

УДК 621.373.4:621.385.633

## ФЛУКТУАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ УСТАНОВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ СО СКРЕЩЕННЫМИ ПОЛЯМИ

*С. П. Кузнецов*

На базе развитой ранее нестационарной теории исследуется установление колебаний в ЛОВМ-генераторе от начала и до конца процесса, включая возникновение регулярного сигнала из дробовых шумов и заключительную нелинейную стадию. Показано, что при токе пучка, близком к пусковому, принципиальное влияние на самовозбуждение генератора оказывают слабонелинейные эффекты. В частности, при токе меньше пускового за счет флуктуаций возможен переброс системы из невозбужденного состояния в режим генерации. Предложена и иллюстрирована примерами методика расчета математического ожидания и дисперсии времени установления колебаний.

### ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является исследование на базе развитой ранее нестационарной нелинейной теории [1–3] процесса начала генерации и возникновения регулярного сигнала из шумов в генераторе обратной волны со скрещенными полями (ЛОВМ). Эта задача имеет некоторое практическое значение, а также представляет теоретический интерес как пример воздействия флуктуаций на конкретную распределенную автоколебательную систему. Ранее она решалась на уровне оценок [4, 5], однако в этих работах не нашел отражения целый ряд важных вопросов (не рассматривались роль нелинейных эффектов и влияние способа включения генератора на процесс установления колебаний, не оценивался средний разброс времени установления).

Используемая далее физическая модель ЛОВМ подробно описана в [1–3]; укажем здесь только, что применяется адиабатическое приближение; влияние поля пространственного заряда, распределенное затухание, отражения от концов лампы, непостоянство групповой скорости в спектральном интервале сигнала не учитываются; параметр усиления  $D$  считается малым ( $D \ll 1$ ). Предполагается, что флуктуации обусловлены дробовым эффектом, причем электроны влетают в пространство взаимодействия независимо друг от друга, будучи распределены случайным образом по времени влета и по поперечному сечению пучка.

### 1. УСТАНОВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОТ ШУМОВ В УСЛОВИЯХ СТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РЕЖИМА ЛАМПЫ

Рассмотрим простейший случай установления колебаний в ЛОВМ от шумов, когда процесс протекает при постоянных напряжениях на электродах и токе пучка. Предположим, что до момента  $t=0$  дробовой шум был «выключен», а генератор находился в невозбужденном состоянии\*.

\* Хотя такой режим практически нереален, он может иногда рассматриваться как разумная идеализация реального процесса. Кроме того, он послужит отправной точкой для анализа более сложных случаев (см. § 2).

1) Если ток электронного пучка  $I_0$  больше так называемого пускового значения  $I_1$ , то невозбужденное состояние генератора неустойчиво относительно бесконечно малых колебаний на частоте  $\omega$ , которая определяется из условия равенства фазовой скорости волны в линии передачи и скорости движения электронов [4-6]:

$$(1) \quad v_\phi(\omega) = v_0.$$

Поскольку в спектре шумовых флуктуаций всегда имеются составляющие на частотах, близких к  $\omega$ , то в результате развития неустойчивости они будут нарастать, что и приведет к возникновению регулярного сигнала. Качественная картина процесса при этом соответствует описанной в [6], стр. 340 и 185.

2) Если ток пучка меньше  $I_1$ , но больше некоторого значения  $I_2$ , то невозбужденное состояние генератора неустойчиво на той же частоте относительно возмущений конечной амплитуды (тем меньшей, чем ближе ток пучка к пусковому), см. [7, 1-3]. Это связано со специфическим характером слабой нелинейности в ЛОВМ: чем больше амплитуда сигнала, тем более заметным становится смещение электронов, находящихся в тормозящей фазе волны, к замедляющей системе. Там они попадают во все более сильное высокочастотное поле и поэтому более эффективно отдают волне свою потенциальную энергию.

В этом случае флуктуации также могут привести к самовозбуждению, однако его механизм несколько иной. Из-за того, что система усиливает преимущественно шумы на частотах, близких к рабочей, выходному шумовому сигналу можно приписать частоту  $\omega$ , полагая, что его амплитуда и фаза являются медленно меняющимися функциями времени. Если в некоторый момент амплитуда превысит определенный уровень, то в соответствии со сказанным выше она начнет быстро нарастать. Этот ее рост будет ограничен в сильнонелинейном режиме оседанием электронов на замедляющую систему. Среднее время ожидания самовозбуждения генератора будет, очевидно, тем меньше, чем ближе  $I_0$  к  $I_1$ .

3) Если  $I_0 < I_2$ , то генератор в принципе не может самовозбудиться. Шум на выходе лампы при достаточно больших  $t$  представляет собой стационарный случайный процесс. Это так называемый предгенерационный режим лампы.

