

КАСКАД УДВОЕНИЙ ПЕРИОДА В КОМПЛЕКСНОМ КУБИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

С.П. Кузнецов

Установлены свойства скейлинга в динамике комплексного аналитического отображения $z \rightarrow c - z^3$ при удвоениях периода, наблюдаемых вдоль определенных траекторий в плоскости комплексного управляющего параметра c . Развит ренормгрупповой анализ, численно получено комплексное решение уравнения Фейгенбаума - Цвитановича.

Одно из интересных направлений нелинейной динамики связано с исследованием итераций аналитических функций (отображений) комплексного переменного [1-3]. Основополагающие работы, относящиеся к началу XX века, принадлежат математикам Фату и Жулиа (см.[3]). Современный интерес к проблеме мотивирован не только чистой математикой, но и физическими приложениями. Один из изящных примеров относится к статистической физике и возникает при рассмотрении расположения комплексных нулей статсуммы, которые по Ли и Янгу [4,5] ответственны за фазовые переходы. Оказывается, что для некоторых точно решаемых моделей (типа иерархических решеток) итерации аналитических функций, отвечающих ренормгрупповому преобразованию Мигдала - Каданова, описывают изменение расположения нулей статсуммы при последовательном увеличении размера системы и переходе к термодинамическому пределу [2,6].

Как известно, для простейшего квадратичного отображения

$$z \rightarrow c - z^2 \quad (1)$$

топография областей различного динамического поведения на плоскости комплексного управляющего параметра c представляется «кактусом Мандельброта» (рис. 1, *a*), который обладает множеством замечательных свойств самоподобия [1,2,7-9]. Двигаясь вдоль действительной оси параметра c , можно наблюдать каскад бифуркаций удвоения периода. При выборе пути в комплексной плоскости так, чтобы он определенным образом проходил через лепестки кактуса, можно обнаружить другие варианты усложнения периодических движений, в частности, каскады бифуркаций утроения или учетверения периода [7-9].

Удвоения периода в отображении (1) подчиняются универсальным количественным закономерностям скейлинга, которые являются общими для широкого класса нелинейных систем и связаны со свойствами неподвижной точки определенного функционального уравнения - уравнения ренормгруппы (RG) Фейгенбаума - Цвитановича [10,11]

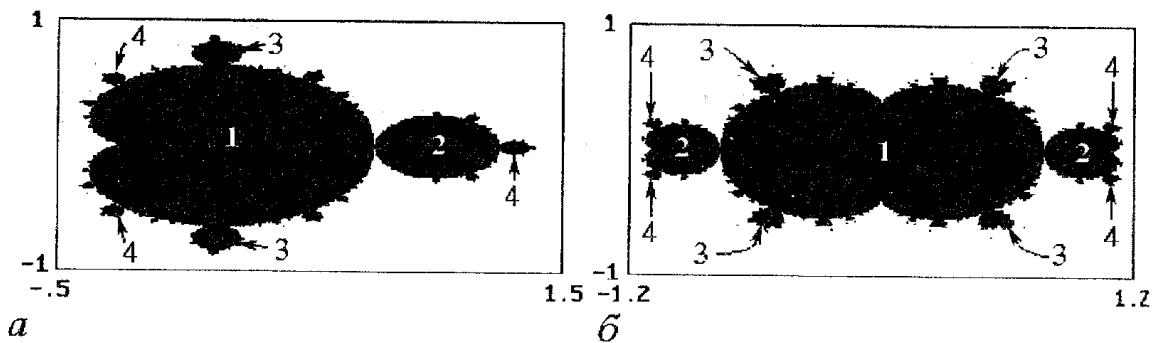


Рис. 1. Плоскость комплексного параметра c для комплексных отображений $z \rightarrow c - z^2$ (а) и $z \rightarrow c - z^3$ (б). Светлые области соответствуют уходу на бесконечность, темные - асимптотически периодическому поведению итераций. Указан период для некоторых областей

$$g(x) = ag(g(x/a)), \quad (2)$$

где $a = a_F = -2.5029\dots$ - универсальная масштабная константа. Численно функция $g(x)$ найдена с высокой точностью (в виде ряда с вещественными коэффициентами) [11,12]¹. Аналогичный по своему содержанию подход к анализу утроений и учетверений периода, а также более сложных каскадов бифуркаций, развит в [7-9]. При этом приходится иметь дело с комплексными решениями несколько более сложных функциональных уравнений, комплексными оказываются также и масштабные константы.

