

Электроника ламп с обратной волной. Под ред. В. Н. Шевчика и Д. И. Трубецкова. Изд-во Саратов. ун-та, 1975. 195 с.

В монографии рассматривается физическая сторона процессов в лампах с обратной волной. Большое внимание уделено расширению сферы применения метода последовательных приближений для решения некоторых новых задач электроники СВЧ.

Илл. 92, библиограф. 80 назв.

Лампам с обратной волной посвящено большое количество работ, опубликованных в периодической литературе. Именно обилие работ и их разбросанность по различным журналам затрудняют для начинающего изучение физики приборов данного класса. Для знатока — существующие обзорные работы по электронике ламп с обратной волной устарели, кроме того, их не назовешь исчерпывающими. Не спасает положения и монография Ю. Г. Альтшулера и А. С. Татаренко «Лампы малой мощности с обратной волной» (М., «Советское радио», 1963), в которой в семи из одиннадцати глав обсуждаются вопросы, связанные с расчетом замедляющих систем, используемых в лампах обратной волны, и только в одной главе изложена электроника этих приборов.

За время, прошедшее с момента выхода упомянутой книги, при исследовании ламп с обратной волной получено много новых результатов. В теоретическом плане достаточно указать на создание теории ламп с обратной волной в режиме больших сигналов, без использования которой при существующем уровне развития ЭВЦМ уже трудно мыслить разработку соответствующих приборов. Обращают на себя внимание проведенные в последние годы интересные теоретические и экспериментальные исследования резонансных и низковольтных ламп с обратной волной. Перечень новых результатов легко продолжить. Сказанное выше побудило авторов к написанию данной книги.

Предлагаемая вниманию читателей монография завершает определенный этап теоретических и экспериментальных исследований особенностей взаимодействия электронного потока с обратной электромагнитной волной. Подобные исследования проводятся в Саратовском государственном университете уже в течение многих лет. В монографию вошли лишь результаты последних исследований, поскольку более ранние нашли отражение в книге В. Н. Шевчика и Д. И. Трубецкого «Аналитические методы расчета в электронике СВЧ» (М., «Советское радио», 1970, глава III). Выбор материала, вошедшего в данную монографию, во многом определяется вкусами авторов, которые ни в коей мере не претендуют на исчерпывающее изложение многообразных физических явлений, имеющих место в приборах с обратной волной.

В данной книге три главы, две из которых посвящены изложению ряда новых результатов теории ламп с обратной волной; в одной из глав показано, как основные моменты изложенной теории применяются для анализа специальных конструкций СВЧ приборов с обратной волной. Кроме того, книге предпослано введение, цель которого качественно объяснить физические процессы, имеющие место при взаимодействии электронного потока с обратной электромагнитной волной.

Как следует из названия книги, основное внимание уделено физической стороне процессов в лампах с обратной волной. Почти все теоретические результаты сравниваются с экспериментальными (особенно это относится к главе II). Большое внимание уделено расширению сферы применения метода последовательных приближений для решения некоторых новых задач электроники СВЧ. В частности, в приближении слабого сигнала развиты теория предгенерационного режима работы лампы обратной волны типа 0 (раздел 1.2) и теория эффекта полного подавления входного сигнала в ЛОВО-усилителе (раздел 1.4). Обсуждается возможность распространения метода последовательных приближений применительно к ЛОВО на режим больших сигналов (раздел 1.3). По-видимому, впервые в литературе сделана попытка описать лампу обратной волны как автоколебательную систему с распределенными параметрами в рамках последовательной нестационарной теории, как в режиме слабых, так и больших сигналов (глава III). В этой главе речь идет о лампах обратной волны О- и М-типов. Материал излагается достаточно подробно, так что практически все выкладки воспроизвести легко.

Книга рассчитана на специалистов, работающих в области

электроники СВЧ, и частично может быть использована студентами при изучении соответствующих спецкурсов.

Монография является коллективной; в авторский коллектив входят:

Амиров Р. Ш. — 1.2, 1.4, II.1.

Безручко Б. П. — 1.2.

Булгакова Л. В. — 1.1.

Захарченко Ю. Ф. — 1.3.

Зборовский А. В. — 1.4, II.1, II.3, II.4.

Исаев В. А. — 1.3, II.2.

Кузнецов С. П. — глава III.

Синицын Н. И. — II.2, II.3, II.4.

Трубецков Д. И. — 1.1, 1.2, 1.4, глава III.

Шараевский Ю. П. — 1.1, 1.4.

Шевчик В. Н. — 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, II.2, II.3, II.4.

Общее редактирование книги осуществлено В. Н. Шевчиком и Д. И. Трубецковым, ими же написано введение.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЛАМПЫ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ КАК РАСПРЕДЕЛЕННОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Представляется достаточно очевидным, что последовательная теория должна рассматривать лампу обратной волны¹³ как распределенную автоколебательную систему. Целью теории должно быть исследование характера изменения величин, описывающих поле и электронный поток, как во времени, так и в пространстве. В данной главе предпринята попытка построить, хотя бы и сильно упрощенную, теорию ЛОВ М- и О-типов, в известной мере удовлетворяющую этому требованию.

В рамках существующей в настоящее время линейной теории ЛОВ при расчете пусковых условий генератора или коэффициента усиления усилителя обратной волны, как правило, предполагается, что все переменные величины гармонически зависят от времени. При исследовании процессов установления предполагается временная зависимость вида $e^{j\omega t + \alpha t}$. Такой подход является вполне законным в рамках линейной теории, если величина α достаточно мала и колебания являются «почти монохроматическими» [6]. Во всех известных нам работах ([7]—[14] и [1], стр. 215 и 349) использовалось именно это приближение.

В исследованиях по нелинейной теории ЛОВ практически всегда рассматриваются первые временные гармоники пере-

¹³ В данной главе практически всюду лампа обратной волны будет рассматриваться как генератор. В тех случаях, когда речь пойдет об усилителе обратной волны, это будет оговариваться особо.

менных величин (по существу, предполагается гармоническая зависимость переменных величин от времени), что значительно упрощает рабочие уравнения. Тем не менее уравнения нелинейной теории ЛОВ остаются сложными, не поддаются аналитическому решению и неудобны для численного решения на ЭВМ [2]. Дальнейшее упрощение уравнений достигается при использовании некоторых дополнительных предположений (глава I; [4] стр. 353 — ЛОВО; [2], стр. 376; [3] — ЛОВМ); однако, как правило, провести аналитическое решение до конца все-таки не удается.

При численном решении задачи получают некоторые распределения амплитуды поля по длине лампы, соответствующие стационарным состояниям. Однако вопрос об устойчивости этих состояний остается открытым (по-видимому, он даже не ставился). Очевидно, он и не может быть решен в рамках теории, основанной на предположении о гармоническом изменении величин во времени. В свете сказанного становится понятной необходимость создания нелинейной теории нестационарных процессов в ЛОВ, которая позволила бы исследовать процесс установления колебаний на всем его протяжении, уточнить величину времени установления (которая рассчитывается из линейной теории, дополненной нелинейными оценками [8]), проанализировать стационарные режимы на устойчивость, глубже понять особенности ЛОВ как распределенной автоколебательной системы.

В данной главе ЛОВ как распределенная автоколебательная система исследуется методом медленно меняющихся амплитуд. Предполагается, что поле электромагнитной волны в линии передачи можно представить как функцию с комплексной амплитудой, мало меняющейся на протяжении временного и пространственного периодов ВЧ поля. Кроме того, сделаны обычные предположения теории СВЧ приборов с длительным взаимодействием (учитывается взаимодействие потока с одной пространственной гармоникой поля; параметр усиления $D \ll 1$ для ЛОВМ и $C \ll 1$ для ЛОВО; используется одномерная модель ЛОВО и т. д.). В частности, учитывается одна временная гармоника ВЧ тока, которая, в отличие от стационарной теории, имеет медленно меняющуюся амплитуду. Уравнения возбуждения волновода током медленно меняющейся амплитуды получены в разделе III.1 настоящей главы на основании обобщения уравнений Л. А. Вайнштейна, справедливых для гармонических процессов [4].

Как и в предыдущих главах, для решения некоторых задач

использован метод последовательных приближений, который обобщен на нестационарную нелинейную теорию ЛОВ и позволяет несколько упростить достаточно сложные уравнения теории.

В отличие от предыдущих глав, основное внимание далее уделяется лампе обратной волны М-типа. Напомним кратко некоторые особенности этого прибора (рис. III.1). Как и в ЛОВО, электронный поток взаимодействует с полем волны, фазовая скорость которой близка к скорости электронов, а групповая направлена навстречу потоку. Вывод энергии рас-

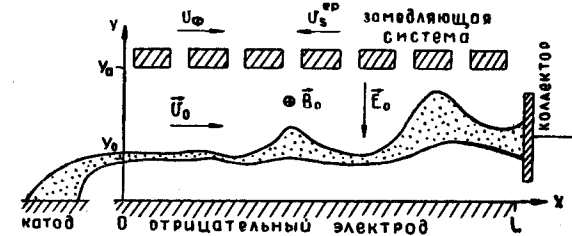


Рис. III.1. Схематическое изображение лампы обратной волны магнетронного типа (ЛОВМ)

положен на пушечном конце замедляющей системы; на коллекторном конце имеется входное устройство в случае усилителя или поглотитель, предотвращающий возникновение паразитной обратной связи, в случае генератора. В ЛОВМ электронный поток движется в скрещенных полях и отдает ВЧ полю потенциальную энергию, смещаясь в среднем к замедляющей системе. Оптимальное взаимодействие достигается в случае точного синхронизма электронов и волны. Как показывает линейная теория (см., например, [1]), влияние пространственного заряда приводит к уменьшению пускового тока генератора и увеличению коэффициента усиления в усилителе, что объясняется существованием так называемой диокотронной неустойчивости потока в скрещенных полях¹⁴. Нелинейные эффекты в ЛОВМ связаны, во-первых, с подъемом пучка к замедляющей системе и увеличением вследствие этого «эффективного» сопротивления связи, и, во-вторых, с оседанием электронов на замедляющую систему. Первый эффект приводит к

¹⁴ Далее при рассмотрении ЛОВМ влияние пространственного заряда не учитывается.

повышению коэффициента усиления усилителя и к появлению «жесткого» режима возбуждения генератора обратной волны (см. [2], стр. 380, а также раздел III.4 настоящей главы).

III. 1. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДА ТОКОМ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ АМПЛИТУДЫ

Пусть периодический волновод с малыми распределенными потерями возбуждается током $\vec{j} = \text{Re} \{ \vec{J}(r, t) e^{j\Omega t} \}$, где $\vec{J}(r, t)$ медленно меняющаяся по сравнению с $e^{j\Omega t}$ функция времени.

Будем искать поля в волноводе в следующем виде:

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \sum_s C_s(x, t) \vec{E}_s + C_{-s}(x, t) \vec{E}_{-s} - \frac{4\pi}{j\Omega\epsilon} \vec{J}_e - \frac{4\pi}{\epsilon\Omega^2} \frac{\partial \vec{J}_e}{\partial t} \right\} e^{j\Omega t}; \quad (\text{III. 1})$$

$$\vec{H} = \text{Re} \left\{ \sum_s C_s \vec{H}_s + C_{-s} \vec{H}_{-s} \right\} e^{j\Omega t},$$

где $\vec{E}_{\pm s} = \vec{E}_{\pm s}^0(x, y, z) e^{\mp j\beta_s x}$; $\vec{H}_{\pm s} = \vec{H}_{\pm s}^0(x, y, z) e^{\mp j\beta_s x}$ — соб-

ственные функции волновода, взятые на частоте Ω ; $\vec{E}_{\mp s}^0$ и $\vec{H}_{\pm s}^0$ — периодические функции x ; \vec{J}_e — продольная часть комплексной амплитуды плотности тока¹⁵.

Будем рассматривать поля на протяжении согласованного на концах отрезка волновода длины L , причем будем считать, что только в этой части волновода могут находиться источники. В большинстве практически интересных случаев такую

¹⁵ Если применить обратное преобразование Фурье к той части квазистатического поля, которая описывается членом $4\pi/j\omega\epsilon \vec{J}_e(\omega)$ в соответствующих уравнениях монографии [4], считая $\vec{J}|_{t=-\infty} = 0$ получим

$4\pi/\epsilon \cdot \int_{-\infty}^t \vec{J}_e(t^1) dt^1$. Этот интеграл можно приближенно представить в виде:

$$4\pi/\epsilon \cdot \text{Re} \{ \vec{J}_e(t) / j\Omega + 1/\Omega^2 + \partial \vec{J}_e(t) / \partial t + \dots \} e^{j\Omega t}.$$

В рамках предлагаемой теории имеет смысл рассматривать не более двух первых членов этого разложения. Заметим, что учет поля пространственного заряда, проводимый здесь, относится только к приборам 0-типа.

длину можно указать; в нашем частном случае L представляет собой длину лампы.

Наложим на функции $C_{\pm s}$ следующие условия медленности изменения во времени¹⁶:

$$\left| \frac{L}{C_{\pm s}} \left[\frac{\partial \gamma_s}{\partial \omega} \right]_{\omega=\Omega} \cdot \frac{\partial C_{\pm s}}{\partial t} \right| \ll 1; \\ \left| \frac{L}{C_{\pm s}} \left[\frac{\partial^2 \beta_s}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=\Omega} \frac{\partial^2 C_{\pm s}}{\partial t^2} \right| \ll 1; \quad (\text{III. 2})$$

$$\left| \left[\frac{\partial^2 \beta_s}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=\Omega} \frac{\partial^2 C_{\pm s}}{\partial t^2} \right| \ll \left| \left[\frac{\partial \beta_s}{\partial \omega} \right]_{\omega=\Omega} \frac{\partial C_{\pm s}}{\partial t} \right|,$$

где γ_s — параметр «холодных» потерь в волноводе, который, вообще говоря, зависит от частоты.

Записанные условия могут быть сформулированы иначе, если ввести ширину $\Delta\omega$ частотного спектра функции $C_{\pm s}$, которая, очевидно, будет тем меньше, чем медленнее меняется во времени $C_{\pm s}$. Тогда

$$\left| L \left[\frac{\partial \gamma_s}{\partial \omega} \right]_{\omega=\Omega} \Delta\omega \right| \ll 1; \quad \left| L \left[\frac{\partial^2 \beta_s}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=\Omega} (\Delta\omega)^2 \right| \ll 1; \\ \left| \left[\frac{\partial^2 \beta_s}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=\Omega} \Delta\omega \right| \ll \left| \frac{\partial \beta_s}{\partial \omega} \right|_{\omega=\Omega}. \quad (\text{III. 2a})$$

При этих условиях, как будет ясно из дальнейшего, величины $C_{\pm s}$ удовлетворяют уравнению вида:

$$\frac{1}{v_s^{\text{гп}}} \frac{\partial C_{\pm s}}{\partial t} \pm \frac{\partial C_{\pm s}}{\partial x} + \gamma_s C_{\pm s} = \frac{2}{N_s} \int_{S_t} \vec{j} \vec{E}_{\mp s} e^{-j\Omega t} dS, \quad (\text{III. 3})$$

где $v_s^{\text{гп}} = \left[\frac{\partial \beta_s}{\partial \omega} \right]_{\omega=\Omega}^{-1}$ — групповая скорость s -ой собственной волны; S_t — площадь поперечного сечения волновода; $\gamma_s, N_s, \vec{E}_{\mp s}$ взяты на частоте Ω ; чертой обозначено усреднение во времени за период $2\pi/\Omega$.

Рассмотрим некоторые свойства предлагаемого уравнения (III.3).

¹⁶ Заметим, что чем медленнее изменяется $C_{\pm s}$; тем длиннее отрезок волновода, который может рассматриваться в рамках данной теории (при прочих равных условиях). Укажем еще, что условие (III.2) не требует медленности изменения $C_{\pm s}$ за время прохождения волной длины L .

1. Распространение волн в пространстве, свободном от токов

Положим $\vec{j} = 0$, тогда общее решение (III.3) имеет вид:

$$C_s = e^{-\gamma_s t} f_1(x - v_s^{\text{rp}} t); \quad C_{-s} = e^{\gamma_s t} f_2(x - v_s^{\text{rp}} t); \quad (\text{III. 4})$$

Подчеркнем, что решения (III.4) реализуются в области, свободной от токов лишь при выполнении условий (III.2). В этом случае решение (III.4) соответствует результатам работы [16].