1. 1. Расчет отклика ЛОВМ на «толчок», вызываемый отдельным электроном. Рассмотрим электрон, создающий плотность тока

$$(2) \quad \vec{j} = e\vec{v}_0 \delta(x - v_0 t) \delta(y - \Delta y) \delta(z),$$

траектория которого изображается линией  $AB$  на пространственно-временной диаграмме (рис. 1). Используя результаты работы [8], можно показать, что поле его излучения на частоте  $\omega$ , удовлетворяющей условию (1), занимает область  $ABC$  (групповая скорость волны отрицательна) и описывается выражениями

$$(3) \quad \vec{E} = \text{Re} [C \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \beta x)}],$$

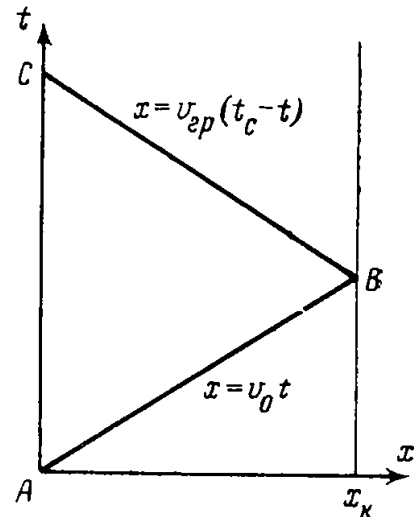


Рис. 1. Обратное излучение электрона, движущегося по траектории  $AB$ , занимает область  $ABC$  на пространственно-временной диаграмме

$$(4) \quad C_{-s} = \frac{2eE_{sx}^0(\Delta y)}{N_s(v_0^{-1} + v_{гр}^{-1})} \approx \frac{2e[E_{sx}^0(0) - i\beta\Delta y E_{sv}^0(0)]}{N_s(v_0^{-1} + v_{гр}^{-1})},$$

где  $\vec{E}_{\pm s}^0$  — собственные функции волновода, взятые на частоте  $\omega$ ;  $N_s$  — норма;  $v_{гр}$  — абсолютная величина групповой скорости волны;  $\beta = \omega/v_0$ . Перейдем в (4) к безразмерным параметрам:

$$(5) \quad F = \varepsilon u \frac{1 - i\omega}{1 + u} = F_e,$$

где  $F = C_{-s}/D$  — безразмерная амплитуда поля;  $u = v_{гр}/v_0$  — безразмерная групповая скорость;  $\omega = \beta\Delta y$ ;  $\varepsilon = e\omega D/I_0$  — параметр, характеризующий дискретную структуру электронного потока и определяющий, следовательно, уровень дробового шума.

Чтобы учесть взаимодействие излучения, описываемого формулами (3) — (5), с электронным потоком, используем линеаризованные уравнения нестационарной теории ЛОВМ [1—3]:

$$(6) \quad \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} = \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} = F$$

с граничными условиями

$$(7) \quad \Phi|_{q=0} = 0, \quad F|_{q=l} = 0$$

и начальным условием на характеристике  $AB$

$$(8) \quad F|_{q=\tau} = F_e.$$

Здесь  $\tau = \omega Dt$ ;  $q = \beta Dx$ ;  $\Phi$  — вспомогательный параметр группировки.

В результате решения этой задачи при помощи преобразования Лапласа по времени получим

$$(9) \quad F(0, \tau) = \frac{F_e}{\pi i} \int_{\chi - i\infty}^{\chi + i\infty} \frac{\exp\left(s \frac{2u\tau}{1+u}\right)}{s + \sqrt{1-s^2} \operatorname{ctg} \sqrt{1-s^2} l} ds,$$

где  $\chi$  выбирается так, чтобы контур интегрирования проходил правее всех особых точек подынтегрального выражения в плоскости комплексного переменного  $s$ .

1.2. Установление колебаний при заметном превышении тока электронного пучка над пусковым  $\langle I_0 \rangle \geq 1,01 I_1$  \*. В принятых безразмерных параметрах условие  $I_0 > I_1$  означает, что  $l > \pi/2$ . В этом случае подынтегральное выражение (9) имеет один или несколько полюсов в правой полуплоскости, причем оказывается, что все они лежат на действительной оси [1—3]. Учитывая при интегрировании в (9) только наибольший из них  $s = \kappa$ , найдем асимптотическое поведение отклика при больших  $\tau$ :

$$(10) \quad F(0, \tau) = 2F_e \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa l} e^{\alpha\tau},$$

где  $\alpha = 2u\kappa/(1+u)$ .

