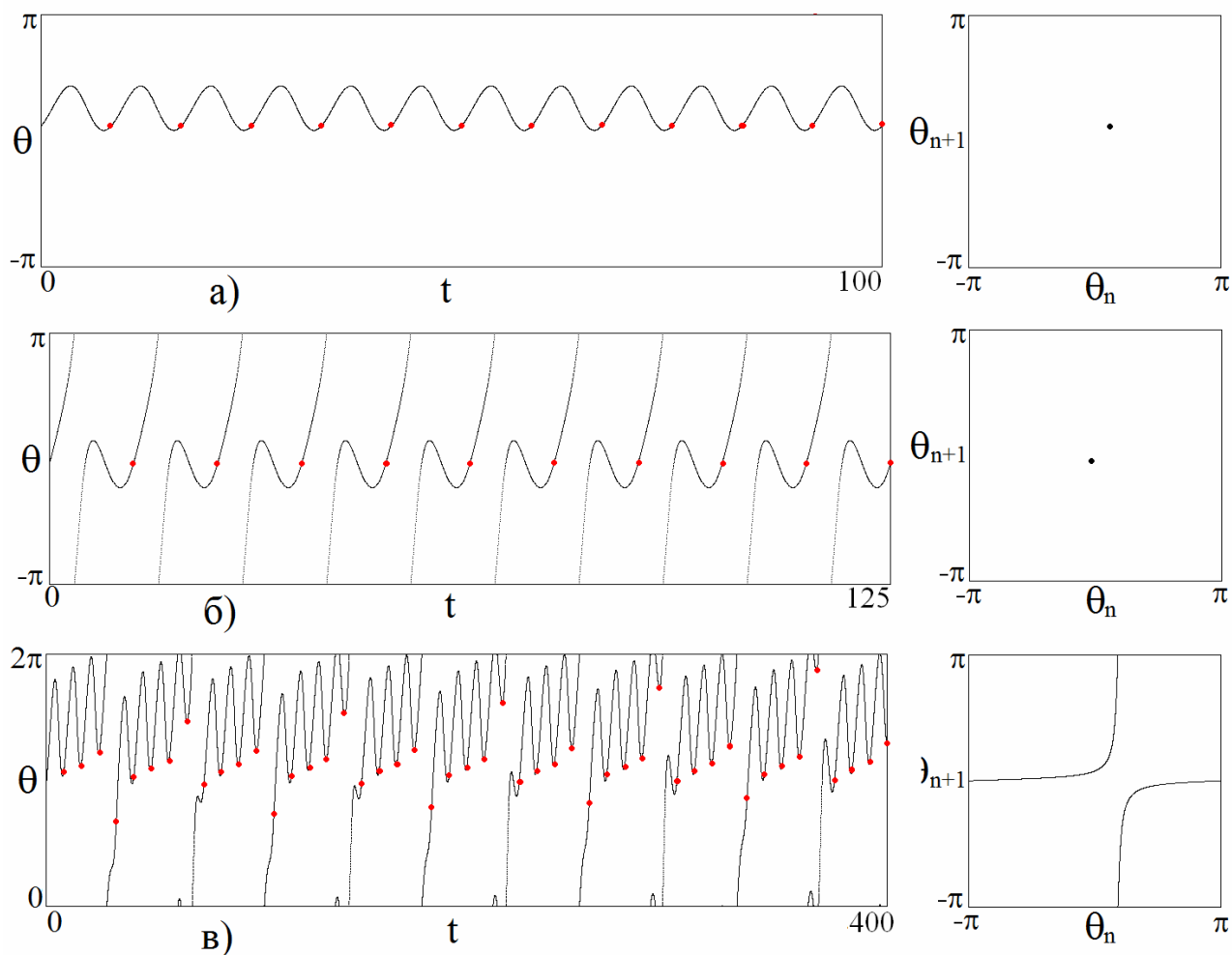
Карта ляпуновских показателей для режима захвата автономных осцилляторов для системы (3.52) представлена на рис.3.27. Тип режима определялся в стробоскопическом сечении через период внешнего воздействия, так что красным цветом показаны периодические режимы, а желтым – квазипериодические. Примеры реализаций, т.е. зависимости фазы от времени  $\theta(t)$  для трех характерных точек плоскости параметров приведены на рис.3.28. Красным цветом на реализациях отмечены точки стробоскопических сечений, построенные через период внешнего воздействия, рядом справа приведены портреты в стробоскопическом сечении  $(\theta_n, \theta_{n+1})$ .

<sup>65</sup> В рассматриваемом случае удобно искать решение на единичной частоте, как для автономной системы в разделе 1.1.1.

<sup>66</sup> Неавтономное уравнение Адлера может быть получено также для сильно демпфированного за счет затухания маятника с нелинейностью синуса и с постоянным вращающим моментом. Оно также появляется в теории контактов Джозефсона [1]. Отметим, что случай возбуждения в виде прямоугольных импульсов может быть рассмотрен аналитически [2].



**Рис.3.27.** Ляпуновская карта возбуждаемой системы (3.52) для режима захвата в автономной модели,  $\mu=0.75$ ,  $\Delta=1$ .



**Рис.3.28.** Реализации и портреты в стробоскопическом сечении системы (3.52) в режиме захвата в автономной модели; а)  $\omega=0.75$ ,  $\varepsilon=1$ , б)  $\omega=0.5$ ,  $\varepsilon=2.4$ , в)  $\omega=0.75$ ,  $\varepsilon=2$ . Остальные параметры  $\mu=0.75$ ,  $\Delta=1$ .



Нижнюю часть карты занимает область, для которой портреты режимов представлены на рис.3.28а. В этом случае амплитуда сигнала невелика. Однако точный захват осцилляторов разрушается, и относительная фаза  $\theta$  колеблется около равновесного значения  $\theta = 0$ , отвечающего синфазному режиму автономных осцилляторов. Таким образом, при наличии внешнего сигнала наблюдается режим частичного взаимного захвата осцилляторов. В тоже время в стробоскопическом сечении реализуется неподвижная точка, т.е. осцилляторы захвачены внешним сигналом.

Выше указанной области на карте располагается система периодических режимов другого типа. Для основного языка такого типа реализация  $\theta(t)$  показана на рис.3.28б. В этом случае относительная фаза «бежит», т.е. внешний сигнал разрушает взаимный захват осцилляторов. В стробоскопическом сечении, однако, также наблюдается неподвижная точка. Это означает, что осцилляторы синхронизованы внешним сигналом.

В свою очередь в точке в) фаза неограниченно нарастает, а портрет в стробоскопическом сечении отвечает уже квазипериодической динамике. Соответственно, изменяется и цвет на ляпуновской карте.

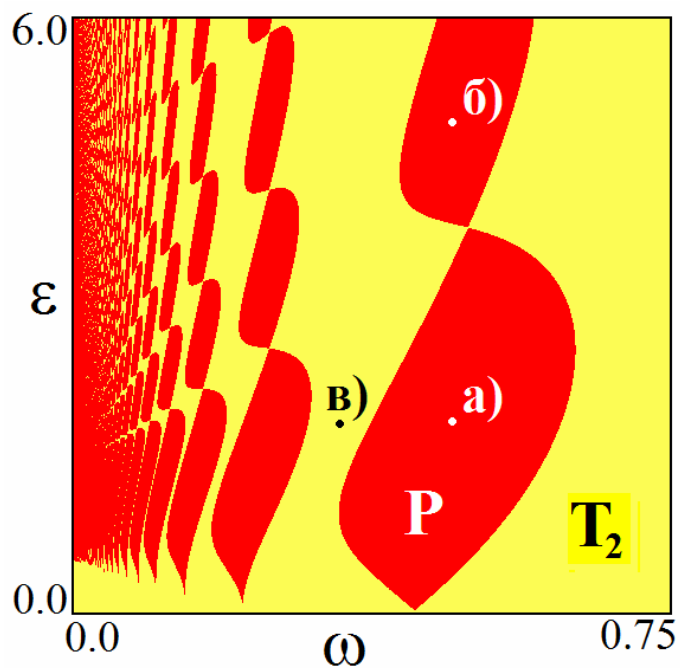
Карта ляпуновских показателей и примеры реализаций для случая биений автономных осцилляторов даны на рис.3.29 и 3.30. В этом случае исчезают периодические режимы при малых амплитудах воздействия, и вместо них возникает область квазипериодических колебаний. В нее встроена система языков периодических режимов, имеющая характерные «перемычки» при возрастании амплитуды. Пример реализации внутри основного языка приведен на рис.3.30а. В этом случае фаза монотонно нарастает, т.е. относительного захвата осцилляторов нет, но в стробоскопическом сечении наблюдается неподвижная точка.

Рис.3.30б иллюстрирует изменение динамики внутри этого же языка, но выше «перемычки». Теперь амплитуда сигнала велика, и осцилляции фазы увеличивают размах настолько, что он превышает  $2\pi$ .

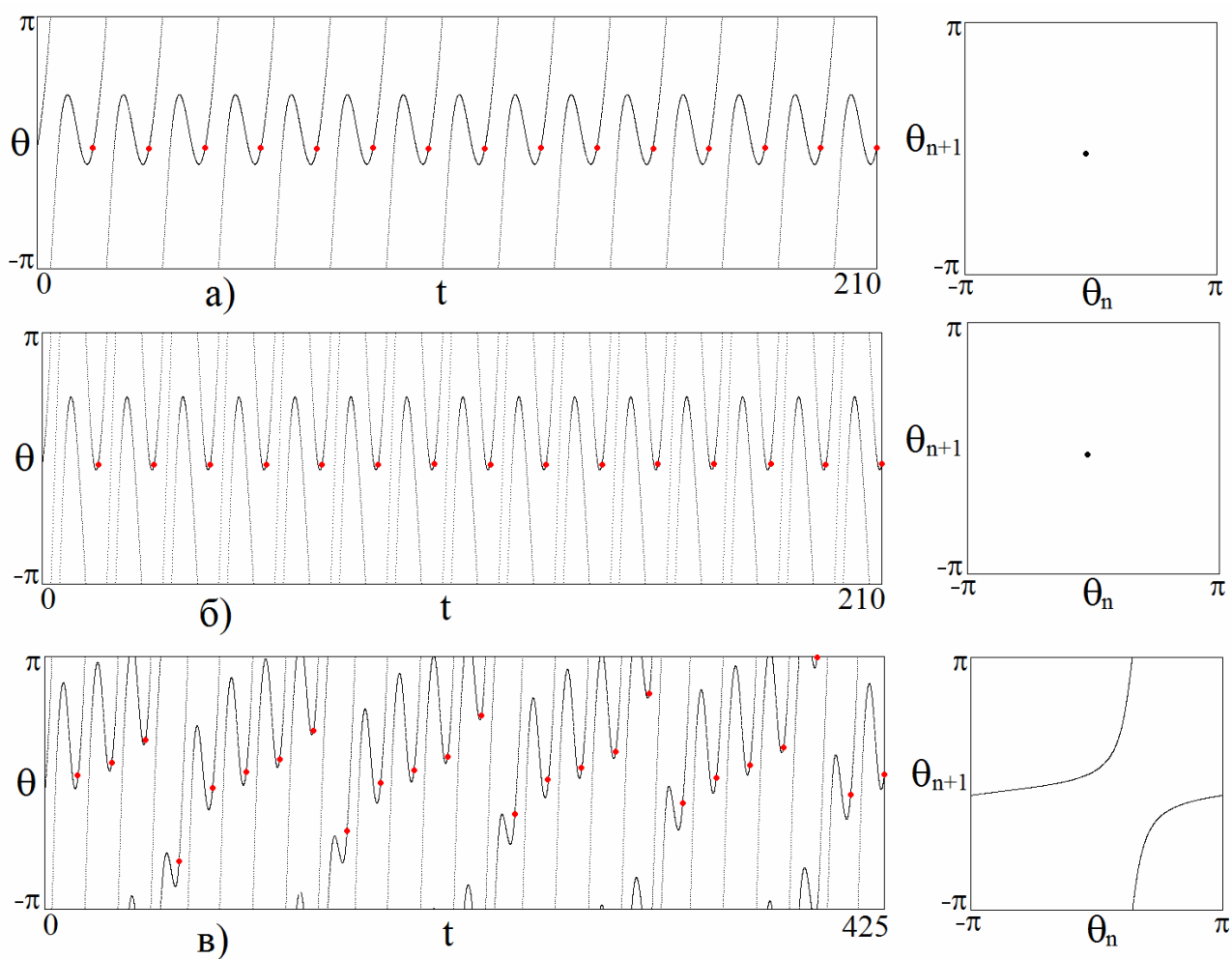
Отметим, что для второго языка динамика фазы аналогична рис.3.30а, но полный набег фазы между точками стробоскопических сечений уже не  $2\pi$ , а  $4\pi$ . Для третьего –  $6\pi$  и т.д.<sup>67</sup> На рис.3.30в приведен пример динамики для квазипериодического режима, наблюдающегося в промежутке между языками.

---

<sup>67</sup> Или, иначе говоря, число существенных пересечений графика  $\theta(t)$  с границами рисунка в промежутке между стробоскопическими сечениями последовательно увеличивается с одного на рис.3.30а до двух, трех и т.д.

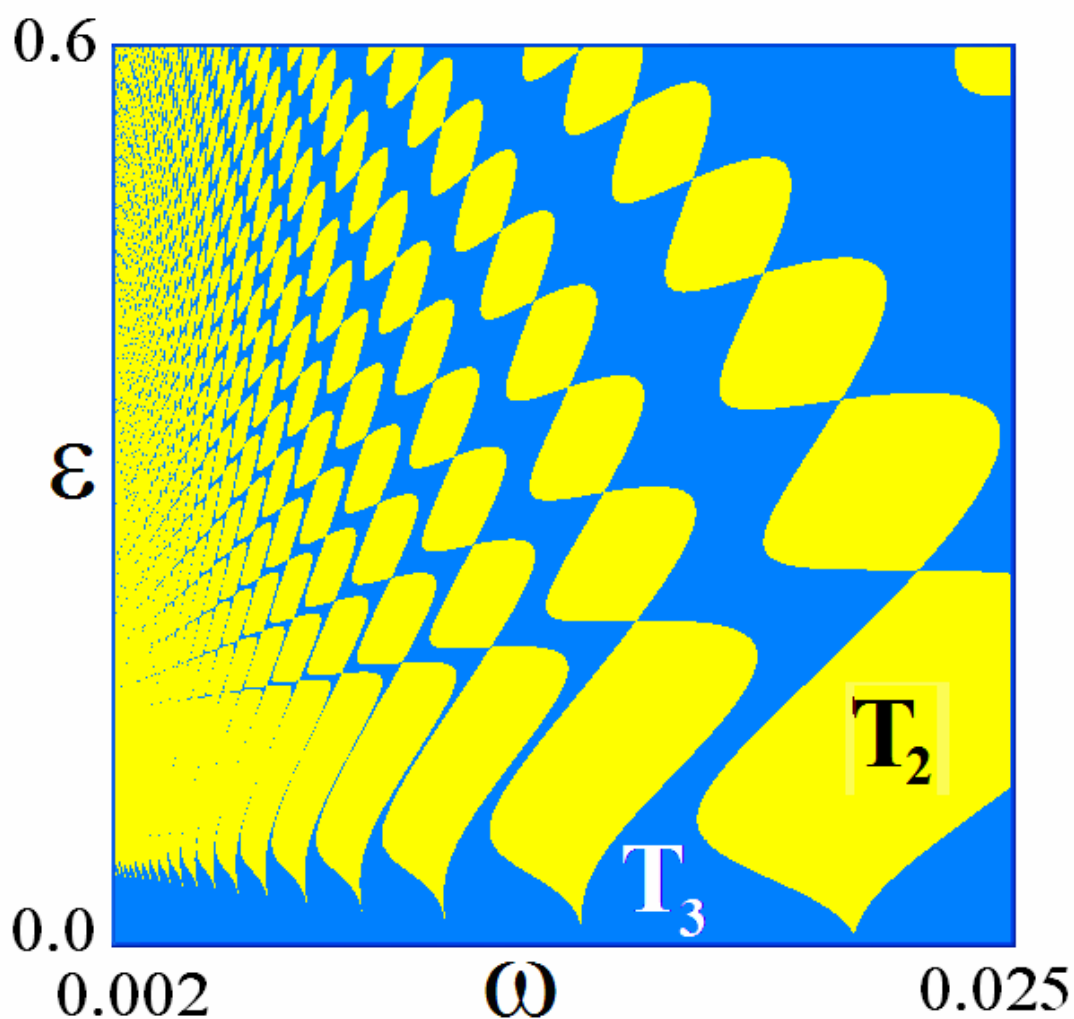


**Рис.3.29.** Ляпуновская карта возбуждаемой системы (3.52) для режима биений в автономной модели;  $\mu=0.25$ ,  $\Delta=1$ .



**Рис.3.30.** Реализации и портреты в стробоскопическом сечении системы (3.52) в режиме биений в автономной модели: а)  $\omega=0.45$ ,  $\epsilon=2$ , б)  $\omega=0.45$ ,  $\epsilon=5$ , в)  $\omega=0.37$ ,  $\epsilon=2$ . Остальные параметры  $\mu=0.25$ ,  $\Delta=1$ .

Перейдем теперь к исходной системе (3.50). Рассмотрим случай небольшого значения управляющего параметра  $\lambda = 0.1$ . Ляпуновская карта для наиболее интересного случая биений автономных осцилляторов представлена на рис.3.31. Величина связи и частотная расстройка выбраны равными значениям  $\mu = 0.025$  и  $\Delta = 0.1$ . Эти значения отвечают случаю фазовой модели на рис.3.29. (В соответствии с правилами нормировки (3.7) и значением  $\lambda = 0.1$  параметры фазовой модели уменьшены в 10 раз.) При сопоставлении рисунков только следует иметь в виду, что изменен масштаб по частоте возбуждения  $\omega$ . На рис.3.31 он уменьшен, так что использовано максимальное значение  $\omega = 0.025$ , что отвечает левой трети рис.3.29. Это сделано для того, чтобы лучше визуализировать систему мелкомасштабных языков.



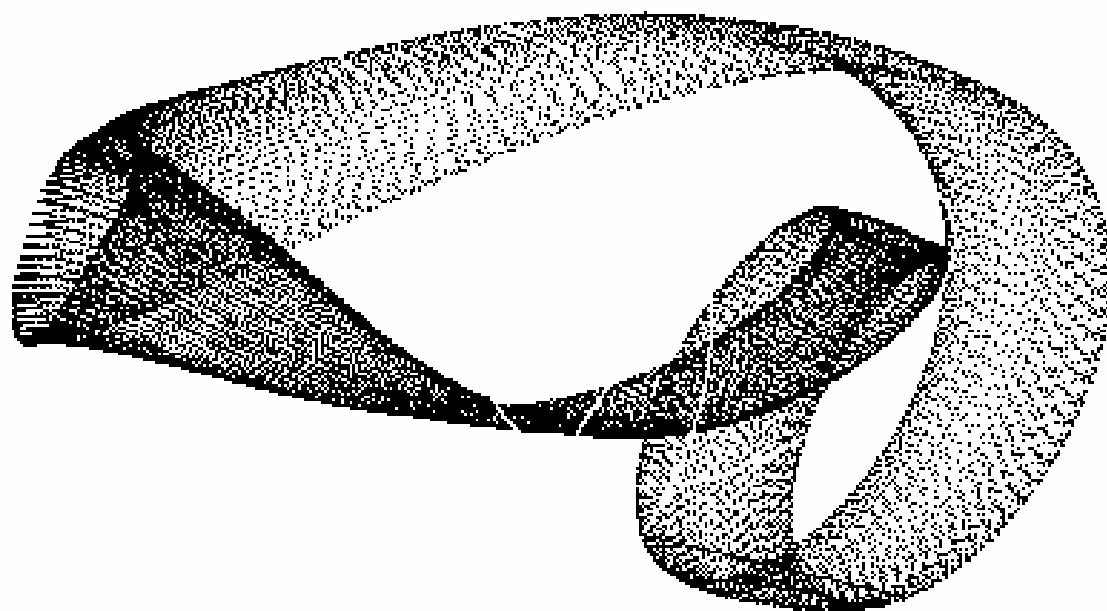
**Рис.3.31.** Ляпуновская карта двух диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с модулированной частотной расстройкой (3.50) в случае биений автономных осцилляторов. Значения параметров  $\lambda=0.1$ ,  $\mu=0.025$ ,  $\Delta=0.1$ .

Отмечаем, что для исходной системы (3.50) произошло изменение типов режимов. А именно, периодическим режимам неавтономного уравнения

Адлера (3.52) теперь соответствуют двухчастотные квазипериодические режимы, а двухчастотным – трехчастотные. Причина понятна – она состоит в том, что для неавтономного уравнение Адлера тип режима определялся для фазы в стробоскопическом сечении. В остальном неавтономное уравнение Адлера очень хорошо дает картину режимов диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с модуляцией частоты (3.50) при значении управляющего параметра  $\lambda = 0.1$ .

# Часть IV

## Автономные квазипериодические колебания и их синхронизация



В предыдущих главах были рассмотрены системы, представляющие собой ансамбли взаимодействующих осцилляторов. Для таких систем, благодаря наличию набора собственных частот, появление квазипериодических колебаний является наиболее логичным и физически мотивированным. Однако квазипериодические колебания возможны и в *автономных системах*. В этом случае объяснить их возникновение несколько сложнее. Грубо говоря, для этого необходимо наличие, как минимум, двух временных масштабов, которые допускают независимое управление. Соответственно, минимальная размерность фазового пространства, в котором будет возможен двухчастотный инвариантный тор, равна трем. Однако основные традиционные примеры трехмерных систем, такие как системы Ресслера и Лоренца, генераторы Анищенко-Астахова (в классическом варианте), Кислова-Дмитриева, Кияшко-Пиковского-Рабновича и др. не демонстрируют квазипериодичность. Соответственно, известно не так много примеров *автономных квазипериодических генераторов*, причем некоторые из них предложены и исследованы сравнительно недавно. В настоящей главе будут представлены и обсуждены некоторые автономные системы с квазипериодической динамикой, а также рассмотрены задачи о вынужденной и взаимной синхронизации для простейшей такой системы.

