

А. П. КУЗНЕЦОВ, С. П. КУЗНЕЦОВ, И. Р. САТАЕВ

410019, Россия, Саратов, Зеленая, 38
Институт радиотехники и электроники РАН
Саратовский филиал
E-mail: kuz@spkuz.saratov.su

КОРАЗМЕРНОСТЬ И ТИПИЧНОСТЬ В КОНТЕКСТЕ ПРОБЛЕМЫ ОПИСАНИЯ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ ЧЕРЕЗ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА В ДИССИПАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Поступила в редакцию 15 ноября 1997 г.

Если рассматривать семейства нелинейных систем, имеющих несколько управляющих параметров, то при изучении перехода к хаосу через удвоения периода могут появляться, как типичные, такие ситуации поведения у порога хаоса, которые отличны от фейгенбаумовской универсальности. Предлагается обзор подобных ситуаций, встречающихся в семействах одномерных отображений, и обсуждается возможность их реализации и наблюдения в нелинейных диссипативных системах более общего вида.

*К 60-летию
со дня рождения В.И. Арнольда*

В сущности, всякое исследование вырожденного случая должно сопровождаться вычислением соответствующей коразмерности и указанием бифуркаций в семействе, для которого рассматриваемое вырождение неустранимо.

В. И. Арнольд [1]

Идея изучать и классифицировать математические объекты в соответствии с их коразмерностью была выдвинута в свое время Анри Пуанкаре. За последние три десятилетия для ее развития, распространения и популяризации много сделал В. И. Арнольд [2, 1, 3]. Сущность этой идеи состоит в том, что сначала изучается только случай общего положения, затем ситуации, которые становятся типичными при рассмотрении семейств, зависящих от одного параметра, потом ситуации типичные в двухпараметрических семействах и т. д. Этот подход лежит в основе исследовательской программы теории бифуркаций и теории катастроф, так что для этих дисциплин понятие коразмерности является одним из ключевых. Если говорить о приложениях, то теория колебаний и теория динамических систем дают множество физических, химических, биологических примеров, в которых имеют место бифуркации и катастрофы различной коразмерности.

В этой статье мы намерены обсудить с точки зрения анализа и классификации в порядке возрастающей коразмерности ряд ситуаций, которые могут возникать при переходе к хаосу в нелинейных динамических системах.

Как известно, один из самых распространенных сценариев перехода к хаосу состоит в том, что при изменении управляющего параметра имеет место последовательность бифуркаций удвоения периода, подчиняющаяся универсальным закономерностям Фейгенбаума. Для объяснения этих закономерностей был применен метод ренормализационной группы (РГ), основой которого является известное функциональное уравнение Фейгенбаума—Цвитановича.

О значении параметра, которое отвечает пределу последовательности бифуркаций удвоения периода, будем говорить как о критическом значении параметра или о фейгенбаумовской критической точке. Термины «критическая точка», «критические явления» в физике ассоциируются прежде всего с фазовыми переходами и аппаратом развитым для их описания — методом РГ, концепциями скейлинга и классов универсальности. После работ Фейгенбаума [4, 5, 6], эти представления оказались заимствованными и перенесенными в нелинейную динамику, где стали существенными для теоретического анализа перехода к хаосу. Имея в виду рассматриваемый в настоящей статье круг вопросов, мы считаем целесообразным и естественным использовать терминологию теории критических явлений¹.

Поскольку сценарий Фейгенбаума реализуется, как типичный, в однопараметрических семействах, то соответствующий ему тип критического поведения на пороге возникновения хаоса следует рассматривать как феномен коразмерности один. Как можно полагать, должны существовать и другие типы критичности, характеризующиеся коразмерностью два, три и т. д. С математической точки зрения, каждому из них должно отвечать некоторое решение уравнения РГ Фейгенбаума—Цвитановича (или его обобщения). С этим решением будет ассоциироваться определенный класс универсальности: если критическое поведение данного типа реализуется в некоторой точке пространства параметров какой-нибудь системы, то окрестность этой точки устроена вполне определенным образом, а присущие ей свойства масштабной инвариантности (скейлинга) описываются универсальными константами, характерными именно для этого типа критичности. Мы представим здесь обзор известных результатов, которые относятся к семействам одномерных отображений с одним, двумя или тремя управляющими параметрами.