По-видимому, до сих пор не обсуждался вопрос о возможности скейлингового поведения, связанного с удвоениями периода, которое было бы специфическим для комплексных отображений и характеризовалось комплексными значениями масштабных констант.

Здесь рассматривается пример такого поведения, обнаруживающийся в кубическом отображении

$$z \rightarrow c - z^3. \quad (3)$$

1. Каскад удвоений периода и критическое точки в пространстве параметров кубического отображения

На рис.1,б показана топография плоскости комплексного параметра c для отображения (3), которую можно сравнить с кактусом Мандельброта на рис.1, а (см. также [14]). Очевидная симметрия «кубического кактуса» связана с тем, что замены вида $z \rightarrow -z$, $c \rightarrow -c$ и $z \rightarrow z^*$, $c \rightarrow c^*$ оставляют отображение (3) инвариантным.

Каждый лепесток кубического кактуса представляет собой область периодической динамики для отображения (3). Заметим, что от каждого определенного лепестка отходят вторичные лепестки, среди которых два отвечают периоду удвоенному по сравнению с родительским лепестком. Таким образом, имеется возможность выбрать траекторию движения в плоскости комплексного параметра так, чтобы реализовался каскад удвоений периода. При этом есть два варианта для выбора дальнейшего пути движения из каждого очередного лепестка. На рис. 2 схематически показаны два пути в плоскости c , вдоль которых имеет место каскад удвоений периода.

Примерно в середине каждого лепестка кактуса располагается точка, в которой отображение имеет сверхустойчивый цикл определенного периода (цикл, начинающийся из точки $z=0$). В табл. 1 приводятся две последовательности значений c для сверхустойчивых циклов. Первая последовательность получается при выборе левого лепестка на каждом переходе к циклу удвоенного периода и

¹ Аналитические свойства $g(x)$ как функции комплексного переменного обсуждались в [12, 13].

Две последовательности сверхустойчивых циклов периода $N = 2^k$ для комплексного кубического отображения

$N=2^k$	c	c
4	1.0935134505 +.2099245229i	1.0935134505 +.2099245229i
8	1.0719544056 +.2452491860i	1.1371167953 +.2038569549i
16	1.0645654879 +.2459339453i	1.1407504837 +.1968853895i
32	1.0636742980 +.2449382053i	1.1401510274 +.1956091078i
64	1.0637227374 +.2447021821i	1.1399016939 +.1955590066i
128	1.0637621252 +.2446838567i	1.1398676472 +.1955897256i
256	1.0637690088 +.2446875937i	1.1398684420 +.1955979557i
512	1.0637692066 +.2446889921i	1.1398697193 +.1955987243i

соответствует траектории A на рис. 2, а вторая - при выборе каждый раз правого лепестка, что отвечает траектории B. Можно видеть хорошую сходимость обеих последовательностей к определенным предельным точкам в комплексной плоскости c . Эти критические точки располагаются при

$$c_1 = 1.06376897706780 + 0.244689155113163i, \quad (4)$$

и

$$c_2 = 1.13986997242234 + 0.195598568427164i. \quad (5)$$

В силу симметрии «кубического кактуса» координаты еще шести критических точек можно получить, изменив знак действительной или мнимой части в (4) и (5).