## 4.1. Автономные генераторы квазипериодических колебаний

### 4.1.1. Схема Чуа

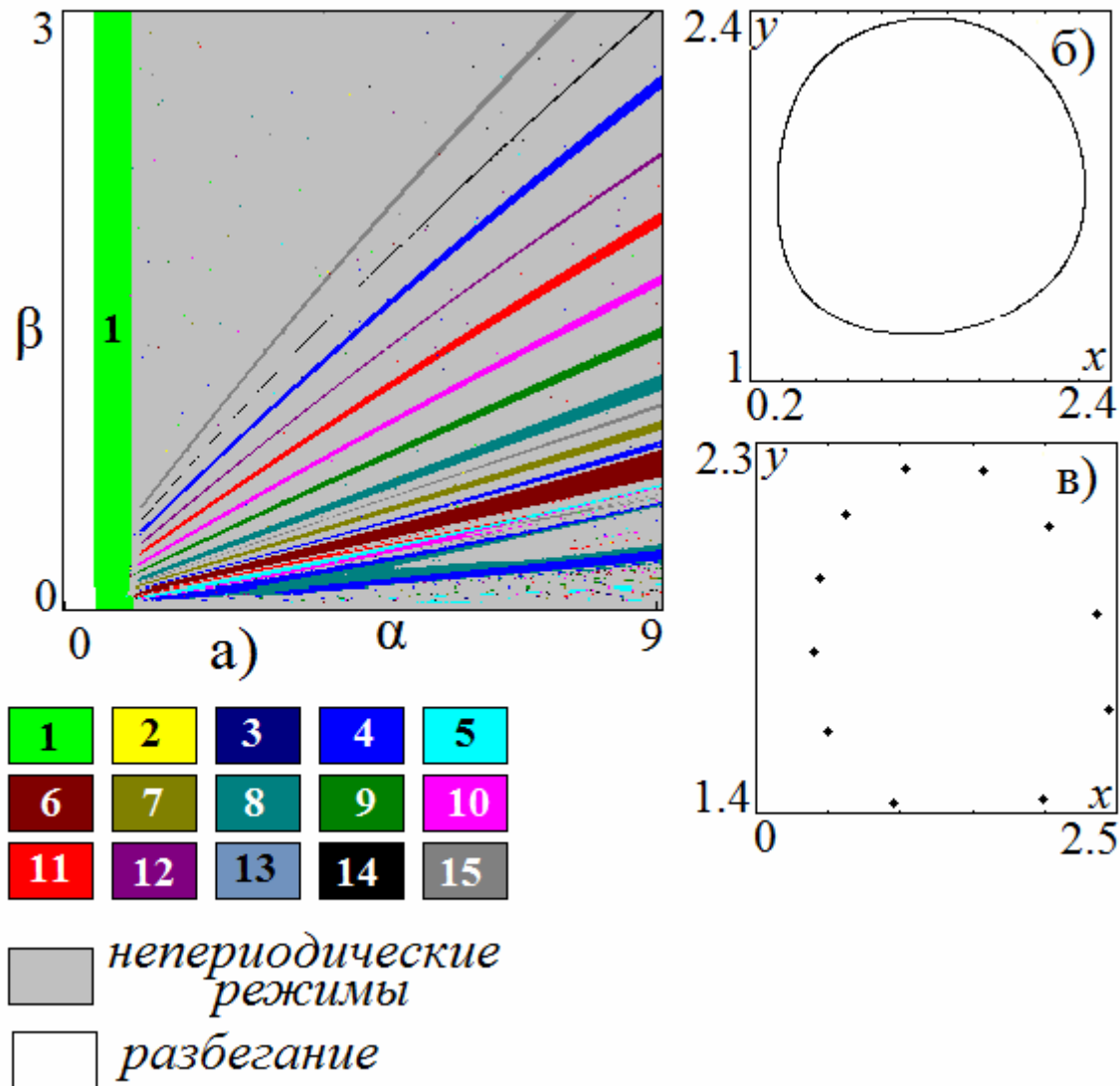
Одной из ранних и всесторонне исследованной теоретически и экспериментально моделей нелинейной динамики является схема Чуа [98]. Она приводится (с помощью уравнений Кирхгофа) к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha f(y - x), \\ \dot{y} &= -f(y - x) - z, \\ \dot{z} &= \beta y. \end{aligned} \tag{4.1}$$

где  $f(x) = -ax + 0.5(a + b)[|x + 1| - |x - 1|]$ . Уравнения (4.1) задают трехмерную динамическую систему с четырьмя управляющими параметрами. Традиционно фиксируют значения  $a$  и  $b$ , и наблюдают за плоскостью параметров  $(\alpha, \beta)$ .

Типичным для (4.1) эффектом является переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Однако при некотором выборе параметров  $a$  и  $b$  возможно и квазипериодическое поведение.

На рис.4.1а представлена карта динамических режимов системы (4.1) на плоскости  $(\alpha, \beta)$  для набора параметров  $a = 0.07$  и  $b = 0.1$ <sup>68</sup>. На рис.4.1б,в приведены характерные фазовые портреты в сечении Пуанкаре. На первом из них хорошо видна инвариантная кривая, соответствующая сечению двухчастотного тора. Второй представляет пример резонансного цикла на таком торе, отвечающего периодическим автоколебаниям. Отметим, что области периодических режимов для схемы Чуа на плоскости параметров имеют вид очень узких, неперекрывающихся язычков.



**Рис.4.1.** а) Карта динамических режимов системы Чуа, а также фазовые портреты в сечении Пуанкаре ( $z = 0$ ) для значений параметров: б)  $\alpha = 3, \beta = 2.5$  и в)  $\alpha = 3, \beta = 2.5$ . Внизу слева – расшифровка цветовой палитры, цифры отвечают периоду цикла в сечении Пуанкаре.

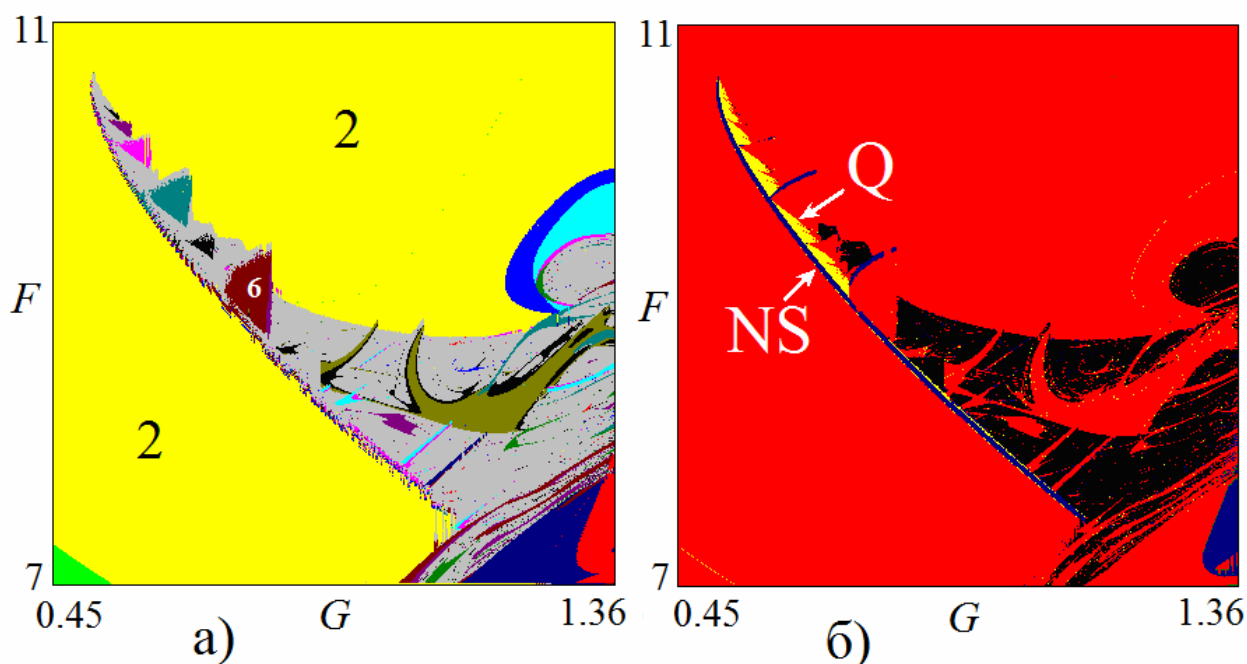
<sup>68</sup> Здесь представлена «традиционная» карта [54], на которой цвет обозначает период цикла в сечении Пуанкаре. В этой главе мы достаточно часто будем использовать такие карты, наряду с ляпуновскими. Какой случай имеется в виду, будет ясно из контекста изложения.

### 4.1.2. Система Лоренц-84

Несколько менее известным примером автономной динамической трехмерной системы, которая может демонстрировать квазипериодические колебания, является модель, предложенная Лоренцем в рамках климатической мотивации в 1984 году [99-102]. Ее называют иногда *система Лоренц-84* (в отличие от классической системы Лоренца):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax - y^2 - z^2 + aF, \\ \dot{y} &= -y + xy - bxz + G, \\ \dot{z} &= -z + bxy + xz.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Эта система имеет четыре управляющих параметра, из которых два обычно фиксируют, выбирая значения  $a=0.25$ ,  $b=4$ . Карты динамических режимов и ляпуновских показателей на плоскости двух оставшихся параметров ( $G, F$ ) представлены на рис.4.2. При их построении сечение Пуанкаре осуществлялось плоскостью  $y=0$ .



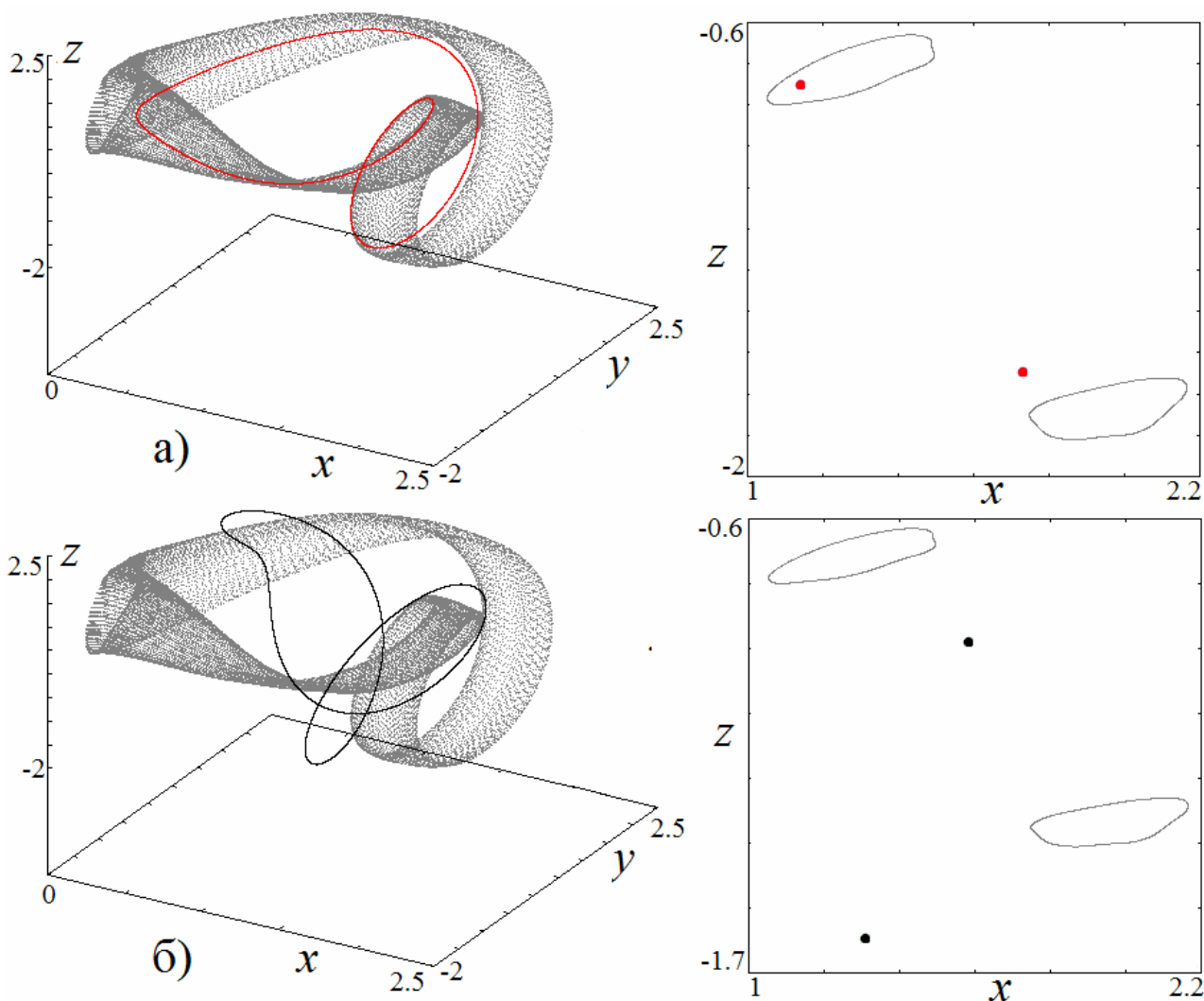
**Рис.4.2.** Карты динамических режимов (а) и ляпуновских показателей (б) для системы Лоренц-84;  $a=0.25$ ,  $b=4$ .  $Q$  – область квазипериодичности,  $NS$  – линия бифуркации Неймарка-Сакера. Цветовая палитра на левом рисунке отвечает рис.4.1, а на правом – традиционная для ляпуновской карты.

На картах хорошо видно, что в системе реализуются, в основном, периодические и хаотические режимы. Однако можно видеть и узкую область автономной квазипериодичности  $Q$  (желтый цвет на ляпуновской карте). На плоскости параметров она наблюдается выше линии бифуркации Неймарка-Сакера  $NS$ , в результате которой и рождается тор в фазовом пространстве. На



эту линию опирается система расширяющихся языков Арнольда, отвечающих резонансным циклам разного периода.

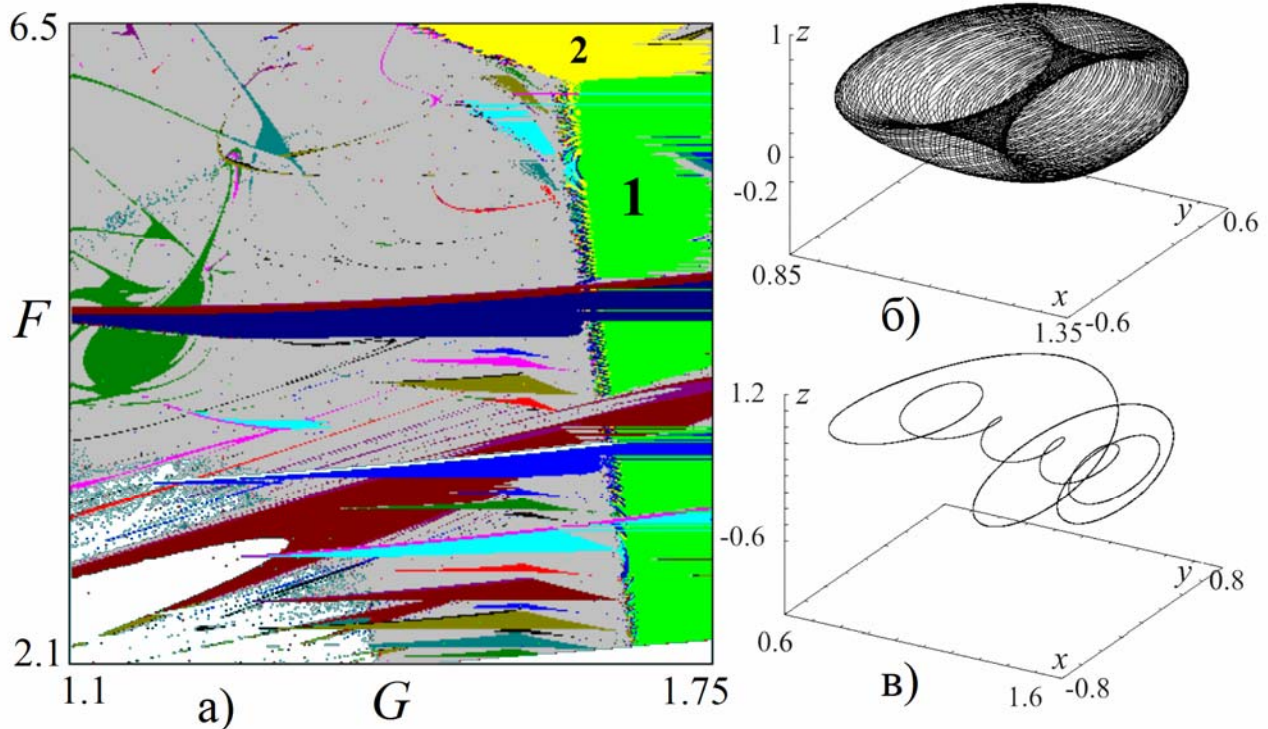
На рис.4.3 приведены примеры трехмерных фазовых портретов аттракторов и их двумерных сечений Пуанкаре. На рис.4.3а красным цветом изображен цикл периода 2, для которого параметры отвечают ситуации до порога бифуркации Неймарка-Сакера. Серым цветом показан тор, родившийся на базе этого цикла. Таким образом, особенность данной системы в том, что бифуркация Неймарка-Сакера происходит на основе двухобортного предельного цикла. Соответственно, на картах режимов самый широкий язык Арнольда имеет период 6, что отвечает резонансу 1:3 на базе цикла периода 2.



**Рис.4.3.** Фазовые портреты системы Лоренц-84;  $a=0.25$ ,  $b=4$ ,  $F=9.97$ ,  $G=0.58878$ . На рис.б) предельный цикл отвечает значению  $F=9.0$  до порога бифуркации Неймарка-Сакера.

Отметим, что для рассматриваемой системы характерна мультистабильность, отвечающая одновременной реализации квазипериодического и периодического режимов. Так на рис.4.3б представлен пример сосуществующих предельного цикла и инвариантного тора.

Интересно, что система Лоренц-84 может демонстрировать и *неустойчивый тор*, который можно визуализировать, если интегрировать уравнения (4.2) в *обратном времени*. На рис.4.4 приведена карта системы Лоренц-84 в обратном времени, на которой внизу хорошо видна система мелкомасштабных язычков синхронизации. В этом случае бифуркация Неймарка-Сакера становится возможной на базе предельного цикла периода 1. На рис.4.4б,в даны примеры фазовых портретов, отвечающих неустойчивому инвариантному тору и сложному неустойчивому предельному циклу.



**Рис.4.4.** Карта динамических режимов (а) и примеры фазовых портретов системы Лоренц-84 (б,в) в обратном времени;  $a=0.25$ ,  $b=4$ ; б)  $F=2.47$ ,  $G=1.65$ , в)  $F=2.47$ ,  $G=1.64$ .

### 4.1.3. Квазипериодический генератор Анищенко-Астахова и бифуркация удвоения двумерного тора

Двумерный тор можно реализовать в трехмерной автономной динамической системе, однако, возможность *бифуркации удвоения двумерного тора* в автономной системе требует повышения размерности фазового пространства, как минимум до четырех. В.С. Анищенко с соавторами был разработан генератор квазипериодических колебаний с четырехмерным фазовым пространством, в котором наблюдается такая бифуркация [39-41]. Далее мы представим описание этого генератора, а также более детально охарактеризуем его динамику.

Эта система представляет собой развитие известной эталонной модели нелинейной динамики – генератора Анищенко-Астахова [53]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx + y - xz - dx^3 \\ \dot{y} &= -x \\ \dot{z} &= -gz + g\Phi(x).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Первые два уравнения (4.3) описывают генератор типа Ван-дер-Поля, а третье обеспечивает дополнительную нелинейную инерционную обратную связь. Система (4.3) демонстрирует такие явления, как бифуркации удвоения периода и переход к хаосу в соответствии с теоремой Шильникова и др. при условии, что нелинейная функция  $\Phi(x)$  является асимметричной относительно переменной  $x$  и задается в виде:

$$\Phi(x) = I(x)x^2, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}\tag{4.4}$$

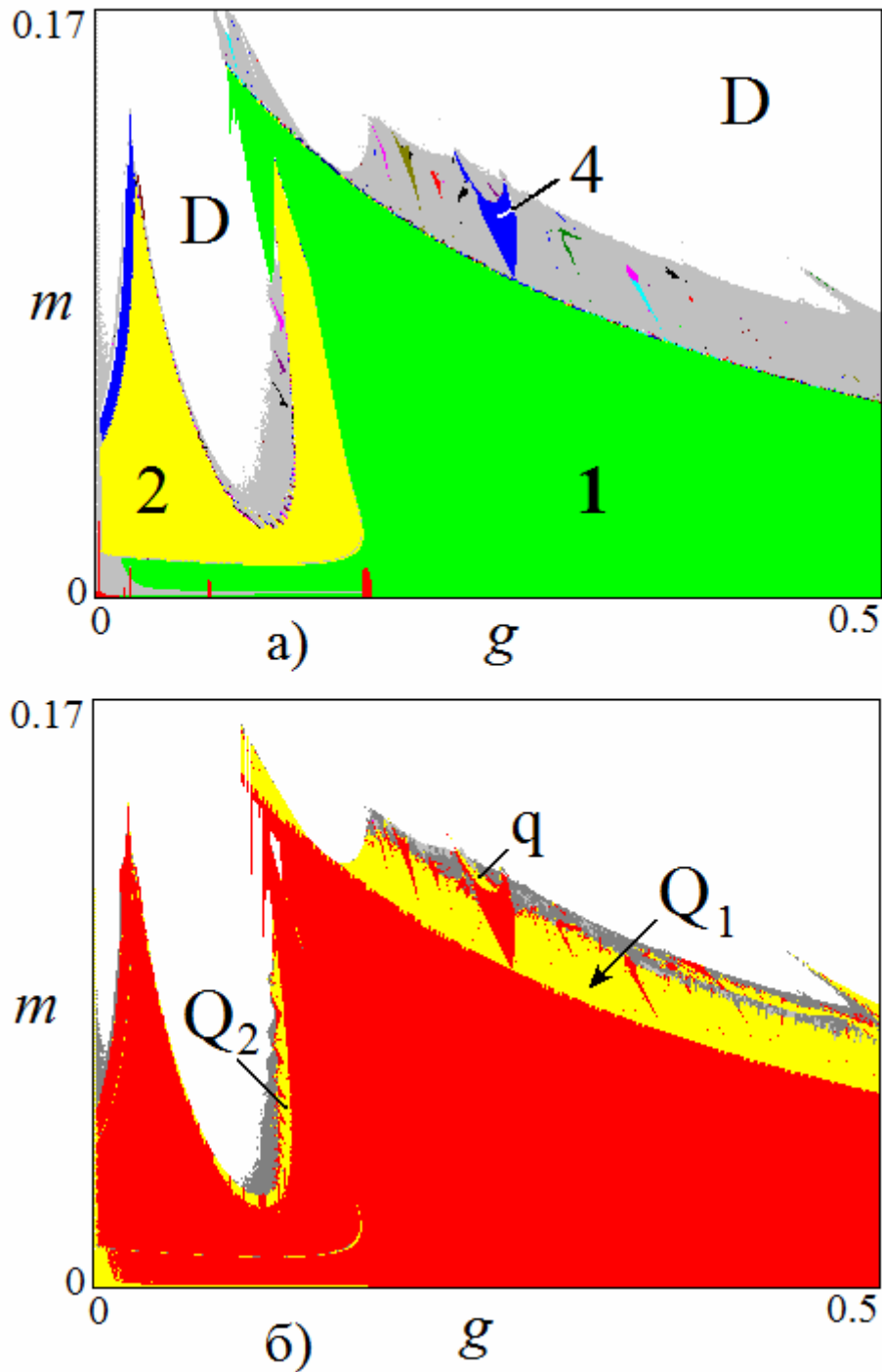
С целью обеспечения незатухающих двухчастотных колебаний в систему (4.3) может быть введена дополнительная цепь обратной связи, которая характеризуется собственной частотой, отличающейся от резонансной частоты контура генератора. В результате получается модель модифицированного генератора Анищенко-Астахова [39-41], которая выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx + y - x\varphi - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma\Phi(x) - gz.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Система (4.5) является нелинейной диссипативной динамической системой размерности  $N=4$  и характеризуется четырьмя управляющими параметрами:  $m$  – параметр возбуждения,  $d$  – параметр нелинейной диссипации,  $\gamma$  – параметр затухания и  $g$  – параметр инерционности фильтра.