1. Преобразование РГ, уравнение Фейгенбаума—Цвитановича и общие замечания о коразмерности и типичности

Напомним содержание РГ анализа, развитого Фейгенбаумом для унимодальных (с одним экстремумом) одномерных отображений. Пусть мы имеем отображение $x_{n+1} = f_0(x_n)$, причем начало отсчета по оси x выбрано в точке экстремума, а масштаб — так, чтобы $f_0(0) = 1$. Эволюция состояния за две итерации будет определяться отображением $x_{n+1} = f_0(f_0(x_n))$. Произведем масштабную замену переменной $x \rightarrow x/\alpha_0$ так, чтобы новое отображение также оказалось нормированным в начале координат на единицу, т. е. $\alpha_0 = 1/f_0(f_0(0))$. Полученное отображение $x_{n+1} = \alpha_0 f_0(f_0(x_n/\alpha_0))$ обозначим через f_1 . Повторяя описанную процедуру многократно, приходим к рекуррентному уравнению РГ

$$f_{k+1}(x) = \alpha_k f_k(f_k(x/\alpha_k)), \quad (1)$$

где $\alpha_k = 1/f_k(f_k(0)) = 1/f_k(1)$.

Если исходное отображение f_0 взято в критической точке, то, как показал Фейгенбаум, порождаемая итерациями РГ преобразования последовательность функций f_k сходится к определенному

¹ В математике и, в частности, в теории особенностей, выражение «критическая точка» употребляется совсем в другом смысле. (Например, для функций одного переменного это точка, где обращается в нуль первая производная.) Чтобы избежать путаницы, мы не будем пользоваться термином «критическая точка» в этом смысле.

пределу: $\lim f_k(x) = g(x)$. Функция $g(x)$ представляет собой неподвижную точку функционального уравнения (1), т. е. удовлетворяет соотношению, известному как уравнение Фейгенбаума—Цвитановича [4, 5]:

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)), \quad (2)$$

где $\alpha = \lim \alpha_k = 1/g(g(0))$. Найденное Фейгенбаумом решение этого уравнения отвечает критическому поведению в отображениях с квадратичным экстремумом и представляется поэтому в виде разложения по четным степеням x :

$$g(x) = 1 - 1.5276330x^2 + .1048152x^4 + .0267057x^6 - .0035274x^8 + \\ + .0000816x^{10} + .0000254x^{12} - .0000027x^{14}. \quad (3)$$

Масштабная константа оказывается равной

$$\alpha = \alpha_F = -2.502907876. \quad (4)$$

Ясно, что смысл функции g состоит в том, что она дает асимптотическую форму оператора эволюции в критической точке за $N = 2^k$ итераций исходного отображения, представленного в терминах перенормированной надлежащим образом (на фактор α^k) динамической переменной x .

Следующий этап РГ анализа состоит в исследовании малых возмущений неподвижной точки $g(x)$. Предположим, что в исходном отображении $x_{n+1} = f(x_n)$ мы слегка «пошевелили» параметры и отошли от критической точки. Теперь оператор эволюции, определенный за 2^k итераций, будет содержать некоторое возмущение функции $g(x)$, и поведение этого возмущения можно изучать с помощью линеаризованного уравнения РГ. Это уравнение приводит к следующей задаче на собственные значения [4, 5]:

$$\delta \cdot h(x) = \alpha [g'(g(x/\alpha)) h(x/\alpha) + h(g(x/\alpha))]. \quad (5)$$

С точки зрения описания поведения системы в окрестности критической точки, определяющую роль будут играть те из собственных чисел δ , которые превышают по абсолютной величине 1. Действительно, именно соответствующие им компоненты возмущения (моды) будут нарастать при последовательных итерациях РГ преобразования.

В случае фейгенбаумовского типа критичности наибольшие по абсолютной величине собственные числа таковы:

$$\delta_1 = \delta_F = 4.6692016091\dots, \quad \delta_2 = \alpha_F, \quad \delta_3 = 1, \quad (6)$$

тогда как все остальные по модулю меньше единицы. На самом деле существенным является только одно собственное число δ_1 , поскольку δ_2 и δ_3 соответствуют модам, устранимым с помощью инфинитезимальных замен переменной x [4, 5].