2. Возбуждение волновода гармоническим током

Пусть $\vec{j} = \text{Re} \{ \vec{j}(\omega, \vec{r}) e^{j\omega t} \}$; $\omega = \Omega + \Delta\omega$.

Разложим комплексную постоянную распространения в ряд Тейлора:

$$\beta_s(\omega) + j\gamma_s(\omega) = \beta_s(\Omega) + j\gamma_s(\Omega) + \beta_s'(\Omega)\Delta\omega + j\gamma_s'(\Omega)\Delta\omega + \beta_s''(\Omega)\frac{(\Delta\omega)^2}{2} + \dots$$

Используя это разложение, при выполнении условий (III.2 а) будем иметь:

$$[\vec{E}_{\pm s}]_{\omega} \approx \vec{E}_{\pm s}^0 e^{\mp j \left[\beta_s(\Omega) + \frac{\Delta\omega}{v_s^{\text{rp}}} \right] x} = [\vec{E}_{\pm s}]_{\Omega} e^{\mp j \frac{\Delta\omega}{v_s^{\text{rp}}} x}$$

$$\vec{J}_e(\vec{r}, t) = \vec{j}_e(\omega, \vec{r}) e^{j\Delta\omega t}$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{j\Omega\varepsilon} \left(\vec{J}_e - \frac{1}{j\Omega} \frac{\partial \vec{J}_e}{\partial t} \right) e^{j\Omega t} &= \frac{4\pi}{j\varepsilon} \vec{j}_e(\omega, \vec{r}) \frac{1 - \frac{\omega - \Omega}{\Omega}}{\Omega} e^{j\omega t} \approx \\ &\approx \frac{4\pi}{j\varepsilon} \vec{j}_e(\omega, \vec{r}) \frac{e^{j\omega t}}{\Omega \left(1 + \frac{\omega - \Omega}{\Omega} \right)} = \frac{4\pi}{j\omega\varepsilon} \vec{j}_e(\omega, \vec{r}) e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Если искать решение (III.3) в виде

$$C_{\pm s} = \overline{C_{\pm s}}(x) e^{j \left(t \mp \frac{x}{v_s^{\text{rp}}} \right)},$$

то для $C_{\pm s}$ получим уравнения Л. А. Вайнштейна ([4], стр. 99 и 112):

$$\pm \frac{d\overline{C_{\pm s}}}{dx} + \gamma_s \overline{C_{\pm s}} = \frac{1}{N_s} \int_{S_t} \vec{j}(\omega, \vec{r}) [\vec{E}_{\mp s}]_{\omega} dS, \quad (\text{III. 5})$$

а для поля, очевидно, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{Re} \left\{ \sum_s \overline{C_s} [\vec{E}_s]_{\omega} + \overline{C_{-s}} [\vec{E}_{-s}]_{\omega} - \frac{4\pi}{j\omega\varepsilon} \vec{j}_e(\omega, \vec{r}) \right\} e^{j\omega t} \\ \vec{H} &= \text{Re} \left\{ \sum_s \overline{C_s} [\vec{H}_s]_{\omega} + \overline{C_{-s}} [\vec{H}_{-s}]_{\omega} \right\} e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{III. 6})$$

Установленное соответствие означает, в частности, что уравнение (III.3) может быть получено из (III.5) путем обратного преобразования Фурье (подобно тому, как это сделано в [4] применительно к резонатору) в предположении медленности изменения во времени комплексных амплитуд, что позволяет пренебречь зависимостью γ_s ; v_s^{rp} ; $\vec{E}_{\pm s}^0$ и $\vec{H}_{\pm s}^0$ от частоты.

Если какое-либо из соотношений (III.2) нарушается, то в разложении β_s по степеням $\Delta\omega$ нельзя ограничиться первыми двумя членами. Применяя к (III.5) обратное преобразование Фурье, получим в этом случае в левой части уравнения (III.3) члены, содержащие γ_s' и β_s'' вида $j\gamma_s' \frac{\partial C_{\pm s}}{\partial t}$ и $j\beta_s''/2 \frac{\partial^2 C_{\pm s}}{\partial t^2}$, а при учете следующих членов разложения — производные более высокого порядка. Тогда решения вида (III.4) уже не будут иметь места. Таким образом, смысл соотношений (III.2) в том и заключается, что они позволяют пренебречь изменением профиля волны $f(x' \pm v_s^{\text{rp}} t)$ при распространении ее в свободной от источников области волновода.

3. Энергетические соотношения

Умножим уравнение (III.3) на $C_{\pm s}^*$ и отделим в полученном выражении действительные и мнимые части. Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial t} + 2\gamma_s v_s^{\text{rp}} W = \mp \frac{\partial P}{\partial x} - \int_{S_t} \vec{j} \vec{E} dS; \quad (\text{III. 7})$$

$$2P \left(\frac{1}{v_s^{\text{rp}}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \pm \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = - \int_{S_t} \vec{j} \text{Im} (C_{\pm s} \vec{E}_{\pm s} e^{j\Omega t}) dS,$$

где $P = -\frac{1}{4} N_s |C_{\pm s}|^2$ — поток мощности ($\pm s$)-ой волны;

$W = \frac{P}{v_s^{\text{rp}}}$ — плотность энергии волны; ψ — фаза функции

$C_{\pm s}$;

$\vec{E} = \text{Re} (C_{\pm s} \vec{E}_{\pm s} e^{j\Omega t})$ — электрическое поле волны; $\vec{E}_s^* = \vec{E}_{-s}$.

Смысл первого из соотношений (III.7) заключается в том, что энергия волны, втекающая в элементарный объем, ограниченный двумя поперечными сечениями, расположенными на расстоянии dx , и работа, совершаемая источниками в этом объеме (соответственно первый и второй члены в правой части), идут на накопление энергии поля и покрытие потерь в данном объеме (первый и второй члены в левой части). Таким образом, рассматриваемое выражение представляет собой запись закона сохранения энергии или, иначе говоря, его можно трактовать, как уравнение баланса активных мощностей в элементарном объеме. Второе выражение (III.7) описывает баланс реактивных мощностей в том же объеме. Если коэффициенты $C_{\pm s}$ не зависят от времени ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), то соотношения (III.7) переходят в соответствующие формулы [4] (стр. 112).

4. Возбуждение отрезка волновода, закороченного на концах

Будем считать, что в сечениях $x=0$ и $x=L$ происходит полное отражение волн, т. е. модули коэффициентов отражения R_0 и R_L равны 1. Поскольку выбор частоты Ω до некоторой степени произволен (сравни с теорией возбуждения резонаторов [4]), выберем ее так, чтобы $R_0=R_L=1$. Эта частота является одной из резонансных частот рассматриваемой электродинамической системы.

Если добротность системы велика (γ_s мало), а амплитуда возбуждающего тока мало меняется за время прохождения волной длины L , то коэффициент $C_{\pm s}$ можно считать мало меняющимся по длине L и за время L/v_s^{rp} , причем $C_s \approx C_{-s}$.

Пренебрегая зависимостью $C_{\pm s}$ от x , усредним (III.3) по длине отрезка и сложим уравнения для прямой и встречной волн. Будем иметь:

$$\frac{dC_s(t)}{dt} + \gamma_s v_s^{\text{rp}} C_s(t) = \frac{v_s^{\text{rp}}}{LN_s} \int_V \vec{j} (\vec{E}_s + \vec{E}_{-s}) e^{-j\Omega t} dV \quad (\text{III. 8})$$

$$\vec{E} = \text{Re} \sum_s C_s (\vec{E}_s + \vec{E}_{-s}) e^{j\Omega t} + (\text{квазистатическое поле});$$

$$\vec{H} = \text{Re} \sum_s C_s (\vec{H}_s + \vec{H}_{-s}) e^{j\Omega t}. \quad (\text{III. 9})$$

Если теперь ввести новые собственные функции $\vec{E}_s^r = \vec{E}_s + \vec{E}_{-s}$; $\vec{H}_s^r = \vec{H}_s + \vec{H}_{-s}$; норму $N_s^r = -\frac{LN_s}{v_s^{\text{rp}}}$ то (III.8) представляет со-

бой уравнение возбуждения резонатора с собственной частотой Ω и добротностью $\frac{\Omega}{\gamma_s v_s^{\text{rp}}}$. Заметим, что поскольку $N_s^r = -4P$

(P — поток мощности), то $N_s^r = -2 \frac{LN_s}{2v_s^{\text{rp}}} = 2W$ — удвоенная энергия, запасенная в резонаторе при $|C_s|=1$; это согласуется с [4].

Представим теперь уравнение (III.3) в удобной для дальнейшего форме. Разложим собственные функции $\vec{E}_{\pm s}$ (аналогично можно записать разложение функций $\vec{H}_{\pm s}$) в ряды по пространственным гармоникам:

$$\vec{E}_{\pm s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{E}_{\pm sn}^0 e^{\pm j\beta_{sn} x},$$

где $\beta_{sn} = \beta_s + \frac{2\pi n}{\Delta}$; Δ — период волновода. Будем считать, что

электронный поток эффективно взаимодействует только с одной пространственной гармоникой обратной волны ($-s$), фазовая скорость которой близка к скорости электронов и направлена в сторону их движения. Групповая скорость волны ($-s$), как это видно из (III.3), направлена навстречу электронному потоку. Поле других гармоник этой и других волн электроны «видят» быстро осциллирующим, поэтому правые части соответствующих уравнений (III.3) при усреднении дают нуль.

Тогда окончательно уравнение возбуждения обратной волны принимает вид:

$$\frac{1}{v_s^{\text{rp}}} \frac{\partial C_{-s}}{\partial t} - \frac{\partial C_{-s}}{\partial x} + \gamma_s C_{-s} = \frac{2}{N_s^r} \int_{S_t} \vec{j} \vec{E}_{sn}^0 e^{-j\Omega t + j|\beta_{sn}|x} dS. \quad (\text{III. 10})$$

III.-2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИИ ЛАМП С ОБРАТНОЙ ВОЛНОЙ ТИПА М

Значительное упрощение теории лучевых приборов М-типа достигается использованием адиабатического (или дрейфового) приближения. Условия его применимости неоднократно обсуждались ([1]—[5]) и останавливаться на них не будем. Ограничимся рассмотрением взаимодействия электронного

потока с полем одной пространственной гармоники. В адиабатическом приближении уравнения движения электронов в поле волны медленно меняющейся амплитуды имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - \operatorname{Re} \left\{ C_{-s}(x, t) \frac{E_{-sny}^0}{B_0} e^{j\Omega \left(t - \frac{x}{v_0} \right)} \right\};$$

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{Re} \left\{ C_{-s}(x, t) \frac{E_{-snx}^0}{B_0} e^{j\Omega \left(t - \frac{x}{v_0} \right)} \right\}; \quad (\text{III. 11})$$

$$x|_{t=t_0} = 0; \quad y|_{t=t_0} = y_0,$$

где $v_0 = E_0/B_0$ — невозмущенная скорость электронов; E_0 и B_0 — электрическое и магнитное статическое поля; частота Ω выбрана так, что $|\beta_{sn}(\Omega)| = \Omega/v_0$; t_0 — время влета электрона в пространство взаимодействия; E_{-sny}^0 и E_{-snx}^0 — функции, характеризующие распределение ВЧ поля по поперечной координате, которые имеют вид (см., например, [5]):

$$E_{-sny}^0 = jE_0 \frac{\operatorname{ch} |\beta_{sn} y|}{\operatorname{sh} |\beta_{sn} y_0|}; \quad E_{-snx}^0 = E_0 \frac{\operatorname{sh} |\beta_{sn} y|}{\operatorname{sh} |\beta_{sn} y_0|}. \quad (\text{III. 12})$$

Квазистатическое поле пространственного заряда в (III.11) не учитывается.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\tau = \Omega D t; \quad \tau_0 = \Omega D t_0; \quad q = \Omega D \frac{x}{v_0}; \quad Y = \frac{\Omega y_0}{v_0};$$

$$Y_0 = \frac{\Omega y_0}{v_0}; \quad Y_a = \frac{\Omega y_a}{v_0};$$

$$X = \Omega \left(\frac{x}{v_0} - t \right) + 2\pi + 2\pi \left[\frac{\Omega t_0}{2\pi} \right]; \quad (\text{III. 13})$$

$$X_0 = 2\pi - 2\pi \left[\frac{\Omega t_0}{2\pi} \right];$$

$$F(q, \tau) = \frac{C_{-s}(x, t)}{D}; \quad D = \left(\frac{I_0 K_0 \Omega}{E_0 v_0} \right)^{1/2}.$$

В формулах (III.13) квадратные и фигурные скобки означают соответственно целую и дробную часть числа¹⁷; K_0 — со-

противление связи замедляющей системы в точках статической траектории электронов, взятое на частоте Ω . По сравнению со стационарной теорией ([5], стр. 25) появилась еще одна независимая переменная — безразмерное время τ (за время $\Delta\tau = 1$ электроны проходят единичное безразмерное расстояние). Параметр D будем считать малым ($D \ll 1$); это, как правило, выполняется в реальных приборах.

Рассмотрим группу электронов, влетевших в пространство взаимодействия в течение одного периода ВЧ поля и имеющих всевозможные начальные фазы $0 < x_0 \leq 2\pi$. В силу медленности изменения амплитуды в пространстве и во времени (в рамках самосогласованной задачи это означает малость параметра D) можно считать, что все эти электроны «видят» одну и ту же комплексную амплитуду поля C_{-s} . Она зависит от положения группы в целом, которое может быть определено с точностью до величин порядка D и характеризуется безразмерной координатой $q = \tau - \tau_0$. Следовательно, уравнения движения можно записать в виде:

$$\frac{dX}{d\tau} = -\operatorname{Re} \left\{ jF(q, \tau) \frac{\operatorname{ch} Y}{\operatorname{sh} Y_0} e^{-jX} \right\};$$

$$\frac{dY}{d\tau} = \operatorname{Re} \left\{ F(q, \tau) \frac{\operatorname{sh} Y}{\operatorname{sh} Y_0} e^{-jX} \right\};$$

или

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} + \frac{\partial X}{\partial q} = -\operatorname{Re} \left\{ jF(q, \tau) \frac{\operatorname{ch} Y}{\operatorname{sh} Y_0} e^{-jX} \right\}; \quad (\text{III. 14})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} + \frac{\partial Y}{\partial q} = \operatorname{Re} \left\{ F(q, \tau) \frac{\operatorname{sh} Y}{\operatorname{sh} Y_0} e^{-jX} \right\};$$

причем

$$Y|_{q=0} = X_0; \quad Y|_{q=0} = Y_0, \quad (\text{III. 15})$$

амплитуды поля, движение двух «соседних» групп электронов будет почти одинаковым, и этот факт должен быть отражен в математическом аппарате теории. Между тем если бы мы ввели фазу так же, как это делается в стационарной теории, то соседним группам отвечали бы фазы, различающиеся на 2π . С течением времени фазы электронов, влетающих в пространство взаимодействия, катастрофически росли бы (по абсолютной величине); этот рост привел бы к трудностям при формулировке уравнений, хотя он не имеет глубокого физического смысла и является следствием неудачного определения фазы. Действительно, поскольку фаза определена с точностью до слагаемого 2π , ее всегда можно выбрать так, чтобы начальные фазы электронов каждой группы находились в интервале от 0 до 2π . Далее, при движении электронов их фазы не должны терпеть разрывов (скачков на 2π), которые требовали бы специального рассмотрения при решении уравнений движения. Эти два условия и были учтены при записи соотношений (III.13).

¹⁷ В стационарной теории лучевых приборов М-типа [3], [5] фазу определяют иначе: $x = \Omega(x/v_0 - t)$. В силу периодичности колебаний, в этом случае достаточно рассмотреть движение группы электронов, влетевших за период ВЧ поля с начальными фазами, например, от 0 до 2π . В нестационарной теории приходится следить за всеми электронами, непрерывно поступающими в пространство взаимодействия. В силу медленности изменения

Уравнение (III.14) определяет движение электронов той группы, которая в данный момент τ характеризуется координатой q , т. е. имеет время влета $\tau_0 = \tau - q$.