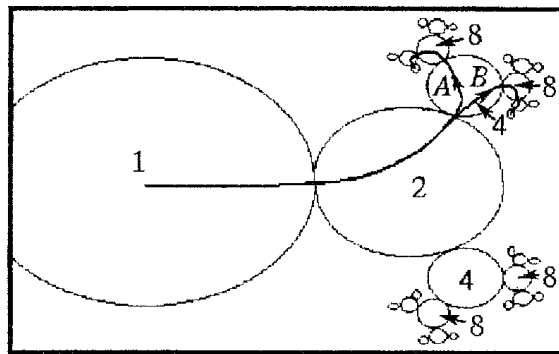


Рис. 2. Траектории A и B на плоскости комплексного параметра кубического отображения, вдоль которых наблюдается каскад удвоений периода и которые приводят в критические точки (4) и (5), соответственно. Цифрами обозначены периоды циклов. Изображение схематическое, масштаб не выдержан

2. Ренормгрупповой анализ

Следуя логике теории Фейгенбаума [10,11], для описания свойств универсальности и скейлинга вблизи критических точек рассмотрим последовательность отображений $Z \rightarrow f_k(Z)$, которые описывают эволюцию перенормированной комплексной переменной Z за 2^k итераций исходного отображения. Перенормировка Z производится таким образом, чтобы для каждого k отображение в начале координат было нормировано на единицу: $f_k(0)=1$. Отображения $f_k(Z)$ удовлетворяют рекуррентному функциональному уравнению

$$f_{k+1}(Z) = a_k f_k(f_k(Z/a_k)), \quad (6)$$

где $a_k = 1/f_k'(f_k(0))$. Предположим, что мы взяли отображение (3) в критической точке (4) в качестве начального условия для рекуррентной процедуры (6). Итерации можно реализовать численно; при этом оказывается, что уже для $k > 2$ последовательные отображения $f_k(Z)$ практически не меняются. Разумно

предположить, что имеет место их сходимость при $k \rightarrow \infty$ к определенному пределу - универсальной функции $g(Z)$. Эта функция обязана быть неподвижной точкой рекуррентного функционального уравнения (6), то есть комплексным решением уравнения Фейгенбаума - Цвитановича

$$g(Z) = ag(g(Z/a)). \quad (7)$$

Чтобы найти функцию $g(Z)$ численно с достаточно высокой точностью, можно аппроксимировать ее конечным полиномом с неизвестными коэффициентами. Тогда уравнение (7) сводится к системе конечного числа нелинейных алгебраических уравнений. Взяв любое отображение f_k в качестве начальной аппроксимации, можно получить решение численно с помощью многомерного метода Ньютона. Результатом таких вычислений является следующее представление в виде ряда по степеням Z^3 :

$$\begin{aligned} g(Z) = & 1 + (-.9722427 - .7451928i)Z^3 + (-.1328756 + .2203001i)Z^6 + \\ & + (.0364270 + .00180616i)Z^9 + (-.00277464 - .00439645i)Z^{12} + \\ & + (.00005255 + .00105290i)Z^{15} + (.00036192 - .00016270i)Z^{18} + \\ & + (-.00005166 - .00010119i)Z^{21} + (-.00002396 + .00001406i)Z^{24} + \\ & + (.00000365 + .00000472i)Z^{27} + (.00000066 - .0000009i)Z^{30} + \\ & + (-.00000002 - .0000000i)Z^{33}, \end{aligned} \quad (8)$$

а соответствующее значение комплексной константы перенормировки равно

$$a = 1/g(g(0)) = 1/g(1) = -0.251811054 + 1.864695322i. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь возмущение неподвижной точки $g(Z)$, возникающее при вариации комплексного управляющего параметра, выводящей отображение из критической точки. Такое возмущение, $h(Z) = f(Z) - g(Z)$, оставляет отображение в классе функций, представимых в виде ряда по степеням Z^3 . РГ уравнение (6), линеаризованное в неподвижной точке $g(Z)$, приводит к задаче на собственные функции и собственные значения, которое совпадает по форме с известным уравнением теории Фейгенбаума [10,11]

$$\delta h(Z) = a[g'(g(Z/a))h(Z/a) + h(g(Z/a))], \quad (10)$$

но должно рассматриваться в комплексной области, и с учетом новой функции $g(Z)$. Для возмущений интересующего класса, численное решение (10) выявляет единственное существенное собственное число, превышающее 1 по абсолютной величине:

$$\delta = 3.30308246 - 4.45556685i. \quad (11)$$

Как оказывается, точке (5) соответствует решение уравнения РГ, которое отличается от (8) только знаком мнимой части у всех коэффициентов ряда, а масштабные константы a и δ имеют значения комплексно сопряженные по отношению к (9) и (11).