За время от 0 до  $t$  в пространство взаимодействия влетит в среднем  $\bar{n} = I_0 t/e = \tau/\varepsilon$  электронов, так что результирующий отклик в момент  $t$  пред-

\* Случай  $I_0 \approx I_1$  будет рассмотрен в следующем параграфе. Заметим, что области применимости подходов, развитых в п. 1.2 и 1.3, частично перекрываются.

ставляет собой суперпозицию  $\bar{n}$  членов вида (10):

$$(11) \quad F(0, \tau) = \sum_{n=1}^{\bar{n}} F_n(0, \tau) = \frac{2u\epsilon}{1+u} \frac{1-\kappa^2}{1+\kappa l} \sum_{n=1}^{\bar{n}} (1-iw_n) e^{\alpha(\tau-\tau_n)+i\varphi_n},$$

где случайные величины  $\tau_n$  (момент влета),  $\varphi_n$  (фаза) и  $w_n$  (отклонение от оси пучка) относятся к  $n$ -му электрону и предполагаются далее некоррелированными.

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично случаю сосредоточенных автоколебательных систем [9, 10], поэтому приведем только окончательные результаты расчета.

Если представить амплитуду выходного сигнала в виде  $|F| = Ae^{\alpha\tau}$ , то случайная величина  $A$  распределена по релеевскому закону

$$(12) \quad f(A) = \frac{A}{\sigma^2} e^{-A^2/2\sigma^2},$$

где дисперсия  $\sigma^2$  при  $e^{2\alpha\tau} \gg 1$  определяется выражением

$$(13) \quad \sigma^2 = \frac{\bar{n}}{2} \langle |F_n|^2 \rangle \simeq \frac{\epsilon u (1 + \langle w^2 \rangle)}{2\kappa(1+u)} \left( \frac{1-\kappa^2}{1+\kappa l} \right)^2.$$

Функция распределения времени  $\tau_R$  достижения амплитудой уровня  $|F| = R$  имеет вид

$$(14) \quad f(\tau_R) = \frac{\alpha R^2}{\sigma^2} \exp \left[ -2\alpha\tau_R - \frac{R^2}{2\sigma^2} \exp(-2\alpha\tau_R) \right].$$

График этой функции приведен в работе [10].

Используя (14), нетрудно найти среднее значение времени  $\tau_R$  и его среднеквадратичный разброс:

$$(15) \quad \alpha \langle \tau_R \rangle = \int_0^{\infty} \alpha \tau f(\tau) d\tau \simeq \frac{1}{2} \left( \ln \frac{R^2}{2\sigma^2} + 0,577 \right),$$

$$(16) \quad \alpha \sqrt{\langle (\Delta\tau_R)^2 \rangle} = \frac{\pi}{8}.$$

Полученные результаты разумно использовать следующим образом: 1) выбирается значение амплитуды  $R$ , большое по сравнению с уровнем шумов ( $R \gg \sigma$ ) и достаточно малое, чтобы не были еще существенны нелинейные эффекты; 2) из описанной выше линейной флуктуационной теории определяются среднее время достижения амплитудой уровня  $R$  и средний разброс этого времени; 3) из нелинейной нестационарной теории при помощи ЭВМ определяется изменение амплитуды, начиная с уровня  $R$  и до установления колебаний. При этом используются уравнения, выведенные в [1-3]:

$$(17) \quad \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} = G(\Phi), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} = F$$

с граничными условиями (7) и начальными условиями

$$(18) \quad \Phi|_{\tau=0} = R \exp \left( \frac{1-u}{1+u} \kappa q \right) \frac{\sin \sqrt{1-\kappa^2} q}{\sin \sqrt{1-\kappa^2} l},$$

$$F|_{\tau=0} = R \exp\left(\frac{1-u}{1+u} \kappa q\right) \frac{\sin\sqrt{1-\kappa^2}(l-q)}{\sin\sqrt{1-\kappa^2}l};$$

методика решения этих уравнений также описана в [1-3]; 4) по формуле  $t = \tau/\omega D$  производится пересчет к размерному времени.

Приведем пример расчета длительности процесса установления колебаний в конкретном генераторе (параметры лампы взяты из монографии [11]).

1)  $I_0 = 1,3I_1 = 0,13a$ ;  $D = 0,022$ ;  $\omega = 1,9 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$ ;  $u = 1$ ;  $\kappa = \alpha = 0,194$ ;  $\langle w^2 \rangle = 0,1$ .

а) Определяем параметр  $\varepsilon = e\omega D/I_0 \approx 4,7 \cdot 10^{-10}$ .

б) По формуле (13) находим величину  $\sigma^2 \approx 3,4 \cdot 10^{-10}$ .

в) Полагая  $R = 0,2$ , из (15) получаем  $\langle \tau_R \rangle \approx 48$ , а из (16)  $\sqrt{\langle (\Delta \tau_R)^2 \rangle} \approx 2$ .