Выразим через новые переменные уравнение возбуждения (III.10). Используя закон сохранения заряда в виде $\rho dx \cdot ds = I_0 |dt_0| = \frac{I_0}{\Omega} |dx_0|$, с точностью до величин порядка D , получим:

$$\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} + dF = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(Y_a - Y) \frac{\text{sh } Y}{\text{sh } Y_0} e^{jX} dX_0, \quad (\text{III. 16})$$

где $u = v_s^{rp}/v_0$ — безразмерная групповая скорость волны;

$$d = \frac{v_0 \gamma_s}{\Omega D}; \quad \eta(Y_a - Y) = \begin{cases} 1 & \text{при } Y < Y_a \\ 0 & \text{при } Y \geq Y_a \end{cases} \text{ — функция,}$$

учитывающая оседание электронов на замедляющую систему¹⁸.

Соотношения (III.14) и (III.16) образуют систему основных уравнений нелинейной нестационарной теории ЛОВМ. Формально они могут быть получены из уравнений стационарной теории [5] (при $D \ll 1$) заменой оператора $\frac{d}{dq}$ на $\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial \tau}$ в уравнениях движения и на $\frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \tau}$ в уравнении возбуждения.

Уравнения (III.14) и (III.16) следует дополнить граничными и начальными условиями, так чтобы решение было однозначно определено. Начальные условия должны задавать состояние потока и поля в момент $\tau = 0$. Строго говоря, они определяются шумовыми явлениями. Однако вопрос о выделении регулярного сигнала из шумов целесообразнее решать в рамках линейной теории. При численном решении нелинейных уравнений можно задавать в качестве начальных условий состояния, полученные из линейной теории. Граничные условия,

¹⁸ При решении системы уравнений (III.14) и (III.16) следует учитывать тот факт, что электроны, осевшие на замедляющую систему, более не попадают в пространство взаимодействия. Формальное решение уравнений без учета сделанного замечания может в ряде случаев привести к неверным результатам (на этом вопросе мы остановимся еще раз в конце раздела).

накладываемые на X и Y в отсутствие предварительной модуляции потока, выражаются формулами (III.15). Условия для F определяются характером задачи: рассматривается ли генератор или усилитель обратной волны, имеются ли отражения на концах замедляющей системы и т. д.

Рассмотрим возможные частные случаи отдельно.

А. ЛОВМ-генератор без отражений на концах

Граничное условие в этом случае выражает отсутствие ВЧ поля на коллекторном конце:

$$F|_{q=l} = 0, \quad (\text{III. 17})$$

где l — безразмерная длина лампы.

Б. ЛОВМ-усилитель без отражений на концах

В этом случае ВЧ поле на коллекторном конце определяется входным сигналом:

$$F|_{q=l} = f(\tau), \quad (\text{III. 18})$$

где $f(\tau)$ — комплексная амплитуда входного сигнала, которая может быть произвольной, медленно меняющейся функцией времени.

В. Резонансная ЛОВМ-генератор (РЛОВМ)

Предположим, что на пушечном и коллекторном концах замедляющей системы имеет место отражение волн с комплексными коэффициентами отражения R_0 и R_l соответственно. Вследствие этого поле представляет собой суперпозицию волн, распространяющихся в прямом и обратном направлениях. Предположим, что вторая волна не взаимодействует эффективно с электронным потоком, поскольку находится в рассинхронизме с ним.

Поле этой волны запишем в виде:

$$\vec{E} = \text{Re} \{ C_s \vec{E}_s e^{j\omega t} \}; \quad C_s = D\Psi.$$

Тогда для Ψ из (III.3) получим:

$$\frac{1}{u} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial q} + d \cdot \Psi = 0. \quad (\text{III. 19})$$

Итак, теперь следует рассматривать систему уравнений (III.14), (III.16) и (III.19) с граничными условиями (III.15) и

$$(\Psi - R_0 F)|_{q=0} = 0; \quad (F - R_l \Psi)|_{q=l} = 0.$$

Из первого соотношения видно, что $\Psi(0, \tau) = R_0 F(0, \tau)$. Используя общее решение (III.19) $\Psi = e^{-d \cdot q} \cdot f(\tau - q/u)$, нахо-

дим, что $f(\tau) = R_0 F(0, \tau)$ и, следовательно, $\Psi(l, \tau) = e^{-d \cdot l} R_0 F(0, \tau - l/u)$.

Теперь можно исключить Ψ и записать граничное условие на коллекторном конце непосредственно для F

$$F(l, t) = e^{-d \cdot l} R_0 R_l F\left(0, \tau - \frac{l}{u}\right). \quad (\text{III. 20})$$

Уравнения (III.14) и (III.16) вместе с граничными условиями (III.15) и (III.20) описывают установление колебаний в РЛОВМ¹⁹.

Остановимся теперь на возможных упрощениях уравнений (III.14) и (III.16).

Предположим, что отрицательный электрод удален на бесконечность, т. е. $Y_0 \rightarrow \infty$, пусть $Y' = Y - Y_0$; $Y'_a = Y_a - Y_0$. Тогда вместо гиперболических функций в уравнениях появятся экспоненты и заменой $Z = e^{Y'+X}$ (которая соответствует некоторому конформному преобразованию комплексной плоскости Y', X) уравнения (III.14) и (III.16) сводятся к следующим:

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} + \frac{\partial Z}{\partial q} = F |Z|^2; \quad (\text{III. 21})$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} + d \cdot F = \overline{\eta} (|Z_a| - |Z|) Z, \quad (\text{III. 22})$$

где волнистой чертой обозначено усреднение по начальным фазам X_0 ; $|Z_a| = \overline{\epsilon |Z|}$, граничные условия при $q=l$ ставятся также, как и раньше, а при $q=0$ $Z|_{q=0} = \overline{\epsilon |X_0|}$.

Использование уравнений (III.21) — (III.22) позволит сильно сократить затраты машинного времени при численном реше-

¹⁹ Заметим, что поскольку в РЛОВМ имеет место многократное прохождение волны вдоль лампы, то в соотношениях (III.2), определяющих условия применимости рассматриваемой теории, длину L , вообще говоря, нельзя считать равной длине лампы. Величину L можно определить теперь как характерное расстояние, на котором происходит затухание волны, связанное с неполным отражением на концах и распределенными потерями (например, расстояние, на котором амплитуда уменьшается в e раз:

$$L \sim \frac{1}{\gamma_s + \frac{\ln |R_0 R_l|}{2L_1}},$$

где L_1 — длина лампы; формула справедлива при $L \gg L_1$).

нии задачи, так как они не содержат трансцендентных функций²⁰.

Для дальнейшего упрощения уравнений предположим, что амплитуда F — действительная величина. Это означает следующее: 1) волне можно приписать вполне определенную фазовую скорость, равную скорости потока (синхронизм)²¹; 2) входной сигнал ЛОВМ-усилителя должен иметь действительную амплитуду; 3) накладываются существенные ограничения на возможные начальные состояния потока и поля; последнее ограничение не имеет особого значения для ЛОВ-генератора, поскольку нарастающее во времени решение, которое получается из линейной теории (оно будет использоваться далее в качестве начального условия для нелинейных уравнений), удовлетворяет требованию синхронизма (III.3).

Введем новую величину Φ так, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} = F \quad (\text{III. 23})$$

$$\Phi|_{q=0} = 0 \quad (\text{III. 24})$$

Тогда из (III.21) следует:

$$\frac{dZ}{d\Phi} = |Z|^2.$$

Обозначим $Z = \bar{\xi} + j\eta$ и, отделяя в последнем уравнении действительные и мнимые части, получим:

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\Phi} = \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2; \quad \frac{d\eta}{d\Phi} = 0; \quad \bar{\xi}|_{\Phi=0} = \cos X_0; \quad \bar{\eta}|_{\Phi=0} = \sin X_0.$$

Решение этих уравнений имеет вид: $\bar{\eta} = \sin X_0$; $\bar{\xi} = \sin X_0 \cdot \text{ctg}(X_0 - \Phi \sin X_0)$, и уравнение возбуждения можно записать теперь следующим образом:

$$\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} + d \cdot F = G(\Phi), \quad (\text{III. 25})$$

²⁰ Сделанное замечание относится и к решению стационарной задачи, уравнения которой получаются из (III.21) — (III.22), если $\partial/\partial \tau = 0$.

²¹ Отсюда вовсе не следует, что фазовые скорости всех спектральных компонент сигнала должны быть равны. Приведем простой пример. Сложим две волны $y_1 = Ae^{i\omega_1 t - j\beta_1 x}$ и $y_2 = Ae^{j\omega_2 t - j\beta_2 x}$. Будем иметь: $y_3 = y_1 + y_2 = 2A \cos[(\omega_1 - \omega_2)t/2 - (\beta_1 - \beta_2)x/2] e^{j(\omega_1 + \omega_2)t/2 - j(\beta_1 + \beta_2)x/2}$. Таким образом, волне y_3 можно приписать действительную медленно меняющуюся амплитуду $2A \cos[(\omega_1 - \omega_2)t/2 - (\beta_1 - \beta_2)x/2]$ и фазовую скорость $(\omega_1 + \omega_2)/(\beta_1 + \beta_2)$, которая, вообще говоря, не равна фазовым скоростям волн y_1 и y_2 (соответственно ω_1/β_1 и ω_2/β_2).

где

$$G(\Phi) = \frac{1}{\pi} \int_{X_1(\Phi)}^{\pi} \sin X_0 \operatorname{ctg}(X_0 - \Phi \sin X_0) dX_0 \quad (\text{III. 26})$$

— функция Фейнштейна и Кайно [3]²² (см. рис. III.2). Нижний

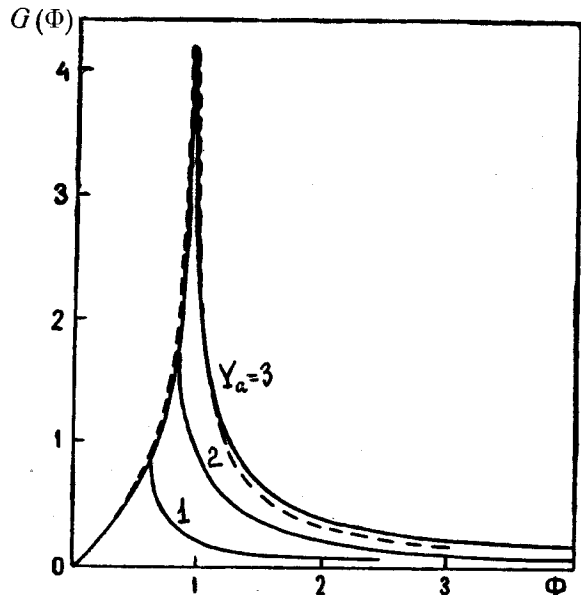


Рис. III.2. График функции $G(\Phi)$. Пунктиром показана аппроксимация функции G , использованная при численных расчетах $Y^1_{\alpha} = 3$

$$G(\Phi) = \begin{cases} \frac{\Phi}{1 - 0,8564 \Phi^2} ; & \Phi < 0,9502 \\ \frac{0,4213}{1,1582 \Phi - 1} ; & \Phi > 0,9502 \end{cases}$$

предел интегрирования учитывает оседание электронов на замедляющую систему и определяется так: $X_1(\Phi) = 0$ при

²² Если положить $\partial/\partial\tau = 0$ и исключить F из уравнений (III.23) — (III.25), то получится уравнение стационарного режима ЛОВМ в форме, приведенной в [3].

$\Phi \leq 1 - e^{-Y^1_{\alpha}}$; $X_1(\Phi)$ есть решение трансцендентного уравнения

$$\frac{\sin X_1}{\sin(X_1 - \Phi \sin X_1)} = e^{Y^1_{\alpha}},$$

заключенное между 0 и π , при $\Phi > 1 - e^{-Y^1_{\alpha}}$. Отметим, что в отличие от [3], не учитывается оседание электронов на отрицательный электрод, которое в общем-то не существенно. С другой стороны, учет оседания электронов на замедляющую систему является принципиально необходимым, поскольку, как будет показано ниже, без оседания невозможен устойчивый стационарный режим генерации.

Теперь задача свелась к решению нелинейной системы уравнений в частных производных (III.23) и (III.25) с граничными условиями (III.17) — (III.20) и (III.24).

Далее для простоты ограничимся частным случаем $u = 1$ (т. е. $|v_s^{rp}| = v_0$) и $d = 0$. Подставив (III.23) в (III.25), будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + G(\Phi) = 0. \quad (\text{III. 27})$$

Это квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа — уравнение Клейна-Гордона (см., например, [17])²³.

Уравнение (III.27) имеет два семейства характеристик (рис. III.3).

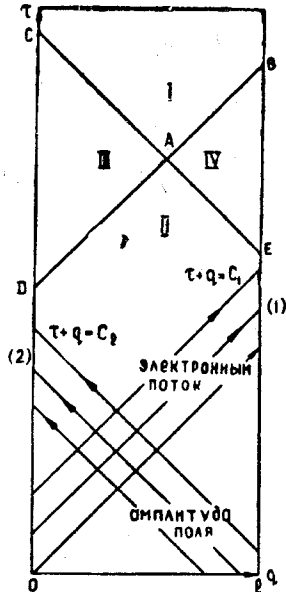
$$\begin{aligned} 1) \quad \tau - q &= C_1; \\ 2) \quad \tau + q &= C_2, \end{aligned} \quad (\text{III. 28})$$

которые обладают четким физическим смыслом. Вдоль характеристик первого семейства распространяются возмущения электронного потока, а вдоль характеристик второго семейства — возмущения поля. Если бы взаимодействие между потоком и полем отсутствовало (оно определяется членом $G(\Phi)$ в (III.27)), то возмущения распространялись бы в виде простых волн $f_1(\tau - q)$ и $f_2(\tau + q)$, т. е. состояние потока и ампли-

²³ Как отмечено в [17], уравнение Клейна-Гордона описывает нелинейное взаимодействие встречных волн. В рассматриваемом случае имеет место встречное движение электронного потока и энергии обратной волны в линии передачи.

туда поля не менялись бы на характеристиках (1) и (2) соответственно.

Рассмотрим плоскость переменных (q, τ) (см. рис. III.3). Каждой точке плоскости соответствует определенное состояние системы поток — поле, характеризующееся величинами $\Phi(q, \tau)$ и $F(q, \tau) = \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$. Как ясно из сказанного выше, в отсут-



ствии взаимодействия состояние системы в точке A полностью определяет состояние потока и поля на отрезках характеристик AB и AC соответственно. При наличии взаимодействия электроны, движущиеся вдоль AB , будут наводить поле в области I , а поле на AC будет группировать электроны, поступающие в область I . Следовательно, состояние системы в области I будет зависеть от состояния в точке A . Аналогичным образом можно показать, что состояние потока и поля в точке A определяется состоянием системы в области II . С другой стороны, состояния системы в областях III и IV и точке A никак не связаны, поскольку ни поток, ни поле не могут донести какое-нибудь возмущение из III и IV в A и наоборот (в принятом приближении).

Граничные условия для уравнения (III.27) ставятся так же, как и для системы уравнений (III.23) и (III.25), однако на коллекторном конце они записываются непосредственно для Φ с использованием

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right]_{q=l} = 0. \quad (III. 29)$$

Остановимся теперь на вопросе о «необратимости» процесса оседания; это позволит уточнить область применимости рассматриваемой теории.

Будем следить за группой электронов, влетевших в пространство взаимодействия за период ВЧ поля. Эти электроны

«видят» амплитуду поля $F(\tau - \tau_0, \tau)$; можно определить также значение Φ в каждый момент

$$\Phi(\tau - \tau_0, \tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} F(\zeta - \tau_0, \zeta) d\zeta$$

Если $|\Phi(\tau - \tau_0, \tau)|$ растет с течением времени, то с началом оседания будет расти и нижний предел в интеграле (III.26). Если затем Φ начнет уменьшаться, то предел интегрирования не должен уменьшаться в силу «необратимости» оседания, из-за того, что электроны, попавшие на замедляющую систему более не попадут в пространство взаимодействия (см. сноску на стр. 153). А это значит, что интеграл (III.26) уже не будет только функцией Φ . Это затруднение возникает и в стационарной задаче, причем оно легко устраняется при численном решении уравнений [5], но привело бы в некоторых случаях²⁴ к значительному усложнению теории Фейнштейна и Кайно [3]. Поэтому далее мы будем избегать подобных случаев и сформулируем следующее условие применимости уравнения (III.27).

Уравнение (III.27) применимо, если после начала оседания $|\Phi|$ не убывает вдоль характеристики (III.28) (1). Это, в свою очередь, справедливо, если F не меняет знака нигде в области оседания.

Данное условие ограничивает возможности применения теории для исследования возбуждения высших типов колебаний в ЛОВМ.