3. Критическая динамика и ее фрактальные свойства

Рассмотрим динамику отображения (3) точно в критической точке каскада удвоений периода. Для определенности будем всегда иметь в виду точку (4). Как видно из предыдущего раздела, в критической точке динамика за большое число итераций описывается в терминах перенормированной динамической переменной функцией $g(Z)$, поэтому полезно рассмотреть отображение $Z \rightarrow g(Z)$.

Циклы периода $N=2^k$ и их мультипликаторы
в критической точке (4)

k	$z_0^{(k)}$	$z_0^{(k-1)}/z_0^{(k)}$	$\mu_k = \partial z_N / \partial z_0$
1	-.0108527-.3831089i	-.305171+1.861106i	-1.463159-.445950i
2	-.1998675+.0327502i	-.252996+1.875359i	-1.467847-.458358i
3	.0314488+.1030185i	-.250970+1.863498i	-1.468649-.456388i
4	.0520148-.0238855i	-.251780+1.864942i	-1.468664-.456721i
5	-.0162805-.0256974i	-.251812+1.864592i	-1.468639-.456593i
6	-.0123761+.0104020i	-.251814+1.864723i	-1.468641-.456630i
7	.0063588+.0057784i	-.251811+1.864688i	-1.468640-.456620i
8	.0025911-.0037600i	-.251811+1.864697i	-1.468641-.456623i
9	-.0021646-.0010972i	-.251811+1.864695i	-1.468640-.456622i

Как можно проверить, отображение $Z \rightarrow g(Z)$ имеет неподвижную точку $Z_* = 0.6597019 - 0.0809898i$. Но тогда из уравнения (7) следует, что точка Z_*/a принадлежит циклу периода 2, точка Z_*/a^2 циклу периода 4 и т.д. Таким образом, существуют циклы сколь угодно большого периода 2^k . Все они неустойчивы и характеризуются одним и тем же комплексным значением мультипликатора

$$\mu_c = g'(Z_*) = -1.468640455 - 0.456622306i. \quad (12)$$

Таковыми же свойствами обладают циклы исходного отображения (3) в асимптотике больших периодов. В табл. 2 представлены численные данные для циклов периода 2^k в критической точке (4). Заметим, что отношение последовательных значений z , отвечающих ближайшим к началу координат точкам периодических орбит, сходится к константе a , а мультипликаторы - к значению (12).

Рассмотрим теперь непериодическую орбиту, порождаемую кубическим отображением при старте из $z=0$ (рис. 3). Эта *критическая орбита* представляет собой фрактальное множество на плоскости z и выступает в качестве аналога известного аттрактора Фейгенбаума, характерного для точки накопления обычных удвоений периода. Это множество можно мыслить как предельный объект, который получается из циклов периода 2^k при $k \rightarrow \infty$.

Вблизи начала координат присущий *критической орбите* локальный скейлинг состоит в том, что это множество воспроизводит свою

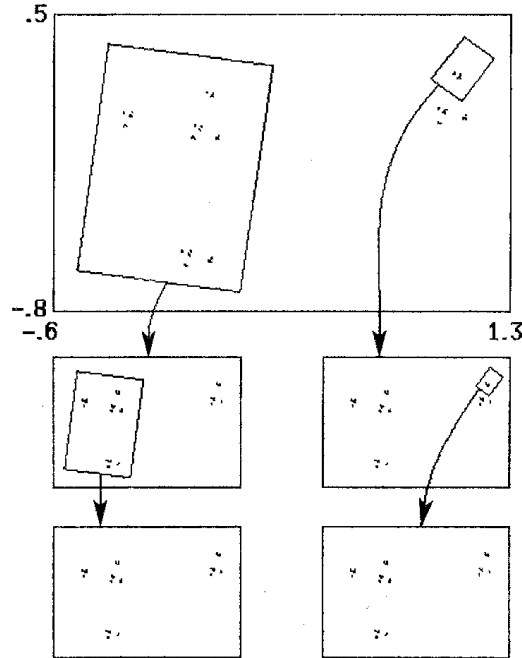


Рис. 3. Критическая орбита кубического отображения и ее скейлинговые свойства на плоскости комплексной переменной z . Вблизи начала координат картина воспроизводится при пересчете на комплексный масштабный фактор a , а вблизи точки $z=c$ - на фактор a^3 . Значение параметра c соответствует критической точке (4)