На рис.4.5а представлена карта динамических режимов модифицированного генератора Анищенко-Астахова (4.5), а на рис.4.5б – карта показателей Ляпунова на плоскости основных управляющих параметров  $g$  и  $m$  для фиксированных значений  $\gamma = 0.2$  и  $d = 0.001$ . При построении карт сечение Пуанкаре отвечает плоскости  $x=0$ .

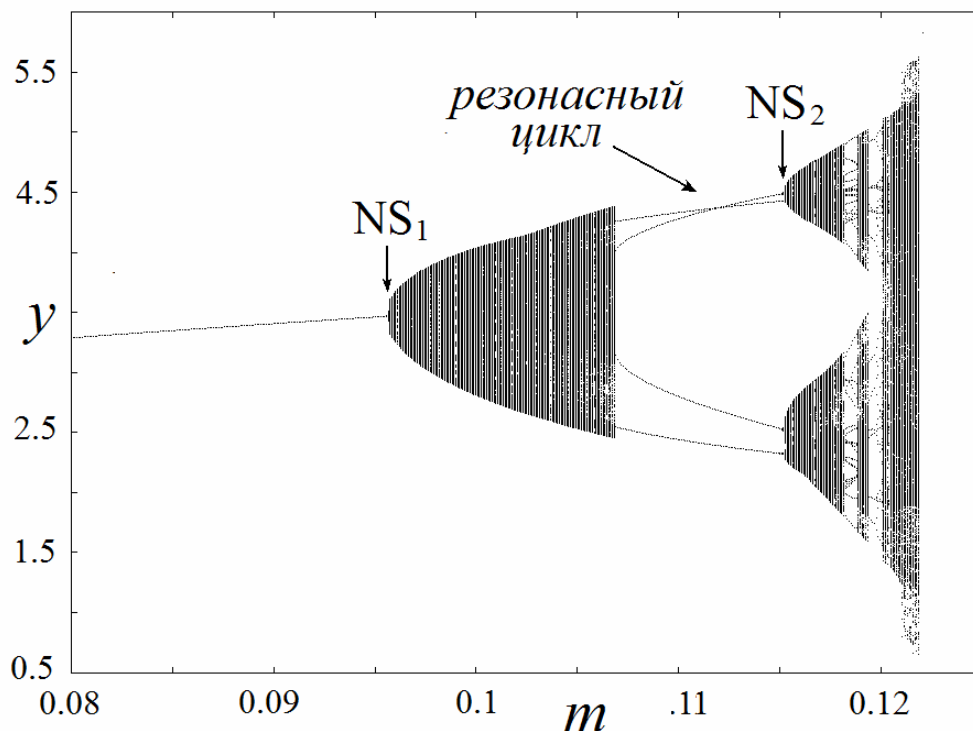
Как видно из рисунка, при малых значениях параметра  $m$  в системе реализуются автоколебания, которым отвечает неподвижная точка в сечении Пуанкаре (период 1 на карте).



**Рис.4.5.** Карта динамических режимов (а) и карта показателей Ляпунова (б) модифицированного генератора Анищенко-Астахова (4.5);  $\gamma = 0.2$  и  $d=0.001$ .  $Q$  и  $q$  – области квазипериодичности,  $D$  – область разбегания траекторий.

С увеличением параметра  $m$  можно придти к линии рождения двумерного тора, которой отвечает бифуркация Неймарка-Сакера основного предельного цикла. На карте показателей Ляпунова хорошо видна лежащая выше этой линии область квазипериодических колебаний  $Q_1$  (желтый цвет), в которую встроена система языков синхронизации, отвечающих рациональному соотношению частот в генераторе. Наиболее выражен язык синхронизации

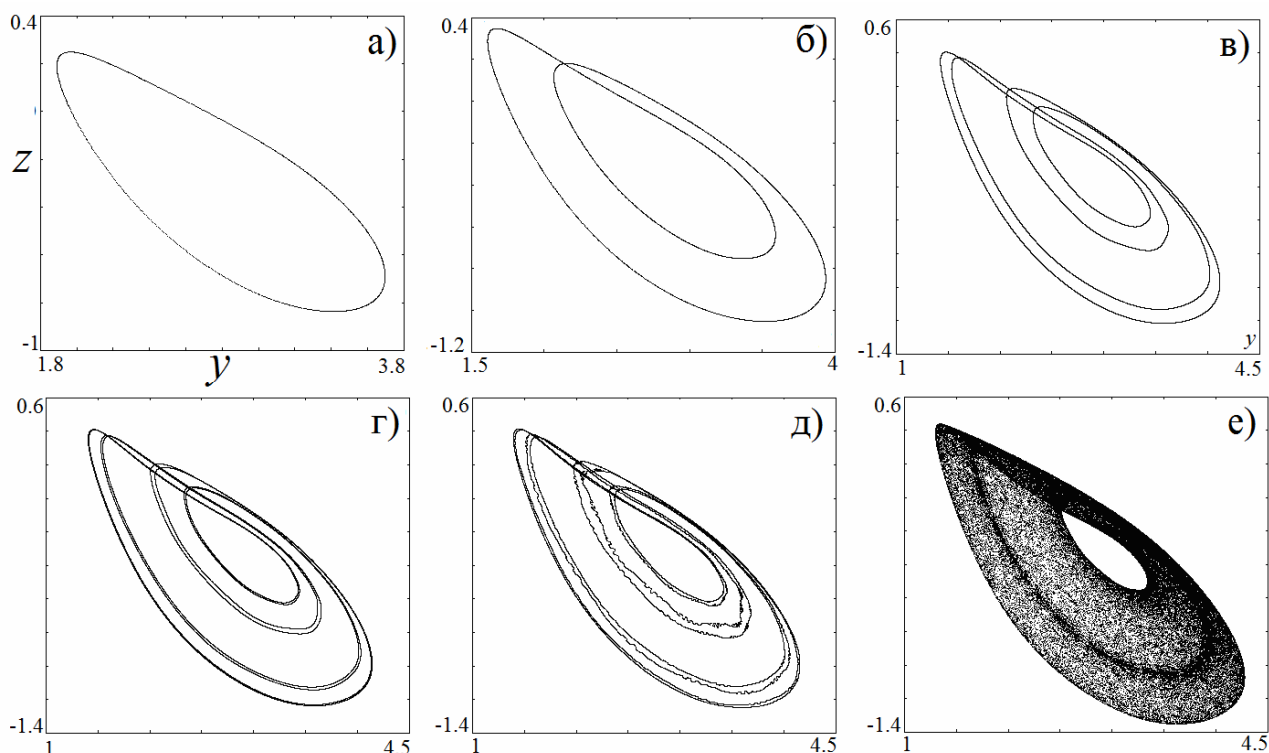
периода 4. Его особенность – наличие *вторичной бифуркации Неймарка-Сакера*. Этот факт иллюстрирует рис.4.6, на котором показано бифуркационное дерево системы (в сечении Пуанкаре) при движении через этот язык. Можно видеть, что с увеличением параметра  $m$  сначала наблюдается простой предельный цикл, которому отвечает единственная ветвь дерева. Затем происходит бифуркация Неймарка-Сакера  $NS_1$ , и рождается инвариантный тор. При увеличении параметра  $m$  на этом торе возникает резонансный цикл периода 4, а затем – вторичная бифуркация Неймарка-Сакера  $NS_2$ . На ляпуновской карте соответствующая область квазипериодичности примыкает к вершине языка и обозначена буквой  $q$ .



**Рис.4.6.** Бифуркационное дерево при движении через язык синхронизации периода 4 для модифицированного генератора Анищенко-Астахова,  $NS_{1,2}$  – первичная и вторичная бифуркации Неймарка-Сакера. Значения параметров  $\gamma = 0.2$ ,  $d=0.001$ ,  $g=0.25$ .

Фиксируем теперь параметр  $m$  и будем уменьшать  $g$ . Как видно из приведенных на рис.4.5 карт режимов, сначала происходит бифуркация удвоения основного предельного цикла, так что период в сечении Пуанкаре становится равным двум. Однако далее снова наблюдается рождение квазипериодических колебаний на базе уже этого двухоборотного цикла. На плоскости параметров рис.4.5 имеет место соответствующая область квазипериодичности  $Q_2$  со встроенной системой языков Арнольда. В этой же части, на левой границе области периода 2, наблюдается еще одно удвоение периода, и можно видеть область периода 4 (синий цвет на рис.4.5а).

Помимо описанных бифуркаций и колебательных режимов в системе (4.5) могут реализоваться бифуркации удвоения двумерного тора. Зафиксируем параметры следующим образом:  $\gamma=0.2$ ,  $d=0.001$ ,  $g=0.5$ . На рис.4.7 представлены проекции аттракторов в сечении Пуанкаре на плоскость  $(y,z)$  при постепенном увеличении параметра  $m$ . Как видно из рисунка, при  $m=0.067$  (рис.4.18б) инвариантная кривая становится двухоборотной – данная перестройка соответствует бифуркации удвоения тора. При дальнейшем увеличении параметра  $m$  можно наблюдать еще две бифуркации удвоения тора (рис.4.7в и 4.6г). Далее инвариантная кривая теряет гладкость, и реализуется переход к хаосу через ее разрушение.



**Рис.4.7.** Двумерные проекции сечения Пуанкаре системы (4.5) для параметров  $\gamma=0.2$ ,  $d=0.001$ ,  $g=0.5$ : а)  $m=0.065$ ; б)  $m=0.067$ ; в)  $m=0.068$ ; г)  $m=0.0689$ ; д)  $m=0.069$ ; е)  $m=0.073$ .

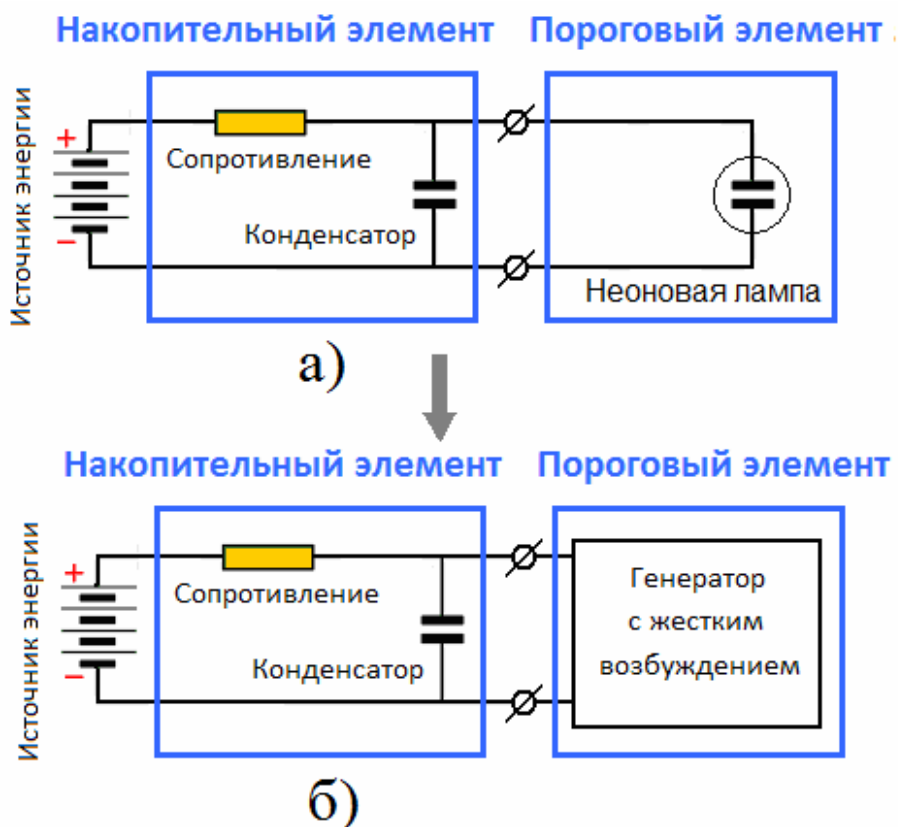
## 4.2. Генератор Кузнецова-Кузнецова-Станкевич

Представленные выше системы обладают той или иной спецификой. Так система Чуа включает элемент с негладкой (кусочно-линейной) характеристикой. Она характеризуется очень узкими языками синхронизации, причем отсутствует их внутренняя структура и картина перекрытия резонансов. Система Лоренц-84 демонстрирует квазипериодические колебания только для двухоборотного предельного цикла и в узкой области параметров. И для той и другой модели трудно указать четкие физические механизмы, отвечающие за колебания с несоизмеримыми частотами. Генератор Анищенко-Астахова в значительной мере лишен этих недостатков, однако характеризуется более

высокой размерностью фазового пространства. Поэтому ощущается необходимость в построении физически мотивированной *трехмерной* системы, допускающей простое качественное объяснение возможности автономной квазипериодичности. Далее мы обсудим соответствующую модель генератора квазипериодических колебаний<sup>69</sup>.

### **Теоретическая модель**

В качестве исходного пункта рассуждений обратимся к функциональной схеме *релаксационного автогенератора*, рис.4.8а. Система содержит накопительный элемент, конденсатор, который постепенно заряжается через сопротивление от источника напряжения, а затем быстро разряжается через «пороговый» элемент, например, неоновую лампу. Последний должен иметь два порога: один для зажигания, и другой для гашения. Когда уменьшение напряжения через конденсатор достигнет уровня гашения, пороговый элемент выключается, и конденсатор начинает снова заряжаться, что ведет к повторению цикла.



**Рис.4.8.** Переход от генератора релаксационных колебаний, содержащего накопительный элемент в виде RC цепочки и неоновую лампу (а), к квазипериодическому генератору (б), содержащему в качестве элемента генератор с жестким возбуждением.

<sup>69</sup> Эта система предложена С.П.Кузнецовым, А.П.Кузнецовым, Н.В.Станкевич в [42,43].

Предположим теперь, что в качестве порогового элемента используется автогенератор, для которого управляющим параметром выступает выходная переменная накопительного элемента, рис.4.8б. Пусть автогенератор характеризуется *жестким возбуждением*, то есть наряду с порогом возбуждения колебаний по управляющему параметру имеет также порог, более низкий, для срыва колебаний. Тогда в системе должны возникать релаксационные колебания, сопровождаемые циклами зарядки и разрядки накопительного элемента. Теперь система будет иметь *два характерных временных масштаба*. Один ассоциируется с релаксационными колебаниями, а другой – с основной рабочей частотой автоколебательного элемента. Соотношение частот можно задавать произвольно, так что следует ожидать, что система способна генерировать самоподдерживающиеся квазипериодические колебания.

Описанный физический механизм реализует следующая модель:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= \mu - x^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь  $x$  – обобщенная координата, относящаяся к автоколебательному элементу,  $\omega_0$  – частота его собственных колебаний. Множитель перед производной  $\dot{x}$  содержит параметр  $\lambda$ , характеризующий глубину положительной обратной связи в автогенераторе, а также нелинейный член  $x^2$ , стимулирующий возбуждение колебаний, и член  $x^4$ , отвечающий за насыщение при больших амплитудах. Нелинейность, соответствующая комбинации двух последних членов, обеспечивает жесткое возбуждение автогенератора, обусловленное присутствием субкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Как следствие, в системе имеет место *гистерезис*, причем в зависимости от параметра  $\beta$  изменяется ширина петли гистерезиса. Параметр  $\lambda$  входит в уравнение вместе с аддитивной добавкой  $z$ , которая характеризует состояние накопительного элемента, а эволюция этой переменной во времени задается вторым уравнением. Система (4.6) имеет два независимых временных масштаба. В качестве одного фигурирует характерное время восстановления состояния накопительного элемента  $\tau \approx \mu^{-1}$ , а в качестве второго – основной период колебаний автогенератора,  $T = 2\pi/\omega_0$ .

Обратимся к численному исследованию системы (4.6). Рассмотрим сначала ситуацию, когда один из собственных временных масштабов системы заметно меньше другого, а именно  $T \ll \tau$ . Тогда система должна совершать быстрые осцилляции с периодом  $T = 2\pi/\omega_0$  на фоне медленных процессов накопления



энергии со временем  $\tau \approx \mu^{-1}$ . Такой режим при значениях  $\omega_0 = 2\pi$  и  $\mu = 0.3$  проиллюстрирован на рис.4.8а<sup>70</sup>. На рисунке представлены временные реализации переменных  $x(t)$  и  $z(t)$ . Действительно, можно видеть характерные быстрый и медленный процессы, так что генерация носит характер сравнительно редких «всплесков» с быстро осциллирующим заполнением. Такой вид колебаний позволяет охарактеризовать обсуждаемый режим, как режим *пульсирующей генерации*.

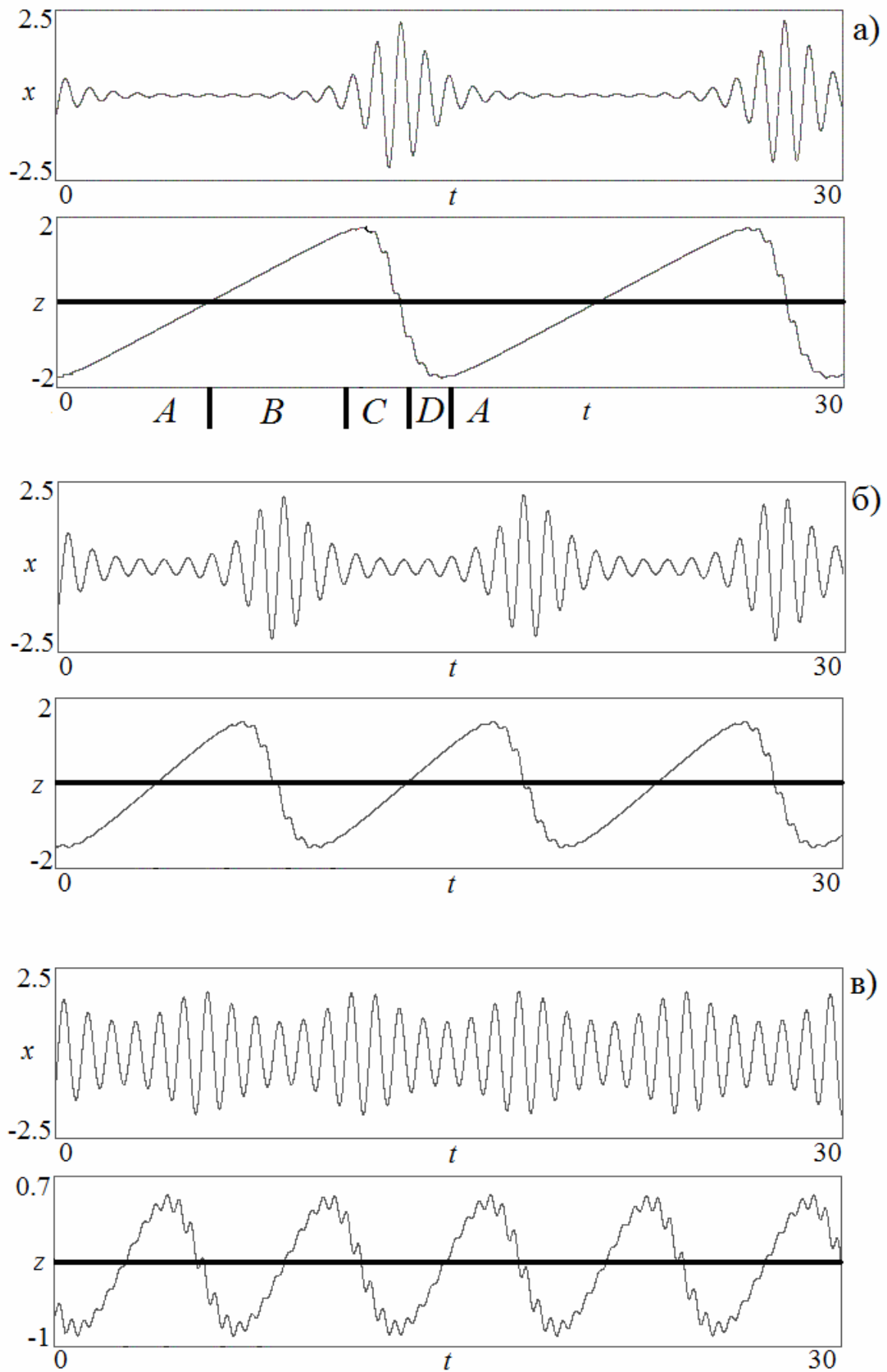
Режим пульсирующей генерации оказывается очень удобным с точки зрения понимания и описания физической картины наблюдаемых процессов. В этом случае на графике временных зависимостей на рис.4.9а можно различить четыре характерные, периодически повторяющихся стадии процесса.