В заключение этого раздела покажем, как метод последовательных приближений может быть применен к решению уравнения (III.27). В качестве нулевого приближения выберем простую волну $F^0 = F(\tau + q)$. Пользуясь соотношением (III.23) и условием (III.24), находим:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{\tau-q}^{\tau+q} F(\zeta) d\zeta. \quad (III. 30)$$

Подставим (III.30) в (III.25), считая, как и раньше $u=1$, $d=0$. С учетом (III.17), будем иметь для F в первом приближении:

²⁴ В работе [3] такие случаи не рассматриваются. Отмеченная трудность возникает, например, при исследовании высших типов колебаний ЛОВМ.

$$F^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{q+\tau-2l}^{q+\tau} G \left[\frac{1}{2} \int_{\eta}^{\tau+q} F(\zeta) d\zeta \right] d\eta. \quad (\text{III. 31})$$

Потребуем, чтобы $F^{(0)}|_{q=0} = F^{(1)}|_{q=0}$, тогда получим интегральное уравнение относительно выходной амплитуды генератора обратной волны:

$$F(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau-2l}^{\tau} G \left[\frac{1}{2} \int_{\eta}^{\tau} F(\zeta) d\zeta \right] d\eta. \quad (\text{III. 32})$$

Смысл проделанных преобразований легко понять, рассматривая пространственно-временную диаграмму (рис. III.4).

Чтобы рассчитать амплитуду выходного сигнала в момент τ , необходимо знать состояние электронного потока (т. е. величину Φ) на характеристике AB . Мы находим его приближенно, считая, что амплитуда поля постоянна на характеристиках, показанных пунктиром. После этого интегрированием по AB с учетом условия на коллекторном конце, находим $F(\tau)$. Таким образом, для определения $F(\tau)$ надо знать, как менялась эта величина на интервале времени $[\tau-2l, \tau]$.

Отсюда, в частности, следует способ задания начальных условий для уравнения (III.32). Необходимо, очевидно, задать F как функцию τ на начальном интервале длиной $2l$, например $\tau \in [-2l, 0]$. Тогда, как следует из проведенных рассуждений, уравнение (III.32) определит $F(\tau)$ при $\tau \geq 0$.

При численном решении уравнения (III.32) начальное условие целесообразно задавать в виде $F|_{\tau \in [-2l, 0]} = F_0 e^{x\tau}$, где x — инкремент нарастания амплитуды, полученный в соответствующем приближении

линейной теории; F_0 выбирается так, чтобы при этой амплитуде поля нелинейные эффекты практически отсутствовали.

Отметим, что уравнение (III.32) несколько проще для численного решения, чем уравнение (III.27).

III. 3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ЛАМПАХ С ОБРАТНОЙ ВОЛНОЙ ТИПА М

В III.2 нестационарные уравнения ЛОВМ были получены в форме (III.14) и (III.16); (III.21) и (III.22); (III.23) и (III.25). При линейризации все они приводят к одинаковым результатам. Обратимся к уравнениям (III.21) и (III.22), поскольку, во-первых, их линейризация проводится проще всего и, во-вторых, при получении их еще не было сделано предположения о синхронизме.

Считая, что $|Z|^2 \approx 1$; $\eta=1$ и усредняя (III.21) по начальным фазам, будем иметь:

$$\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial q} = F; \quad \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} + d \cdot F = \tilde{Z}. \quad (\text{III. 33})$$

Положим $\tilde{Z} = \Phi$; $u=1$; $d=0$, тогда можно записать для Φ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \Phi = 0. \quad (\text{III. 34})$$

Уравнение (III.34) можно получить и из (III.27), заметив, что при малых Φ $G(\Phi) \approx \Phi$. Однако, как ясно из сказанного, в линейной теории Φ и F можно считать, вообще говоря, комплексными.

Если искать решение (III.34) в виде $\Phi \sim e^{\delta q + x\tau}$ получим дисперсионное уравнение

$$\delta^2 - x^2 + 1 = 0, \quad (\text{III. 35})$$

которое сводится к уравнению (V.121) работы [1] заменой

$$\delta = \delta_1 + x \quad (\text{при } b = 0^{25}; \quad d = 0; \quad S = 0; \quad \left| \frac{v_0}{v_s \tau p} \right| = 1).$$

²⁵ Тот факт, что $b=0$, объясняется выбором в качестве несущей частоты Ω частоты, соответствующей выполнению условий точного синхронизма. Однако возможный рассинхронизм учитывается, поскольку величины F , Φ и x могут быть комплексными.

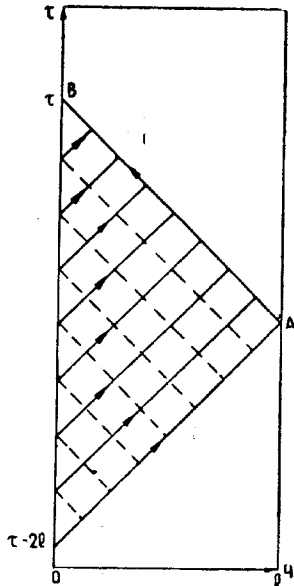


Рис. III.4. Пространственно-временная диаграмма, поясняющая смысл первого приближения в методе последовательных приближений

нарастания амплитуды, полученный в соответствующем приближении

Пусть $\delta = j\bar{K}$; $\mathbf{x} = j\bar{\Omega}$, тогда из (III.35) следует, что $\bar{K}^2 - \bar{\Omega}^2 = 1$.

Данное уравнение описывает связь между безразмерными постоянной распространения \bar{K} и частотой $\bar{\Omega}$ гармонических волн амплитуды Φ (волн огибающих), которые могут распространяться в распределенной системе, отрезок которой служит моделью ЛОВМ. Безразмерная скорость этих волн зависит от

частоты: $V = \frac{\bar{\Omega}}{\bar{K}} = \frac{\bar{\Omega}}{\sqrt{\bar{\Omega}^2 + 1}}$, т. е. имеет место дисперсия,

обусловленная взаимодействием между потоком и полем. На сравнительно высоких частотах ($\bar{\Omega} \gg 1$) дисперсия практически отсутствует, т. е. возмущения потока и поля распространяются, не взаимодействуя, с единичной безразмерной скоростью в противоположные стороны (в данном случае каждый электрон испытывает действие сравнительно быстро осциллирующего поля).

Обратимся теперь к анализу конкретных приборов в рамках линейной теории. При этом будем использовать уравнение (III.34) и граничные условия (III.17)–(III.20) и (III.24).

III.3.1. ЛОВМ-генератор без отражений на концах

Сначала рассмотрим качественно начальный этап процесса установления колебаний в генераторе в простейшем случае, когда возбуждается основной тип колебаний²⁶. Пусть в момент $\tau = \tau_1$ электроны начинают поступать в пространство взаимодействия. Включение тока можно рассматривать как своего рода возмущение пучка, которое распространяется вдоль характеристики A (рис. III.5). Эта характеристика ограничивает сверху область I, в которой имеются только шумовые флуктуации поля замедляющей системы. В области II происходит выделение из шумов сигнала, распространяющегося с фазовой скоростью, близкой к скорости электронов, и усиление этого сигнала. При этом распределение поля в пространстве непрерывно изменяется. В момент τ_2 первые электроны доходят до коллекторного конца замедляющей системы и перестают воз-

действовать на поле. «Сигнал» об этом распространяется вдоль характеристики B и достигает пушечного конца в момент τ_3 ²⁷. После этого можно считать, что распределение поля в пространстве практически установилось и в дальнейшем происходит экспоненциальное нарастание амплитуды поля во времени (область IIIа). Этот этап процесса установления составляет обычно весьма значительную его часть и описывается линейной теорией в том виде, в каком ее обычно формулируют [1]. По мере нарастания поля, вступают в действие нелинейные эффекты, связанные с подъемом электронов к замедляющей системе (область IIIб; граница между областями IIIа и IIIб, разумеется, условна) и с оседанием на замедляющую систему (область IV). Характер процесса на этом этапе достаточно сложен, и элементарный качественный анализ, не подкрепленный расчетами, может привести к неверным заключениям. Поэтому отложим подробное описание последнего этапа процесса установления до раздела III.4, где будут приведены результаты численного решения нестациональных уравнений нелинейной теории ЛОВМ.

Будем искать решение уравнения (III.34) с граничными условиями (III.24) и (III.29) в виде $\Phi = Q(q) \cdot T(\tau)$ (метод разделения переменных). Тогда из (III.29) получим:

$$\frac{Q'(l)}{Q(l)} = - \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = x, \quad (\text{III. 36})$$

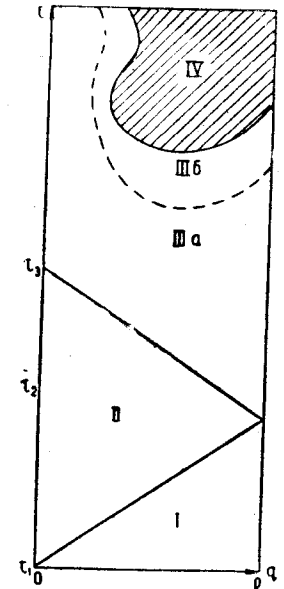


Рис. III.5. Пространственно-временная диаграмма, поясняющая процесс установления колебаний в ЛОВМ

²⁶ Изложенная ниже картина аналогична описанной в работе [7] применительно к ЛОВО. Отличие, по существу, состоит лишь в использовании плоскости переменных (q, τ) , что делает объяснение, на наш взгляд, наглядным и в то же время не оторванным от математического описания процесса.

²⁷ Отметим, что начальный этап процесса установления, на котором происходит выделение регулярного сигнала из шумов и установление распределения амплитуды поля в пространстве, исследован, на наш взгляд, недостаточно. В принципе, он может быть проанализирован с использованием уравнения (III.34), однако здесь мы не будем рассматривать этот этап.

где κ — постоянная разделения; отсюда $T = e^{\kappa t}$. Далее из (III.34) следует:

$$Q'' + (1 - \kappa^2) Q = 0. \quad (\text{III. 37})$$

Граничным условиям удовлетворим, положив $Q(0) = 0$; $Q'(l) + \kappa Q(l) = 0$. Решение (III.37), удовлетворяющее первому условию, имеет вид $Q = \sin \sqrt{1 - \kappa^2} \cdot q$. Второе условие приводит к трансцендентному уравнению

$$\sqrt{1 - \kappa^2} \cos \sqrt{1 - \kappa^2} \cdot l + \kappa \sin \sqrt{1 - \kappa^2} \cdot l = 0, \quad (\text{III. 38})$$

которое связывает нормированную длину лампы $l = 2\pi DN$ ²⁸ (N — число замедленных длин волн, укладываемых на длине лампы) и величину κ , определяющую характер изменения поля во времени. Ясно, что решение будет нарастающим во времени, если $\text{Re} \kappa > 0$. Уравнение, аналогичное (III.38), получено, например, в [1] (см. соотношение (V.125)).

Трансцендентное уравнение (III.38) имеет бесконечно много комплексных корней, в том числе и действительные корни. В силу линейности граничных условий и уравнения (III.34), его общее решение можно записать в виде²⁹:

$$\Phi = \sum_i C_i e^{\kappa_i t} \sin \sqrt{1 - \kappa_i^2} q;$$

$$F = \sum_i C_i e^{\kappa_i t} \sin \sqrt{1 - \kappa_i^2} (l - q),$$

²⁸ Поскольку $D \sim l_0^{1/2}$, то нормированная длина увеличивается с увеличением тока луча.

²⁹ Покажем, как получить выражение для F . Из (III.38) следует, что $\text{tg} \sqrt{1 - \kappa^2} l = -\frac{\sqrt{1 - \kappa^2}}{\kappa}$. Проводя элементарные преобразования, перейдем

к другим тригонометрическим функциям аргумента $\sqrt{1 - \kappa^2} l$:

$$\kappa = -\cos \sqrt{1 - \kappa^2} l; \quad \sqrt{1 - \kappa^2} = \sin \sqrt{1 - \kappa^2} l \quad (*)$$

Используя (III.23) и (*), получим:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_i C_i e^{\kappa_i t} [\sqrt{1 - \kappa_i^2} \cos \sqrt{1 - \kappa_i^2} q + \kappa_i \sin \sqrt{1 - \kappa_i^2} q] = \\ &= \sum_i C_i e^{\kappa_i t} \sin \sqrt{1 - \kappa_i^2} (l - q). \end{aligned}$$

где κ_i — корни уравнения (III.38); C_i — произвольные постоянные, которые должны быть найдены из начальных условий. Иначе говоря, различным корням уравнения (III.38) соответствуют различные собственные типы колебаний в ЛОВМ, причем любое решение рассматриваемой задачи может быть представлено в виде суперпозиции этих типов колебаний.

Можно показать [15], что условию $\text{Re} \kappa_i > 0$ могут удовлетворять только действительные корни уравнения (III.38). Предположим, что имеется только один действительный положительный корень κ_k . Тогда соответствующий член ряда будет экспоненциально нарастать, а другие — затухать с течением времени.

Поэтому практически при любых начальных условиях (кроме совершенно исключительного случая $C_k = 0$; $C_i \neq 0$, $i \neq k$) по прошествии достаточного времени можно положить:

$$\Phi = C_k e^{\kappa_k t} \sin \sqrt{1 - \kappa_k^2} q;$$

$$F = C_k e^{\kappa_k t} \sin \sqrt{1 - \kappa_k^2} (l - q), \quad (\text{III. 39})$$

т. е. считать, что распределение поля в пространстве установилось, а во времени происходит экспоненциальное нарастание амплитуды сигнала. Это соответствует описанной выше качественной картине начального этапа процесса установления колебаний в ЛОВМ. Укажем, что не нарушая общности, можно считать C_k действительной величиной. Таким образом, величины Φ и F оказываются действительными, а полученное решение удовлетворяет требованию точного синхронизма и может быть использовано в качестве начального условия для уравнения (III.27) нелинейной теории.

На основании высказанных соображений будем рассматривать только действительные корни уравнения (III.38), которым соответствуют собственные типы колебаний ЛОВМ с гармоническим распределением поля в пространстве³⁰. Зависимость этих корней от l представлена графически на рис. III.6. Линиям $\kappa = \pm 1$ соответствует тривиальное решение $\Phi = 0$. Различным кривым, показанным на рис. III.6, припишем номера $n = 0, 1, 2, \dots$. При достаточно большом l n -ой ($n \geq 1$) кривой со-

³⁰ Действительных решений $\kappa > 1$ уравнение (III.38) не имеет. Случаю $\kappa < -1$ соответствует гиперболическое распределение поля в пространстве; соответствующее решение не представляет интереса как быстрозатухающее.

ответствуют два типа колебаний, один из которых всегда является затухающим, а другой может быть нарастающим во времени. Колебания n -го типа становятся нарастающими, если нормированная длина лампы больше пусковой $l = \frac{\pi}{2}(2n+1)$; $n=0; 1; 2\dots$ Минимальную пусковую длину имеет основной тип колебаний $n=0$; $l_0 = \frac{\pi}{2}$. При $l > l_1 = \frac{3\pi}{2}$ становится на-

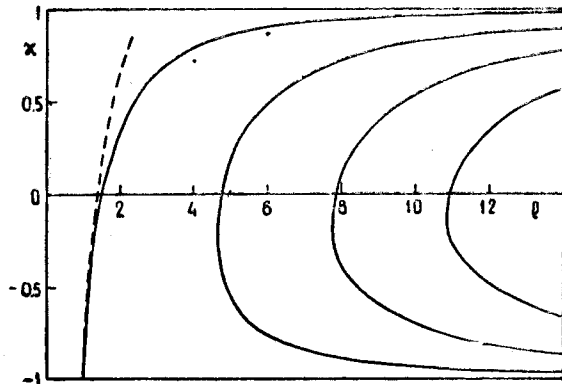


Рис. III.6. Зависимость действительных корней уравнений (III.38) (сплошная линия) и (III.41) (пунктир) от нормированной длины лампы

растающим еще один тип колебаний ($n=1$) и т. д. Впрочем, инкременты нарастания высших типов ($n \geq 1$) при любой длине l остаются меньше, чем для основного типа колебаний. При $l \rightarrow \infty$ $x \rightarrow +1$ для нарастающих и $x \rightarrow -1$ для затухающих решений.