структуру бесконечное число раз в малых масштабах при пересчете масштаба и повороте, соответствующих умножению динамической переменной z на комплексный фактор a . Вблизи точки $z=c$ критическая орбита также демонстрирует скейлинг, но с фактором a^3 (см. вставки на рис. 3).

Глобальную характеристику скейлинговых свойств критической орбиты можно получить, если ввести по аналогии с Фейгенбаумом [15] σ -функцию

$$\sigma(t) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ m/N = t}} \frac{z_m - z_{m+N/2}}{z_m - z_{m+N/4}}, \quad N=2^k. \quad (13)$$

Производя расчеты для возрастающих значений k , можно наблюдать достаточно быструю сходимость. Получающаяся в результате комплекснозначная функция действительного аргумента $\sigma(t)$ представлена графически на рис. 4. Она имеет фрактальную структуру и содержит разрывы во всех бинарных рациональных точках $m/2^n$, так же как и σ -функция Фейгенбаума [15].

Заметим, что $\sigma(+0)=1/a^3$, $\sigma(1/2+0)=1/a$, что соответствует частным случаям скейлинга, проиллюстрированным на рис. 3. Используя только два этих масштабных фактора, можно построить приближенную модель, описывающую фрактальные свойства критической орбиты. Пусть z_i - искомая последовательность значений динамической переменной, причем $z_0=0$. Положим для четных членов

$$z_{2i} = z_i / a, \quad (14)$$

а для нечетных

$$z_{2i+1} = c - z_{2i}^3 = c - z_i^3 / a^3 = c - c/a^3 + z_{i+1}/a^3. \quad (15)$$

Обозначая $w=z/c$, $\alpha=1/a$, $\beta=1/a^3$, перепишем (14) и (15) в виде

$$w_{2i-1} = (1-\beta) + \beta w_i, \quad w_{2i} = \alpha w_i. \quad (16)$$

С помощью этих соотношений всю последовательность w_i (а значит, и z_i) можно найти по ее первым двум членам $w_0=0$ и $w_1=1$.

Соотношение (16) имеет на самом деле более общее значение и позволяет при различном выборе параметров α и β получить (приблизленно) фрактальные сигналы, генерируемые в различных ситуациях на пороге возникновения хаоса через удвоения периода (см. [16,17]). Если в качестве α и β подставить действительные величины $\alpha=1/a_F \approx -0.4$, $\beta=1/a_F^2 \approx 0.16$, то (16) передает поведение последовательности, порождаемой логистическим отображением $x \rightarrow 1 - \lambda x^2$ в точке накопления бифуркаций удвоения периода $\lambda=\lambda_c=1.401155\dots$. Это соответствует модели аттрактора Фейгенбаума в виде двухмасштабного канторова множества [18,19]. При $\alpha=-1$, $\beta=0$ из (16) получаем $0,1,-1,1,1,-1,1,\dots$. С точностью до обозначений, это известная символическая последовательность, которая

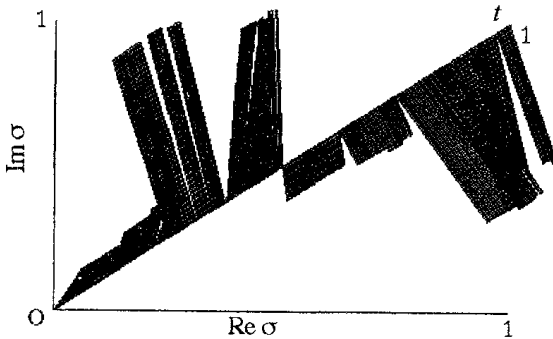


Рис. 4. Комплекснозначная функция $\sigma(t)$, описывающая глобальные свойства скейлинга критической орбиты кубического отображения

