

УДК 534.015; 537.86:519

ДИНАМИКА ДВУХ ОДНОНАПРАВЛЕННО-СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ФЕЙГЕНБАУМА У ПОРОГА ГИПЕРХАОСА. РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

С. П. Кузнецов

Рассматривается динамика двух однонаправленно-связанных систем, демонстрирующих удвоение периода, вблизи критической ситуации возникновения гиперхаоса. Получено и численно решено уравнение ренормгруппы. Найдены универсальные функции, описывающие динамику в критической точке и ее окрестности. Масштабные константы, характеризующие расщепление элементов циклов и скорость сходимости бифуркаций удвоения, в первой подсистеме равны фейгенбаумовским значениям $-2,5029$ и $4,6692$, а во второй — новым универсальным числам $-1,50532$ и $2,39274$.

1. Концепции ренормгруппы, универсальности и скейлинга привели к значительному прогрессу в понимании закономерностей перехода к хаосу в нелинейных системах через бифуркации удвоения периода, перемежаемость, квазипериодические режимы [1, 2]. Естественный вопрос состоит в том, возможен ли подобный подход и аналогичные по характеру закономерности в более сложных ситуациях, например, у порога гиперхаоса — сложного динамического режима, характеризующегося наличием двух положительных ляпуновских показателей [3]. Рассмотрим в этом контексте простейший пример гиперхаоса в системе из двух подсистем, способных демонстрировать фейгенбаумовские удвоения периода, при наличии однонаправленной связи между ними (первая подсистема действует на вторую, а вторая не влияет на первую). Известны разнообразные по физической природе примеры систем, в которых осуществляется переход к хаосу через удвоения периода (нелинейный диссипативный осциллятор под внешним воздействием, некоторые гидродинамические системы, радиотехнические генераторы и др. [4-6]). Ситуация однонаправленной связи может быть реализована между двумя любыми системами этого типа и привлекает внимание, в частности, в связи с исследованием турбулентности, развивающейся вниз по течению [7, 8].

В качестве модельной системы возьмем связанные отображения

$$x_{n+1} = g_0(x_n), \quad y_{n+1} = f_0(x_n, y_n), \quad (1)$$

где

$$g_0(x) = 1 - \lambda x^2, \quad f_0(x, y) = 1 - Ay^2 - Bx^2,$$

x и y — динамические переменные, задающие состояния первой и второй подсистем, λ, A, B — параметры. На рис. 1 показана карта динамических режимов на плоскости (λ, A) , полученная численно при $B = 0,375$. Система (1) демонстрирует особого рода критическое поведение — двухпараметрический скейлинг вблизи бикритической точки с координатами $\lambda_c = 1,401155$, $A_c = 1,124981$. Эта точка имеет в своей окрестности сложную конфигурацию областей, включающую периодические режимы (светлые области), хаотические режимы с одним положительным ляпуновским показателем (горизонтальные и вертикальные черточки) и режимы гиперхаоса (крестики). Данный тип критического поведения был впервые обнаружен в работе [9] численно в системе отображений,

аналогичной (1), и экспериментально в системе связанных нелинейных колебательных контуров, возбуждаемых внешним воздействием. Для теоретического обоснования этих результатов и осознания степени их общности необходим ренормгрупповой анализ, который и является целью настоящей работы.

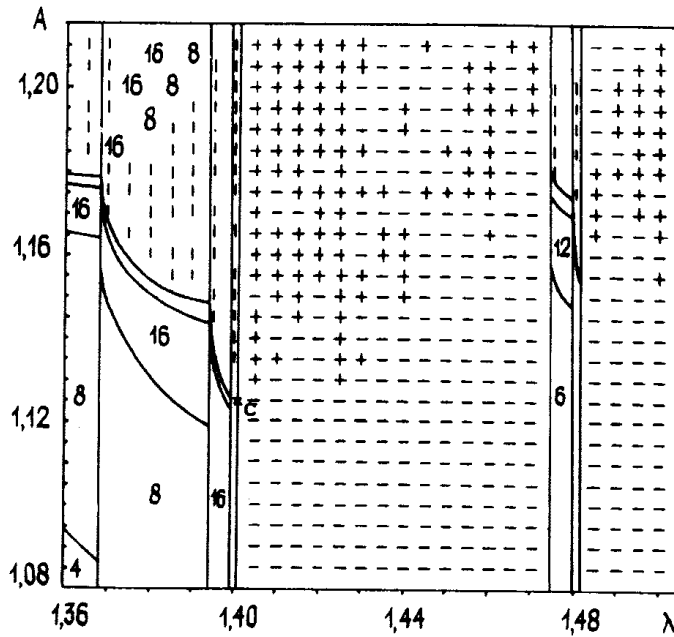


Рис. 1.