С точки зрения классификации неподвижных точек, неподвижная точка уравнения РГ $g(x)$ — это седло. У него одно неустойчивое направление (собственное число δ_1) и бесконечное множество устойчивых направлений, связанных с собственными числами, по модулю меньшими 1.

Типы критического поведения одномерных отображений, отличные от фейгенбаумовского, могут быть связаны, во-первых, с какими-то другими седловыми неподвижными точками РГ уравнения (1), и, во-вторых, с порождаемыми этим уравнением более сложными орбитами седлового типа — периодическими (циклами) или непериодическими.

Предположим, что рассматривается тип критического поведения, которому отвечает решение уравнения РГ в виде неподвижной точки или цикла. В этом случае можно поставить задачу на собственные векторы и собственные значения линеаризованного РГ уравнения — для одного шага РГ преобразования в случае неподвижной точки и для числа шагов, равного периоду, в случае цикла. Мы определяем полную коразмерность данного типа критичности как количество собственных

векторов с собственными числами, превышающими единицу по абсолютной величине, исключая моды, связанные с инфинитезимальными заменами переменной.

Термином коразмерность (без эпитета «полная») мы будем обозначать минимальное количество параметров, при котором данный тип критичности может возникнуть как типичный феномен в некотором семействе одномерных отображений.

На первый взгляд, коразмерность должна равняться полной коразмерности, как мы ее определили. Действительно, если потребовать, чтобы коэффициенты при n существенных собственных векторах были равны нулю, то тем самым будет задано точно n условий на параметры исходной системы. Если количество параметров семейства больше или равно этой величине, то критическая ситуация может реализоваться как типичная и не исчезать при малом шевелении семейства. Как будет видно из дальнейшего, на самом деле вопрос о соотношении коразмерности и полной коразмерности несколько тоньше. Для фейгенбаумовской критичности обе коразмерности совпадают и равны единице, но в многопараметрическом случае это, как правило, не так — можно утверждать только, что коразмерность меньше или равна полной коразмерности.

2. Трикритическое поведение и типы критичности S и E

Как уже упоминалось, фейгенбаумовский тип критического поведения связан с наличием у отображения квадратичного экстремума. Для отображений с другим типом экстремума, например $x_{n+1} = 1 - \lambda|x_n|^m$ при $m \neq 2$, каскад удвоений, наблюдаемый при увеличении параметра λ , обладает количественными характеристиками, отличными от фейгенбаумовских [8, 9, 10, 11]. (Далее нас будут интересовать только целые четные показатели m , так что значок модуля можно опустить.)

Рассмотрим некоторое семейство гладких отображений и зададимся вопросом — сколько параметров оно должно содержать, чтобы реализовалась, как типичная, критическая ситуация, отвечающая каскаду бифуркаций удвоения периода в отображении с экстремумом, скажем, 4-й степени? Чтобы было обеспечено наличие такого, кватричного, экстремума, в точке экстремума должны равняться нулю вторая и третья производные. Для этого в общем случае потребуется подобрать два параметра. Далее, чтобы наблюдать каскад удвоений, нужно иметь возможность варьировать еще один параметр. Итого, необходимо иметь, как минимум, три управляющих параметра. Точка в пространстве параметров одномерного отображения, являющаяся пределом последовательности бифуркаций удвоения периода при условии, что экстремум отображения имеет 4-ю степень, была названа *трикритической* [12]. РГ анализ, обсуждаемый в следующем разделе, подтверждает полученный из качественных соображений вывод: полная коразмерность трикритического поведения равна трем.

Можно предложить, однако, следующее альтернативное рассуждение. Рассмотрим двухпараметрическое семейство одномерных бимодальных отображений $f(x)$, т. е. отображений с двумя квадратичными экстремумами. В типичном случае на плоскости параметров может существовать кривая, которая определена условием, что один экстремум отображается в другой за одну итерацию (рис. 1 а). При значениях параметров, отвечающих точке на этой кривой, проитерированное два раза отображение $f(f(x))$ имеет, очевидно, экстремум 4-й степени. Поэтому каскад удвоений периода, если он наблюдается на этой кривой, будет подчиняться закономерностям, характерным для отображения с кватричным экстремумом. Пределом накопления бифуркаций удвоения будет, очевидно, трикритическая точка.