На рис. III.7 показаны распределения амплитуды поля собственных типов колебаний в пространстве взаимодействия для различных значений l . Указаны значения инкрементов типов колебаний и соответствующие им номера. Становится понятным смысл номера n — это число нулей амплитуды F внутри интервала $q \in (0, l)$. Видно, что различные типы колебаний, отличаются распределением поля в пространстве. Далее, можно указать простую связь между характером изменения поля во времени и в пространстве: если на начальном участке пространства взаимодействия амплитуда поля $|F|$ является

возрастающей (убывающей) функцией q , то тип колебаний оказывается нарастающим (затухающим) во времени. Если же $\left[\frac{\partial}{\partial q} |F| \right]_{q=0} = 0$, то имеет место пусковой режим для данного типа колебаний. Это следует из того, что $\left[\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} \right]_{q=0} = G(\Phi)|_{q=0} = 0$ и хорошо видно на рис. III.7.

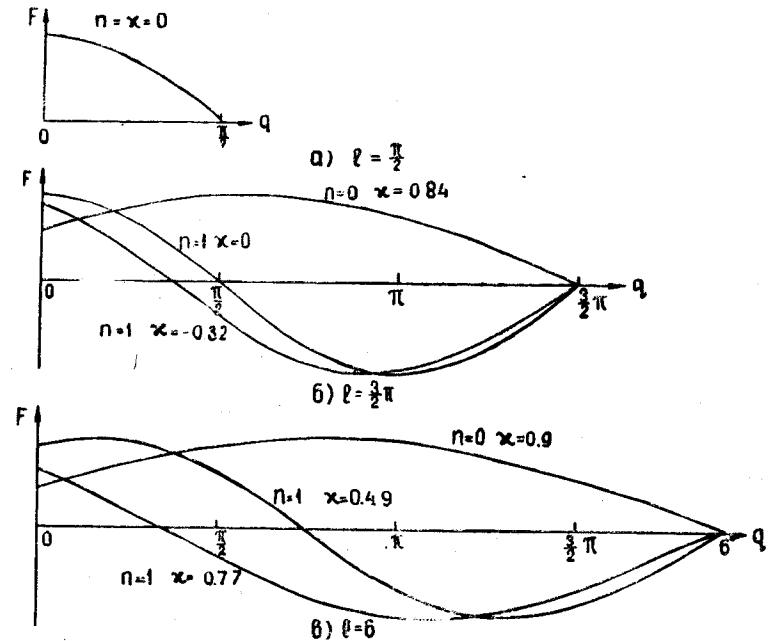


Рис. III.7. Распределение амплитуды поля собственных типов колебаний в пространстве взаимодействия ЛОВМ при различных нормированных длинах лампы (линейная теория)

Посмотрим теперь, к чему приведет в рамках линейной теории применение метода последовательных приближений [см. (III.32) — (III.33)]. Полагая $G(\Phi) \approx \Phi$, из (III.32) будем иметь:

$$F(\tau) = \frac{1}{4} \int_{\tau-2l}^{\tau} d\zeta \int_{\zeta}^{\zeta} F(\eta) d\eta. \quad (\text{III. 40})$$

Будем искать решение (III.40) в виде $F \sim e^{xz}$, интересуясь, как и раньше, только действительными значениями x . После интегрирования получим:

$$1 = \frac{e^{-2lx} + 2lx - 1}{4x^2}, \quad (\text{III. 41})$$

что совпадает с уравнением (V.129) работы [1]. В частности, при $x \rightarrow 0$ отсюда получаем пусковые условия $l = \sqrt{2} \approx 1,41$, что несколько меньше точного решения ($l = \pi/2 \approx 1,57$). Сравнение зависимости (III.41) с полученными выше результатами проведено на рис. III.6 (пунктирная линия).

Таким образом, сформулированная в III.2 теория установления колебаний в ЛОВМ в приближении слабого сигнала дает те же результаты (как в рамках самосогласованной задачи, так и в рамках метода последовательных приближений), что и существующая линейная теория установления колебаний в ЛОВМ-генераторе, основанная на предположении о квазимонохроматичности сигнала ($\omega = \omega' + ja$).

III.3.2. ЛОВМ-усилитель без отражений на концах

Как уже отмечалось, нестационарная теория ЛОВМ позволяет рассматривать усиление сигналов, амплитуда которых меняется во времени. Если амплитуда входного сигнала мало меняется за время пролета электронов через лампу (низкочастотная модуляция), то решение уравнения (III.34) с граничными условиями (III.18) и (III.24), близкое к стационарному, имеет вид:

$$F(q, \tau) = f(\tau) \frac{\cos q}{\cos l}. \quad (\text{III. 42})$$

Если же амплитуда сигнала сильно меняется за время пролета³¹ (высокочастотная модуляция), то рассмотрение усложняется из-за необходимости учитывать дисперсию «горячих» волн. Здесь для иллюстрации мы рассмотрим простой случай усиления амплитудно модулированного сигнала вида

$$f(\tau) = A(1 + m_0 \sin \bar{\omega} \tau), \quad (\text{III. 43})$$

³¹ Однако, разумеется, амплитуда должна оставаться мало меняющейся функцией времени за период ВЧ поля. Этому соответствует условие $|\bar{\omega}| \ll 1/D$ [см. (III.43)].

где m_0 — коэффициент модуляции; $\bar{\omega}$ — безразмерная частота модуляции; $A = \text{const}$. Несущая частота сигнала выбрана так, что выполняются условия точного синхронизма.

Будем искать решение в виде $F = F_0(q) + F_1(q) \sin(\bar{\omega} \tau + \varphi)$. Подставим это выражение в (III.34) и учтем (III.18) и (III.24). Тогда на выходе лампы будем иметь:

$$F(0, \tau) = \frac{A}{\cos l} \left\{ 1 + \frac{m_0 \sqrt{\bar{\omega}^2 + 1} \cos l}{\sqrt{\bar{\omega}^2 + \cos^2 l} \sqrt{\bar{\omega}^2 + 1}} \times \right. \\ \left. \times \sin \left(\bar{\omega} \tau + \arctg \frac{\bar{\omega} \operatorname{tg} \sqrt{\bar{\omega}^2 + 1} l}{\sqrt{\bar{\omega}^2 + 1}} \right) \right\}. \quad (\text{III. 44})$$

Из формулы (III.44) и рис. III.8 видно, что коэффициент модуляции выходного сигнала m зависит от частоты модуляции и оказывается всегда меньше коэффициента модуляции входного сигнала (имеются в виду режимы с $l < \frac{\pi}{2}$, когда самовозбуждение отсутствует). Более того, существуют такие значения $\bar{\omega}$, при которых модулирующий сигнал вообще проходит через лампу без усиления, — усиливается только несущая компонента сигнала. Волнообразный характер кривой, показанной на рис. III.8, объясняется тем, что вдоль пространства взаимодействия может укладываться различное число волн модуляции.

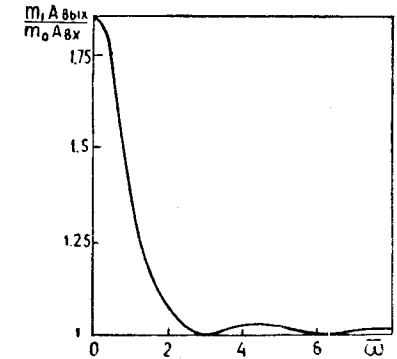


Рис. III.8. Зависимость коэффициента усиления модулирующего сигнала от частоты модуляции (ЛОВМ-усилитель, линейная теория)

Отметим еще, что фазовый сдвиг модулирующего сигнала на выходе усилителя также зависит от частоты модуляции.

III.3.3. Резонансная ЛОВМ-генератор

Применяя к уравнению (III.34) метод разделения переменных и используя граничные условия (III.20) и (III.24), при $d=0$ получим следующее уравнение:

$$\cos \sqrt{1-x^2} l + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin \sqrt{1-x^2} l = R_0 R_l e^{-x^2}. \quad (\text{III. 45})$$

Если положить $R_0 R_l = 0$, то получится уравнение (III.38). На рис. III.9 показана зависимость действительных корней

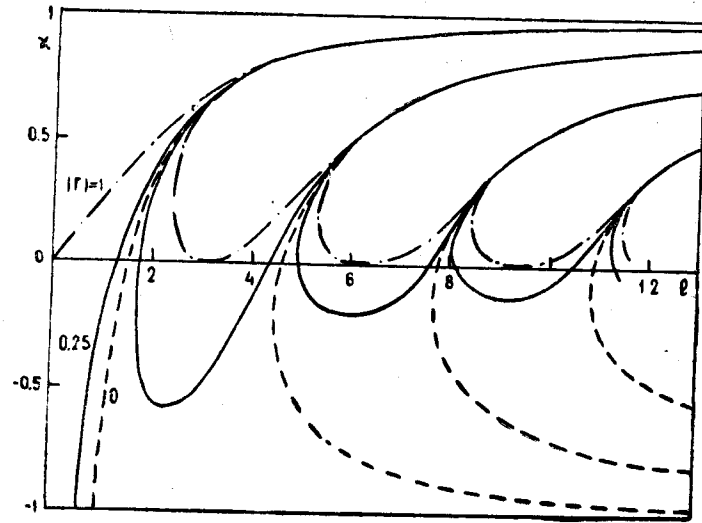


Рис. III.9. Зависимость действительных корней уравнения (III.45) от нормированной длины лампы

уравнения (III.45) от l , полученная в предположении, что $R_0 R_l = r$ — действительная величина. Как видно из рисунка, введение отражений приводит к расщеплению каждого из типов колебаний на два, один из которых имеет большую, а другой — меньшую пусковую длину, чем соответствующий тип при $r=0$. Это связано с появлением дополнительной обратной связи, которая может быть как положительной, так и отрицательной. В целом же самовозбуждение ЛОВМ облегчается в присутствии отражений. Наличие отражений особенно существенно сказывается на затухающих типах колебаний.

Рассмотрим сначала некоторые общие свойства уравнения (III.21) безотносительно к каким-либо граничным условиям.

III.4.1. Закон сохранения энергии

Умножим обе части (III.27) на $F = \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$ и перепишем его в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{F^2}{2} + W(\Phi) \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{F^2}{2} - W(\Phi) \right), \quad (\text{III. 46})$$

где

$$\begin{aligned} W(\Phi) &= - \int_0^\Phi G(\Phi) d\Phi = - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \frac{\sin X_0}{\sin(X_0 - \Phi \sin X_0)} dX_0 = \\ &= - \widetilde{\eta(Y'_a - Y')} Y' \end{aligned}$$

(см. рис. III.10).

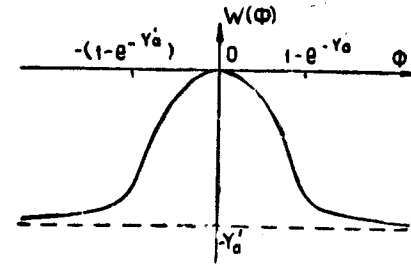


Рис. III.10. График функции $W(\Phi)$ (качественно)

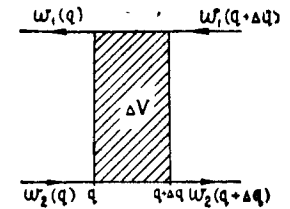


Рис. III.11. К пояснению физического смысла соотношений (III.46) и (III.47)

Следует ожидать, что соотношение (III.46) выражает закон сохранения энергии, поскольку величинам $F^2/2$ и $W(\Phi)$ можно, очевидно, приписать смысл безразмерных средних плотностей энергии поля и потенциальной энергии электронов соответственно. Покажем, что это действительно так.

Рассмотрим участок пространства взаимодействия длиной Δq и интервал времени $\Delta \tau$ (рис. III.11). Пусть через сечение q за время $\Delta \tau$ в объем ΔV поступают электроны, суммарная

потенциальная энергия которых есть $\omega_2(q) \Delta\tau$ и выходит из объема энергия поля $\omega_1(q) \Delta\tau$ ³². Через сечение $q + \Delta q$ за время Δq поступает энергия поля $\omega_1(q + \Delta q) \Delta\tau$ и выходят электроны с общей потенциальной энергией $\omega_2(q + \Delta q) \Delta\tau$. Составим теперь уравнение энергетического баланса в объеме ΔV . Приращение энергии, заключенной в объеме ΔV за время $\Delta\tau$, равно:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} (\omega_1 + \omega_2) \Delta\tau \cdot \Delta q = [\omega_2(q) + \omega_1(q + \Delta q) - \omega_1(q) - \omega_2(q + \Delta q)].$$

Если теперь перейти к пределу при $\Delta q \rightarrow 0$, то получим:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} (\omega_1 + \omega_2) = \frac{\partial}{\partial q} (\omega_1 - \omega_2). \quad (\text{III. 47})$$

Соотношение (III.47) совпадает с (III.46), если положить $\omega_1 = \frac{F^2}{2}$; $\omega_2 = W(\Phi)$.

III.4.2. Стационарные нелинейные волны

Будем искать решение уравнения (III.27) в виде волн, распространяющихся с безразмерной скоростью V , т. е. в виде:

$$\Phi = \Phi(q - V\tau) = \Phi(-\xi), \quad (\text{III. 48})$$

где $-\xi = q - V\tau$. Тогда (III.27) принимает вид:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \frac{G(\Phi)}{1 - V^2} = 0. \quad (\text{III. 49})$$

Умножим обе части на $d\Phi/d\xi$ и проинтегрируем. Будем иметь:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)^2 - \frac{1}{1 - V^2} W(\Phi) = \text{const}. \quad (\text{III. 50})$$

Выражение (III.50) определяет семейство фазовых траекторий на плоскости переменных $\Phi, d\Phi/d\xi$ (рис. III.12). Если перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью V , то при $V^2 < 1$ потоки энергии, переносимой пучком и полем, направлены в противоположные стороны. В частности, при $V=0$ уравнение (III.49) совпадает с уравнением, описывающим стационарный режим ЛОВМ [3]. Если же $V^2 > 1$, то в выбранной системе отсчета потоки энергии направлены в одну сторону, т. е. с

точки зрения наблюдателя, находящегося в этой системе отсчета, поток взаимодействует с прямой волной (что аналогично ЛБВМ). Указанные случаи принципиально отличаются, что находит свое выражение в различии фазовых портретов (см. рис. III.12а и б). При $V^2 < 1$ начало координат является особой точкой типа центра. Вблизи ее фазовые траектории представляют собой эллипсы [линейная теория, см. (III.35)]. Замкнутые фазовые траектории соответствуют периодической за-

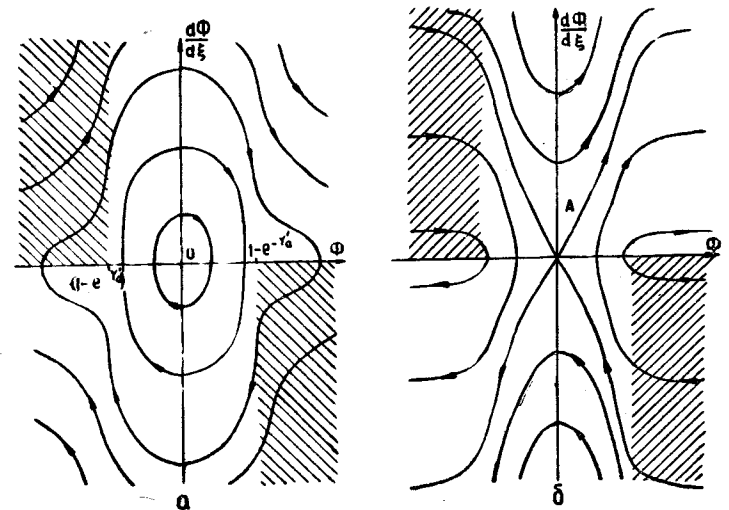


Рис. III.12. Фазовые портреты стационарных нелинейных волн огибающих в системе с распределенными параметрами, отрезок которой представляет собой модель ЛОВМ:

а) $V^2 < 1$; б) $V^2 > 1$

висимости Φ и $d\Phi/d\xi$ от ξ (рис. III.13а). Траектории, которые лежат в заштрихованных областях фазовой плоскости, не имеют смысла из-за «необратимости» оседания (III.2). При $V^2 > 1$ начало координат становится особой точкой типа седла. Замкнутых траекторий и периодических стационарных волн не существует: решение больше похоже на ударную волну (рис. III.13б). Сепаратрисса A на рис. III.12б соответствует решению, обращающемуся в нуль при $\xi \rightarrow -\infty$. До прохождения волны электроны имеют координату $Y' = 0$ и неиспользованный запас потенциальной энергии. После прохождения волны все электроны оказываются осевшими на замедляющую систему. В те-

³² Поскольку безразмерные скорости движения электронов и волны амплитуды равны единице, то плотность энергии численно равна величине потока энергии.