На рис. 2, а показан график зависимости амплитуды выходного сигнала от времени для наиболее вероятной реализации. Как видно из рисунка, существенно нелинейная стадия занимает не менее 20% полного времени

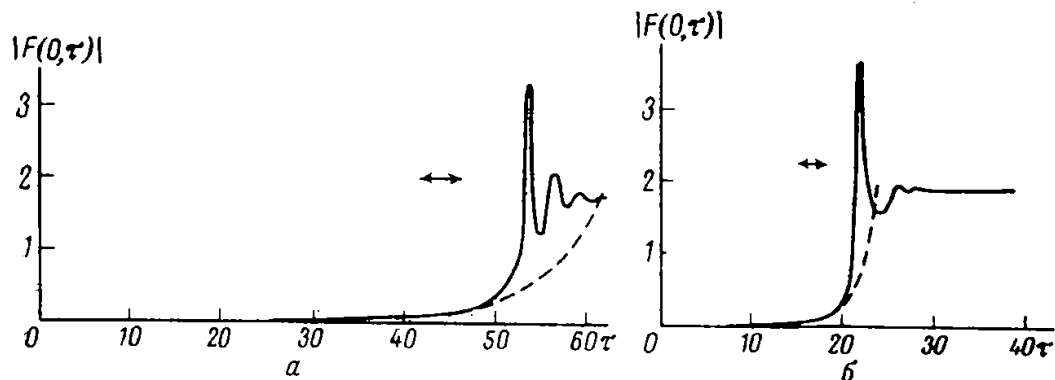


Рис. 2. Зависимость амплитуды выходного сигнала ЛОВМ от времени для наиболее вероятной реализации при  $\beta_{у.с.} = 3$ : а —  $l = 1,8$ ; б —  $l = 3$ . Пунктир соответствует линейной теории. Стрелкой показан средний разброс времени установления колебаний. Единица безразмерного времени для выбранной лампы [11] составляет 2,4 нсек в первом и 1,7 нсек во втором случаях

установления колебаний. В то же время следует отметить, что оценка из линейной теории\* дает удовлетворительный результат (см. пунктир на рис. 2, а).

2)  $I_0 = 3,65I_1 = 0,365a$ ;  $D = 0,031$ ;  $\omega = 1,9 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$ ;  $u = 1$ ;  $\kappa = \alpha \approx 0,65$ ;  $\langle w^2 \rangle = 0,1$ .

Выполняя ту же самую последовательность вычислений, находим для  $R = 0,2$ :  $\langle \tau_R \rangle \approx 19$ ;  $\sqrt{\langle (\Delta \tau_R)^2 \rangle} \approx 0,6$ . Соответствующий график процесса установления показан на рис. 2, б; его общий характер такой же, как и в предыдущем случае, хотя время установления колебаний существенно меньше.

1.3. Установление колебаний при токе пучка, близком к пусковому. В этом случае следует ожидать, что существенным окажется влияние слабой нелинейности на начальном этапе процесса. Положим  $I_0 = I_1(1 + \mu)$ , где  $\mu \ll 1$  — безразмерный параметр. Тогда, как показано в Приложении 1, нелинейная система уравнений ЛОВМ (17) с соответствующими граничными условиями приближенно сводится к обыкновенному

\* Для проведения такой оценки необходимо воспользоваться соотношением (15), подставив туда в качестве  $R$  амплитуду стационарного состояния, найденную из нелинейной теории.

дифференциальному уравнению

$$(19) \quad \frac{dC}{d\tau} = \frac{\pi u}{4(1+u)} (2\mu + |C|^2) C,$$

где  $C = F(0, \tau)$  — комплексная амплитуда сигнала на выходе лампы. В отсутствие флуктуаций решение уравнения (19) имеет вид

$$(20) \quad |C| = \sqrt{2\mu} \left[ \left( 1 + \frac{2\mu}{|C_0|^2} \right) \exp \left( -\mu \frac{\pi u \tau}{1+u} \right) - 1 \right]^{-1/2}; \quad \arg C = \text{const},$$

где  $|C_0|$  — амплитуда сигнала в момент  $\tau=0$ . Из формулы (20) видно, что амплитуда нарастает, обращаясь в бесконечность, за конечное время

$$(21) \quad \tau_{\infty} = \frac{1+u}{\mu \pi u} \ln(1 + 2\mu |C_0|^{-2})$$

в том случае, если а)  $\mu > 0$ ; б)  $\mu < 0$ ;  $|C_0|^2 > 2\mu$  (неустойчивость относительно возмущений конечной амплитуды). В реальной лампе амплитуда колебаний ограничивается оседанием электронов на замедляющую систему, которое не учитывалось при выводе (19).