Интервал  $A$  соответствует стадии зарядки накопительного элемента. Переменная  $z$  увеличивается (будучи отрицательной), в то время как колебания в автогенераторе затухают. Когда величина  $z$  становится положительной, оказывается перейденным порог самовозбуждения, и система вступает в стадию  $B$ . Теперь амплитуда в автоколебательном элементе нарастает и достигает наивысшего уровня, соответствующего предельному циклу, который имел бы место в системе со стационарным источником энергии. Отметим, что процесс начинается не с нулевой амплитуды, а с остаточных колебаний, сохранившихся от предыдущей стадии затухания. На интервале  $C$  имеет место уменьшение переменной  $z$  из-за относительно большого среднего значения члена  $x^2$  во втором уравнении. В некоторый момент переменная  $z$  становится отрицательной, но за счет жесткой природы возбуждения осциллятора автоколебания продолжают до тех пор, пока не будет достигнут порог гашения колебаний. Тогда система переходит в стадию  $D$ , где имеет место срыв автоколебаний и быстрое уменьшение амплитуды. Далее процесс, состоящий из аналогичных стадий  $A, B, C, D$ , повторяется снова и снова. В результате возникает пульсирующая генерация.

Если теперь постепенно увеличивать управляющий параметр релаксационного процесса  $\mu$ , то временные масштабы  $T = 2\pi/\omega_0$  и  $\tau \approx \mu^{-1}$  сближаются. При этом период биений уменьшается, и вид временных реализаций все более приближается к традиционному для квазипериодических колебаний виду, что видно из рис.4.9б,в.

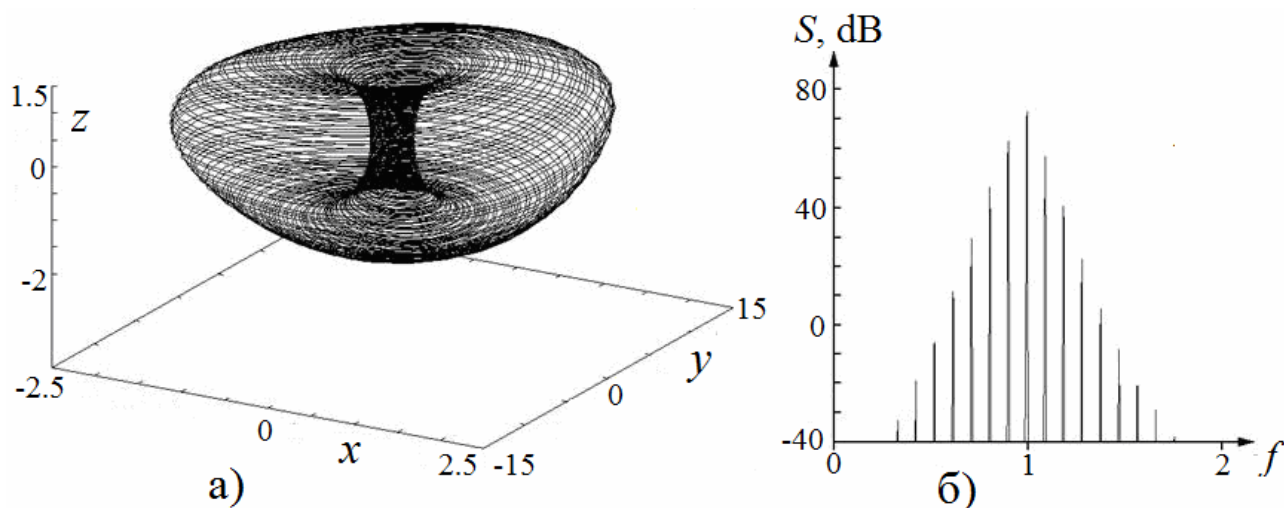
---

<sup>70</sup> Здесь и далее полагаем  $\lambda=0$ , величина этого параметра не сказывается на качественной стороне динамики системы.



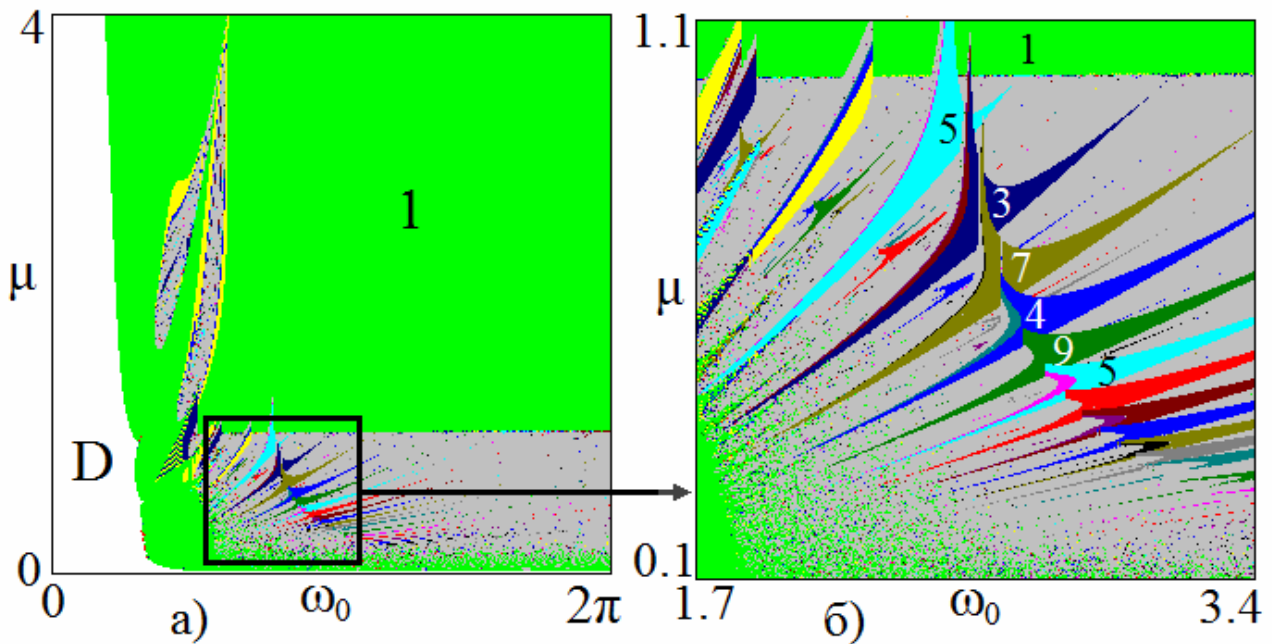
**Рис.4.9.** Реализации автоколебательного процесса в системе (4.6). Значения параметров: а)  $\mu = 0.3$ , б)  $\mu = 0.5$ , в)  $\mu = 0.9$ , остальные параметры  $\lambda = 0$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ .

Обозначим теперь  $y = \dot{x}$ . Тогда в трехмерном фазовом пространстве  $(x, y, z)$  при соответствующем выборе параметров наблюдаются аттракторы в виде инвариантных торов. Пример такого аттрактора приведен на рис.4.10а. Рядом с портретом аттрактора на рис.4.10б представлен спектр Фурье генерируемого сигнала. Спектр Фурье для таких режимов выглядят точно так, как это и должно быть для квазипериодических колебаний: он содержит дискретное множество равно удаленных друг от друга частотных компонент. Амплитуда компонент уменьшается вправо и влево от главной спектральной составляющей, которая соответствует основной частоте автоколебательного элемента. Расстояние между соседними компонентами определяется частотой релаксационных колебаний, т.е. циклами заряда и разряда накопительного элемента, и увеличивается с ростом параметра  $\mu$ .



**Рис.4.10.** Инвариантный тор (а) и спектр Фурье (б) для системы (4.6) при значениях параметров  $\lambda = 0$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\mu=0.5$ .

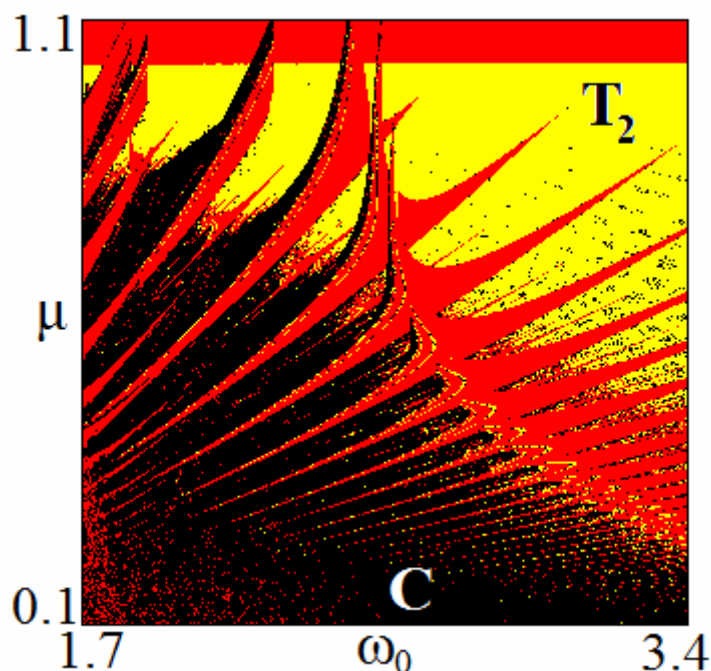
Обратимся теперь к анализу динамики системы (4.6) в зависимости от параметров, определяющих характерные временные масштабы системы. На рис.4.11 показана карта динамических режимов на плоскости таких параметров  $(\omega_0, \mu)$ . Основные периоды режимов определены в сечении Пуанкаре  $x = 0$  и указаны соответствующими цифрами на карте. Непериодические режимы (включая квазипериодическую динамику и хаос) показаны серым цветом. Белым цветом обозначены области, для которых изображающая точка уходит на бесконечность.



**Рис.4.11.** Карта динамических режимов (а) и ее увеличенный фрагмент (б) квазипериодического генератора (4.6). Цветовая палитра соответствует рис.4.1. Цифрами показаны периоды некоторых циклов в сечении Пуанкаре.

Из рис.4.11 хорошо видно, что при  $\mu > 1$  типичным является устойчивый предельный цикл, отвечающий неподвижной точке в сечении Пуанкаре. Соответствующая область на карте обозначена цифрой 1. При  $\mu < 1$  этот цикл претерпевает бифуркацию Неймарка-Сакера, в результате которой в системе становятся возможными устойчивые двухчастотные торы, которым отвечают квазипериодические режимы. На увеличенном фрагменте карты рис.4.11б можно видеть характерную систему языков Арнольда. Внутри языков Арнольда реализуются предельные циклы, которые являются резонансными и лежат на поверхности соответствующего тора. Подчеркнем, что эти циклы отвечают *внутренним резонансам* системы (4.6), поскольку рассматриваемая система автономна.

При уменьшении собственной частоты  $\omega_0$  проявляется внутреннее устройство языков – наблюдаются бифуркации удвоения периода резонансных циклов и переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Кроме того, на рисунке 4.11б просматривается линия начала *перекрывтия языков*. Правее этой линии имеют место квазипериодические режимы, а левее располагаются области хаоса. Отличить эти режимы можно с помощью карты ляпуновских показателей, которая приведена на рис.4.12.

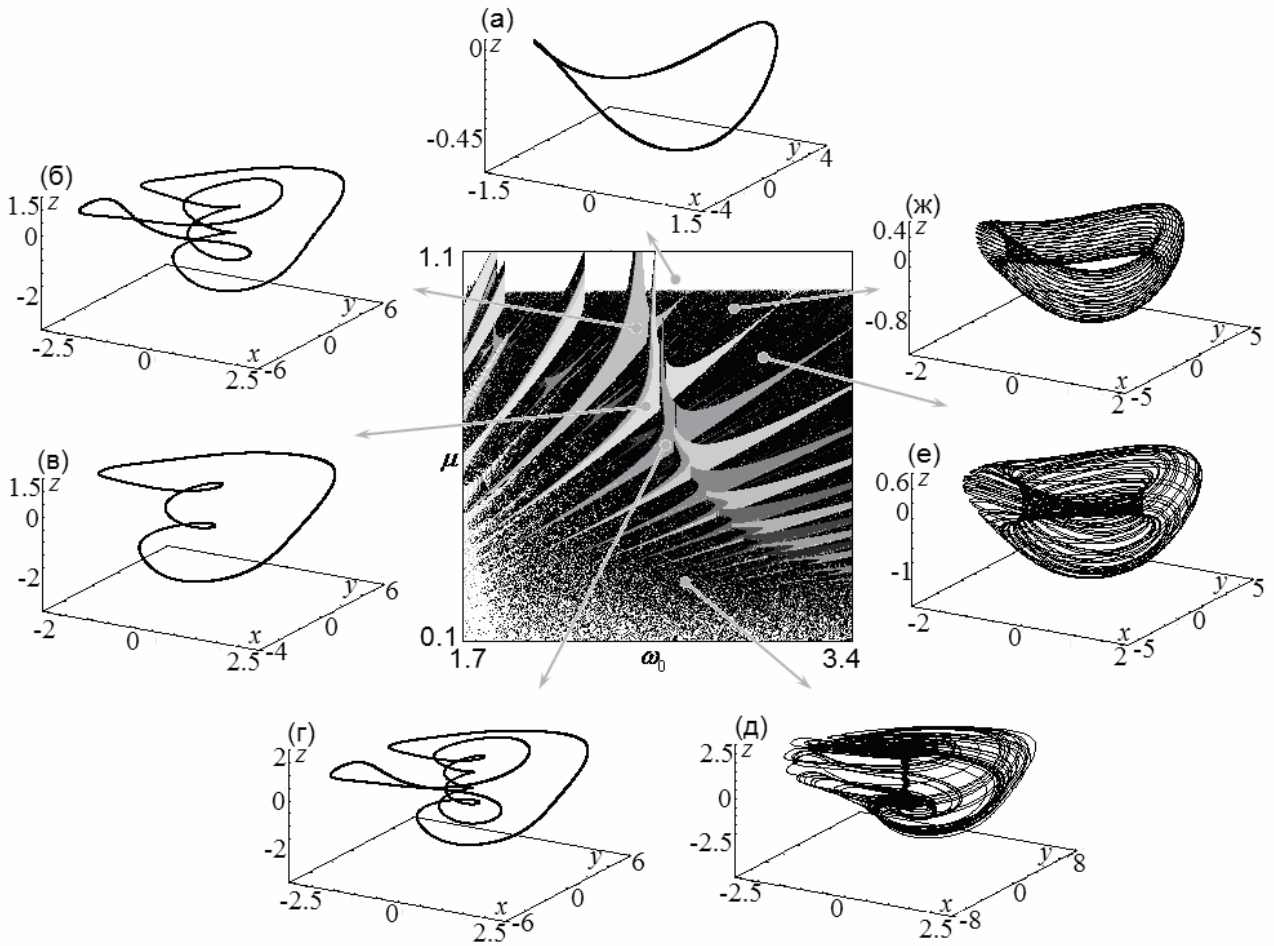


**Рис.4.12.** Карта показателей Ляпунова квазипериодического генератора (4.6). Использована стандартная цветовая палитра,  $T_2$  – области двухчастотной квазипериодичности,  $C$  – хаоса

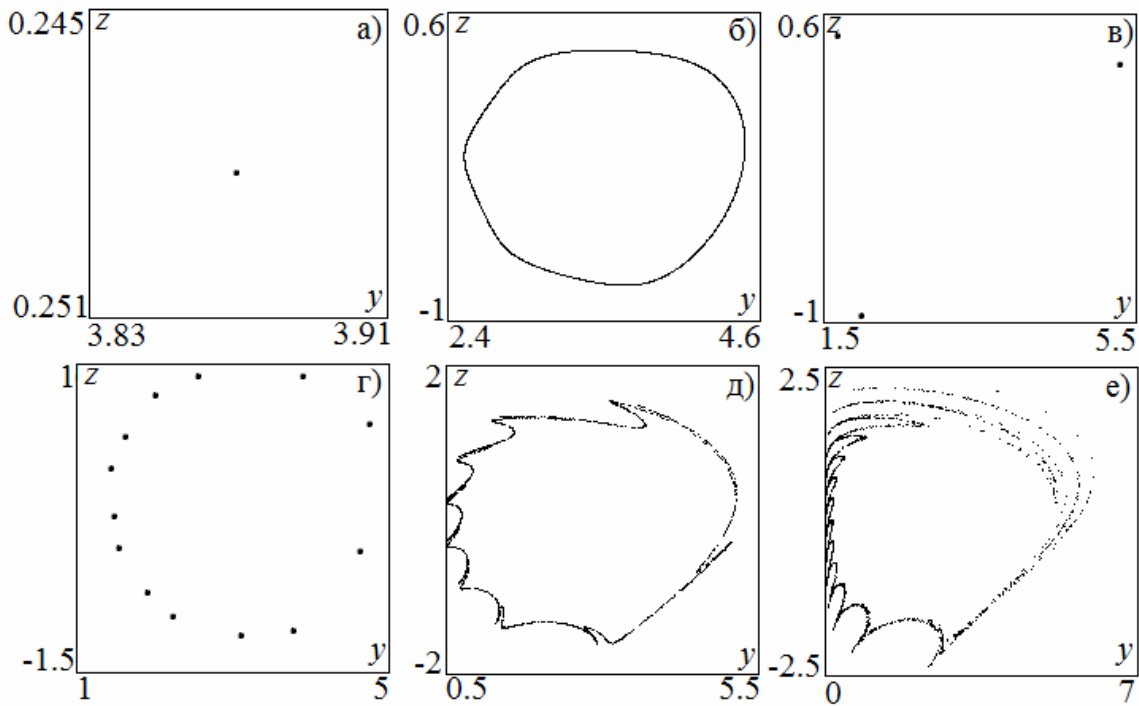
Отметим, что при существенном увеличении собственной частоты  $\omega_0$  хаотические режимы исчезают и остаются только квазипериодические, по крайней мере, на уровне достигаемого в наших расчетах разрешения. С физической точки зрения это область, в которой реализуются режимы *пульсирующей генерации*.

На рис.4.13 изображен фрагмент карты режимов, а по периферии представлены примеры аттракторов разного типа в трехмерном фазовом пространстве, наблюдаемые в соответствующих точках плоскости параметров. Рис.4.13а отвечает базовому однооборотному предельному циклу, рис.4.13е,ж демонстрируют инвариантные торы, рис.4б,в,г дают примеры различных резонансов на торе, а рис.4.13д представляет хаотический аттрактор – разрушенный тор.

Рис.4.14 иллюстрирует сценарий изменения аттрактора системы в сечении Пуанкаре  $x=0$  при фиксированной собственной частоте  $\omega_0 = 2.7$  и уменьшении параметра  $\mu$ . Можно видеть, что наблюдается бифуркация Неймарка-Сакера с возникновением инвариантной кривой. На ней возникают резонансы разного периода, а затем происходит потеря гладкости инвариантной кривой и ее разрушение.



**Рис.4.13.** Карта динамических режимов системы (4.6) и примеры аттракторов: а) базовый предельный цикл периода 1, б) резонансный цикл периода 5, в) резонансный цикл периода 3, г) резонансный цикл периода 7, д) хаотический аттрактор – разрушенный тор, е)-ж) торы.



**Рис.4.14.** Аттракторы системы (4.6) в сечении Пуанкаре плоскостью  $x=0, y>0$  при  $\lambda=0, \omega_0=2.7$ : а)  $\mu=1.1$ ; б)  $\mu=0.9$ ; в)  $\mu=0.8$ . а)  $\mu=0.7$ ; б)  $\mu=0.5$ ; в)  $\mu=0.3$ .

### Экспериментальная реализация

Теперь перейдем к экспериментальной реализации данной системы<sup>71</sup>. Основная идея состоит в следующем: конструируется автогенератор, автоколебания в котором изменяются в соответствии с некой схемой управления, как показано на рис.4.15. Базовым элементом является автогенератор с индуктивной обратной связью, в котором используется полевой транзистор с двумя затворами (КП327). Такой транзистор позволяет реализовать механизм регулировки гашения и возбуждения автоколебаний в контуре.

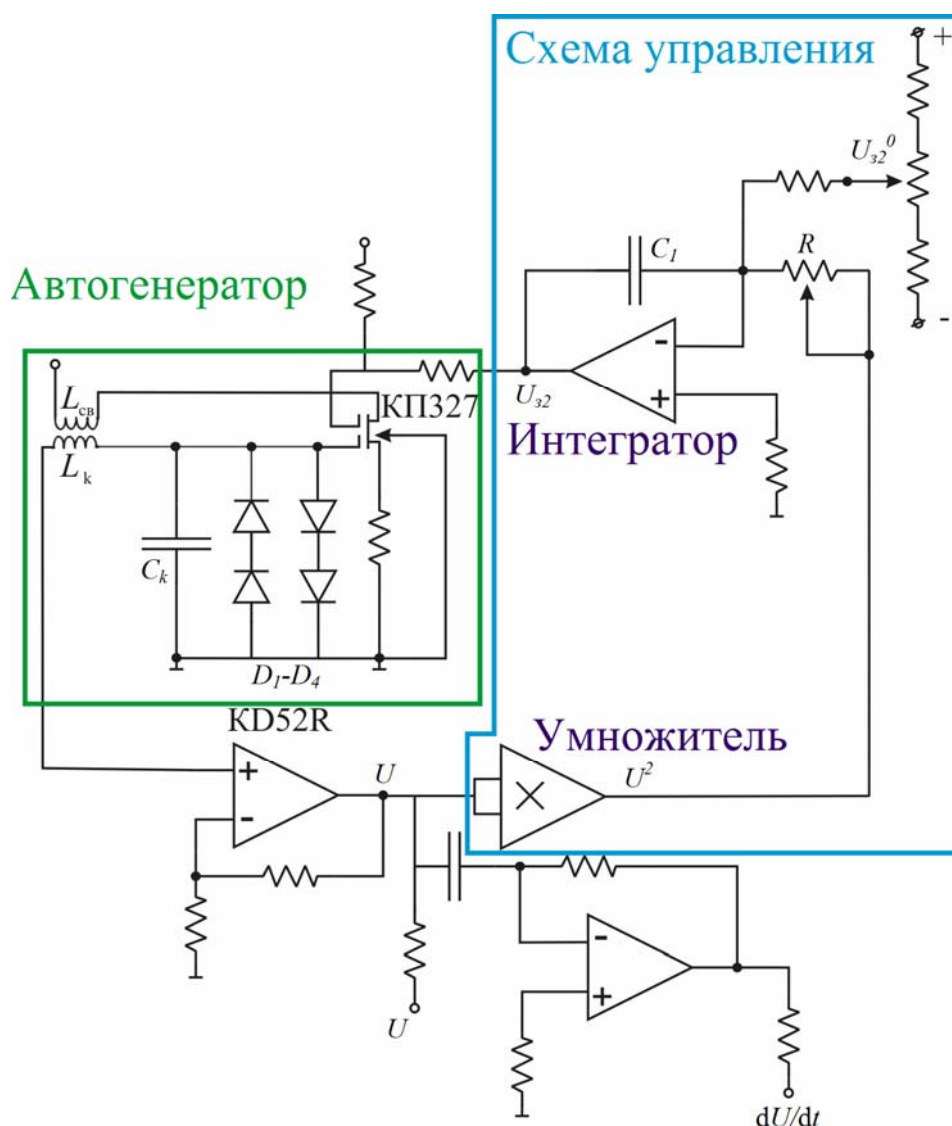


Рис.4.15. Схема генератора квазипериодических колебаний.