III.4.3. Стационарные состояния ЛОВМ

Частным случаем рассмотренных стационарных волн являются стационарные состояния ЛОВМ. Если F и Φ не зависят от времени, то (III.34) принимает вид [3]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} + G(\Phi) = 0. \quad (\text{III. 51})$$

Положим $\Phi|_{q=0} = 0$; $F|_{q=0} = F_0 = \partial\Phi/\partial q|_{q=0}$. Эти условия определяют решение уравнения (III.51), которое будет удовлет-

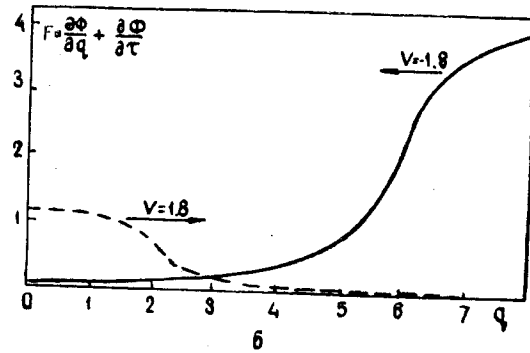
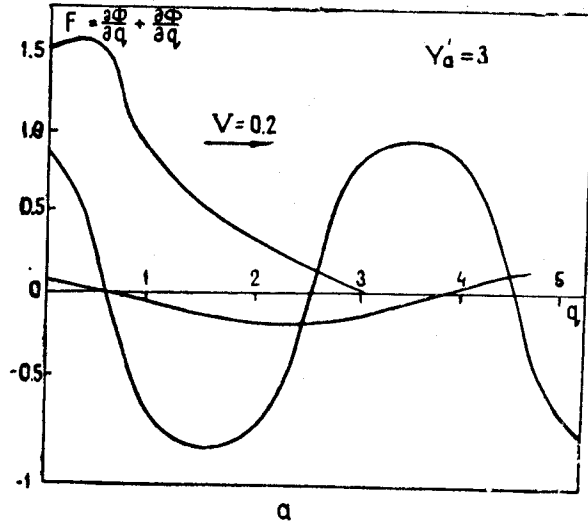


Рис. III.13. Профиль стационарных волн огибающих:
а) $V^2 < 1$; б) $V^2 > 1$

рии нелинейных волн решения, подобные полученным здесь, носят название стационарных волн [17]. Таким образом, в неограниченной системе с распределенными параметрами, отрезок которой представляет собой модель ЛОВМ, могут существовать стационарные волны, форма которых определяется их скоростью и амплитудой.

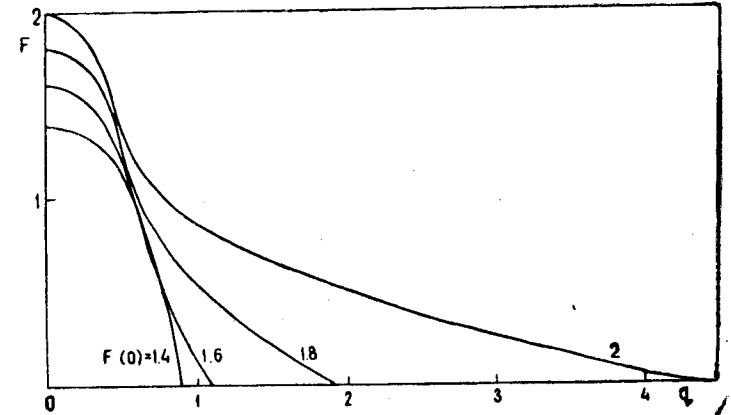


Рис. III.14. Распределения амплитуды поля по длине ЛОВМ, найденные путем численного решения уравнения стационарной нелинейной теории (III.51) при $Y_a = 3$

ворять граничным условиям (III.17) и (III.24), если подобрать соответствующим образом величину F_0 . Удобно обратиться к задаче: задать F_0 и искать такую нормированную длину лампы, при которой выполняются нужные условия на коллекторном конце [3]. Результаты такого решения представлены на рис. III.14³³. Применительно к ЛОВМ-генератору без отражений изображенные кривые можно интерпретировать следующим образом. При малых F_0 нормированная длина близка к

³³ Незначительные количественные отличия результатов от [3] объясняются тем, что: 1) не учитывалось оседание на отрицательный электрод; 2) при численном решении (III.51) функции G аппроксимировались простыми аналитическими выражениями (рис. III.2).

$\pi/2$. С ростом F_0 она вначале уменьшается, что связано с подъемом электронов к замедляющей системе, а затем оседание электронов на систему приводит к увеличению нормированной длины. Точки перегиба кривых, показанных на рис. III.14, соответствуют началу оседания электронов на замедляющую систему.

Качественно те же результаты дает и метод заданного поля. Если взять в нулевом приближении $F^0 = F_0 = \text{const}$, то из (III.32) получим следующее уравнение относительно F_0 :

$$F_0^2 = -W(F_0 l), \quad (\text{III. 52})$$

а из (III.31) — такое распределение поля в пространстве взаимодействия:

$$F(q) = \frac{W(F_0 q) - W(F_0 l)}{F_0}. \quad (\text{III. 53})$$

III.4.4. Обсуждение устойчивости стационарных состояний ЛОВМ-генератора

Предположим, что в каждой точке пространства взаимодействия величины F и Φ мало меняются за время пролета электронов и прохождения волны через лампу. Тогда можно пренебречь второй производной по времени в (III.34), оставив первую производную во времени в граничном условии (III.29).

В этом случае распределение Φ в пространстве описывается уравнением (III.51), а изменение Φ и F во времени связано с тем, что $\partial\Phi/\partial q|_{q=l} \neq 0$ и определяется уравнением (III.29). Пусть нуль производной $d\Phi/dq$ достигается в точке $q = q_0(F_0) \approx l$. Разлагая $d\Phi/dq$ в ряд вблизи точки q_0 , получим:

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial q} \right]_{q=l} \approx \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial q} \right) \right]_{q=q_0} (l - q_0) = -G(\Phi_l)(l - q_0),$$

где $\Phi_l = \Phi|_{q=l} \approx \Phi|_{q=q_0}$. И, наконец, используя (III.29), получим:

$$\frac{dF_0}{d\tau} = \frac{G(\Phi_0)(l - q_0(F_0))}{\frac{\partial\Phi_l}{\partial F_0}}. \quad (\text{III. 54})$$

Отсюда видно, что стационарные состояния определяются условием $l = q_0(F_0)$, которое представляет собой уравнение относительно выходной амплитуды.

Соотношением (III.54) можно пользоваться только при анализе влияния возмущений вполне определенного вида и в непосредственной близости от стационарного состояния, соответствующего основному типу колебаний, когда $l \approx q(F_0)$ и когда значение $\left| \frac{\partial\Phi_l}{\partial F_0} \right|$ достаточно велико, ибо иначе нарушается условие медленности изменения F_0 за время пролета. Это соотношение позволяет частично исследовать найденные выше состояния на устойчивость³⁴.

Пусть F_0^0 — амплитуда поля при $q=0$ в некотором стационарном состоянии (т. е. $q(F_0^0) = l$). Дадим небольшую добавку $\delta(\tau)$ к этой величине, так чтобы $F_0 = F_0^0 + \delta(\tau)$. Тогда для δ получим из (III.54) следующее уравнение:

$$\frac{d\delta}{d\tau} = - \frac{G(\Phi_l)}{\left(\frac{\partial\Phi_l}{\partial F_0} \right)} \delta \cdot q'(F_0).$$

Как следует из (III.46), $\frac{\partial\Phi_l}{\partial F_0} > 0$; $G(\Phi_l) > 0$ при $\Phi_l > 0$,

так как рассматривается основной тип колебаний. Поэтому достаточное условие неустойчивости стационарного состояния F_0^0 заключается в том, что функция $q_0(F_0)$ должна быть убывающей в окрестности точки F_0^0 .

На рис. III.15 показан график функции $q_0(F_0)$, из которого видно, что в отсутствие оседания все состояния ЛОВМ-генератора (за исключением тривиального случая $F \equiv 0$, $\Phi \equiv 0$ при $q_0 < \pi/2$) неустойчивы. Состояния с оседанием не удовлетворяют сформулированному условию и, по-видимому, устойчивы. Тогда рис. III.15 можно интерпретировать так. При увеличении нормированной длины лампы (например, путем увеличения тока луча) генератор не возбуждается до тех пор пока l не достигнет значения $\pi/2$. После этого развивается нестационарный процесс, который завершается установлением состояния A с оседанием электронов на замедляющую систему и выходной амплитудой F_A . Если теперь увеличить или уменьшить l , то соответственно увеличится или уменьшится выходной сигнал. Уменьшая l , можно дойти до длины $l = l_B$ и амплитуды выходного сигнала F_B , после чего колебания сорвут-

³⁴ Мы говорим «частично», потому что устойчивость исследуется лишь относительно возмущений определенного вида, что недостаточно, вообще говоря, для заключения об устойчивости рассматриваемого состояния определенной автоколебательной системы.

ся (т. е. в результате нестационарного процесса амплитуда уменьшится до нуля). Наличие описанного явления гистерезиса подтверждено экспериментально. Аналогичным образом можно исследовать стационарные состояния РЛОВМ и ЛОВМ-усилителя, но здесь мы не будем останавливаться на этих вопросах.

III.4.5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИИ ЛОВМ

Уравнение нестационарной нелинейной теории ЛОВМ (III.27) представляет собой дифференциальное уравнение в

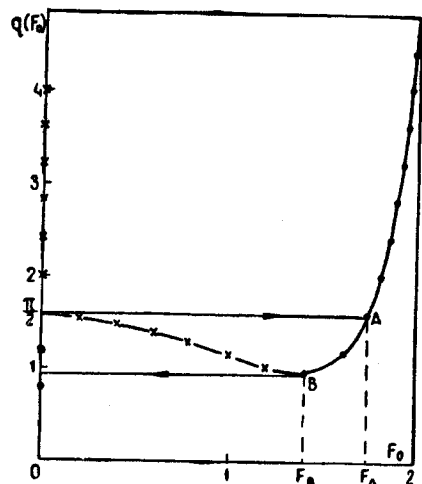


Рис. III.15.

Зависимость между амплитудой выходного сигнала в стационарном режиме и нормированной длиной ЛОВМ-генератора: x — неустойчивые состояния, o — состояния, удовлетворяющие необходимому условию устойчивости (повидимому, устойчивые)

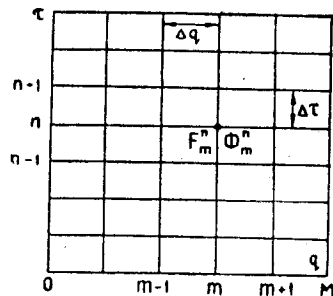


Рис. III.16. К численному решению уравнения (III.27). Сетка на плоскости переменных (q, τ)

частных производных. Численное решение таких уравнений имеет ряд особенностей, поэтому остановимся подробно на методе решения.

Метод заключается в замене дифференциальных операторов

конечно-разностными. Значения величин F и Φ ищутся в узлах сетки на плоскости переменных (q, τ) , имеющей шаг Δq по безразмерной координате и $\Delta \tau$ по безразмерному времени (рис. III.16). Будем обозначать каждый узел сетки двумя целыми числами m и n , а значения F и Φ в этом узле отмечать индексами m и n . Так F_m^n означает безразмерную амплитуду поля в точке $q = m\Delta q$; $\tau = n\Delta \tau$. Была выбрана следующая разностная схема, аппроксимирующая уравнение (III.27) (или, точнее говоря, систему уравнений (III.23) и (III.25) при $d = 0$; $u = 1$):

$$\frac{\Phi_m^{n+1} - \Phi_m^n}{\Delta \tau} + \frac{\Phi_m^n - \Phi_{m-1}^n}{\Delta q} = F_m^n$$

$$\frac{F_m^{n+1} - F_m^n}{\Delta \tau} - \frac{F_{m+1}^n - F_m^n}{\Delta q} = G(\Phi_m^n). \quad (III. 55)$$

В случае ЛОВМ-генератора, который только и рассматривается здесь, граничные условия для уравнений (III.55) запишутся в виде:

$$\Phi_0^k = 0; F_M^k = 0; k = 0; 1; 2... \quad (III. 56)$$

Считая, что $\pi/2 < l < 3\pi/2$ (в линейном режиме нарастающим является только основной тип колебаний), зададим начальные условия в виде:

$$\Phi_m^0 = A \sin \sqrt{1 - x^2} m \Delta q;$$

$$F_m^0 = A \sin \sqrt{1 - x^2} (l - m \Delta q). \quad (III. 57)$$

Решения для Φ и F такого вида получаются из линейной теории после выделения регулярного сигнала и установления пространственного распределения поля [см. (III.39)].

Для дальнейшего перепишем (III.55) в менее наглядной, но более удобной форме:

$$\Phi_m^{n+1} = (1 - r) \Phi_m^n + r \Phi_{m-1}^n + F_m^n \Delta \tau;$$

$$F_m^{n+1} = (1 - r) F_m^n + r F_{m+1}^n + G(\Phi_m^n) \Delta \tau.$$

где $r = \Delta \tau / \Delta q$.

Отметим, некоторые важные свойства выбранной разностной схемы.

1. Величины F_m^{n+1} и Φ_m^{n+1} , относящиеся к $(n+1)$ -му шагу по времени, оказались выраженными в явном виде через величины F^n и Φ^n , относящиеся к n -му шагу. Таким образом, имеется возможность вычислять F и Φ «слой за слоем» по времени, при этом необходимо хранить в памяти машины величины, относящиеся только к одному слою.

2. Величина Φ_m^{n+1} зависит от Φ_m^n и Φ_{m-1}^n . Это соответствует тому, что электронный пучок распространяется в положительном направлении оси q . В частности, именно при такой записи естественным образом учитывается граничное условие на пушечном конце лампы (Φ_1^{n+1} выражается через Φ_1^n и $\Phi_0^n = 0$). Аналогично, F_m^{n+1} зависит от F_m^n и F_{m+1}^n , что соответствует распространению поля навстречу потоку; у коллекторного конца лампы F_{M-1}^{n+1} выражается через F_{M-1}^n и $F_M^n = 0$. Указанное обстоятельство является необходимым условием устойчивости разностной схемы (см., например, [18], § 24).

3. Для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы Δt было меньше Δq ($r < 1$).

Рассмотренный метод был применен для численного решения задачи на ЭВМ «Наири». Важным обстоятельством, позволившим осуществить решение задачи на малой ЭВМ, явилась способ задания функции $G(\Phi)$, которая аппроксимировалась двумя простыми аналитическими выражениями на участках отсутствия и наличия оседания электронов на замедляющую систему (см. рис. III.2).

Расчет проводился для случая $Y'_a = 3$; $l = 1,8$ с шагом 0,05 по координате и 0,025 по времени. Расчет показал, в частности, что на протяжении всего процесса установления выполняется условие $F > 0$ и, следовательно, «необратимость» оседания не играет роли (см. раздел III.2). Результаты расчета представлены на рис. III.17—20. Каждый «кадр» рис. III.17а соответствует фиксированному моменту времени и показывает зависимость амплитуды поля F и величины Φ , характеризующей состояние электронного потока, от координаты q . Обозначения и масштаб ясны из рис. III.17б, который показывает установившееся стационарное состояние, найденное путем численного решения уравнения стационарной теории (III.51) с использованием той же самой функции $G(\Phi)$.