2. Для получения уравнений ренормгруппы перейдем, следуя методике Фейгенбаума [2], к отображениям, описывающим изменение состояния системы за две итерации, и изменим масштаб переменных x и y в некоторое число раз a и b . В результате получим:

$$x_{n+2} = ag_0(g_0(x_n/a)), \quad y_{n+2} = bf_0(g_0(x_n/a), f_0(x_n/a, y_n/b)). \quad (2)$$

Повторяя эту процедуру многократно, приходим к уравнениям ренормгруппы

$$g_{m+1}(x) = ag_m(g_m(x/a)), \quad f_{m+1}(x, y) = bf_m(g_m(x/a), f_m(x/a, y/b)). \quad (3)$$

Бикритической точке должна соответствовать неподвижная точка рекуррентных уравнений (3) в пространстве функций (g, f) :

$$g(x) = ag(g(x/a)), \quad f(x, y) = bf(g(x/a), f(x/a, y/b)), \quad (4)$$

отсюда же определяются масштабные константы a и b . При выборе нормировки $g(0) = 1, f(0, 0) = 1$ имеем $a = (g(1))^{-1}, b = (f(1, 1))^{-1}$.

3. Первое уравнение (4) не зависит от второго. Его численное решение было проведено Фейгенбаумом, в результате чего найдена константа $a = -2,502907$ и получено представление функции $g(x)$ в виде полинома по четным степеням x , позволяющее вычислять ее на интервале $[0, 1]$ с точностью до десятого знака после запятой [2].

Таким образом, задача состоит в решении второго уравнения (4). На методе решения остановимся специально, поскольку в отличие от других функциональных уравнений, встречающихся при ренормгрупповом анализе задач нелинейной динамики [1, 2], неизвестная функция f зависит не от одного, а от двух аргументов. Это принципиальный момент, связанный с тем, что рассматривается возникновение хаотического режима с двумя положительными ляпуновскими показателями.

Способ представления функции $f(x, y)$ в области $x, y \in [0, 1]$ иллюстрируется на рис. 2*. Она задается таблицей своих значений в

* Как можно показать, функция $f(x, y)$ должна быть четной по обоим аргументам.

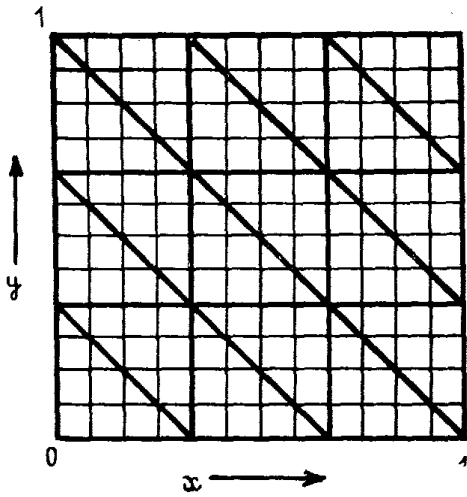


Рис. 2.

$(M+1)^2$ узлах квадратной сетки на плоскости (x, y) и определенной процедурой интерполяции между узлами. Рассматриваемая область разбита на $M^2/8$ треугольных элементов, в каждом из которых используется свой интерполирующий полином четвертой степени от двух переменных x и y . Заметим, что внутри и на границах каждого треугольника имеется 15 узлов сетки — столько же, сколько коэффициентов имеет интерполирующий полином, т. е. он определяется однозначно. Полиномы, отвечающие соседним треугольникам, равны на границе раздела между ними, поскольку превращаются на ней в полиномы четвертой степени от одной переменной, совпадающие в пяти узлах интерполяции.

Имея таблицу значений функции f_m , процедуру интерполяции и известную методику вычисления функции g , можно численно найти значения выражения в правой части второго уравнения (4) в узлах рассмотренной сетки и получить таблицу функции f_{m+1} . (При этом в качестве масштабного фактора b можно взять $(f_m(1, 1))^{-1}$. Тем самым функция f_{m+1} будет найдена в том же смысле, в каком была задана функция f_m . Эти функциональные итерации можно повторять многократно, однако получаемая при этом последовательность f_m расходится. Для обеспечения сходимости к неподвижной точке уравнения ренормгруппы была эмпирически подобрана следующая итерационная схема:

$$f(x, y) \leftarrow 0,93 Rf + 0,39R^2f - 0,32R^3f, \quad (5)$$

где R^k обозначает k -кратную функциональную итерацию.