Автогенератор генерирует самоподдерживающиеся колебания с амплитудой  $U$ . С помощью умножителя напряжение возводится в квадрат. Затем квадратичное напряжение  $U^2$  проходит через резистор  $R$  и переходит на

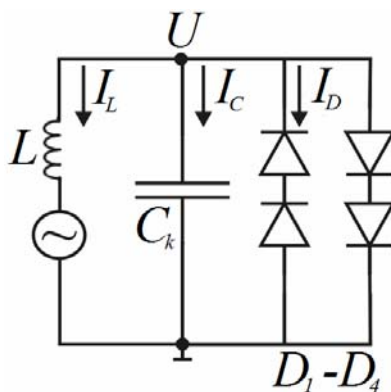
<sup>71</sup> Описанный ниже эксперимент выполнен совместно с Е.П. Селезевым.

интегратор, где оно интегрируется вместе с дополнительным напряжением  $U_{32}^0$ . Проинтегрированное напряжение – это напряжение на втором затворе полевого транзистора, от которого зависит ширина канала полевого транзистора. В зависимости от ширины канала в автогенераторе будут возбуждаться автоколебания или нет.

В автогенераторе используются также система встречно-параллельных диодов (KD52R). Как мы увидим ниже, они необходимы для создания требуемого типа нелинейности по типу осциллятора Ван-дер-Поля.

Для возможности реализации квазипериодических автоколебаний в генераторе необходимо, чтобы характеристика полевого транзистора была *гистерезисной*. Это связано с тем, что на каждом цикле заряда-разряда автоколебания в генераторе не должны затухнуть совсем, и для возбуждения колебаний на новом цикле необходима некая затравка. Для экспериментальной системы параметры были выбраны так, что ширина петли гистерезиса была максимальной.

Продемонстрируем применимость математической модели (4.6) к данной радиоэлектронной системе. Упрощенную схему на рис.4.16 можно представить в виде автогенератора с переменным током индуктивности, который обуславливается в соответствии со схемой управления рис.4.15.



**Рис.4.16.** Упрощенная схема генератора квазипериодических колебаний.

Запишем законы Кирхгофа для общей точки  $U$  :

$$I_L + I_C + I_D = 0. \quad (4.7)$$

Здесь  $I_L = \frac{1}{L} \int U_L dt$  – ток индуктивности,  $I_C = C_k \frac{dU}{dt}$  – ток конденсатора. Для тока во встречно-параллельных диодах  $I_D$  используем экспоненциальное представление вольтамперной характеристики и ее разложение в ряд Тейлора:

$$I_D = I_0(e^{U/2\varphi} - e^{-U/2\varphi}) \approx I_0 \left( \frac{U}{\varphi} + \frac{1}{6} \frac{U^3}{4\varphi^3} \right). \quad (4.8)$$



Запишем далее напряжение на индуктивности:  $U_L = U - U_{0c}$ , где  $U_{0c}$  – напряжение стока полевого транзистора, которое определяется через ток стока полевого транзистора  $I_{Cm}$  по формуле  $U_{0c} = M \frac{dI_{Cm}}{dt}$ , причем  $M$  – коэффициент взаимной индукции. Зависимость тока стока от напряжения  $U$  – это характеристика полевого транзистора, которую можно представить в виде полиномиальной аппроксимации

$$I_{Cm} = S_0 U + S_1 U^3 - S_2 U^5, \quad (4.9)$$

где  $S_0, S_1, S_2$  – коэффициенты, описывающие крутизну характеристики. Продифференцируем (4.9) по времени, и получаем:

$$\frac{dI_{Cm}}{dt} = S_0 \frac{dU}{dt} + 3S_1 U^2 \frac{dU}{dt} - 5S_2 U^4 \frac{dU}{dt}. \quad (4.10)$$

Коэффициенты  $S_0, S_1, S_2$  зависят от напряжения на втором затворе полевого транзистора. Это напряжение меняется гораздо медленнее, чем на первом. Поэтому положим зависимость первого коэффициента линейной, а остальные коэффициенты будем считать константами. Тогда получим выражение для напряжения на индуктивности:

$$U_L = U - k_0 M U_{32} \frac{dU}{dt} - 3S_1 M U^2 \frac{dU}{dt} + 5S_2 M U^4 \frac{dU}{dt}. \quad (4.11)$$

Подставляем все формулы в уравнение Кирхгофа (4.7), дифференцируем его по времени и после некоторых алгебраических преобразований получим:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - \frac{1}{C_k} \left[ \frac{I_0}{\varphi} + k_0 M U_{32} + (3S_1 M - \frac{I_0}{8\varphi^3}) U^2 - 5S_2 M U^4 \right] \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC_k} U = 0. \quad (4.12)$$

Таким образом, мы получили уравнение автогенератора с жестким возбуждением с управляемым параметром возбуждения.

Теперь запишем уравнение, описывающее динамику напряжения на втором затворе полевого транзистора. Оно представляет собой результат интегрирования квадратичного напряжения в автогенераторе  $U^2$  (с отрицательным знаком) и управляющего напряжения  $U_{32}^0$ . Перед интегралом

учтем постоянную  $\frac{1}{RC_1}$ <sup>72</sup>:

$$U_{32} = -\frac{1}{RC_1} \int (U^2 - U_{32}^0) dt. \quad (4.13)$$

Продифференцируем (4.13) по времени и получим:

<sup>72</sup> В интеграторе скорость изменения выходного напряжения пропорциональна изменению входного напряжения, и обратно пропорциональна постоянной времени  $T=RC_1$ .

$$\frac{dU_{32}}{dt} = \frac{1}{RC_1}(U_{32}^0 - U^2). \quad (4.14)$$

В соотношениях (4.12) и (4.14) выполним перенормировку времени на собственную частоту  $\sqrt{1/LC_k}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} - \sqrt{\frac{L}{C_k}} \left[ \frac{I_0}{\varphi} + k_0MU_{32} + (3S_1M - \frac{I_0}{8\varphi^3})U^2 - 5S_2MU^4 \right] \frac{dU}{dt} + U = 0, \\ \frac{RC_1}{\sqrt{LC_k}} \frac{dU_{32}}{dt} = U_{32}^0 - U^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Перепишем теперь математическую модель (4.6), также выполнив перенормировку времени на частоту  $\omega_0$ :

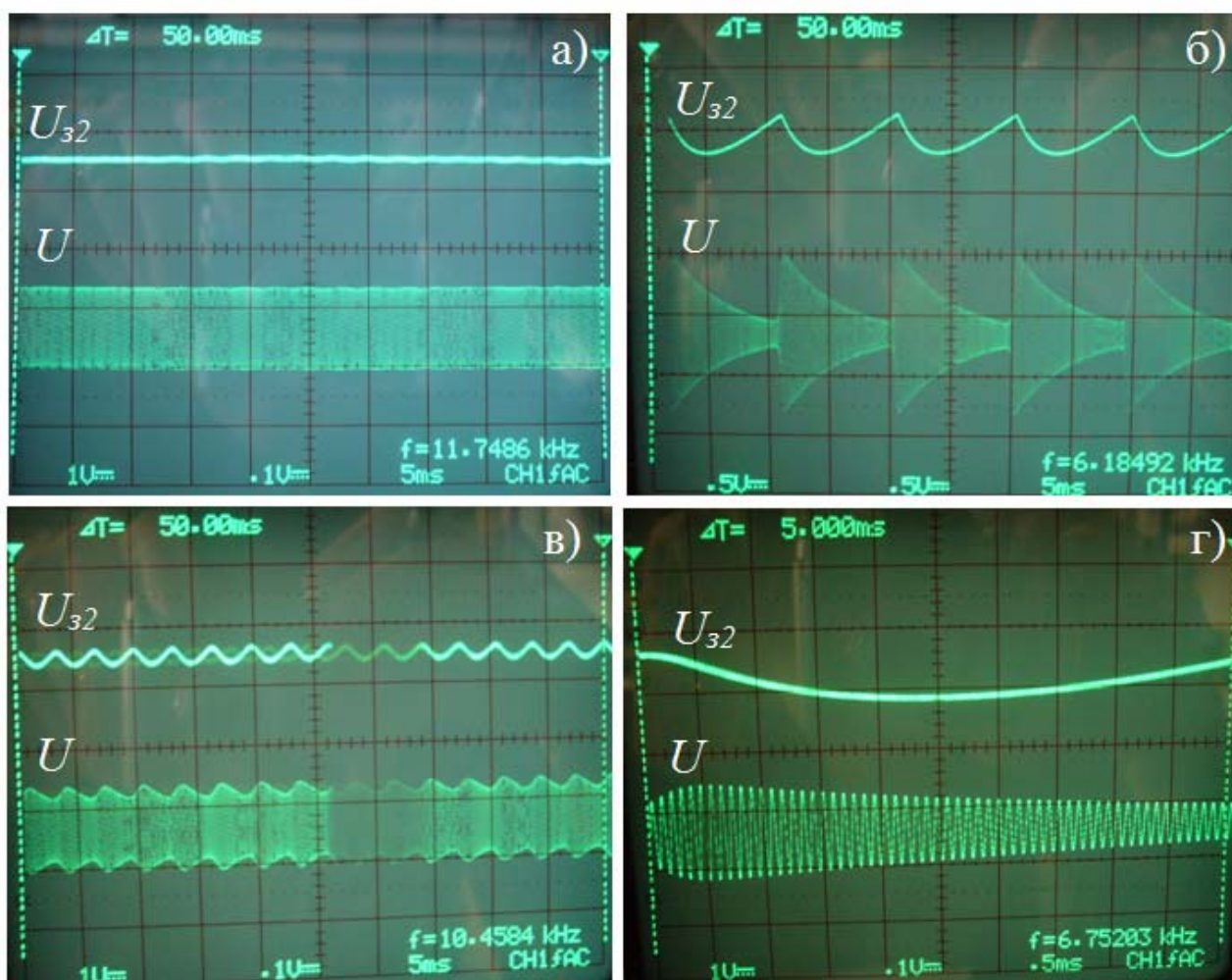
$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega_0^{-1}(\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + x = 0, \\ \omega_0 \dot{z} = \mu - x^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Таким образом, эта модель и система (4.15) эквивалентны. При этом, в эксперименте, варьируя сопротивление  $R$ , можно менять параметр  $\omega_0$ , т.е. первый временной масштаб системы. В свою очередь, подаваемое на интегратор управляющее напряжение  $U_{32}^0$ , с помощью которого регулируется напряжение на втором затворе полевого транзистора, является аналогом второго временного масштаба – параметра  $\mu$  в математической модели (4.6).

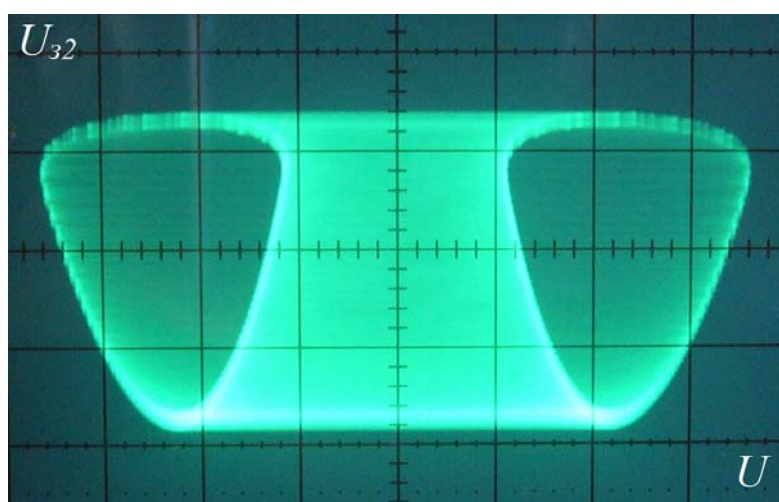
На рис.4.17 приведены экспериментальные временные реализации, сфотографированные с экрана осциллографа. Верхняя кривая отвечает напряжению на втором затворе полевого транзистора, а нижняя – напряжению автогенератора. Рис.4.17а отвечает автоколебаниям до порога бифуркации Неймарка-Сакера, а рис.4.17б,в демонстрируют квазипериодические колебания за ее порогом.<sup>73</sup> На рис.4.18 представлен пример двумерной проекции инвариантного тора на плоскость  $(U, U_{32})$  в виде фотографии с экрана осциллографа в области, где реализуется квазипериодическая динамика.

Отметим, что в случае рис.4.17б на один цикла «заряда-разряда» приходится около 60 колебаний автогенератора, см. увеличенный фрагмент реализации на рис.4.17г. Данное свойство системы может быть удобным для дальнейших экспериментальных исследований для случаев, когда необходимо, чтобы квазипериодические колебания доминировали.

<sup>73</sup> Бифуркация Неймарка-Сакера в эксперименте сопровождается неким вырождением: в момент бифуркации происходит вырождение трехмерного тора в двумерный предельный цикл (напряжение на втором затворе полевого транзистора становится постоянным).



**Рис.4.17.** Экспериментальные временные реализации для генератора квазипериодических колебаний для параметров: а)  $U_{32}^0 = -0.515$  мВ,  $R = 70$  кОм; б)  $U_{32}^0 = -0.297$  мВ,  $R = 70$  кОм; в)  $U_{32}^0 = -0.297$  мВ,  $R = 70$  кОм. Рисунок г) представляет собой увеличенный фрагмент б).



**Рис.4.18.** Пример двумерной проекции фазового портрета, сфотографированного с экрана осциллографа на плоскости переменных  $(U, U_{32}^0)$ .

### 4.3. Синхронизация квазипериодического генератора внешним сигналом

Обсудим теперь задачу о синхронизации генератора квазипериодических колебаний внешним сигналом. Мы рассмотрим здесь две основные задачи:

- синхронизация квазипериодического режима с несоизмеримыми частотами;
- синхронизация режима начинающейся разрушаться инвариантной кривой (синхронизация разрушенного тора)<sup>74</sup>.

В качестве автономной системы будем использовать генератор квазипериодических колебаний (4.6). Воздействие выберем в виде периодической последовательности *коротких импульсов*. Такой выбор, как мы увидим, облегчает интерпретацию получаемых результатов, поскольку в промежутке между импульсами динамика системы автономна. С другой стороны, импульсное воздействие может представлять интерес для приложений, например, в биофизике.

Итак, пусть внешний сигнал в виде периодической последовательности дельта-импульсов воздействует на генератор (4.6):

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= A \Sigma \delta(t - nT), \\ \dot{z} &= \mu - x^2.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Здесь  $A$  – амплитуда внешнего сигнала, а  $T$  – его период.

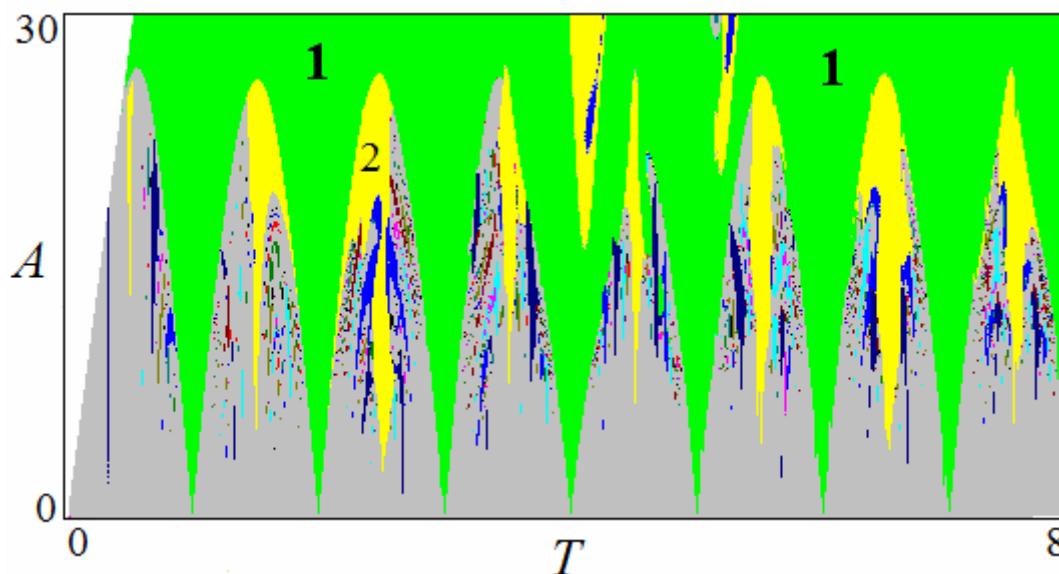
#### *Синхронизация базового предельного цикла*

Для последующего обсуждения важно рассмотреть синхронизацию исходного предельного цикла до порога возникновения инвариантного тора. Этому случаю отвечает, например, набор параметров  $\beta = 0.25$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\mu = 2.2$ . На рис.4.19 представлена карта режимов системы (4.17) на традиционной для неавтономных систем плоскости параметров период – амплитуда воздействия  $(T, A)$ . Цветовая палитра выбрана в соответствии с периодом режимов в стробоскопическом сечении, т.е. через период внешнего воздействия  $T$ , а серый цвет отвечает квазипериодическим и хаотическим режимам. Можно видеть систему языков Арнольда, из которых наибольшим размером характеризуются языки периода один (неподвижная точка в стробоскопическом сечении). Множество таких языков отвечает резонансам на гармониках

---

<sup>74</sup> Некоторые вопросы синхронизации двухчастотного генератора, в частности, синхронизации резонансного предельного цикла на торе для генератора Анищенко-Астахова с гармоническим возбуждением обсуждалась в [103]. Случай возбуждения сигналом второго аналогичного генератора рассмотрен в [39]. Некоторые интересные моменты для возбуждаемой системы Лоренц-84 можно найти в [101].

внешней силы. Языки следуют с интервалом  $T_0 \approx 1$ , что при выборе собственной частоты  $\omega_0 = 2\pi$  примерно отвечает собственному периоду колебаний генератора.



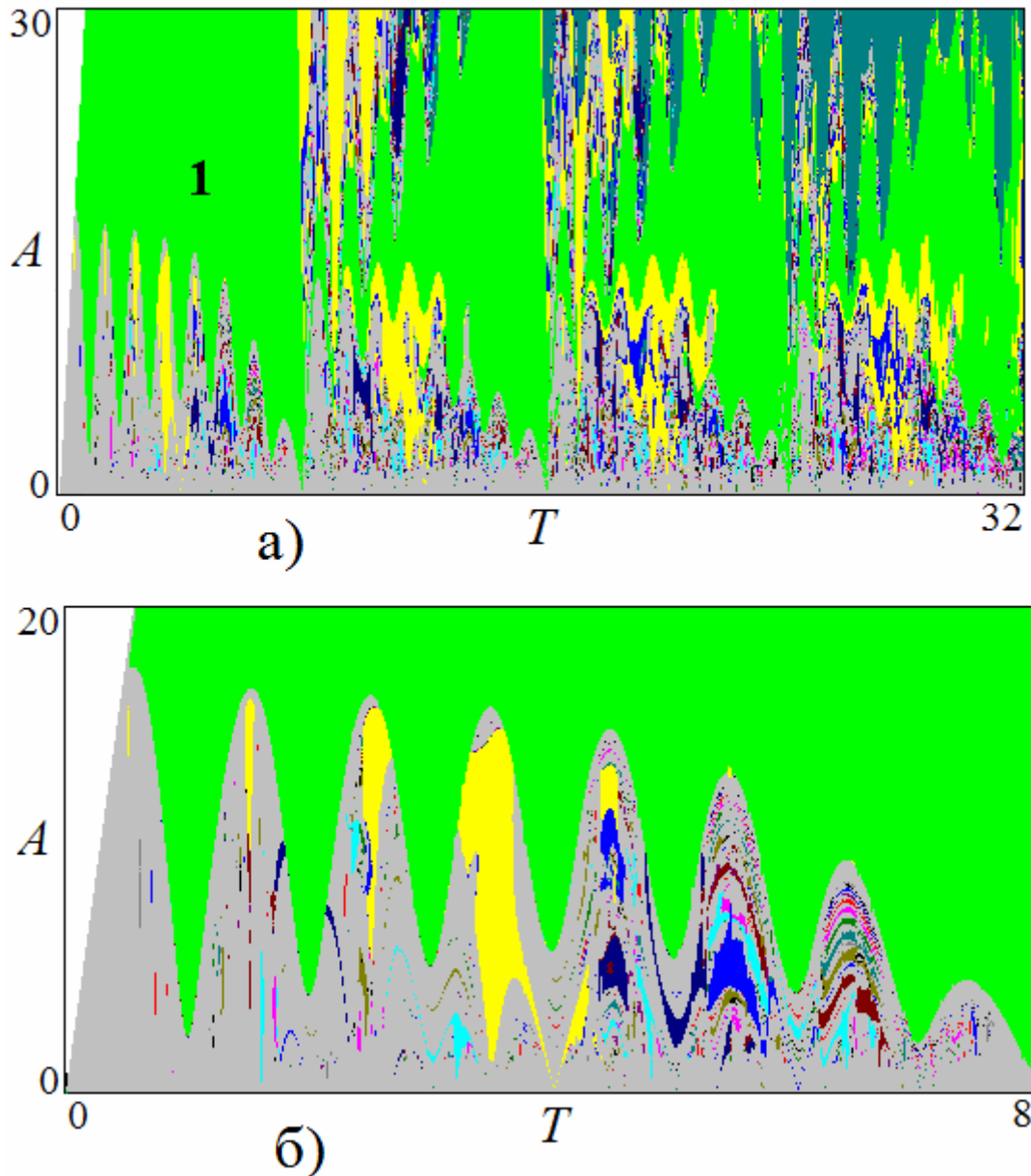
**Рис.4.19.** Карта динамических режимов возбуждаемого импульсами генератора (4.17) в случае, когда реализуется базовый однооборотный предельный цикл. Цифрами обозначены периоды режимов в стробоскопическом сечении. Значения параметров  $\lambda = 0, \beta = 0.25, \omega_0 = 2\pi, \mu = 2.2$

### ***Синхронизация инвариантного тора***

Теперь обратимся к случаю синхронизации квазипериодических колебаний. Выберем значения параметров  $\beta = 0.25, \omega_0 = 2\pi, \mu = 0.9$ , чему отвечает автономный инвариантный тор. Карта динамических режимов и ее выделенный фрагмент приведены на рис.4.20. При этом выбран увеличенный диапазон по периоду воздействия, чтобы можно было увидеть особенности наблюдаемой картины. В рассматриваемом случае также имеется множество языков периода 1, которые следуют примерно через равные интервалы  $T \approx 1$ . Однако теперь языки объединены в *группы*, примерно по семь-восемь языков, которые дают еще один период на карте  $T \approx 8$ . Для более четкого восприятия этого момента, на рис.4.20б показан увеличенный фрагмент карты динамических режимов, захватывающий первую группу из восьми языков периода 1.