Так как задача решается в слабонелинейном приближении, предположим, что для определения результата воздействия на систему толчка, вызванного отдельным электроном, можно воспользоваться соотношением (10), полученным в рамках линейной теории. Поскольку  $I_0 \approx I_1$ ,  $\kappa \approx 0$  и полюс подынтегральной функции с наибольшей действительной частью,

$$(22) \quad F(0, \tau) \approx 2F_0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty.$$

Так как время одного толчка мало по сравнению с характерным временем изменения амплитуды ( $l(1+u^{-1}) \ll (2/\pi\mu)(1+u^{-1})$ ), можно считать, что изображающая точка в комплексной плоскости, движение которой описывается уравнением (19), в среднем  $1/e$  раз за единицу безразмерного времени испытывает скачок в случайном направлении на расстояние со средним квадратом  $[4\epsilon^2 u^2 / (1+u^2)] (1 + \langle w^2 \rangle)$ . Тогда можно записать уравнение Фоккера — Планка, решение которого позволило бы детальным образом проследить за эволюцией статистического ансамбля генераторов [12]. Здесь, однако, ограничимся расчетом математического ожидания времени самовозбуждения генератора. В качестве такового примем время обращения амплитуды в бесконечность.

Пусть  $M(R)$  — математическое ожидание времени ухода на бесконечность изображающей точки, первоначально находившейся на расстоянии  $R$  от начала координат. Эта функция удовлетворяет уравнению [12]

$$(23) \quad \frac{b}{2} \left( M'' + \frac{1}{R} M' \right) + \frac{\pi u}{4(1+u)} R (R^2 + 2\mu) M' = -1$$

с граничными условиями

$$(24) \quad M(\infty) = 0, \quad M'(0) = 0,$$

где

$$b = \frac{2\epsilon u^2}{(1+u)^2} (1 + \langle w^2 \rangle)$$

— коэффициент диффузии.

Интегрируя уравнение (23), найдем  $M(0)$ :

$$(25) \quad M(0) = \sqrt{\frac{2(u+1)}{\pi i b}} f\left(\mu \sqrt{\frac{2\pi i}{b(u+1)}}\right),$$

где

$$(26) \quad f(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \nu x} \frac{dx}{x} \int_0^x e^{\xi^2 + \nu \xi} d\xi.$$

Приближенные выражения для функции  $f(\nu)$  получены в Приложении 2, а ее график показан на рис. 3.

Обсудим полученные результаты, проиллюстрировав их примером расчета для конкретной лампы, данные которой были приведены выше.

а)  $\mu < 0$ . В этом случае самовозбуждение генератора можно трактовать как «переброс» под действием флуктуаций из одного состояния в другое. Как видно из (П.7) (Приложение 2), время ожидания переброса очень

сильно зависит от  $\mu$  (так как  $\epsilon \sim 10^{-9}$ , а  $\nu \sim \mu/\sqrt{\epsilon}$  входит в квадрате в показатель экспоненты). Расчет по (П.7) дает

$\mu$	$M(0)$	$M(0), \text{сек}$
$0,8 \cdot 10^{-3}$	$\sim 8 \cdot 10^4$	$\sim 2,8 \cdot 10^{-4}$
$10^{-3}$	$\sim 3 \cdot 10^9$	$\sim 10$
$1,2 \cdot 10^{-3}$	$\sim 2 \cdot 10^{15}$	$\sim 6 \cdot 10^6$
$1,4 \cdot 10^{-3}$	$\sim 10^{22}$	$\sim 10^{14}$

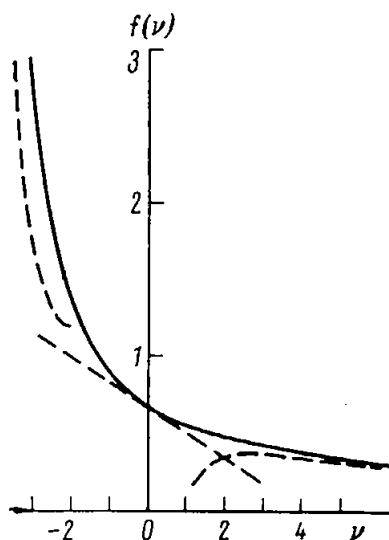


Рис. 3. График функции  $f(\nu)$ . Пунктирные линии соответствуют приближенным представлениям (П.7) — (П.9)

т. е. уже при  $\mu \geq 1,2 \cdot 10^{-3}$  самовозбуждение генератора за счет описанного механизма чрезвычайно маловероятно. Поэтому, кстати, нет необходимости исследовать случай  $I_2 < I_0 < I_1$  на основании уравнений (17).