описывает последовательность знаков переменной x в логистическом отображении в точке накопления бифуркаций удвоений периода (эта последовательность связана с теоретико-числовой последовательностью Морса - Туэ [19]). Наконец, можно получить аппроксимацию для фрактальных сигналов, генерируемых отображением $w \rightarrow 1 - \lambda|w|^\tau$, если выбрать соответствующие, зависящие от τ , значения параметров $\alpha=1/a(\tau)$ и $\beta=1/[a(\tau)]^\tau$.

Вернемся к комплексному кубическому отображению. Как мы теперь видим, фрактальный сигнал,

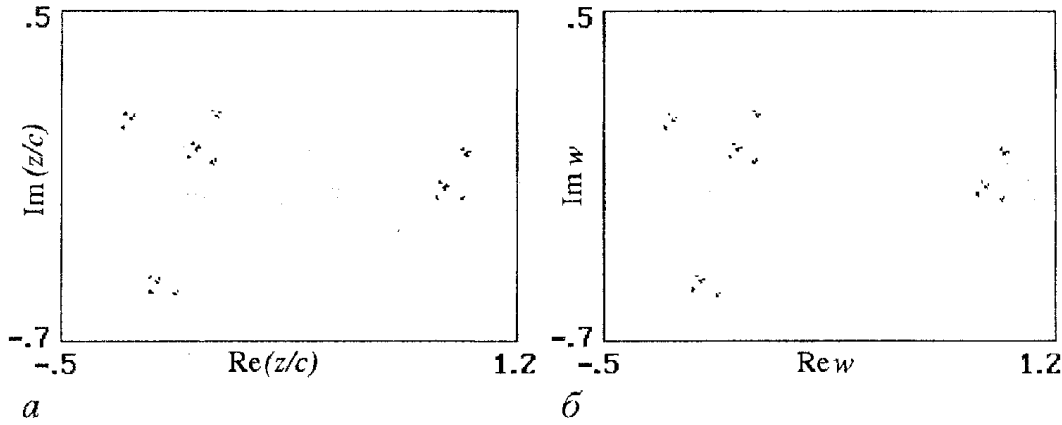


Рис. 5. Сопоставление критической орбиты кубического отображения на комплексной плоскости z/c (а) и ее приближенного описания посредством комплексного фрактального сигнала (б)

порождаемый критической орбитой, может рассматриваться как частный представитель широкого класса фрактальных сигналов в рамках комплексного обобщения формулы (16) при определенном выборе α и β . Это соответствует аппроксимации критической орбиты кубического отображения множеством, которое представляет собой комплексный аналог двухмасштабного канторова множества (рис. 5).

Оценим фрактальную размерность критической орбиты. Если на некотором уровне построения кантороподобной структуры множество допускает покрытие N кругами радиуса r_1, \dots, r_N , то на следующем уровне потребуется $2N$ кругов радиуса $|\alpha|r_1, |\beta|r_1, \dots, |\alpha|r_N, |\beta|r_N$. Для того, чтобы фигурирующая в определении размерности сумма $\sum r_i^D$ оставалась конечной при $N \rightarrow \infty$, необходимо выполнение условия

$$|\alpha|^D + |\beta|^D = 1,$$

откуда с учетом конкретных α и β находим $D \cong 0.60469$. Для более точной численной оценки можно использовать непосредственно последовательность z_i , порождаемую кубическим отображением. Определим для данного n сумму

$$\Gamma_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} |z_i - z_{i+2^n}|^D$$

и подберем D так, чтобы $\Gamma_n(D) = \Gamma_{n+1}(D)$. Оценивая предел D при

$n \rightarrow \infty$ получаем $D = 0.63045$.

На рис. 6 показан спектр Фурье, порождаемый кубическим отображением в критической точке. Качественно он похож на обычный фейгенбаумовский спектр на пороге перехода к хаосу через удвоения периода и содержит множество субгармоник на частотах кратных 2^{-k} . Отличие состоит в том, что перепад мощности между субгармониками различного уровня составляет 11.2 дБ вместо классического значения 13.4 дБ.