Возникновение регулярных режимов периода 1 означает возможность стабилизации квазипериодических колебаний внешним сигналом, так что реализуется *полная синхронизация* системы внешним сигналом. Полная синхронизация носит пороговый по амплитуде характер, что отличает ее от синхронизации регулярного режима. Особенность картины на рис.4.20 состоит

в том, что порог полной синхронизации с ростом периода воздействия сначала повышается, а при  $T \approx 4$  начинает вновь понижаться. При  $T \approx 8$  он становится очень низким, почти нулевым. Затем картина повторяется, и что важно, не копируясь в деталях, но сохраняя общие черты описанной организации.

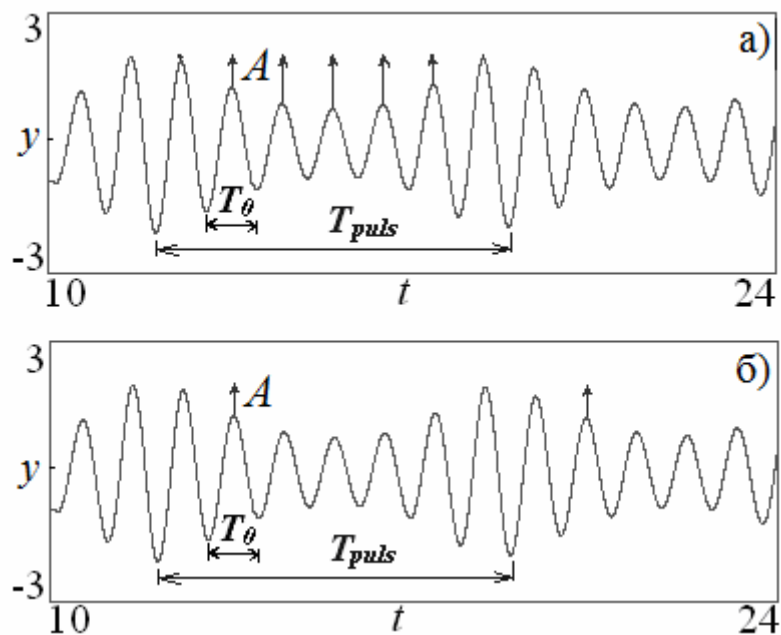


**Рис.4.20.** Карта динамических режимов возбуждаемого импульсами генератора (4.17) и ее увеличенный фрагмент в случае квазипериодической автономной динамики;  $\lambda = 0, \beta = 0.25, \omega_0 = 2\pi, \mu = 0.9$ .

Для объяснения наблюдаемых особенностей обратимся к реализации сигнала, показанной на рис.4.21. Это типичная для квазипериодического режима картина колебаний, на которой выделяются два характерных временных масштаба:

- $T_0$  – собственный период колебаний осциллятора, который при выбранном значении  $\omega_0 = 2\pi$  составляет  $T_0=1$ ,
- $T_{puls}$  – период биений квазипериодических колебаний, который из рис.4.21 можно оценить, как  $T_{puls} \approx 7 - 8$ .

Добавим теперь внешнее воздействие. Поскольку внешний сигнал представляет собой последовательность дельта-импульсов, то в промежутках между импульсами система автономна. В свою очередь, через каждый момент времени  $T$  координата  $y = \dot{x}$  получает добавку, равную амплитуде импульса<sup>75</sup>.



**Рис.4.21.** Рисунок а) иллюстрирует в пределах интервала  $T_{puls}$  различные возможности, приводящие к синхронизации квазипериодического сигнала с возникновением режима периода 1. Стрелками показаны различные варианты моментов действия и амплитуды внешних импульсов. Рисунок б) показывает действие импульсов, приводящих к одинаковому (примерно) амплитудному порогу области синхронизации.

Из рисунка а) хорошо видно, во-первых, что синхронизация, отвечающая периоду 1 в стробоскопическом сечении, возможна при действии импульса в моменты времени  $T=T_0, T=2T_0, T=3T_0, \dots, T=nT_0$ . Конечно, динамика системы (4.17) не одномерна и есть еще оставшиеся две переменные, поэтому такая картина носит не точный, а приближенный характер.

Во-вторых, с ростом числа периодов  $n$  амплитуда сигнала  $A$ , необходимая для синхронизации, сначала возрастает, а затем понижается. Причина – наличие биений в автономной системе с периодом  $T_{puls}$ .

<sup>75</sup> При воздействии дельта-функций по типу уравнений (4.17), как известно, координата  $x$  не меняется, а скорость  $y = \dot{x}$  получает добавку, равную амплитуде импульса  $A$ .

При  $T \approx T_{puls}$  необходимая для стабилизации амплитуда сигнала снова становится почти равной нулю. Таким образом, мы имеем качественное объяснение организации плоскости период – амплитуда воздействия в пределах одной группы языков на рис.4.20.

Рис.4.21б иллюстрирует, что при  $T > T_{puls}$  картина снова повторяется. При этом имеет место все же не точное воспроизведение, поскольку рассматривается режим с несоизмеримыми частотами, и автономные реализации не воспроизводят себя точно. В результате возникает вторая группа из 7-8 языков и т.д.

Мы обсудили картину режима полной синхронизации. Однако автономная система (4.6) характеризуется двумя несоизмеримыми частотами. При добавлении в систему внешнего воздействия появляется возможность реализации в системе квазипериодических режимов с тремя несоизмеримыми частотами, то есть трехчастотных торов. Для их обнаружения проведем анализ спектра показателей Ляпунова неавтономной системы на плоскости параметров воздействия.

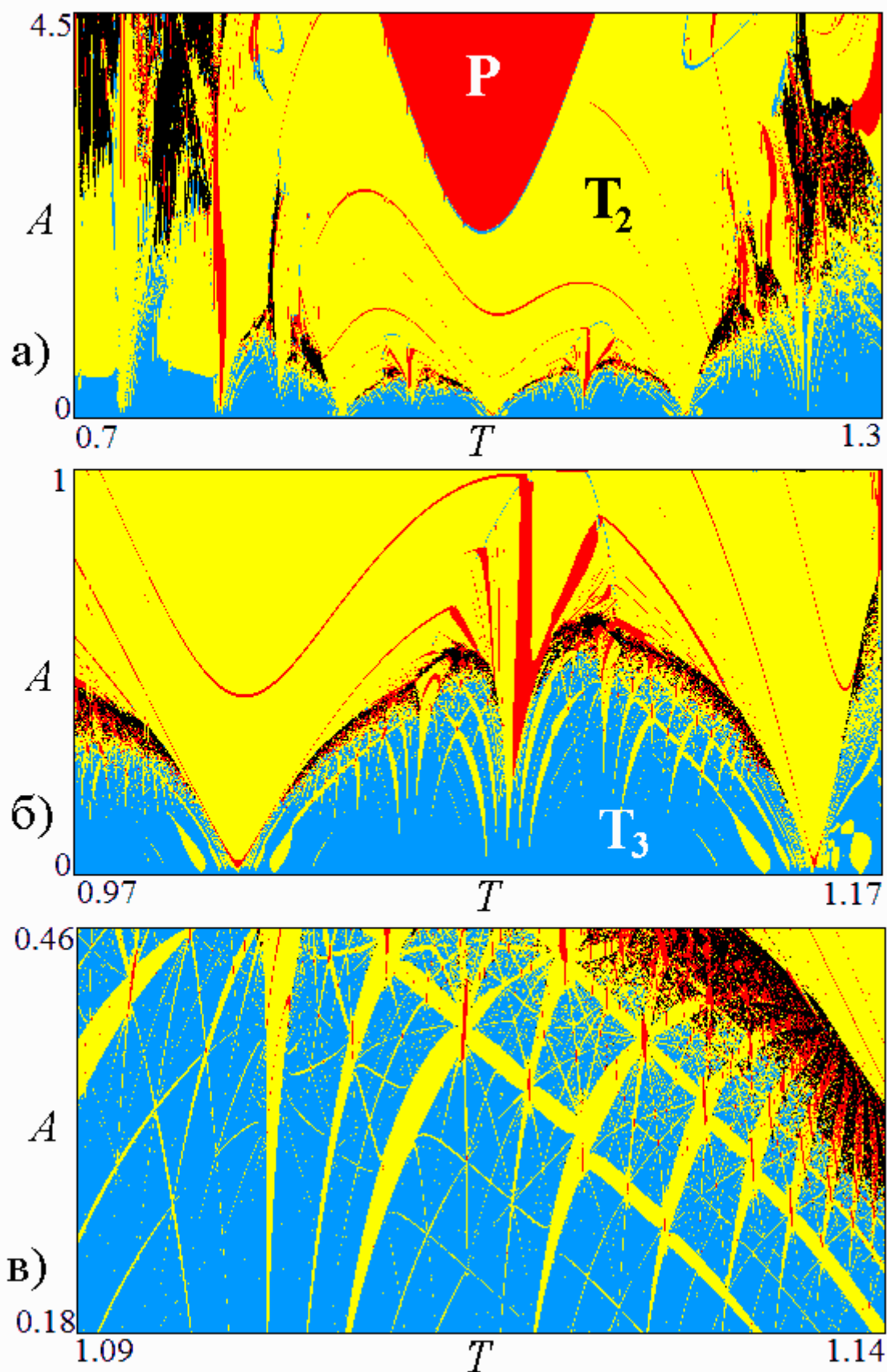
На рис.4.22 показана полученная карта ляпуновских показателей, цветовая палитра стандартная. Выбран крупный масштаб, отвечающий окрестности основного языка полной синхронизации<sup>76</sup>. Область полной синхронизации  $P$  имеет порог по амплитуде и характерное «округлое» основание. При малых амплитудах внешнего сигнала в системе наблюдаются трехчастотные квазипериодические колебания, хорошо видные на рис.4.22б. На рис.4.22б можно видеть также, что в область трехчастотных колебаний встроена система языков двухчастотных торов. При этом наиболее крупные языки имеют систему более узких «сателлитов». При еще большем увеличении, на рис.4.22в визуализируется картина *резонансной паутины Арнольда* – наблюдается система тонких полос двухчастотных режимов, на пересечении которых возникают небольшие острова периодических режимов высокого порядка.

На рис.4.23а-г представлены стробоскопические (т.е. через период внешнего воздействия) трехмерные сечения Пуанкаре для различных значений амплитуды воздействия. Как видно из рисунков, с уменьшением амплитуды происходит следующее. При достаточно больших амплитудах ( $A \approx 6$ ) в системе реализуется двухчастотный тор. С уменьшением амплитуды он претерпевает бифуркацию удвоения тора, и в системе реализуется удвоенный двухчастотный тор. Затем удвоенный тор становится трехчастотным.

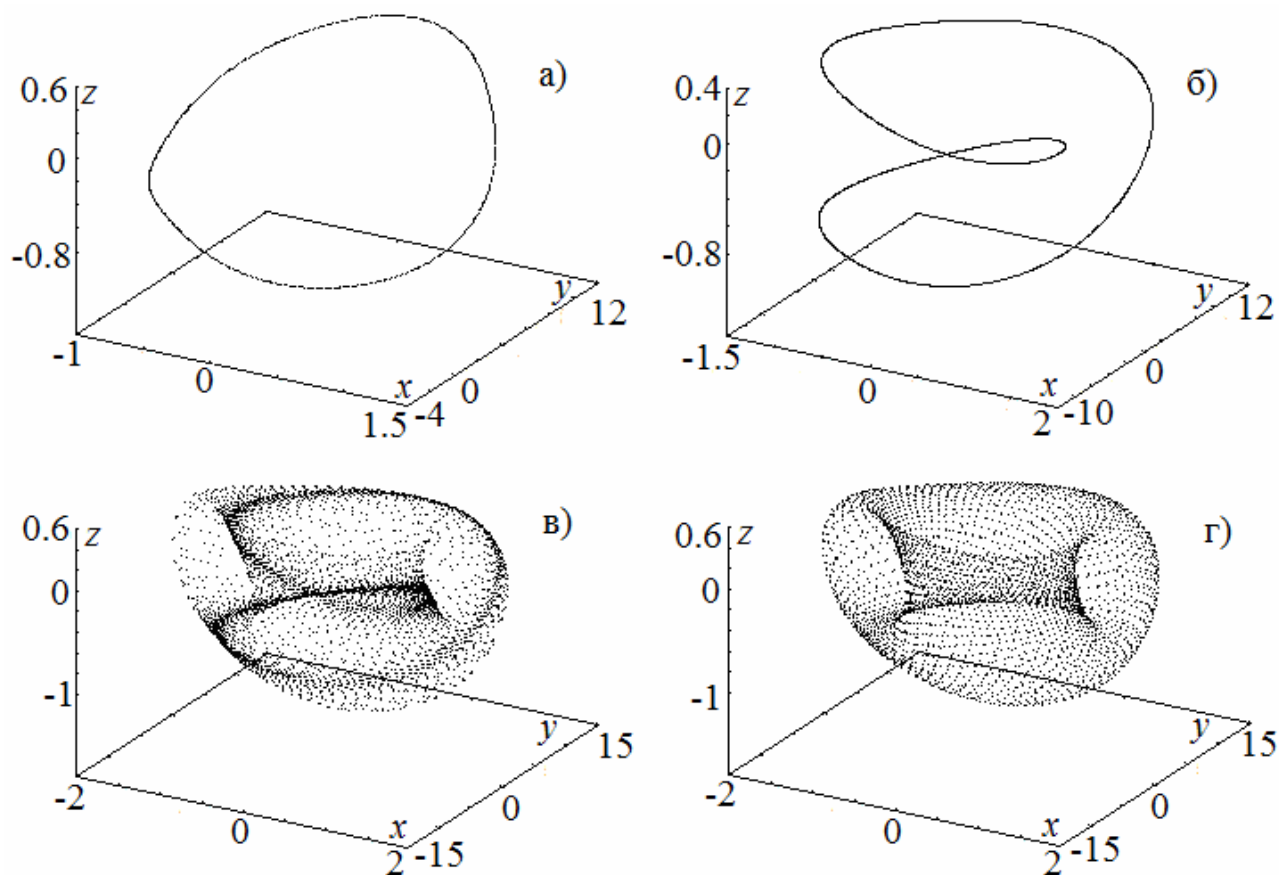
---

<sup>76</sup> Первый язык периода 1 на рис.4.20б.





**Рис.4.22.** Карта показателей Ляпунова в окрестности основного языка полной синхронизации возбуждаемого импульсами квазипериодического генератора (4.17) и ее увеличенные фрагменты. Значения параметров  $\lambda = 0, \beta = 0.25, \omega_0 = 2\pi, \mu = 0.9$  отвечают автономному двухчастотному тору.



**Рис.4.23.** Стробоскопические сечения Пуанкаре возбуждаемого квазипериодического генератора при  $\beta=0.5$ ; а)  $A=7$ , б)  $A=0.52$ , в)  $A=0.48$ , г)  $A=0.25$ .

Стоит отметить, что для случая *гармонического воздействия* карта ляпуновских показателей в окрестности основного резонанса аналогична представленной на рис.4.22а, и визуально она практически идентична случаю импульсного сигнала.

### ***Синхронизация разрушающегося тора***

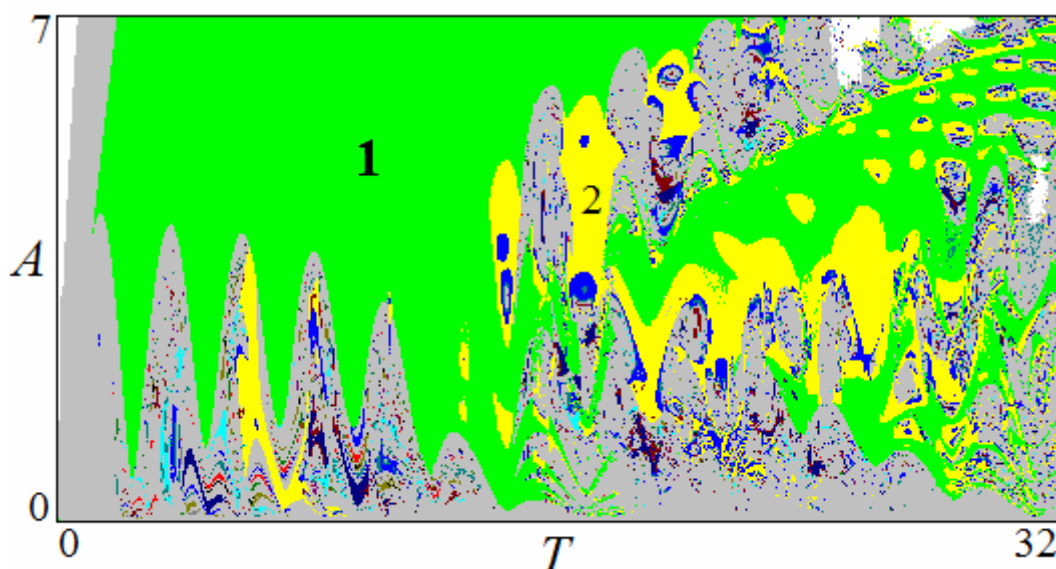
Теперь обратимся к задаче о синхронизации внешним воздействием хаотического режима, возникшего в результате разрушения инвариантного тора. Интересным является вопрос: проявятся ли, и как проявятся особенности хаоса, возникшего из разрушающегося тора? Выберем значения параметров  $\lambda = 0, \beta = 0.5, \omega_0 = 2.7, \mu = 0.3$ , что отвечает аттрактору на рис.4.14д.

На рис.4.24 приведена карта динамических режимов возбуждаемой импульсами хаотической системы (4.17) на плоскости параметров внешней силы ( $T, A$ ). Как видно из рисунка, картина в области  $T < 15-16$  имеет организацию, отчасти схожую со случаем синхронизации системы с квазипериодическим поведением. Данный факт объясняется тем, что хаос в автономной системе возник на основе разрушения инвариантного двухчастотного тора. Поэтому в ее динамике все же проявляются два

характерных временных масштаба:  $T_0 \approx 2.4$  и  $T_{puls} \approx 15-16$ , которые формируют соответствующую картину.

С увеличением периода внешних импульсов в области  $T > T_{puls}$  картина заметно меняется. Порог синхронизации увеличивается, основания языков разрушаются, возникают хаотические режимы внутри области периода 1. Причина состоит в том, что в результате увеличения длительности стадии автономной динамики успевает проявиться присущая хаотическому режиму *неустойчивость фазовых траекторий*, и характерная для квазипериодического поведения организация карты разрушается.

Если выполнить анализ показателей Ляпунова в рассматриваемом случае, то оказывается, что непериодические режимы на рис.4.24 представлены хаосом и двухчастотными торами. Трехчастотные тора оказываются разрушенными.



**Рис.4.24.** Карта динамических режимов возбуждаемого квазипериодического генератора (4.17) в режиме разрушающегося тора в автономной системе;  $\lambda = 0, \beta = 0.5, \omega_0 = 2.7, \mu = 0.3$ .

#### 4.4. Связанные квазипериодические генераторы

Рассмотрим теперь систему двух связанных генераторов (4.6)<sup>77</sup>:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{1,2} - (\lambda + z_{1,2} + x_{1,2}^2 - \frac{1}{2}x_{1,2}^4)\dot{x}_{1,2} + \omega_{01,02}^2 x_{1,2} + M_c(\dot{x}_{1,2} - \dot{x}_{2,1}) &= 0, \\ \dot{z}_{1,2} &= \mu_{1,2} - x_{1,2}^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь  $x_1, z_1$  – переменные, характеризующие первый генератор,  $x_2, z_2$  – переменные второго генератора,  $M_c$  – коэффициент диссипативной связи.

<sup>77</sup> Задача о синхронизации квазипериодических генераторов является сложной и многоплановой. Некоторые вопросы для связанных квазипериодических генераторов Анищенко-Астахова обсуждались в [39,41].