Ту часть пространства взаимодействия, на протяжении которой имеет место оседание электронов на замедляющую сис-

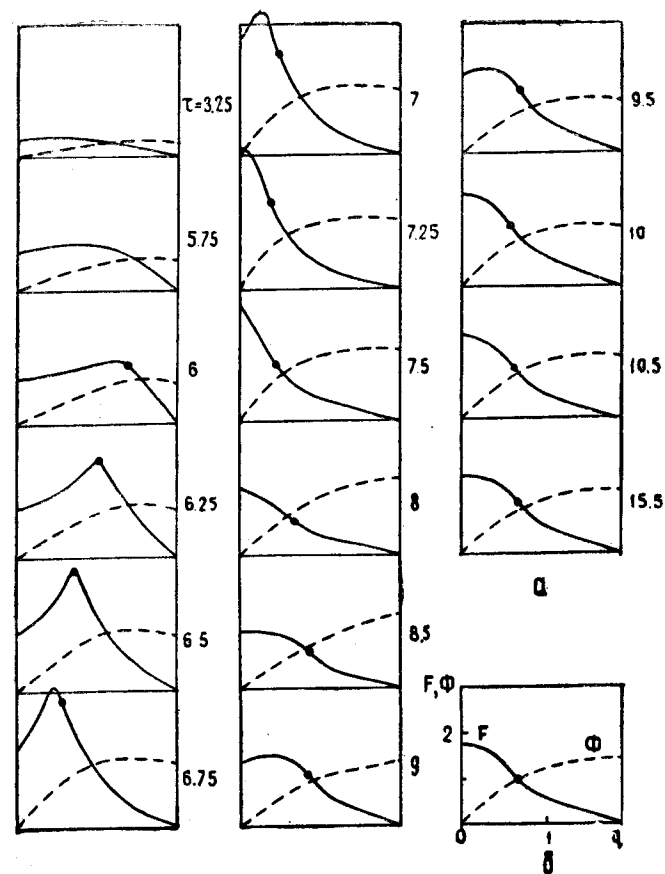


Рис. III.17. а) Распределение амплитуды поля F и величины Φ в пространстве взаимодействия на нелинейном этапе процесса установления в различные моменты времени при $Y'_a = 3$; $l = 1,8$; $\Delta q = 0,05$; $\Delta t = 0,025$

б) Стационарное состояние, полученное путем численного решения (III.51) при тех же параметрах

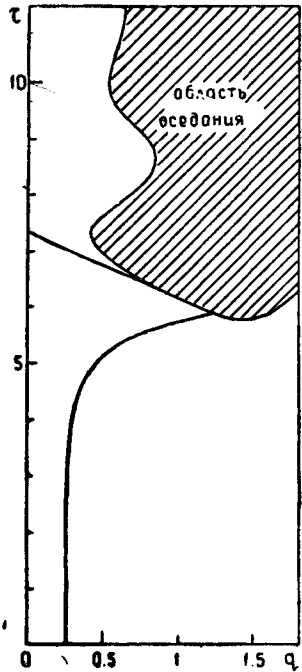
тему, будем называть областью оседания. На границе этой области $\Phi = 0,95$; функция G имеет максимум $G(\Phi) \approx 4,2$, поэтому взаимодействие наиболее эффективно. Для лучшего понимания развития процесса установления, описанного ниже, удобно следить за перемещением граничной точки области осе-

дания. Положение этой точки в каждый момент времени также показано на рис. III.17.

На рис. III.18. представлена пространственно-временная диаграмма, построенная по результатам численного счета, на которой можно видеть траекторию максимума пространственного распределения амплитуды поля и граничной точки области оседания.

Используя рис. III.17 и III.18, рассмотрим качественные особенности завершающего этапа процесса установления колебаний в ЛОВМ.

Рис. III.18. Пространственно-временная диаграмма, построенная по результатам численного счета. Показана траектория максимума амплитуды и область оседания электронов на замедляющую систему (заштрихована)



Безразмерное время	Описание происходящих процессов
5,75	Начали действовать нелинейные эффекты, связанные с подъемом электронов к замедляющей системе. Максимум Φ составляет примерно 0,8 и достигается вблизи коллекторного конца лампы. Поле в этой области быстро растет вследствие увеличения «эффективного сопротивления связи», поэтому максимум амплитуды поля смещается к коллекторному концу. Распределение поля в пространстве уже нельзя считать гармоническим.
6	Начинается оседание электронов на замедляющую систему вблизи коллекторного конца лампы. Вследствие этого движение максимума амплитуды к коллекторному концу прекращается; он начинает перемещаться к пушечному концу, двигаясь со скоростью близкой к групповой (на рис. III.18 — практически по характеристике).
6,25 ÷ 6,5	Сильное поле в области максимума быстро поднимает электроны к замедляющей системе. Наиболее эффективная передача энергии электронов полю происходит вблизи граничной точки области оседания, которая практически совпадает с точкой максимума амплитуды. Вследствие этого величина максимума быстро растет и он принимает форму резкого всплеска.
6,75 ÷ 7	Вблизи коллекторного конца лампы амплитуда поля уменьшается, так как в этой области осталось мало электронов (большая часть их осела на замедляющую систему), которые не могут навести значительного поля. Граничная точка области оседания отстает от вершины всплеска, так как он подошел уже близко к пушечному концу и даже сильное поле не успевает вывести на замедляющую систему электроны, только что влетевшие в пространство взаимодействия. Всплеск становится шире, поскольку наиболее эффективное взаи-

Безразмерное время	Описание происходящих процессов
$\tau = 0$	Заданы начальные условия (III.57). Амплитуда выходного сигнала составляет 0,2. Распределение F и Φ в пространстве гармоническое.
0 ÷ 4	Имеет место экспоненциальное нарастание поля во времени, предсказанное линейной теорией (см. рис. III.20, инкремент нарастания, вычисленный в интервале τ от 1 до 2 составляет 0,185 вместо 0,194 по линейной теории). Распределение поля в пространстве не меняется (это видно хотя бы из того, что не меняется положение максимума амплитуды, рис. III.18).

Безразмерное время	Описание происходящих процессов
7,25	модействие происходит теперь на его заднем склоне. Вершина всплеска дошла до пушечного конца лампы. В этот момент наблюдается максимум амплитуды выходного сигнала (рис. III.20). Группировка электронов у пушечного конца происходит наиболее интенсивно, поэтому Φ быстро увеличивается с ростом q и граничная точка области оседания находится на минимальном расстоянии от пушечного конца.
7,5 + 8,5	Всплеск прошел выход лампы; амплитуда поля по всей длине лампы уменьшается, так как пространство взаимодействия «опустошено» после прохождения всплеска. В момент $\tau=8,5$ амплитуда выходного сигнала достигает минимума. Величина Φ также уменьшается во всем пространстве взаимодействия; граница области оседания удаляется от пушечного конца. Это происходит потому, что электроны, испытавшие влияние прошедшего всплеска, непрерывно покидают пространство взаимодействия. На их место со стороны пушечного конца приходят «свежие» электроны, которые группируются сравнительно слабым полем.
9 + 9,5	«Свежие» электроны оказываются в состоянии навести более сильное поле. Распределение амплитуды вновь приобретает максимум (на этот раз достаточно плавный) вблизи середины пространства взаимодействия, ближе к пушечному концу, т. е. там, где находится теперь граница области оседания. Максимум, увеличиваясь, смещается к пушечному концу, вслед за ним смещается граница области оседания. Фактически все процессы повторяются, но в значительно более слабой степени.
10 + 10,5	Максимум доходит до пушечного конца, а

Безразмерное время	Описание происходящих процессов
15,5	затем амплитуда выходного сигнала вновь начинает уменьшаться. После нескольких затухающих колебаний устанавливается стационарное состояние с оседанием, которое соответствует решению уравнения стационарной теории (III.51) (рис. III.17 б).

На рис. III.19 те же результаты представлены в иной форме, позволяющей сразу видеть характер изменения амплитуды поля во времени и пространстве.

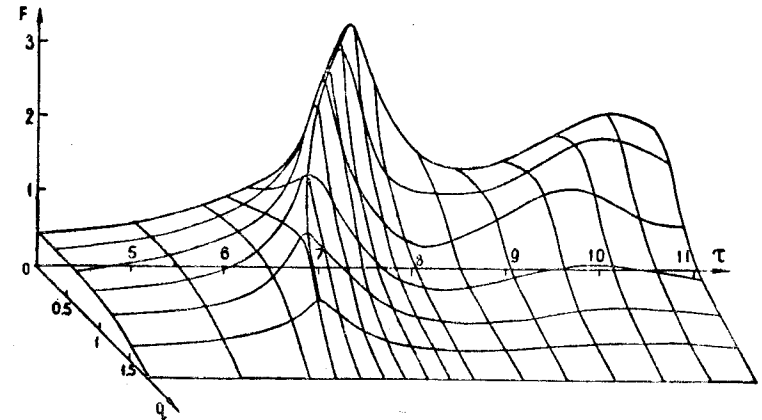


Рис. III.19. График зависимости амплитуды поля F от безразмерных времени и координаты; $Y'_a = 3$; $l = 1,8$

На рис. III.20 показано, как меняется во время описанного процесса амплитуда сигнала на выходе лампы. Для сравнения приведена аналогичная зависимость (пунктир), рассчитанная тем же методом с шагом, уменьшенным вдвое ($\Delta q = 0,025$; $\Delta \tau = 0,0125$), причем обе кривые практически совпадают. Это позволяет заключить, что сделанный ранее выбор шага обеспечил достаточно точное решение задачи.

На рис. III.20 приведена также зависимость амплитуды выходного сигнала от времени, полученная на основании линейной теории. Результаты линейной теории и численных расчетов согласуются на начальном участке. Как видно из рисунка, найденное по линейной теории время нарастания амплитуды выходного сигнала до значения, соответствующего стационар-

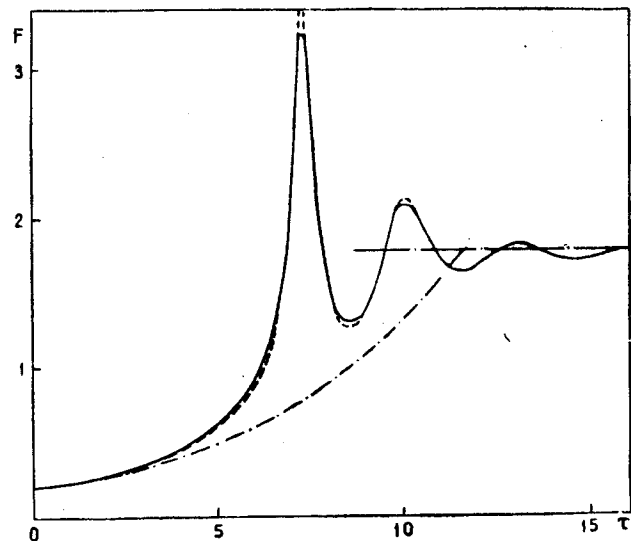


Рис. III.20. Зависимость амплитуды выходного сигнала ЛОВМ-генератора от времени в процессе установления (при $\Delta q=0,05$; $\Delta \tau=0,025$ — сплошная линия; $\Delta q=0,025$; $\Delta \tau=0,0125$ — пунктир, $Y'_a=3$; $l=1,8$) сравниваются с линейной теорией (штрих-пунктир) и стационарной теорией ($F=1,775$)

онарному режиму, хорошо аппроксимирует время установления колебаний. Впрочем, указанное совпадение носит случайный характер, так как линейная теория не может описать процессы, определяющие заключительную стадию установления колебаний.

Другой возможный подход к численному моделированию установления колебаний в ЛОВМ связан с использованием метода последовательных приближений.

На ЭВМ «Проминь» было проведено численное решение

уравнения первого приближения (III.32). Интегралы в правой части (III.32) вычислялись методом трапеций при разбиении интервала ($\tau-2l$, τ) на 50 частей. Начальные условия задавались в соответствии с соображениями, высказанными в разделе III.2, с использованием результатов линейной теории (см. (III.40) — (III.41)). Функция G , как и раньше, аппроксимировалась аналитически. Некоторые результаты решения приведены на рис. III.21 и III.22. Отметим некоторые особенности представленных кривых.

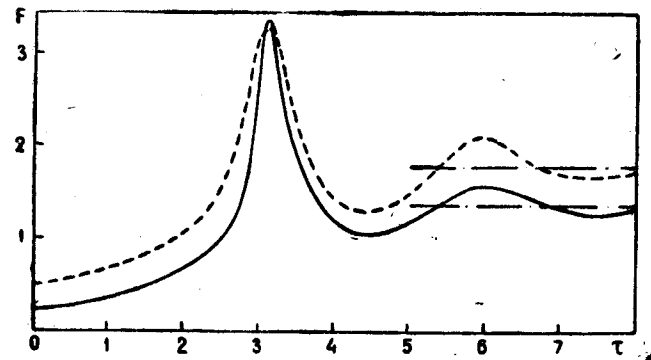


Рис. III.21. Сравнение зависимостей амплитуды выходного сигнала от времени, полученных разностным методом (пунктир) и в первом приближении (сплошная линия). Показаны соответствующие амплитуды стационарных состояний (штрих-пунктир). $Y'_a=3$; $l=1,8$

1. На начальном этапе процесса установления происходит экспоненциальное нарастание амплитуды выходного сигнала, причем инкремент нарастания с достаточной точностью согласуется с найденным в соответствующем приближении линейной теории³⁵.

2. В некоторый момент имеет место резкий всплеск амплитуды выходного сигнала, после чего наблюдаются затухающие колебания около стационарного состояния с периодом порядка времени пролета электронов через лампу.

3. Процесс заканчивается установлением стационарного состояния, причем амплитуда выходного сигнала при этом сов-

³⁵ При $l=1,8$ вместо $\kappa \approx 0,248$, как это получается из (III.41), численное решение дает $\kappa \approx 0,266$.

падает с найденной в соответствующем приближении стационарной теории (см. III.52).

4. На рис. III.21 проведено сравнение зависимостей амплитуды выходного сигнала от времени, полученных при решении уравнения первого приближения (III.32) и при решении (III.27) разностным методом. Видно, что метод последовательных приближений завышает скорость нарастания амплитуды на начальном этапе процесса и занижает амплитуду колебаний

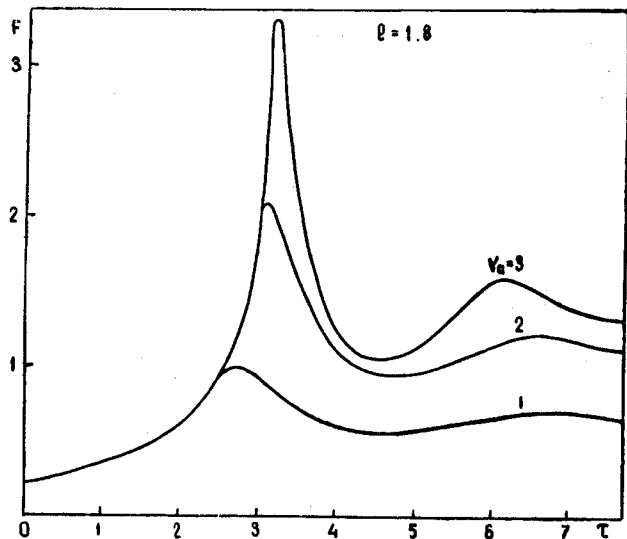


Рис. III.22. Влияние геометрии лампы на процесс установления (первое приближение) $l=1,8$

в стационарном состоянии, однако он дает хорошее качественное соответствие с разностным методом.

5. На рис. III.22 сравниваются процессы установления при различной геометрии пространства взаимодействия (различные Y'_a) и одной и той же нормированной длине лампы. До тех пор пока начало оседания «не чувствуется» на пушечном конце лампы, процесс установления не зависит от геометрии. Уменьшение Y'_a приводит к уменьшению высоты всплеска, амплитуды колебаний около стационарного состояния и амплитуды выходного сигнала в стационарном состоянии.

III.5. Основные уравнения нестационарной теории ламп с обратной волной типа О.

Нелинейные уравнения нестационарной теории ЛОВ типа О при $C \ll 1$ можно вывести аналогично тому, как это было сделано в III.2 для ЛОВМ, исходя из соответствующего уравнения движения и уравнения возбуждения (III.10). Проще, однако, воспользоваться замечанием, сделанным в III.2, и получить их непосредственно из уравнений стационарной теории (1.33—35), заменив оператор $\frac{d}{d\zeta}$ на $\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau}$ в уравнении движения и на $\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \tau}$ в уравнении возбуждения. Здесь τ — безразмерное время, выбранное так, чтобы электронный поток двигался с единичной безразмерной скоростью; u — безразмерная групповая скорость волны.

Учитывая сказанное, запишем систему уравнений нестационарной нелинейной теории ЛОВО в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau} - dF = I_1;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 \Phi = -\text{Re} \{ (F + jqI_1) e^{j\Phi} \}; \quad (\text{III.58})$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j\Phi} d\varphi_0,$$

где $\Phi = \Phi(\zeta, \tau, \varphi_0)$; $F = F(\zeta, \tau)$; $I_1 = I_1(\zeta, \tau)$

Отсутствие члена jbF в первом уравнении (III.58) означает, что при записи уравнения возбуждения в качестве частоты Ω мы выбрали частоту, соответствующую условиям точного синхронизма электронов и волны. Все поправки к частоте и постоянной распространения сигнала будут описываться изменением во времени и пространстве аргумента комплексной амплитуды поля F . Правомочность такой записи будет продемонстрирована, например, при переходе к уравнениям стационарного режима. Заметим, далее, что членом с производной тока в выражении для поля (III.1) можно пренебречь, поскольку он имеет порядок C по сравнению с остальными членами.