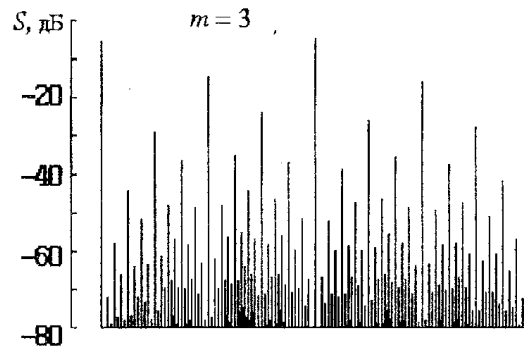


Рис. 6. Спектр Фурье, генерируемый кубическим отображением в критической точке (4)

4. Скейлинговые свойства пространства параметров вблизи критической точки

Как следует из РГ анализа в разделе 2, перенормированный оператор эволюции за 2^k итераций в линейном приближении по возмущению параметра Δs , выводящему кубическое отображение из критической точки, дается выражением

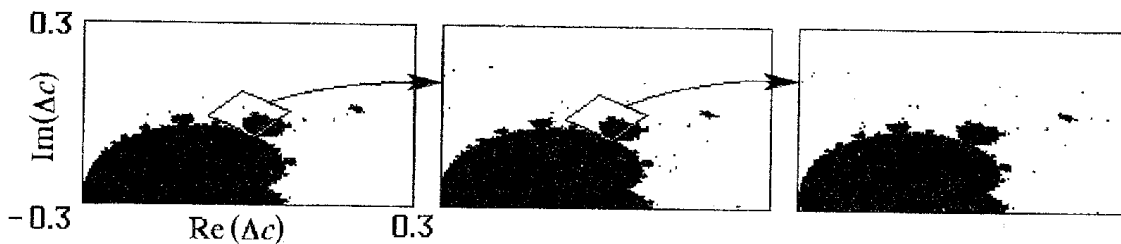


Рис. 7. Скейлинговые свойства лепестков «кактуса» на плоскости комплексного параметра c кубического отображения (3). Критическая точка (4) располагается точно в центре приведенных картинок. При переходе к каждой последующей картинке комплексная координата Δc пересчитывается на фактор δ (формула (11))

$$f_k(Z) = g(Z) + \text{const} \cdot \Delta c \cdot \delta^k \cdot h(Z),$$

где $h(Z)$ - собственная функция, удовлетворяющая уравнению (10) с собственным числом (11). Следовательно, асимптотически при $\Delta c \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$ функции $f_k(Z)$ принадлежат одномерному (в смысле одной комплексной переменной) неустойчивому многообразию: $f_k(Z) = G(Z, \delta^k \Delta c)$, где $G(Z, 0) = g(Z)$. Ясно, что асимптотическая форма оператора эволюции инвариантна по отношению к замене $\Delta c \rightarrow \Delta c / \delta$, $k \rightarrow k + 1$. Иными словами, при значении параметра $c = c_c + \Delta c / \delta$ вблизи критической точки c_c мы ожидаем увидеть динамику, подобную реализующейся при $c = c_c + \Delta c$, но с удвоенным временным масштабом. Это свойство самоподобия иллюстрируется на рис. 7. Лепестки кактуса, соответствующие удвоенным значениям периода, воспроизводят те же формы при пересчете масштаба и повороте картинке, отвечающих комплексному фактору δ .

Заключение

В работе обнаружен новый класс универсальности, ассоциирующийся с удвоениями периода в комплексном кубическом отображении, и получено численно решение в виде комплексной неподвижной точки функционального уравнения Фейгенбаума - Цвитановича. Аналогичный подход может быть развит для комплексных отображений более высокой степени. Другое обобщение может основываться на учете полного множества траекторий в плоскости комплексного параметра, которые приводят к удвоениям периода и образуют для кубического отображения бинарное дерево. По своему содержанию, этот подход будет аналогичен теории удвоений периода, развитой для бимодальных отображений действительной переменной [22].