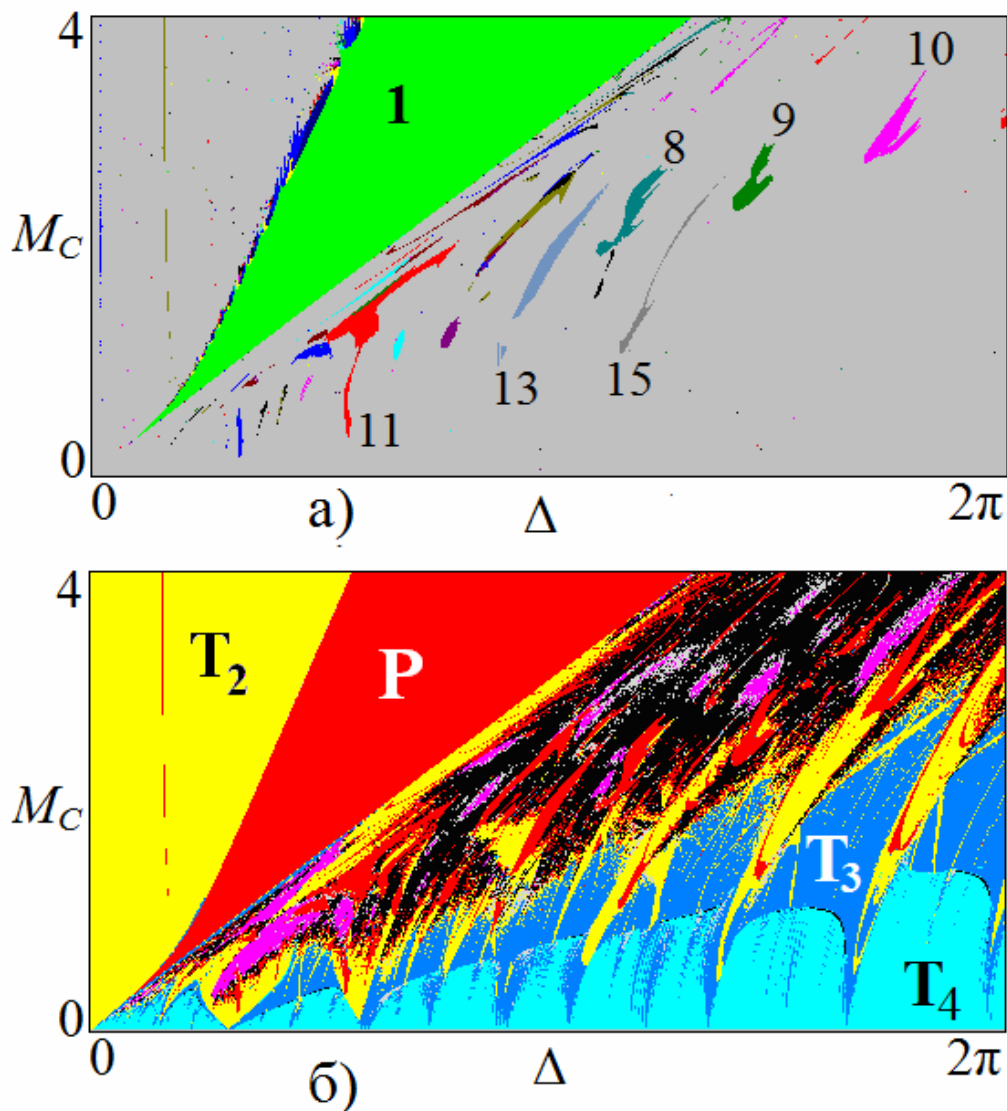
Система (4.18) характеризуется четырьмя независимыми частотами, которые регулируются четырьмя параметрами: собственными частотами генераторов  $\omega_{01}, \omega_{02}$  и частотами релаксационных колебаний  $\mu_1, \mu_2$ . Изменять их можно различными способами, и мы рассмотрим несколько вариантов.

Для нас важно рассмотреть ситуацию, когда подсистемы демонстрируют квазипериодические колебания. Для этого нужно отстроиться от возможных сильных резонансов. С этой целью в соответствии с ляпуновской картой рис.4.12 выберем область изменения параметра  $\omega_0$  так, что  $\omega_0 > 3$ . Теперь фиксируем  $\omega_{01} = \omega_0, \omega_{02} = \omega_0 + \Delta$ , где  $\Delta$  будет представлять собой регулируемую частотную расстройку генераторов. Остальные параметры выбираем  $\omega_0 = \pi, \mu_1 = \mu_2 = 0.9$ . В этом случае первый генератор в автономном режиме демонстрирует квазипериодические колебания, а изменение частотной расстройки  $\Delta$  в положительную область оставляет преимущественно автономный квазипериодический режим и во второй подсистеме.

На рис.4.25а представлена карта динамических режимов системы связанных генераторов (4.18) на плоскости частотная расстройка – величина связи  $(\Delta, M_c)$  в широком диапазоне изменения параметров. Цифры отвечают периодам циклов. На рис.4.25б показана соответствующая ляпуновская карта. Начнем обсуждение с самой большой области двухчастотных режимов, обозначенной символом  $T_2$  на рис.4.25б. Она имеет форму традиционного языка с основанием в точке  $\Delta = 0, M_c = 0$ . Внутри этой области имеет место режим *фазовой синхронизации квазипериодических колебаний*. Дадим несколько соответствующих иллюстраций.

На рис.4.26 показано бифуркационное дерево – зависимость переменной  $x_1$  от частотной расстройки  $\Delta$  в сечении Пуанкаре плоскостью  $\dot{x}_1 = 0$  при фиксированном уровне связи  $M_c = 2$ . Под ним расположен график зависимости числа вращения  $\nu$  от параметра  $\Delta$ . Здесь число вращения  $\nu$  вычислялось, как предел отношения  $N_t^{x_1} / N_t^{x_2}$ , где  $N_t^{x_1}$  – количество пересечений фазовой траекторией оси  $x_1 = 0$ , а  $N_t^{x_2}$  – количество пересечений фазовой траекторией оси  $x_2 = 0$ . Как видно из бифуркационной диаграммы, при  $\Delta < \Delta_1$  в системе наблюдается нерегулярный квазипериодический режим. На графике числа вращения аналогичная область отвечает постоянному числу вращения  $\nu = 1$ . Таким образом, генераторы взаимно захвачены, но их колебаний являются двухчастотными квазипериодическими.

При увеличении частотной расстройки при  $\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$  возникает чисто периодический режим. На карте режимов рис.4.25а ему отвечает область периода 1. Таким образом, при выходе из основного языка двухчастотной квазипериодичности, при большой связи возникает *полная синхронизация генераторов*, отвечающая простейшему периодическому режиму. Можно сказать, что при достаточно большой связи и достаточно большой частотной расстройке наблюдается *подавление квазипериодических колебаний* за счет взаимодействия генераторов. При этом полная синхронизация имеет порог по величине связи.

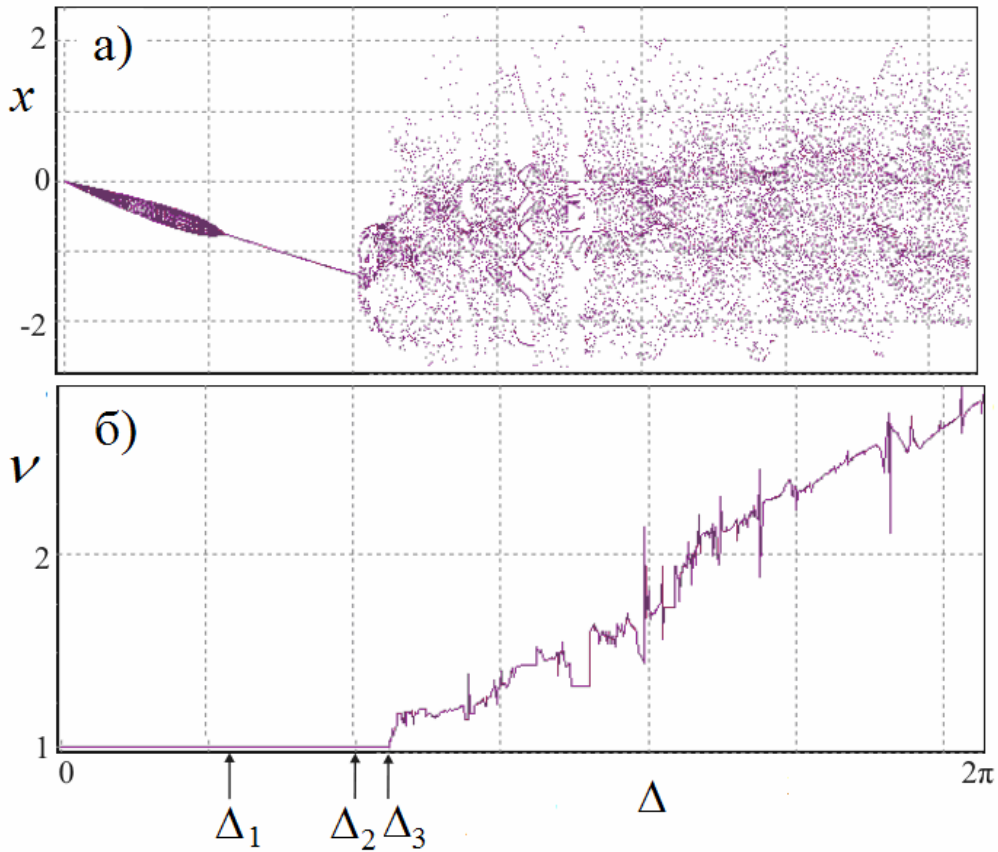


**Рис.4.25.** Карта динамических режимов (а) и карта ляпуновских показателей (б) связанных квазипериодических генераторов (4.18) для значений параметров  $\lambda = 0$ ,  $\omega_0 = \pi$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$ .

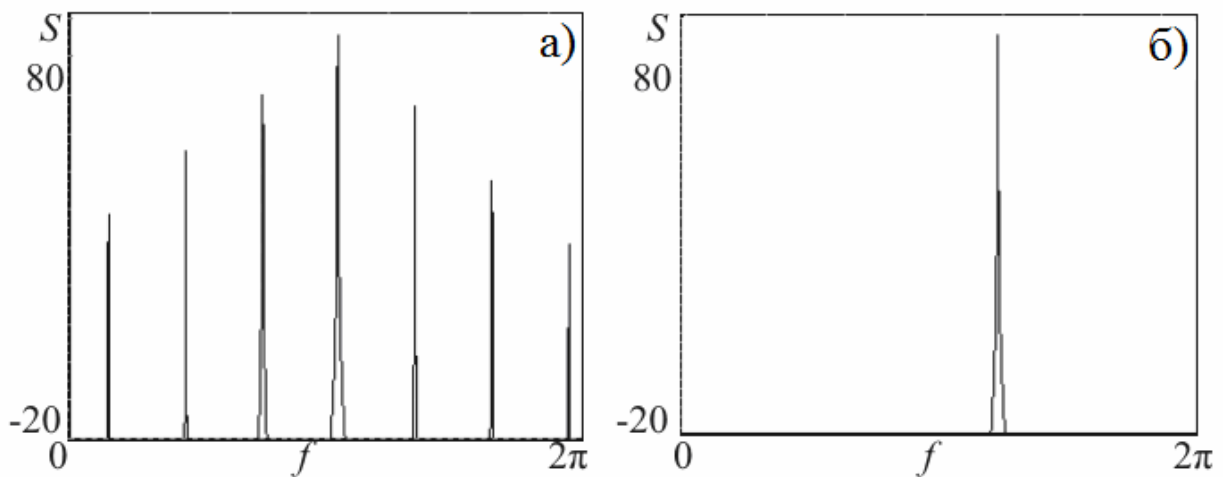
Рис.4.27 демонстрирует эволюцию спектра Фурье при переходе от квазипериодической фазовой синхронизации к полной синхронизации с захватом всех частотных компонент. Частоту возникающей основной компоненты можно легко оценить по формуле:

$$\omega_0^{cp} = \frac{\omega_{01} + \omega_{02}}{2} = \omega_0 + \frac{\Delta}{2}. \quad (4.19)$$

Далее, в небольшом интервале в диапазоне  $\Delta_2 < \Delta < \Delta_3$ , как видно из графика числа вращения на рис.4.26, также имеет место фазовая синхронизация, но режим снова становится неперiodическим (двухчастотным).

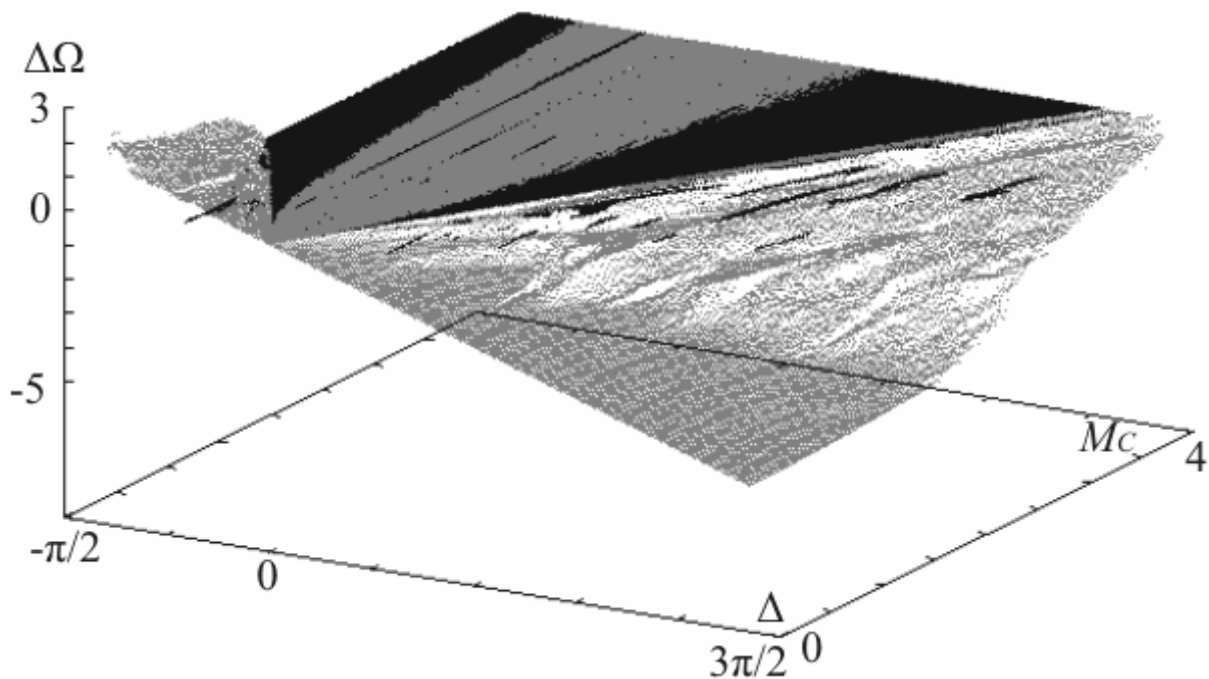


**Рис.4.26.** Бифуркационное дерево и график зависимости числа вращения  $\nu$  системы (4.18) для  $\lambda = 0, \omega_0 = \pi, \mu = 0.9, M_C = 2$ .



**Рис.4.27.** Спектры Фурье системы (4.18) для значений параметров  $\lambda = 0, \omega_0 = \pi, \mu = 0.9, M_C = 2$ ; а)  $\Delta = 0.5$ , б)  $\Delta = 1.5$ .

Еще одна иллюстрация фазовой синхронизации в системе (4.18) дана на рис.4.28. На этом рисунке представлена трехмерная поверхность, дающая зависимость разности фаз генераторов  $\Delta\Omega$  от частотной расстройки и параметра связи<sup>78</sup>. Нерегулярные режимы на построенной поверхности отмечены серым цветом. Черным цветом показаны периодические режимы. Как видно из рисунка, захват квазипериодических колебаний происходит не только при малой связи и расстройке, но и при больших значениях параметров.

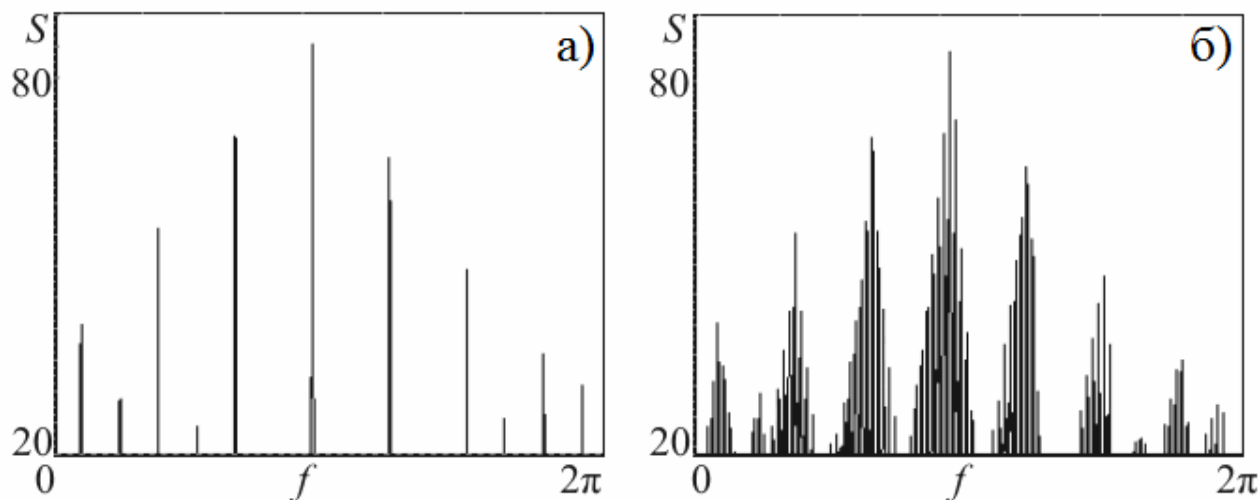


**Рис.4.28.** Поверхность разности наблюдаемых частот связанных квазипериодических генераторов (4.18) в зависимости от частотной расстройки и величины связи. Серый цвет – нерегулярные режимы, черный – периодические.

Язык полной синхронизации на рис.4.25а сужается при уменьшении связи и имеет порог по ее величине. Это означает, что при выходе из основной двухчастотной области при малой связи будет возникать квазипериодический режим более высокой размерности, рис.4.25б. Особенность данной системы состоит в том, что при малой связи практически сразу происходит переход от двухчастотного к четырехчастотному тору. Причина, скорее всего, в идентичности генераторов по второму частотному параметру:  $\mu_1 = \mu_2$ . На рис.4.29 представлены примеры спектров Фурье, иллюстрирующее такой переход от двухчастотных к четырехчастотным колебаниям. На рисунке хорошо видно, что для двухчастотных квазипериодических колебаний (рис.4.29а) спектр имеет характерный вид: основной пик окружен

<sup>78</sup> В данном случае аттракторы являются фазово-когерентными, и их фазы хорошо определяются чисто геометрическим образом [1].

компонентами-сателлитами. На рис.4.29б изображен спектр для четырехчастотного квазипериодического режима. В этом случае около компонент рис.4.29а появились новые компоненты-сателлиты.

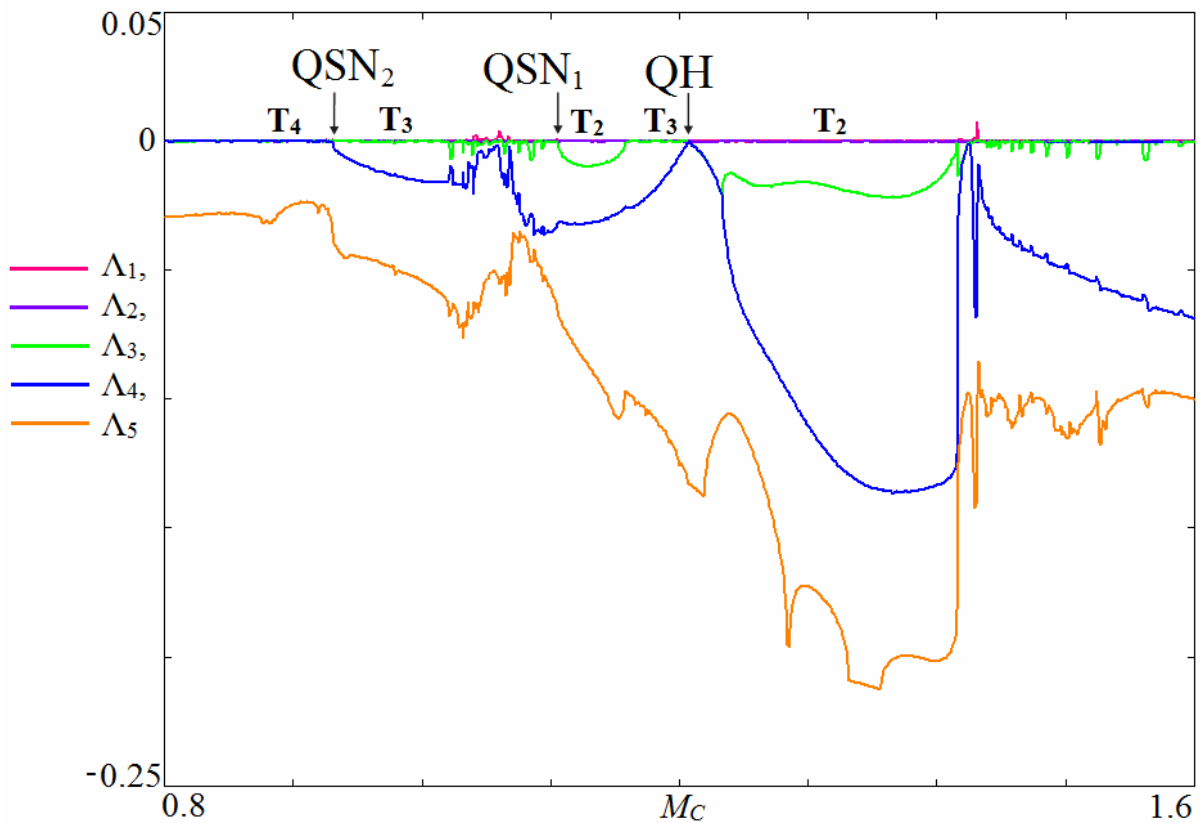


**Рис.4.29.** Спектры Фурье системы (4.18), значения параметров  $\lambda = 0, \omega_0 = \pi, \mu = 0.9, M_c = 0.07$ ; а)  $\Delta = 0.05$ , б)  $\Delta = 0.1$ .

Вернемся к устройству плоскости параметров на рис.4.25б. Можно видеть, что при малой связи доминируют четырехчастотные торы. С другой стороны, имеет место система языков трехчастотных торов, основания которых расположены на оси частотной расстройки  $\Delta$ . Вершины этих языков выстроены вдоль границы, которая отделяет возникающую при большой связи сплошную полосу трехчастотных режимов. В эту полосу встроены области двухчастотной квазипериодичности, а при еще большей связи возникают хаос и гиперхаос. Внутри областей двухчастотной квазипериодичности, хаоса и гиперхаоса имеется система островов периодических режимов более высокого порядка. Они, однако, не образуют какой-либо регулярной структуры. Все области периодических режимов имеют порог по величине связи.

На рис.4.30 показан график зависимости старших ляпуновских показателей от величины связи для частотной расстройки ( $\Delta=4.52$ ). Этот график позволяет описать эволюцию торов с ростом связи. Можно видеть, что области торов разной размерности чередуются. В рассматриваемом случае возможны два типа квазипериодических бифуркаций. Так в точке  $QSN_1$  происходит седло-узловая бифуркация двухчастотных торов с рождением трехчастотного тора. В точке  $QSN_2$  – аналогичная бифуркация, но для торов более высокой размерности. В свою очередь, в точке  $QH$  происходит квазипериодическая бифуркация Неймарка-Сакера мягкого рождения трехчастотного тора из двухчастотного.