Таким образом, хотя трикритическая ситуация имеет полную коразмерность три, в одномерных отображениях она может присутствовать также и как феномен, типичный в двухпараметрическом семействе! На плоскости параметров такие трикритические точки коразмерности два оказываются концевыми точками фейгенбаумовских критических линии [12].

Следуя авторам [12], будем использовать для обозначения трикритической ситуации символ T .

Рассмотрим теперь возможность реализовать в трехпараметрическом семействе одномерных отображений критическую ситуацию, отвечающую каскаду бифуркаций удвоения периода в отобра-

жении с экстремумом 6-й степени. Соответствующий тип критичности будем обозначать символом S (от слова "six").

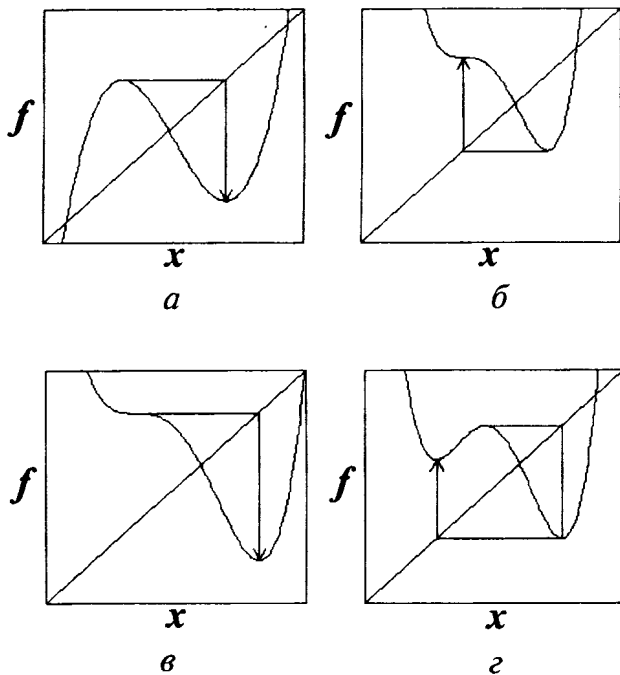


Рис. 1. Конфигурации, приводящие к появлению в проинтегрированном отображении экстремума четвертой (а), шестой (б, в) и восьмой (г) степени. Предельная точка накопления бифуркаций удвоения периода в этих ситуациях: (а) — трикритическая точка (тип T), (б) — критическая точка типа S_1 , (в) — точка S_2 , (г) — точка E

гладких одномерных отображений может реализоваться, как типичный феномен, еще одна критическая ситуация, характерная для отображения с экстремумом 8-й степени. Для нее мы вводим символ E (от слова "eight").

Пусть функция $f(x)$ имеет три квадратичных экстремума, в точках x_1, x_2 и x_3 , причем первый экстремум отображается во второй, а второй — в третий, т. е. $x_2 = f(x_1)$ и $x_3 = f(x_2)$ (рис. 1 г). Это вновь два условия, наложенные на функцию $f(x)$, которые, вообще говоря, определяют кривую в трехмерном пространстве параметров. Когда мы находимся на этой кривой, трехкратная итерация функции $f(f(f(x)))$ имеет экстремум 8-го порядка. Если, двигаясь по этой кривой мы наблюдаем каскад удвоений периода, то закон накопления и тип критичности будет таким, как в отображении $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^8$.

В качестве примера, иллюстрирующего приведенные рассуждения, рассмотрим следующее трехпараметрическое семейство отображений:

$$x_{n+1} = 1 - Ax_n^2 - Bx_n^4 - Cx_n. \quad (7)$$

Чтобы найти трикритическую ситуацию коразмерности два, замечаем, что в плоскости $C = 0$ на линии $A = -2B$ отображение за одну итерацию переводит экстремум $x_1 = 0$ в экстремум $x_2 = \sqrt{-A/2B}$. На этой линии можно найти трикритическую точку $A = 2.81403 \dots$, $B = -1.40701 \dots$ [12]. Оказывается, что изменение третьего параметра C приводит просто к сдвигу этой критической точки. Иными словами, в трехмерном пространстве параметров через указанную точку проходит трикритическая линия, «состоящая» из трикритических точек коразмерности два.