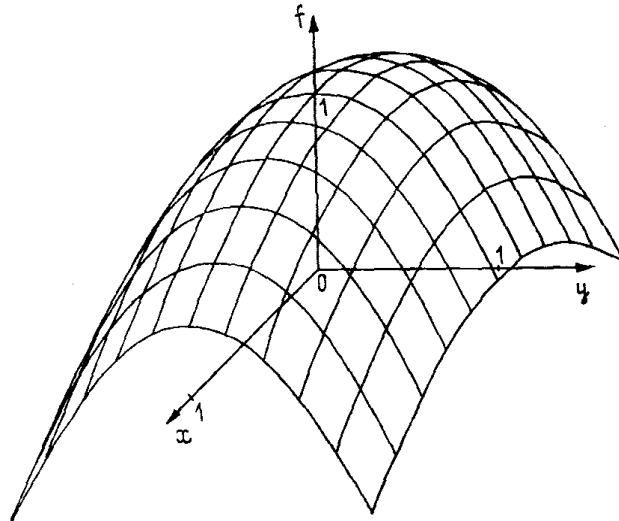


Рис. 3.

4. Расчеты проводились для сетки из 21×21 узлов. В качестве начального приближения задавалась функция, фигурирующая в (1) в бикритической точке. В результате многократных (~ 20) итераций по схеме (5) была найдена с точностью до шестого знака после запятой функция f , удовлетворяющая второму уравнению (4), и масштабная константа $b = -1,50532$. На рис. 3 показан график универсальной функции $f(x, y)$.

Отображение

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad y_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad (6)$$

описывающее динамику в бикритической точке, имеет неподвижную точку $x_* = 0,549305$, $y_* = 0,528067$. Но тогда из уравнений ренорм-группы (4) с очевидностью следует наличие 2-цикла, один из элементов которого есть x_*/a , y_*/b . Из существования 2-цикла следует наличие 4-цикла с элементом x_*/a^2 , y_*/b^2 и т. д. до бесконечности. Все эти циклы имеют, как нетрудно видеть, одинаковые мультипликаторы $\mu_1 = -1,601191$ (для возмущений по x согласно [2]) и $\mu_2 = -1,17886$ (для возмущений по y получается как производная $\partial f(x, y)/\partial y$ в точке x_*, y_*).

5. Исследуем теперь влияние возмущений исходного отображения, выводящих систему из бикритической точки. При этом ограничимся только такими возмущениями, которые оставляют связь между подсистемами однонаправленной. Формально говоря, вопрос состоит в анализе эволюции малых возмущений неподвижной точки (g, f) функционального отображения (3). Полагая $g_m(x) = g(x) + h_m(x)$ и $f_m(x, y) = f(x, y) + \varphi_m(x, y)$, где $h, \varphi \ll 1$, получаем из (4) в линейном приближении по h и φ :

$$h_{m+1}(x) = a \left[g' \left(g \left(\frac{x}{a} \right) \right) h_m \left(\frac{x}{a} \right) + h_m \left(g \left(\frac{x}{a} \right) \right) \right], \quad (7)$$

$$\varphi_{m+1}(x, y) = b \left[f'_y \left(g \left(\frac{x}{a} \right), f \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right) \right) \varphi_m \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right) + \varphi_m \left(g \left(\frac{x}{a} \right), f \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right) \right) \right] + b f'_x \left(g \left(\frac{x}{a} \right), f \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right) \right) h_m(x).$$

Первое из уравнений (7) решено в работе Фейгенбаума [2], где найдено старшее собственное число $\delta_1 = 4,669201$ и полиномиальная аппроксимация соответствующей собственной функции $h_{(1)}(x)$.

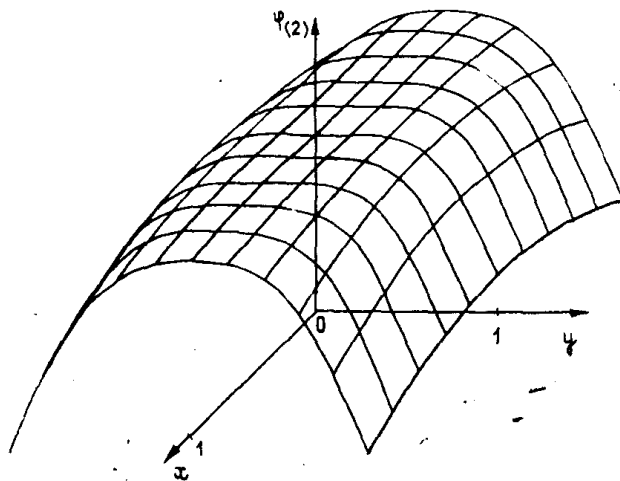


Рис. 4.