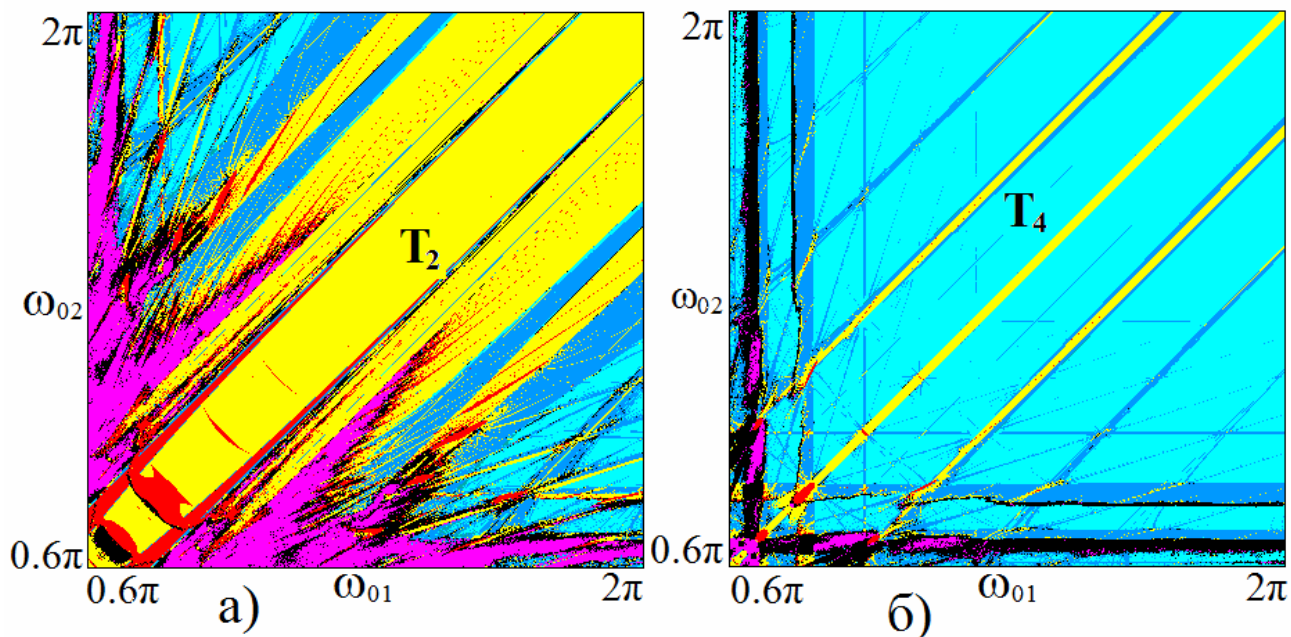


**Рис.4.30.** Графики зависимости старших ляпуновских показателей системы (4.18) от величины связи и точки квазипериодических бифуркаций разного типа;  $\lambda=0$ ,  $\omega_0=\pi$ ,  $\mu=0.9$ ,  $\Delta=4.52$ .

Как мы отмечали, исследуемая система характеризуется четырьмя частотными параметрами. Поэтому можно дать и другие иллюстрации вложения картины в пространство параметров. Рассмотрим динамику на плоскости параметров собственных частот генераторов ( $\omega_{01}, \omega_{02}$ ). Параметры  $\mu_1$  и  $\mu_2$  зафиксируем одинаковыми и соответствующими квазипериодическому режиму колебаний:  $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$ . На рис.4.31 представлены ляпуновские карты при достаточно большой и малой связи генераторов. Как видно из рис.4.31а, при большой связи и малых значениях частот в системе доминирует гиперхаос. Это связано с тем, что в автономном режиме подсистемы демонстрируют хаос, и каждая подсистема в спектре показателей Ляпунова имеет по одному положительному показателю. В связанном виде система характеризуется уже двумя положительными показателями, что и соответствует гиперхаосу.

На рисунке наблюдается симметрия картины относительно линии равенства частот  $\omega_{01} = \omega_{02}$ . Это естественно, так как генераторы идентичны по всем остальным параметрам. На рисунке хорошо видна полоса двухчастотных квазипериодических режимов вдоль диагонали  $\omega_{01} = \omega_{02}$ . Она соответствует области квазипериодической фазовой синхронизации.

При малой связи  $M_c = 0.05$  на рис.4.31б полоса фазовой синхронизации становится очень узкой. Теперь на карте хорошо видна структура резонансной паутины Арнольда. Она представляет собой погруженную в четырехчастотную область систему полос областей двухчастотных и трехчастотных режимов, на пересечении которых наблюдаются периодические режимы.

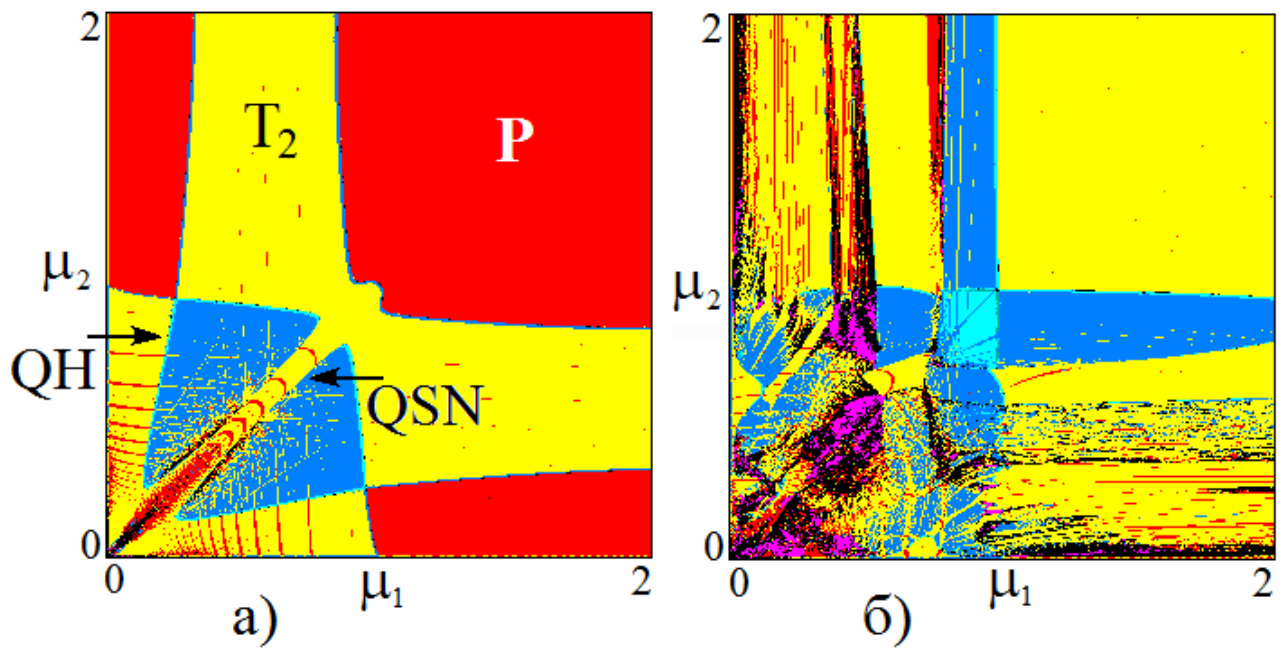


**Рис.4.31.** Карты ляпуновских показателей связанных квазипериодических генераторов (4.18) на плоскости их собственных частот;  $\lambda=0$ ,  $\omega_0=\pi$ ,  $\mu_1=\mu_2=0.9$ ,  $\Delta=0.1$ , а)  $M_c=0.5$ , б)  $M_c=0.05$ .

На рис.4.32 даны ляпуновские карты связанных квазипериодических генераторов на плоскости двух других частотных параметров ( $\mu_1, \mu_2$ ) при большой и малой связи. Вдоль диагонали также можно видеть область двухчастотных режимов в виде полосы со встроенными периодическими резонансами высших порядков. Она погружена в остров трехчастотных режимов. Интересно отметить, что одна граница области трехчастотных режимов определяется линией квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера  $QH$ , а вторая – линией седло-узловой бифуркации двухчастотного тора  $QSN$ <sup>79</sup>.

При уменьшении связи, как можно видеть из рис.4.32б, на место областей полной синхронизации приходят двухчастотные режимы. Появляются полосы трехчастотных режимов, на пересечении которых вблизи диагонали рисунка появляется область четырехчастотных торов.

<sup>79</sup> Здесь определение типа бифуркаций также осуществлено с помощью графикой зависимости ляпуновских показателей от параметра.



**Рис.4.32.** Карты показателей Ляпунова связанных квазипериодических генераторов (4.18). Значения параметров  $\lambda=0$ ,  $\omega_0=\pi$ ,  $M_C=0.1$ , а)  $\Delta=0$ , б)  $\Delta=0.75$ .

## Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003, 494 с. (*Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences, Cambridge university press, 2001, 432 p.)
2. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980, 360 с.
3. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981, 352 с.
4. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991, 366 с. (*Berge P., Pomeau Y., Vidal C.* L'ordre dans le chaos. Paris. Vidal. Hermann, 1984, 353 p.)
5. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. Учебник-монография. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2009, 312 с.
6. *Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O.* Synchronization: from simple to complex. Springer, 2009, 437 p.
7. *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991, 248 с. (*Glass L., MacKey M.C.* From clocks to chaos: The rhythms of life. Princeton, NY: Princeton Univ. Press, 1988, 248 p.)
8. *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории дифференциальных уравнений. МЦНМО, ВКМ НМУ, 1999, 400 с.
9. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2003, 443 с. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике, часть 2. РХД, Москва-Ижевск, 2009, 548 с.
10. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т.44, №8. СС. 339–342.
11. *Hopf E.* A mathematical example displaying the features of turbulence // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1948. Vol. 1. PP. 303–322.
12. *Рюэль Д., Такенс Ф.* О природе турбулентности. В сб. Странные аттракторы, под ред. Синая Я.Г. и Шильникова Л.П. М., Мир, 1981. СС. 117-151.
13. *Grebogi C., Ott E., James A. Yorkea J.* Attractors on an N-torus: Quasiperiodicity versus chaos // Physica D. 1985. Vol. 15, № 3. PP. 354–373.
14. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.

15. *Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика*. 2009. Т. 5, № 2. СС. 237-252.
16. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // *Нелинейная динамика*. 2008. Т. 4, № 1. СС. 39-55.
17. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *CHAOS*. 2008. Vol. 18. P. 037123.
18. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Physica D*. 1991. Vol. 49. PP. 387-475.
19. *Kim S., MacKay R.S., Guckenheimer J.* Resonance regions for families of torus maps // *Nonlinearity*. 1989. Vol. 2, № 3. PP. 391-404.
20. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В.* О моделировании связанных автоколебательных осцилляторов с помощью простейших фазовых отображений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20, № 2. СС. 112-137.
21. *Khibnik A.I., Braiman Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K.* Phase model analysis of two lasers with injected field // *Physica D*. 1998. Vol. 111, № 1-4. PP. 295-310.
22. *Guckenheimer J., Khibnik A.* Torus Maps from Weak Coupling of Strong Resonances. In book: *Methods of qualitative theory of differential equations and related topics*. American Mathematical Society, 2000. PP. 205-218.
23. *Linsay P.S., Cumming A.W.* Three-frequency quasiperiodicity, phase locking and the onset of chaos // *Physica D*. 1989. Vol. 40. PP. 196-217.
24. *Battelino P.M.* Persistence of three-frequency quasiperiodicity under large perturbations // *Phys. Rev. A*. 1988. Vol. 38. PP. 1495–1502.
25. *Ashwin P., Guasch J., Phelps J.M.* Rotation sets and phase-locking in an electronic three oscillator system // *Physica D*. 1993. Vol. 66, № 3-4. PP. 392-411.
26. *Rand R., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1980. Vol. 15. PP. 387-399.
27. *Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189, № 1-2. PP. 8-30.
28. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of three coupled van der Pol oscillators with application to circadian rhythms // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2007. Vol. 12, № 5. PP. 794–803.

29. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В., Чернышов Н.Ю. Синхронизация и квазипериодические колебания трех реактивно связанных осцилляторов // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 1. СС. 11-25.
30. Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В. Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов. Цепочка и решетка связанных элементов. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 2. С. 29-36.
31. Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П. Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. СС. 3-15.
32. Kuznetsov A.P., Roman Ju. P. Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // Physica D. 2009. Vol. 238, № 16. PP. 1499-1506.
33. Астахов В.В., Коблянский С.А., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Бифуркационный анализ динамики диссипативно связанных генераторов Ван дер Поля // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. Вып. 9. СС. 61-68.
34. Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Селезнев Е.П. Синхронизация связанных автоколебательных систем с неидентичными параметрами // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 2. СС. 62-78.
35. Broer H, Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web // Reprint from the Belgian Mathematical Society. 2008. PP. 769-787.
36. Broer H, Simó C., Vitolo R. Hopf saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: Analysis of a resonance «bubble» // Physica D. 2008. Vol. 237, № 13. PP. 1773–1799.
37. Vitolo R., Broer H., Simó C. Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // Nonlinearity. 2010. Vol. 23. PP. 1919-1947.
38. Broer H, Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2011. Vol. 16, № 1-2. PP. 154-184.
39. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 056202.

40. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. СС. 88-94.
41. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Устойчивость, синхронизация и разрушение квазипериодических колебаний // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 3. СС. 267-278.
42. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Станкевич Н.В.* Автономный генератор квазипериодических колебаний // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 2. СС. 51-61.
43. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. Vol. 15. PP. 1676-1681.
44. *Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* Динамический хаос в фазовых системах. Нижний Новгород: ННГУ, 2007, 256 с.
45. *Vasylenko A., Maistrenko Yu., Hasler M.* Modeling phase synchronization in systems of two and three coupled oscillators // Nonlinear Oscillations. 2004. Vol. 7, № 3. PP. 301-317.
46. *Maistrenko Y., Popovych O., Burylko O.* Mechanism of Desynchronization in the Finite-Dimensional Kuramoto Model // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. P.084102.
47. *Popovych O., Maistrenko Y., Tass P.* Phase chaos in coupled oscillators // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 065201.
48. *Maistrenko V., Vasylenko A., Maistrenko Y., Mosekilde E.* Phase chaos and multistability in the discrete Kuramoto model // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2010. Vol. 20, № 6. PP. 1811-1823.
49. *Осипов Г.В.* Синхронизация в неоднородных сетях осцилляторов. Нижний Новгород: ННГУ, 2006, 135 с.
50. *Осипов Г.В.* Синхронизация при обработке и передаче информации в нейронных сетях. Нижний Новгород: ННГУ, 2007, 99 с.
51. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988, 240 с.
52. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987, 424 с.
53. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: Издательская группа URSS, 2009, 320 с. Изд.2, доп.
54. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001, 296 с.

55. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2010. Т. 6, № 4. СС. 693-717.
56. *Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D*. 2013. Vol. 244, № 1. PP. 36–49.
57. Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связанных осцилляторов ван дер Поля // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19, № 5. СС. 76-90.
58. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // *Письма в ЖТФ*. 2010. Т. 36, вып. 10. СС. 73-80.
59. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т.18, № 4. СС. 17-32.
60. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // *Нелинейная динамика*. 2011. Т.7, № 3. СС. 411-425.
61. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. На пути к многомерным торам // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 6. СС. 65-84.
62. *Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* On the road towards multidimensional tori // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2011. Vol. 16. PP. 2371–2376.
63. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Тюрюкина Л.В., Сатаев И.Р. Сценарий Ландау – Хопфа в ансамбле взаимодействующих осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, №5. СС. 863–873.
64. Тюрюкина Л.В., Чернышов Н.Ю. Синхронизация возбуждаемых реактивно связанных фазовых осцилляторов // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20, № 1. СС. 81-90.
65. Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация в задачах. Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2010, 256 с.
66. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля - Дуффинга: Фазовая динамика и компьютерное



- моделирование // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. СС. 101-136.
67. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V. and Turukina L.V.* Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // *Physica D*. 2009. Vol. 238, № 14. PP.1203-1215.
68. *Froeschlé C., Lega E, Guzzo M.* Analysis of the chaotic behavior of orbits diffusing along the Arnold web // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2006. Vol. 95, № 1-4. PP. 141-153.
69. *Guzzo M., Lega E, Froeschlé C.* First numerical evidence of global Arnold diffusion in quasi-integrable systems // arXiv:nlin/0407059.
70. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. Изд-во Физматлит, Москва, 2002, 292с.; 2-е изд-е: Физматлит, Москва, 2006, 292 с.
71. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980, 607 с.
72. *Mendelowitz L., Verdugo A.* Dynamics of three coupled limit cycle oscillators with application to artificial intelligence // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2009. Vol. 14. PP. 270–283.
73. *Rand R., Wong J.* Dynamics of four coupled phase-only oscillators // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2008. Vol. 13. PP. 501–507.
74. *Braimanc Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K., Khibnik A.I.* Entrainment of solid-state laser arrays // *Phys. Rev. A*. 1995. Vol. 52. PP. 1500–1506.
75. *Khibnik A.I., Braimanc Y., Protopopescu V., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K.* Amplitude dropout in coupled lasers // *Phys. Rev. A*. 2000. Vol. 62. P. 063815.
76. *Глова А.Ф., Лысиков А.Ю.* Синхронизация трех лазеров с оптической связью на пространственном фильтре // *Квантовая Электроника*. 2002. № 4. СС. 315-318.
77. *Глова А.Ф.* Синхронизация излучения лазеров с оптической связью // *Квантовая Электроника*. 2003. № 4. СС. 283-306.
78. *Глова А.Ф. и др.* Эффективность синхронизации излучения волноводных СО<sub>2</sub>-лазеров с пространственным фильтром // *Квантовая Электроника*. 1997. № 4. СС. 318-320.
79. *Глова А.Ф. и др.* О когерентной генерации линейного набора лазеров СО<sub>2</sub>-лазеров с пространственным фильтром // *Квантовая Электроника*. 1996. № 6. СС. 515-517.
80. *Лиханский В.А., Напартович А.П.* Излучение оптически связанных лазеров // *Успехи физических наук*. 1990. № 3. СС. 101-143.

81. *Yacomotti A.M., Mindlin G.B., Giudici M., Balle S.* Coupled optical excitable cells // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. P. 036227.
82. *Привезенцев А.П., Саблин Н.И., Филиппенко Н.М., Фоменко Г.П.* Нелинейные колебания виртуального катода в триодной системе // *Радиотехника и электроника.* 1992. Т. 37, №7. С. 1242.
83. *Магда И.И., Пащенко А.В., Романов С.С.* К теории пучковых обратных связей в генераторах с виртуальным катодом // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения.* 2003. №4. СС. 167-170.
84. *Sze H., Price D., Harteneck B.* Phase locking of two strongly coupled vircators // *J. Appl. Phys.* 1990. Vol. 67, № 5. PP. 2278-2282.
85. *Репин Б.Г., Дубинов А.Е.* Исследование режимов фазировки трех виркаторов в рамках модели связанных осцилляторов Ван-дер-Поля // *Журнал технической физики.* 2006. Т. 76, вып. 4. СС. 99-104.
86. *Lee T. E., Cross M. C.* Pattern formation with trapped ions // *Phys. Rev. Lett.,* 2011. Vol. 106, P. 143001.
87. *Lifshitz R., Zumdieck A., Rogers J.L., Cross M.C.* Synchronization by Nonlinear Frequency Pulling // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. P. 224101.
88. Википедия. Эффект Джозефсона.
89. *Valkering T.P., Hooijer C.L.A., Kroon M.F.* Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit // *Physica D.* 2000. Vol. 135, № 1. PP. 137-153.
90. *Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Why two clocks synchronize: Energy balance of the synchronized clocks // *Chaos.* 2011. Vol. 21. P. 023129.
91. *Kanunnikov Yu., Lamper R.E.* Synchronization of pendulum clocks suspended on an elastic beam // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2003. Vol. 44, № 5. PP. 748-752.
92. *Kapitaniak M., Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Synchronization of clocks // *Physics Reports.* 2012. Vol. 517, № 1–2. PP. 1–69.
93. *Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Clustering of Huygens' Clocks // *Prog. Theor. Phys.* 2009. Vol. 122, № 4. PP. 1027-1033.
94. *Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Synchronization of the self-excited pendula suspended on the vertically displacing beam // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2013. Vol. 18, № 2. PP. 386–400.

95. Видео ролик «Синхронизация Гюйгенса, синхронизация пяти метрономов»  
<http://www.youtube.com/watch?v=8jb2hNHlwMM>.
96. *Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N.* Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D.* 1990. Vol. 41. PP. 403-449.
97. *Кузнецов А.П., Милованов С.В.* Субгармонический резонанс в уравнении Ван дер Поля // *Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика.* 2004. Т. 12, № 3. СС. 74-83.
98. *Мацумото Т.* Хаос в электронных схемах. ТИИЭР. 1987. Т. 75, № 8. СС. 66-87.
99. *Lorenz E.N.* Irregularity: a fundamental property of the atmosphere // *Tellus.* 1984. Vol. 36A. PP. 98–110.
100. *Shil'nikov A., Nicolis G., Nicolis C.* Bifurcation and Predictability Analysis of a Low-Order Atmospheric Circulation Model // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1995. Vol. 5, № 6. PP. 1701-1711.
101. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // *Nonlinearity.* 2002. Vol. 15. PP. 1205-1267.
102. *Rossa F., Witte V., Govaerts W., Kuznetsov Yu.* Numerical Periodic Normalization for Codim 2 Bifurcations of Limit Cycles. arXiv:1111.4445.
103. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76. P. 046216.
104. *Sze H., Price D., Harteneck B., Cooksey N.* A master-oscillator-driven phase-locked vircator array // *Journal of Applied Physic.* 1990. Vol. 68, Oct. 1. PP. 3073-3079.

Учебно-научное издание

*Кузнецов Александр Петрович  
Сатаев Игорь Рустамович  
Станкевич Наталья Владимировна  
Тюрюкина Людмила Владимировна*

## **ФИЗИКА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

Пособие издано в авторской редакции  
Ответственный за выпуск Л.В.Тюрюкина

---

Подписано в печать 11.06.2013 г.

Формат 60x84 1/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman.

Усл. печ. л. 15,6. Тираж 100 экз.

---

Саратов, Издательский центр «Наука»  
410600 Саратов, Пугачевская ул., д.117, офис 50.