Пусть функция $f(x)$ имеет одновременно квадратичный экстремум (при $x = x_1$) и кубическую точку перегиба (при $x = x_2$). Далее, пусть экстремум отображается в точку перегиба: $x_2 = f(x_1)$ (рис. 1 б). Эти требования накладывают на функцию два условия, которые, вообще говоря, определяют некоторую кривую в трехмерном пространстве параметров.

Другой вариант состоит в том, что, наоборот, имеющаяся у функции кубическая точка перегиба отображается в квадратичный экстремум (рис. 1 в). И в этом случае наложенные условия задают некоторую кривую в трехмерном пространстве параметров.

Ясно, что на кривой, определенной в соответствии с приведенными условиями — по первому или по второму варианту, — двукратная итерация отображения $f(f(x))$ имеет экстремум 6-го порядка. Если, двигаясь по этой кривой, мы наблюдаем каскад удвоений периода, то закон накопления и тип критического поведения будет таким, как в отображении $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^6$. Чтобы различать обе разновидности данного типа критичности, будем обозначать их, соответственно, как S_1 и S_2 .

Наконец, в трехпараметрическом семействе

Далее, в трехмерном пространстве параметров (A, B, C) можно указать точки, где реализуются все перечисленные выше критические ситуации. Так на оси $A = 0$, $C = 0$ отображение (7) имеет кватерничный экстремум, и при $B = 1.594901356\dots$ на ней расположена трикритическая точка коразмерности три.

Отображение (7) имеет кубическую точку перегиба, если его параметры удовлетворяют соотношению $8A^3 + 27BC^2 = 0$, которое задает поверхность в пространстве параметров. На этой поверхности можно найти кривую, отвечающую условию отображения экстремума в точку перегиба. Она определяется уравнениями $A = \frac{3}{4}C(3C - 1)$, $B = -\frac{1}{8}C(3C - 1)^3$. Двигаясь вдоль этой кривой в направлении увеличения C , можно наблюдать каскад удвоений периода. Предельной точкой служит критическая точка S_1 , имеющая координаты

$$A = 1.8724481922644, \quad B = -1.625205284712, \quad C = 1.0940161015291.$$

На той же поверхности лежит другая кривая, на которой кубическая точка перегиба отображается в экстремум. Она задается уравнениями $A = \frac{3}{2}C\left(1 - \frac{3}{16}C\right)$, $B = -C\left(1 - \frac{3}{16}C\right)^3$. Двигаясь вдоль этой кривой в сторону увеличения параметра C , наблюдаем последовательность бифуркаций удвоения периода, которая сходится к критической точке S_2 :

$$A = 1.379909480783, \quad B = -0.5574097011816, \quad C = 1.181821122326.$$

Наконец, в пространстве параметров (A, B, C) имеется область, где отображение (7) характеризуется наличием трех экстремумов. В этой области располагается кривая, на которой выполнено условие, что существует орбита, последовательно посещающая все три экстремума. В параметрической форме эта кривая задается соотношениями

$$A = \frac{1 + \xi + \xi^2}{2\alpha^2}, \quad B = -\frac{\beta^3}{4\alpha^4}, \quad C = -\xi(\xi + 1)/\alpha,$$

где $\alpha = (1 - \xi)^2(1 - \xi^2)/4(2 + \xi)$, $\beta = \alpha + \xi^2(\xi^2 - 2\xi - 2)/4$. Двигаясь по указанной кривой в сторону увеличения ξ , можно наблюдать каскад удвоений периода, предельной точкой которого служит критическая точка типа E :

$$A = 2.449366934076, \quad B = -1.260415730596, \quad C = 0.700954625016.$$

3. Результаты РГ анализа типов критического поведения T , S и E

Как мы уже отмечали, с новыми критическими ситуациями связаны другие, нефейгенбаумовские неподвижные точки РГ уравнения (2). Очевидно, что решения РГ уравнения (2) для ситуаций T , S и E , в виде полиномиальных аппроксимаций, содержат в своем разложении степени x , кратные, соответственно, 4, 6 и 8. Численно можно получить

$$\begin{aligned} g_T(x) = & 1 - 1.834108x^4 + .012962x^8 + .311902x^{12} - .062015x^{16} - \\ & - .037539x^{20} + .017647x^{24} + .001938x^{28} - .002820x^{32} + \\ & + .000115x^{36} + .000399x^{40} - .000024x^{44} - .000122x^{48} + \\ & + .000070x^{52} - .000018x^{56} + .000002x^{60}, \end{aligned}$$