б)  $\mu = 0$ . Расчет по формуле (П.8) приводит к результату  $M(0) \simeq 5 \cdot 10^4$  или  $\sim 1,7 \cdot 10^{-4}$  сек.

в)  $1 \gg \mu \gg \sqrt{\epsilon}$ . В этом случае справедливо соотношение (П.9), которое согласуется с результатами, полученными в п. 1.2.

#### 1.4. Предгенерационный режим\*

Поскольку в данном режиме шумовой сигнал на выходе лампы в принципе остается малым, воспользуемся линейным приближением. Подынтегральная функция в формуле (9) не имеет теперь особенностей в правой полуплоскости  $s$ , и можно перейти в этом выражении от преобразования Лапласа к преобразованию Фурье, полагая  $s = i\Phi_0$ . Определив далее спектральную плотность энергии отклика и просуммировав ее по всем электронам, влетевшим в пространство взаимодействия за единицу времени, получим безразмерную спектральную плотность мощности шумов в предгенерационном режиме:

$$(27) \quad W = \frac{4\epsilon u^2 (1 + \langle w^2 \rangle)}{(1+u)^2} \frac{\sin^2 \sqrt{1 + \Phi_0^2} l}{\Phi_0^2 + \cos^2 \sqrt{1 + \Phi_0^2} l}.$$

Аналогичное соотношение найдено другим методом в работе [13].

\* Подход, рассмотренный далее, применим также и при  $I_2 < I_0 < I_1$ , если время наблюдения мало по сравнению со временем самовозбуждения генератора.

2. О ПРЕДЕЛАХ ПРИМЕНИМОСТИ РАЗВИТОЙ ТЕОРИИ

Обсудим теперь характер установления колебаний при более реалистических способах включения генератора. Будем считать, что на замедляющую систему и отрицательный электрод поданы постоянные напряжения, а ток пучка нарастает от нуля до некоторого  $I_0$  за некоторое характерное время  $T_0$  по закону

$$(28) \quad I(t) = I_0 \varphi\left(\frac{t}{T_0}\right), \quad \varphi \rightarrow 0; \quad \varphi \rightarrow 1. \\ t \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow \infty$$

Если пучок, влетающий в пространство взаимодействия, имеет резкий фронт (шириной порядка замедленной длины волны), то излучение этого

Режимы установления колебаний в ЛОВМ-генераторе

Условие на $T_0$	Условие на $I_0$	Характер процессов	Метод анализа
$\omega T_0 \lesssim 1$	$I_0 > I_1$	Начало процессу установления кладет излучение фронта электронного пучка.	Определяется спектральная компонента излучения фронта на частоте $\omega$ . Результат используется в качестве начальных условий к уравнениям (6) или (17).
	$I_1 > I_0 > I_2$	Если излучение фронта превышает уровень неустойчивости, генератор самовозбуждается за счет слабой нелинейности.	То же самое. При $I_0 \simeq I_1$ можно использовать (20), где $ C_0 $ — амплитуда излучения фронта.
$\omega T_0 \gg 1$ $T_0 \ll T_y$	$I_0 > I_1$	Сигнал возникает из шумов в линейном режиме в условиях стационарного электрического режима лампы.	Применимы формулы (15) и (16).
	$I_0 \simeq I_1$ $I_1 > I_0 > I_2$	То же самое, но в слабонелинейном режиме. При токе, далеком от пускового, вероятность самовозбуждения чрезвычайно мала.	Применима формула (25).
$T_0 \gtrsim T_y$	$I_0 > I_1$	Сигнал возникает из шумов в линейном режиме. В процессе установления колебаний инкремент существенно меняется.	Необходима модификация линейной теории — учет зависимости $\kappa(\tau)$ .
	$I_0 \simeq I_1$	То же самое, но в слабонелинейном режиме.	
$T_0 \gg T_y$	$I_0 > I_1$	При медленном приближении к пусковому режиму в конце концов происходит переброс в режим генерации. Принципиальную роль играет слабая нелинейность.	Необходим нестационарный анализ уравнения Фоккера — Планка.