Граничные условия для ЛОВО-генератора имеют вид:

$$\Phi|_{\zeta=0} = \varphi_0; \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=0} = 0; \quad F|_{\zeta=l=2\pi CN} = 0. \quad (\text{III.59})$$

Они выражают отсутствие модуляции потока на входе в пространство взаимодействия и отсутствие поля на коллекторном конце лампы.

Граничные условия для ЛОВО-усилителя и резонансной ЛОВО могут быть сформулированы аналогично тому, как это сделано в III.2 применительно к ЛОВМ.

Ясно, что рассматривая систему (III.58) как систему уравнений в частных производных по q и τ , можно прийти, как и в случае ЛОВМ, к интерпретации процессов в ЛОВО на основании понятий характеристик и пространственно-временных диаграмм, однако мы не будем более останавливаться на этих вопросах.

Качественное описание процесса установления колебаний в ЛОВО дано в работах [7], [8], [1]. Оно может быть проверено путем численного решения системы (III.58), которая, однако, значительно сложнее, чем система уравнений стационарного режима.

Рассмотрим некоторые свойства уравнений (III.58).

III.5.1. Переход к уравнениям стационарного режима

В случае стационарного режима амплитуда и частота сигнала в каждой точке пространства взаимодействия должны быть постоянны. Будем искать такое решение в виде:

$$F = \bar{F}(\zeta) e^{ja(\tau - \zeta)},$$

где α — действительная постоянная.

Сделаем замену:

$$I_1 = \bar{I}_1 e^{ja(\tau - \zeta)}; \quad \Phi = \bar{\Phi} - \alpha(\tau - \zeta),$$

тогда уравнения (III.58) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \zeta} - j\alpha \left(1 + \frac{1}{u}\right) \bar{F} - d \cdot \bar{F} &= \bar{I}_1 \\ - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \zeta^2} &= \text{Re} \{ (\bar{F} + jq\bar{I}_1) e^{j\bar{\Phi}} \} \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j\bar{\Phi}} d\bar{\varphi},$$

а граничные условия можно записать так:

$$\Phi|_{\zeta=0} = \bar{\varphi}_0; \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0; \quad F|_{\zeta=l} = 0. \quad (\text{III.61})$$

Система (III.60) совпадает с уравнениями стационарного режима (I.33—35), если положить $C \ll 1$;

$$-\alpha \left(1 + \frac{1}{u}\right) = b. \quad (\text{III.62})$$

Покажем, что введенный таким образом параметр b совпадает с общепринятым (глава 1).

Чтобы получить из (III.10) уравнение возбуждения стационарной теории ЛОВО, следует выбрать в качестве «несущей» частоту генерации, а не частоту точного синхронизма, как в настоящей главе. В соответствии с принятыми здесь обозначениями частота генерации равна $\omega = \Omega(1 + \alpha C)$. Постоянная распространения «холодной» волны на этой частоте определяется разложением:

$$\beta_s(\omega) \approx \beta_s(\Omega) + \alpha \Omega C \left[\frac{\partial \beta_s}{\partial \omega} \right]_{\omega=\Omega} = \frac{\Omega}{v_0} \left(1 - \alpha C \frac{v_0}{v_s^{\text{rp}}} \right).$$

Знак минус появился из-за того, что рассматривается обратная волна. Найдем фазовую скорость волны на частоте ω :

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\beta_s(\omega)} = v_0 \frac{1 + \alpha C}{1 - \alpha C \frac{v_0}{v_s^{\text{rp}}}} \approx v_0 + \alpha C v_0 \left(1 + \frac{1}{u} \right),$$

$$\text{где } u = \frac{v_s^{\text{rp}}}{v_0}.$$

В соответствии с определением параметра b имеем:

$$b = \frac{v_0 - v_\Phi}{G v_\Phi} = -\alpha \left(1 + \frac{1}{u} \right)$$

с точностью до величины порядка C .

III.5.2. Закон сохранения энергии

Пусть для простоты $q=0$; $d=0$; $u=1$. Усредним уравнение движения по φ_0 . Учитывая выражение для I_1 и уравнение возбуждения, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ 2 \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{2} |F|^2 \right\} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ 2 \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tau} \right) - \frac{1}{2} |F|^2 \right\}, \quad (\text{III.63})$$

где волнистой чертой обозначено усреднение по φ_0 .

Положим $w_1 = 1/2 |F|^2$. Эта величина имеет смысл безразмерной плотности энергии поля, кроме того, она численно равна потоку энергии поля, так как $u = 1$.

Рассмотрим группу электронов, поступивших в пространство взаимодействия за период ВЧ поля и находящуюся в данный момент τ в точке ξ (положение группы электронов может быть определено с точностью до величин порядка C). В момент τ суммарная кинетическая энергия этих электронов составляет

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \left[1 + C \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tau} \right) \right]^2 \approx \frac{mv_0^2}{2} + mv_0^2 C \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tau} \right).$$

Таким образом, величина $2 \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tau} \right)$ с точностью до постоянного слагаемого представляет собой безразмерную плотность кинетической энергии электронного потока в точке ξ в момент τ . В силу того, что безразмерная скорость потока равна единице, рассматриваемая величина численно равна потоку кинетической энергии в той же точке. Положим $w_2 = 2 \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tau} \right)$. Тогда соотношение (III.63) можно переписать в форме (III.47). Итак, уравнение (III.63) выражает закон сохранения энергии применительно к ЛОВО. Этому уравнению может быть дана точно такая же интерпретация, как и выражению (III.46), с той лишь разницей, что вместо потенциальной энергии электронов во всех рассуждениях будет фигурировать их кинетическая энергия.

III.5.3 Линейная нестационарная теория ЛОВО

Проведем линеаризацию уравнений (III.58).

Пусть $\Phi = \varphi_0 + \Phi_1$; $|\Phi_1| \ll 1$. Ограничиваясь членом первого порядка малости, получим $I_1 \approx -2j\Phi_1 e^{-j\varphi_0}$. Умножим уравнение движения на $e^{-j\varphi_0}$ и усредним по φ_0 . Будем иметь:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 I_1 + qI_1 &= jF; \\ \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau} - d \cdot F &= I_1. \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

Соотношения (III.64) представляют собой основные уравнения линейной нестационарной теории ЛОВО. Граничные условия для системы (III.64) запишем следующим образом:

$$I_1|_{\zeta=0} = 0; \left[\frac{\partial I_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial I_1}{\partial \tau} \right]_{\zeta=0} = 0; F|_{\zeta=l} = 0. \quad (\text{III.65})$$

Если искать решение (III.64) в виде $F, I_1 \sim e^{\delta\zeta + \kappa\tau}$, то получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\left(\delta - \frac{\kappa}{u} - d \right) [(\delta + \kappa)^2 + q] = j. \quad (\text{III.66})$$

Положим $\delta_1 = \delta + \kappa$; $\kappa = \chi + j\alpha$ и используем соотношение (III.62). Тогда (III.66) принимает вид:

$$\left[\delta_1 + jb - d - \chi \left(1 + \frac{1}{u} \right) \right] (\delta_1^2 + q) = j,$$

что точно соответствует уравнениям (III.176) работы [1] и (12) работы [8].

Будем искать собственные типы колебаний ЛОВО, т. е. такие решения (III.64), которым соответствует неизменное распределение поля в пространстве. Эти решения должны удовлетворять условиям (III.65) и иметь вид:

$$F = \sum_{k=1}^3 F_k e^{\delta_k \zeta + \kappa \tau},$$

где δ_1 ; δ_2 ; δ_3 — корни уравнения (III.66). Используя (III.65) и (III.64), получим систему уравнений для амплитуд трех волн F_k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 F_k e^{\delta_k l} &= 0; \\ \sum_{k=1}^3 F_k \frac{\delta_k + \kappa}{(\delta_k + \kappa)^2 + q} &= 0; \end{aligned} \quad (\text{III.67})$$

$$\sum_{k=1}^3 F_k \frac{1}{(\delta_k + \kappa)^2 + q} = 0$$

и уравнение относительно κ ³⁶:

$$\begin{vmatrix} e^{\delta_1 l} & e^{\delta_2 l} & e^{\delta_3 l} \\ \frac{\delta_1 + \kappa}{(\delta_1 + \kappa)^2 + q} & \frac{\delta_2 + \kappa}{(\delta_2 + \kappa)^2 + q} & \frac{\delta_3 + \kappa}{(\delta_3 + \kappa)^2 + q} \\ \frac{1}{(\delta_1 + \kappa)^2 + q} & \frac{1}{(\delta_2 + \kappa)^2 + q} & \frac{1}{(\delta_3 + \kappa)^2 + q} \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{III.68})$$

которые совпадают соответственно с выражениями (17) и (18) работы [8], если провести замену $\delta_1 = \delta + \kappa$.

Очевидно, что уравнение (III.68) имеет бесконечно много корней, соответствующих различным видам колебаний ЛОВО. Те корни, которые лежат в правой полуплоскости комплексного переменного κ , дадут нарастающие во времени решения, причем они не будут действительными, как в случае ЛОВМ. Это значит, что в режиме установления в ЛОВО нет точного синхронизма между волной в линии передачи и электронным потоком. Зная комплексный корень (III.75), можно найти инкремент нарастания и параметр рассинхронизма:

$$\chi = \text{Re } \kappa; \quad b = -\left(1 + \frac{1}{u}\right) \text{Im } \kappa.$$

Рассмотрим теперь некоторые возможные упрощения в линейной теории ЛОВО, так как совместное решение (III.66) и (III.68) не может быть получено аналитически; представляется достаточно сложным и численное решение системы этих уравнений.

Если параметр пространственного заряда q достаточно велик, то можно перейти к двухволновому приближению (глава I). Пусть $F = jf e^{j\alpha(\zeta + u\tau)}$, $I_1 = J e^{j\alpha(\zeta + u\tau)}$. Тогда первое из уравнений (III.64) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2 J + 2j\alpha \left(1 + \frac{1}{u}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) J - \alpha^2 \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 J + qJ = jf. \quad (\text{III.69})$$

Положим $-\alpha(1 + 1/u) = b = \sqrt{q}$. Тогда в (III.69) можно

³⁶ Поскольку $\delta_{1,2,3}$ связаны с κ уравнением (III.66) и входят в (III.68) в показателе экспонент, то уравнение (III.68) трансцендентное.

пренебречь второй производной J и записать окончательно:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) J = -\frac{f}{2\sqrt{q}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \tau} - d\right) f = J \quad (\text{III.70})$$

$$J|_{\zeta=0} = 0; \quad f|_{\zeta=l} = 0. \quad (\text{III.71})$$

Положим для простоты $u=1$; $d=0$. Тогда (III.63) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} + \frac{J}{2\sqrt{q}} = 0. \quad (\text{III.72})$$

Уравнение (III.72) аналогично уравнению (III.34) теории ЛОВМ. Решая его методом разделения переменных и учитывая граничные условия (III.78), получим уравнение относительно постоянной нарастания κ , аналогичное (III.38):

$$\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{q}} - \kappa^2} \cos \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{q}} - \kappa^2} l + \kappa \sin \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{q}} - \kappa^2} l = 0.$$

Это уравнение, подобно (III.38), будет иметь действительные положительные корни, соответствующие нарастающим типам колебаний. Тот факт, что нарастающим решениям соответствуют действительные корни, означает, что в режиме установления в ЛОВО при больших q имеет место синхронизм между волной в линии передачи и модленной волной пространственного заряда. Применим для решения уравнений (III.64) метод последовательных приближений, считая $q=0$, $d=0$; $u=1$. В качестве нулевого приближения выберем поле простой волны $F^{(0)} = F(\zeta + \tau)$. Подставим $F^{(0)}$ в первое уравнение (III.64) и найдем решение, удовлетворяющее первым двум граничным условиям (III.65)

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{4} \int_{\lambda}^{\tau+\zeta} d\eta \int_{\lambda}^{\eta} F(\xi) d\xi; \quad \lambda = \tau - \zeta.$$

Это выражение подставим во второе уравнение (III.64), ко-

торое перепишем с учетом граничного условия на коллекторном конце в виде:

$$F^{(1)} = \frac{1}{2} j \int_{\zeta+\tau-2l}^{\tau-\zeta} I_1(\lambda) d\lambda. \quad (\text{III.73})$$

Потребуем, чтобы $F^{(1)}|_{\zeta=0} = F^{(0)}|_{\zeta=0}$. Из (III.73) получаем интегральное уравнение относительно комплексной амплитуды на выходе генератора:

$$F(\tau) = \frac{j}{8} \int_{\tau-2l}^{\tau} d\lambda \int_{\lambda}^{\tau} d\eta \int_{\lambda}^{\eta} F(\xi) d\xi. \quad (\text{III.74})$$

Будем искать решение (III.74) в виде $F(\tau) \sim e^{x\tau}$. Тогда комплексная постоянная x должна удовлетворять следующему уравнению:

$$1 = j \frac{e^{2lx} - 1 - lx e^{2lx} - lx}{4x^3}, \quad (\text{III.75})$$

причем, как и раньше, действительная часть x характеризует нарастание колебаний во времени, а мнимая — поправку к частоте точного синхронизма. Если ввести обозначения $\Phi_0 = -2l\text{Im}x$; $y = 2l\text{Re}x$, то уравнение (III.75) можно переписать в форме (III.179) [1], где $\Theta_p = 0$; $\gamma_0 = 0$.

Метод последовательных приближений в аналогичной форме может быть применен и в нелинейной нестационарной теории ЛОВО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М., «Сов. радио», 1970.
2. Роу Дж. Е. Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот. М., «Сов. радио», 1969.
3. Фейнштейн, Кайно. Лампа бегущей волны со скрещенными полями при большом сигнале. — В кн.: Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями. М., ИЛ, 1961, т. I, с. 451—462.
4. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М., «Сов. радио», 1973.
5. Теория лучевых приборов магнетронного типа. Под ред. Трубецкова Д. И. Лекции по электронике СВЧ (2-я зимняя школа-семинар инженеров), кн. 5. Изд-во Саратов, ун-та, 1972.
6. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М., «Сов. радио», 1957.

7. Голант М. Б., Тагер А. С. Установление колебаний в гетеродинных лампах обратной волны и клистродах. — «Вопросы радиоэлектроники. Сер. I, Электроника», 1960, вып. 5, с. 25.

8. Викулов И. К. О времени установления автоколебаний в генераторах обратной волны типа 0. Вопросы радиоэлектроники. Сер. I. Электроника, 1964, вып. 5, с. 26.

9. Викулов И. К., Тагер А. С. Об одном методе исследования установления колебаний в лампах обратной волны типа 0. — «Радиотехника и электроника», 1967, т. 12, № 12, с. 2146.

10. Brown A. V. Some transient phenomena in microwave tubes, Proc. IRE, 1958, v. 1958, v. B-105, Suppl. 10, p. 468.

11. Sakuraba J. Build up of O-type backward-wave oscillator. — J. IEEE of Japan, 1960, v. 43, № 1, p. 61.

12. Трубецков Д. И., Шахин В. П. Некоторые вопросы теории установления колебаний в лучевых генераторах обратной волны магнетронного типа. — В сб.: Вопросы электроники сверхвысоких частот. Изд-во Саратов. ун-та, 1969, вып. 6, с. 110.

13. Bobroff D. L. The build-up oscillators in an electron beam backward-wave oscillators. — IEEE Trans., 1965, v. ED-12, № 6, p. 307.

14. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями. М., ИЛ, 1961, т. 1, с. 347—349.

15. Bobroff D. L. Haus H. A. Impulse response of active coupled wave systems. — J. Appl. Phys., 1967, v. 38, № 1, p. 390—403.

16. Биргер Е. С., Вайнштейн Л. А. О распространении высокочастотных возмущений в поглощающих и активных средах, ЖТФ, 1973, т. XLIII, № 11, стр. 2217—2228.

17. Рабинович М. И. Автоколебания распределенных систем. — «Изв. высш. уч. зав. Радиофизика», 1974, т. 17, № 4, с. 477.

18. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.