масштабный фактор $\alpha_T = -1.6903029714$ [12, 8];

$$\begin{aligned} g_S(x) = & 1 - 1.907736x^6 - .332883x^{12} + .712702x^{18} + .035179x^{24} - \\ & - .272460x^{30} + .025550x^{36} + .095652x^{42} - .023675x^{48} - \\ & - .011912x^{54} - .041730x^{60} + .089665x^{66} - .083628x^{72} + \\ & + .049185x^{78} - .019539x^{84} + .004901x^{90} - .000587x^{96}, \end{aligned}$$

масштабный фактор $\alpha_S = -1.4677424503$ [8, 14];

$$\begin{aligned}
 g_E(x) = & 1 - 1.897353x^8 - .738844x^{16} + .989783x^{24} + .445691x^{32} - \\
 & - .585998x^{40} - .281968x^{48} + .394947x^{56} - .032153x^{64} + \\
 & + .391490x^{72} - 1.216074x^{80} + 1.458595x^{88} - .973413x^{96} + \\
 & + .387179x^{104} - .086728x^{112} + .008478x^{120},
 \end{aligned}$$

масштабный фактор $\alpha_E = -1.358017279$ [8, 14].

Спектр линеаризованного уравнения РГ (2), полученный численно, содержит следующие существенные собственные числа:

- тип T : $\delta_T = 7.284686217, \alpha_T^2, \alpha_T^3$,
- тип S : $\delta_S = 9.296246833, \alpha_S^2, \alpha_S^3, \alpha_S^4, \alpha_S^2$,
- тип E : $\delta_E = 10.94862427, \alpha_E^2, \alpha_E^3, \alpha_E^4, \alpha_E^5, \alpha_E^6, \alpha_E^7$.

За исключением старшего собственного числа, все остальные выражаются через масштабный фактор путем его возведения в степени от 2 до $m - 1$, где m — порядок экстремума для каждого случая. Собственные числа, равные масштабному фактору в первой и в нулевой степени, отвечают модам, которые устраняются инфинитезимальными заменами переменной — соответственно, сдвигом начала координат и преобразованием подобия.

Таким образом, полная коразмерность составляет три для критического поведения T , пять для S и семь для E -типа.

В предыдущем разделе было показано, однако, что для одномерных отображений трикритичность может появляться как феномен коразмерности два, а S и E -типы — как феномены коразмерности три. Говоря формально, причина очевидного противоречия состоит в том, что одномерные отображения представляют собой частный класс нелинейных систем, и, в некотором широком смысле, не могут считаться типичными. Если экстремум степени $m = 4, 6$ или 8 реализуется не в исходном, а в проитерированном некоторое число раз отображении, то в этом случае *не все* собственные решения линеаризованного уравнения ренормгруппы могут быть включены путем возмущения исходного отображения, т. е. дополнительно должны быть сформулированы определенные *правила отбора* существенных собственных чисел [13]. Например, для наблюдаемого в бимодальных отображениях трикритического поведения коразмерности два следует учитывать собственные числа $\delta_1 = \delta_T$ и $\delta_2 = \alpha_T^2$, тогда как третье собственное число α_T^3 исключено. Однако для трикритичности коразмерности три, которая возникает благодаря наличию кватричного экстремума непосредственно в исходном отображении, работают все три собственных числа δ_T, α_T^2 и α_T^3 . Для критических ситуаций обозначенных как S_1 и S_2 , правила отбора оказываются *разными*. В первом случае работает набор собственных чисел $\delta_S, \alpha_S^2, \alpha_S^4$, а во втором — $\delta_S, \alpha_S^2, \alpha_S^3$. Наконец, в ситуации E существенные собственные числа есть $\delta_E, \alpha_E^2, \alpha_E^4$ [14].

4. Универсальность и скейлинг в пространстве параметров

В окрестности критической точки определенного типа локальное устройство пространства параметров должно быть *универсальным*, поскольку оно определяется природой решения уравнения РГ, а не конкретным видом исходного отображения. Более того, это устройство характеризуется определенными свойствами самоподобия или *скейлинга*. Например, для фейгенбаумовского типа критичности характерен однопараметрический скейлинг с масштабной константой $\delta_F = 4,669\dots$. В окрестности критических точек более высокой коразмерности для демонстрации универсальной структуры пространства параметров и присущего ей скейлинга должна быть выбрана подходящая локальная система координат — скейлинговые координаты. Их следует определить таким образом, чтобы сдвиг из критической точки вдоль каждой из n координатных осей приводил бы к появлению ровно одной определенной существенной моды в решении линеаризованного уравнения РГ.