Для решения второго уравнения (7) использовалась полученная предварительно в виде таблицы функция f . Производная f'_y вычислялась аналитическим дифференцированием интерполирующего полинома. Функция $\varphi(x, y)$ представлялась, так же как и $f(x, y)$, таблицей и интерполирующими полиномами четвертой степени в треугольном элементе, на которые разбита область задания (рис. 2). В результате простых итераций функционального уравнения за достаточно большое число шагов из всех рассмотренных пробных начальных возмущений возникла одна и та же собственная функция $\varphi_2(x, y)$ с собственным числом $\delta_2 = 2,39274$. График этой функции показан на рис. 4. Других существенных собственных функций линейного оператора (7)

обнаружено не было (некоторые собственные функции отвечают возмущениям, устраняющимся инфинитезимальной заменой переменных, остальные имеют собственные числа по модулю, меньшие единицы, и затухают при $m \rightarrow \infty$).

Таким образом, в асимптотике больших m решение (7) представляется в виде линейной комбинации двух собственных векторов $(h_{(1)}, \varphi_{(1)})$ и $(0, \varphi_{(2)})$, коэффициенты которой играют роль существенных параметров задачи. Динамика в окрестности бикритической точки описывается отображением

$$x_{n+1} = g(x_n) + \Lambda_1 h_{(1)}(x_n), \quad (8)$$

$$y_{n+1} = f(x_n, y_n) + \Lambda_1 \varphi_{(1)}(x_n, y_n) + \Lambda_2 \varphi_{(2)}(x_n, y_n).$$

При преобразовании (3), отвечающем переходу к описанию динамики за два шага дискретного времени, добавочные члены в первом и втором уравнениях умножаются соответственно на δ_1 и δ_2 . Поэтому на плоскости параметров (Λ_1, Λ_2) будет существовать универсальная масштабно-инвариантная картина областей, переходящая в себя при изменении масштабов координат Λ_1 и Λ_2 , соответственно, в δ_1 и δ_2 раз. Это согласуется с имеющимися численными и экспериментальными данными [9].

6. Поскольку решение функциональных уравнений (4) и (7) может быть построено безотносительно к конкретному виду затравочных функций g_0, f_0 , то функции f и $\varphi_{(2)}$ и константы b, μ_2, δ_2 универсальны, также как функции и константы Фейгенбаума $g, h_1, a, \mu_1, \delta_1$. Поэтому динамика вблизи бикритической точки в системе из двух подсистем, демонстрирующих удвоения периода, также универсальна и не зависит ни от величины связи, ни от того, описывается ли динамика подсистем отображениями или дифференциальными уравнениями. Таким образом, дано ренормгрупповое обоснование свойств универсальности и скейлинга, присущих обнаруженному в [9] новому типу критического поведения связанных систем. Это первый нетривиальный пример скейлинговых свойств динамических систем на пороге возникновения гиперхаоса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988. — 240 с.
2. Feigenbaum M. J. // J. Stat. Phys. 1979. V. 21. № 6. P. 669.
3. Rossler O. // Phys. Lett. 1979. V. 71A. P. 155.
4. Lindsay P. S. // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. № 19. P. 1349.
5. Libchaber A., Fauve S., Lagache C. // Physica. 1983. V. 7D. № 1—3. P. 73.
6. Анищенко В. С. Стохастические колебания в радиофизических системах. — Саратов: Гос. ун-т, 1985, 1986 Кн. 1, 2.
7. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39. № 12. С. 561.
8. Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1120.
9. Безручко Б. П., Гуляев Ю. В., Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 3. С. 619.

Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники АН СССР

Поступила в редакцию
24 января 1989 г.

DYNAMICS OF TWO ONE-DIRECTIONAL COUPLED FEIGENBAUM SYSTEMS NEAR THE ONSET OF HYPERCHAOS. THE RENORMALIZATION-GROUP ANALYSIS

S. P. Kuznetsov

The dynamics of two one-directional coupled period-doubling systems is considered near the critical situation of onset of hyperchaos. The universal functions described the dynamics in the critical point and in its vicinity are found. Scaling constants characterizing the splitting of elements of cycles and the rate of period-doubling accumulation are equal to Feigenbaum's values $-2,5029$ and $4,6692$ in the first subsystem and to the new universal numbers $-1,50532$ and $2,39274$ in the second system.