фронта на частоте  $\omega$  может оказаться выше уровня шумов, и тогда именно оно положит начало установлению колебаний. Энергия поля излучения в интервале частот  $\Delta\omega \sim \alpha\omega D$  ( $\alpha$  — безразмерный инкремент нарастания малых колебаний) пропорциональна  $|\bar{I}_\omega|^2 (\Delta\omega^2/4\pi^2)$ , где  $\bar{I}_\omega = I_0 T_0 \Psi(\omega T_0)$ ;

$$\Psi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\xi\tau} d\xi. \text{ С другой стороны, энергия поля излучения шумово-}$$



го тока в том же интервале частот пропорциональна  $\langle I_m^2 \rangle = eI_0(\Delta\omega/\pi)$  согласно формуле Шоттки для среднего квадрата флуктуаций тока. Итак, излучение фронта превалирует над шумами, если

$$(29) \quad |I_m| \geq \sqrt{\frac{4\pi e I_0}{\Delta\omega}} \quad \text{или} \quad \omega T_0 |\Psi(\omega T_0)| \geq \sqrt{\frac{4\pi e \omega}{\alpha D I_0}},$$

причем типичное значение величины, стоящей в правой части,  $\sim 10^{-3}$ . Можно с уверенностью утверждать, что это неравенство выполняется при  $\omega T_0 \ll 1$ . Значительно труднее сделать какие-либо определенные заключения, если  $\omega T_0 \gg 1$ . Действительно, формально асимптотическое поведение функции  $\Psi(\omega T_0)$  при больших  $\omega T_0$  определяется аналитическими свойствами функции  $\varphi$ , конкретизация которых затруднительна (например, если  $\varphi$  имеет разрыв производной  $n$ -го порядка, то  $|\Psi| \sim (\omega T_0)^{-n-1}$ ; если  $\varphi$  дифференцируема бесконечное число раз в любой точке, то  $|\Psi| \sim e^{-\omega T_0}$  или стремится к нулю еще быстрее). Физический смысл этой трудности заключается в необходимости ответа на вопрос: имеет функция  $\varphi(t/T_0)$  «нерегулярности» нешумового происхождения\* с масштабом времени  $T \ll T_0$  или нет? Если да, то их излучение может доминировать над шумами даже при  $\omega T_0 \gg 1$ . Если предположить, что этого нет и  $|\Psi(\omega T_0)| \leq e^{-\omega T_0}$ , то из (29) следует условие установления колебаний от шумов:  $\omega T_0 \geq 5$ . При выполнении последнего неравенства методами, развитыми в предыдущем параграфе, можно найти время  $T_v$  установления колебаний в условиях стационарного электрического режима, которое удовлетворительно аппроксимирует полное время установления, если  $T_0 \ll T_v$ . В противном случае теория требует модификации, выходящей за рамки данной работы. Сводка основных возможных режимов установления колебаний в ЛОВМ с кратким пояснением существа физических процессов и методов анализа дается в таблице.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. На примере конкретной задачи при использовании определенных допущений показана применимость методов, развитых в классической теории автогенераторов с сосредоточенными параметрами, к исследованию распределенных автоколебательных систем.

2. Впервые процесс установления колебаний в ЛОВМ рассмотрен от начала до конца, включая как линейную, так и нелинейную стадию. Показано, что оценка времени установления по методике работ [4, 5] дает удовлетворительные результаты при заметном превышении тока над пусковым  $\langle I_0 \geq 1,01 I_1 \rangle$ .

3. Отмечено, что при токе, близком к пусковому, принципиальное влияние на процесс самовозбуждения ЛОВМ оказывают нелинейные эффекты, связанные с подъемом электронов к замедляющей системе. Предложена методика расчета времени установления колебаний для этого случая.

4. Качественно рассмотрены различные возможные режимы установления колебаний в ЛОВМ.

Автор благодарен Д. И. Трубецкову за внимание к работе.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Если  $I_0 = I_1(1 + \mu)$ , то безразмерная длина лампы

$$l \approx \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{2} \right),$$

\* При формальном подходе именно такими нерегулярностями следовало бы, признать, например, разрывы производных.

поскольку  $l \sim D \sim \sqrt{I_0}$ . Выполним в уравнениях (17) замену переменных  $q = q'(1 + \mu/2)$ ;  $\tau = \tau'(1 + \mu/2)$ ;  $F = F'(1 + \mu/2)$ . Опуская штрихи, будем иметь

$$(П.1) \quad \frac{\partial F}{\partial q} + \Phi = \frac{\partial F}{\partial \tau} - g(\Phi), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q} - F = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau},$$

$$(П.2) \quad \Phi(0, \tau) = 0, \quad F\left(\frac{\pi}{2}, \tau\right) = 0,$$

где  $g(\Phi) = (\mu\Phi + \mu)G(\Phi) - \Phi \approx 1 - 2/3\Phi^3$ . Последнее справедливо при малых  $\Phi$  и получается путем разложения  $G(\Phi)$  [7, 1-3] в ряд Тейлора. В нулевом приближении, пренебрегая правыми частями (П.1), получим

$$(П.3) \quad F^{(0)} = C \cos q, \quad \Phi^{(0)} = C \sin q.$$

Подставим (П.3) в правые части (П.1), полагая, что  $C = C(\tau)$ , и решим полученные уравнения относительно  $F$  и  $\Phi$ . Требуя, чтобы решение удовлетворяло граничным условиям (П.2), приходим к уравнению

$$(П.4) \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} = \int_0^{\pi/2} g(C \sin q) \sin q \, dq.$$

Отсюда, используя явное выражение для  $g(\Phi)$ , получим уравнение (19).

### ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим функцию

$$\Psi(\varphi, \nu) = \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \nu x} \frac{dx}{x} \int_0^{x \cos 2\varphi} e^{\xi^2 + \nu \xi} d\xi,$$

причем, очевидно,  $\Psi(0, \nu) = f(\nu)$ ;  $\Psi(\pi/4, \nu) = 0$ . Тогда

$$(П.5) \quad \frac{\partial \Psi(\varphi, \nu)}{\partial \varphi} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{1}{4}\nu^2 \operatorname{tg}^2 \varphi\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\nu \operatorname{tg} \varphi\right).$$

Интегрируя соотношение (П.5), находим выражение

$$(П.6) \quad f(\nu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{1}{4}\nu^2 \operatorname{tg}^2 \varphi\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\nu \operatorname{tg} \varphi\right) d\varphi,$$

которое удобно использовать для приближенного представления  $f(\nu)$ .

1)  $\nu < 0$ ,  $|\nu| \gg 1$ . В окрестности точки  $\varphi = \pi/4$ , которая вносит основной вклад в интеграл,  $\operatorname{erfc}(1/2\nu \operatorname{tg} \varphi) \approx 2$ . Поэтому по методу Лапласа [14] находим

$$(П.7) \quad f(\nu) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\nu^2} \exp \frac{\nu^2}{4}.$$

2)  $\nu \approx 0$ . Выполним интегрирование, полагая

$$\exp\left(-\frac{\nu^2}{4} \operatorname{tg}^2 \varphi\right) \approx 1; \quad \operatorname{erfc}\left(\frac{\nu}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \approx 1 - \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \operatorname{tg} \varphi;$$

$$(П.8) \quad f(\nu) \approx \frac{\pi \sqrt{\pi}}{8} - \frac{\nu}{4} \ln 2.$$

3)  $\nu \gg 1$ . В этом случае кажется разумным использовать асимптотическое представление  $\operatorname{erfc} x \sim e^{-x^2}/x\sqrt{\pi}$  при больших  $x$ . Однако при подстановке его в (П.6) интеграл расходится. Поэтому положим  $\operatorname{erfc} x \sim e^{-x^2}/(x+\Delta)\sqrt{\pi}$ ,  $\Delta > 0$  — произвольное чис-

ло. Тогда интегрирование дает

$$(П.9) \quad f(\nu) \approx \frac{1}{\nu(1+4\Delta^2\nu^2)} \left[ \frac{\pi\Delta}{2\nu} + \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\nu}{2\sqrt{2}\Delta} \right) \right] \sim \frac{\ln \nu}{\nu},$$

где члены  $\sim \nu^{-1}$  и более высокого порядка малости отброшены. Заметим, что конкретный выбор  $\Delta$  оказывается несущественным, поскольку эта величина не входит в окончательный результат.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков, Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров), кн. 5, Изд. Саратовск. ун-та, 1974, стр. 88-142.
2. Электроника ламп с обратной волной, Изд. Саратовск. ун-та, 1975, гл. III.
3. С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков, Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1977, 20, 2, 300.
4. Мурье, в кн. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, 1961, I, стр. 347.
5. Д. И. Трубецков, В. П. Шахин, в сб. Вопросы электроники сверхвысоких частот, Изд. Саратовск. ун-та, 1969, в. 6, стр. 10.
6. В. Н. Шевчик, Д. И. Трубецков, Аналитические методы расчета в электронике СВЧ, Изд. Советское радио, 1970.
7. Фейнштейн, Кайпо, в кн. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, 1961, I, стр. 451.
8. В. А. Солнцев, А. С. Тагер, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 7, 1100.
9. W. A. Edson, Proc. I. R. E., 1960, 8, 1454.
10. И. С. Гоноровский, Труды МАИ, в. 50, 1955, стр. 125.
11. В. И. Гайдук, К. И. Палатов, Д. М. Петров, Физические основы электроники СВЧ, Изд. Советское радио, 1971.
12. А. А. Андронов, А. А. Витт, Л. С. Понтрягин, ЖЭТФ, 1933, 3, 3, 165; А. А. Андронов, Собрание трудов, Изд. АН СССР, 1956, стр. 142.
13. V. Epsztein, V. Glance, Etude du fonctionnement du carcinotron M en régime de pré-oscillation, Tubes hyperfréquences, Paris, 1965, 183-186.
14. Э. Копсов, Асимптотические разложения, Изд. Мир, 1966.

Поступила в редакцию  
6 XII 1976