Собственные числа этих мод $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ выступают как факторы подобия: если одновременно пересчитать масштаб на эти факторы вдоль соответствующих осей системы координат, то структура пространства параметров будет воспроизводить себя локально вблизи критической точки (тем точнее, чем меньшая окрестность рассматривается).

На рис. 2 скейлинг и универсальные устройства плоскости параметров проиллюстрированы для двух трикритических точек, расположенных внутри языков Арнольда для отображения окружности²:

$$x_{n+1} = x_n + \Omega + \frac{K}{2\pi} \cdot \sin 2\pi x_n \pmod{1}. \quad (8)$$

На основной диаграмме рис. 2 на плоскости параметров (Ω, K) показаны различной штриховкой области, где реализуются установившиеся периодические режимы определенного периода. (Картинка получена с помощью прямого численного моделирования динамики на компьютере. В каждой точке, отвечающей определенному пикселу, проводилось достаточно большое число итераций, чтобы режим можно было считать установившимся, а затем конечная часть полученного временного ряда анализировалась на предмет обнаружения периодичности.) На диаграмме хорошо видны языки Арнольда. Внутри этих языков при увеличении параметра K можно наблюдать переход к хаосу через удвоения периода и накопление бифуркационных кривых к фейгенбаумовским критическим линиям. Концами этих линий, как уже отмечалось, служат трикритические точки коразмерности два. Например, внутри языков синхронизации с числами вращения 0 и 1/3 были найдены трикритические точки с координатами, соответственно $\Omega = 0.0681926$, $K = 3.07470161$ и $\Omega = 0.5924511$, $K = 1.2412698$. Локальную систему координат (скейлинговые координаты) в окрестности трикритических точек коразмерности два можно определить, направив одну ось по касательной к линии, вдоль которой реализуется ситуация отображения «экстремум в экстремум», а вторую — вдоль фейгенбаумовской критической линии (подробнее см. [14]).

Если представить окрестность каждой из трикритических точек в соответствующих скейлинговых координатах, то можно видеть характерную универсальную топографию областей — одну и ту же для разных трикритических точек. Рассматривая ее с увеличением на соответствующие факторы скейлинга $\delta_1 = \delta_T = 7.284686217$, $\delta_2 = \alpha_T^2 = 2,8571241351$ по осям локальной системы координат, наблюдаем, что структура областей хорошо воспроизводит себя при таком пересчете масштабов.

Аналогичные иллюстрации для трехпараметрических отображений можно найти в [14].

Для коразмерностей выше единицы задача нахождения явного выражения для локальных скейлинговых координат может быть достаточно нетривиальной. Форма, в которой следует искать замену координат, зависит от конкретных соотношений между существенными собственными числами. Оказывается, что во многих случаях эта замена должна быть нелинейной (см. обсуждение в [14, 16]).

5. Критическое поведение в бимодальных отображениях

До сих пор в этой статье рассматривались только типы критического поведения, связанные с седловыми неподвижными точками РГ уравнения (1). Перейдем теперь к обсуждению вопроса о критических ситуациях, которым соответствовали бы порождаемые этим уравнением более сложные орбиты седлового типа.

Как было обнаружено, такая возможность действительно реализуется и должна учитываться при двухпараметрическом анализе удвоений периода в бимодальных одномерных отображениях [17, 18]. Оказывается, что граница хаоса на плоскости параметров такого отображения содержит наряду с участками фейгенбаумовских критических линий и трикритическими точками еще бесконечное множество критических точек коразмерности два.

² Языки Арнольда исследовались им еще в дипломной работе, четыре десятилетия назад [15]. Трикритичность и другие критические ситуации коразмерности два (раздел 5), которые реализуются в определенных точках пространства параметров внутри языков Арнольда, пополняют список ассоциирующихся с этими языками интересных феноменов нелинейной динамики.