В заключение я хотел бы отметить возможное значение предпринятого исследования для общей проблемы классификации типов критического поведения при переходе к хаосу через удвоения периода в одномерных отображениях. Как известно, при многопараметрическом анализе удвоений периода приходится рассматривать такие ситуации, когда отображение $f(x)$ (или его итерация $f(f(\dots f(x)\dots))$) имеет экстремум с показателем степени $\tau = 2, 4, 6, 8, \dots$, причем каждому из этих случаев отвечает свой класс универсальности, свои масштабные константы, спектры, σ -функции и т.п. [20-24]. По аналогии с теорией бифуркаций и теорией катастроф, кажется естественным задуматься над проблемой классификации этих типов универсального поведения. При этом сразу обнаруживается, что при нечетных τ , действительное отображение $x \rightarrow 1 - \lambda x^\tau$ имеет не экстремум, а точку перегиба, так что каскад удвоений периода не наблюдается. В связи с этим предполагаемая классификация неизбежно будет неполна. Как следует из результатов настоящей статьи, эта неполнота исчезает при переходе в комплексную область.

Автор благодарен профессору Предрагу Цвитановичу (Институт Нильса Бора, Копенгаген) и профессору Бодил Браннер (Датский Технический университет) за полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95-02-05818).

Библиографический список

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. S. F.: Freeman, 1982.
2. Peitgen H.-O., Richter P.H. The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1986.
3. Blanchard P. // Bull.Amer.Math.Soc.1984. Vol. 11. P. 85.
4. Yang C.N., Lee T.D. // Phys.Rev. 1952. Vol. 87. P. 410.
5. Lee T.D., Yang C.N. // Phys.Rev. 1952. Vol. 87. P. 419.
6. Derrida B., De Seze L., Itzykson C. // J.Stat.Phys. 1983. Vol.33. P. 559.
7. Гольдберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М. // УМН. 1983. Т. 38, № 1. С. 159.
8. Cvitanovic P., Myrheim J. // Phys.Lett.1983. Vol. 94A.,P. 329.
9. Cvitanovic P., Myrheim J. // Commun.Math.Phys. 1989. Vol. 121. P. 225.
10. Feigenbaum M.J. // J.Stat.Phys. 1978. Vol. 19. P. 25.
11. Feigenbaum M.J.// J.Stat.Phys. 1979. Vol. 21. P. 669.
12. Lanford O.E. // Bull.Amer.Math.Soc. 1982. Vol. 6. P. 427.
13. Epstein H., Lascoux J. // Commun. Math. Phys. 1981. Vol. 81. P. 437.
14. Devaney R.L. // An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. 2nd Edition, Addison-Wesley, 1989.
15. Feigenbaum M.J. // Commun.Math.Phys.1980. Vol. 77. P. 65.
16. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. // Изв.вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. С. 661.
17. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. // Chaos, Solitons and Fractals. 1991. Vol. 1. P. 355.
18. Halsey T.S., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I, Shraiman B. // Phys.Rev. 1986. Vol. A33. P. 1141.
19. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws. N,-Y.: Freeman, 1991.
20. Chang S.J., Wortis M., Wright J. // Phys.Rev.1981. Vol. A24. P. 2669.
21. Fraser S., Kapral R. // Phys.Rev.1984. Vol. A30. P. 1017.
22. MacKay R.S., Van Zeijts J.B. // Nonlinearity. 1988. Vol.1. P. 253.
23. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., and Chua L.O. // Int.J. Bifurc.& Chaos. 1993. Vol. 3. P. 943.
24. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. // Phys.Lett. 1994. Vol. A189. P. 367.

Институт радиотехники
и электроники РАН
Саратовский филиал

Поступила в редакцию 18.10.1996

PERIOD-DOUBLING FOR COMPLEX CUBIC MAP

S.P.Kuznetsov

Scaling properties are reported for period-doubling cascade in complex cubic map $z \rightarrow c - z^3$. Renormalization group analysis is developed and the associated complex solution of the Feigenbaum - Cvitanovic equation is obtained numerically.