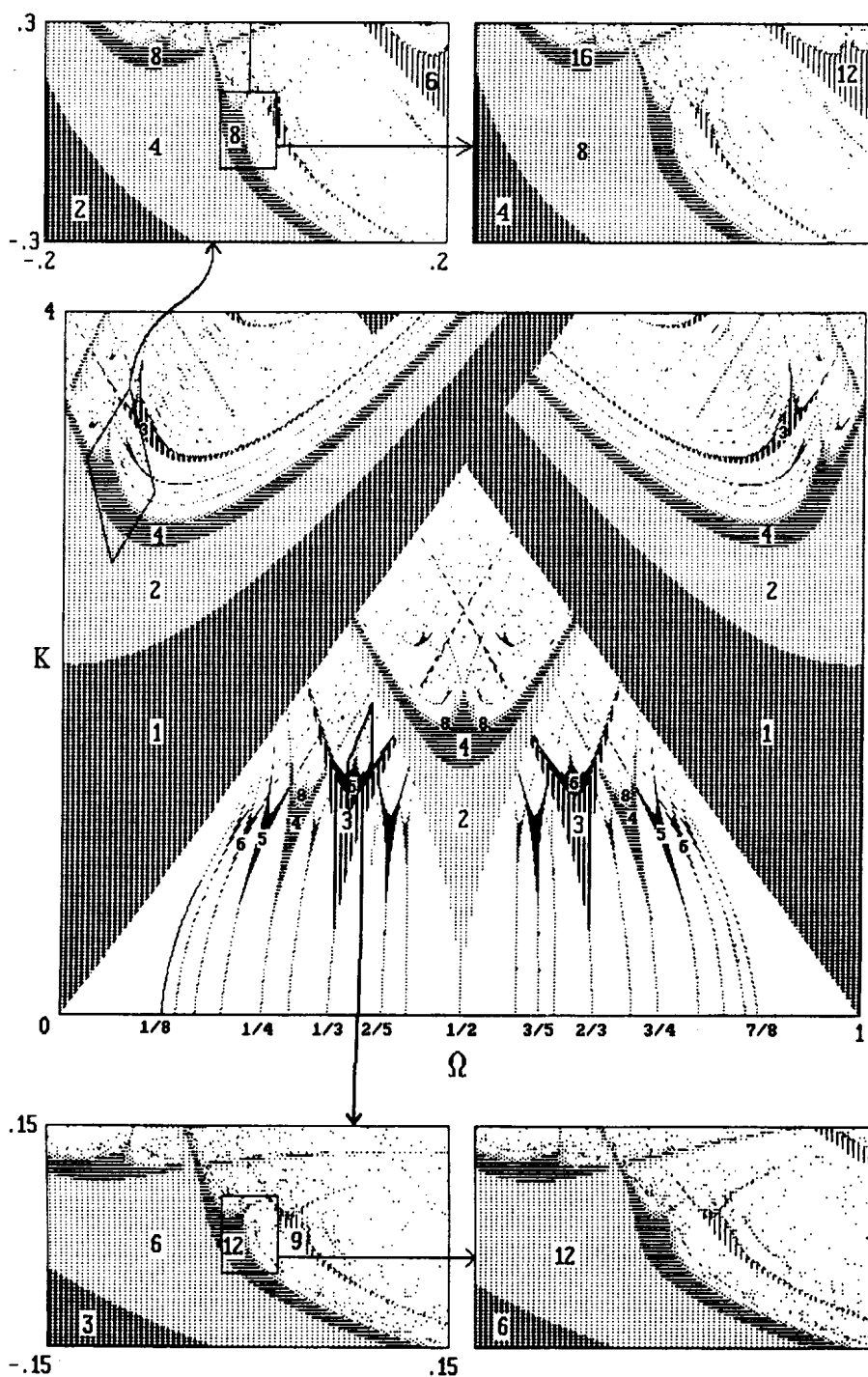


Рис. 2. Карта динамических режимов на плоскости параметров для отображения окружности. Штриховкой показаны области периодических режимов, соответствующие периоды обозначены цифрами. На вставках представлена локальная структура областей на плоскости параметров вблизи двух трикритических точек коразмерности два с использованием скейлинговых координат, причем трикритическая точка находится в центре картинок. При увеличении масштабов в $\delta_1 = 7.284\dots$ раз по горизонтальной оси и в $\delta_2 = 2.857\dots$ раз по вертикальной, конфигурация воспроизводит себя с увеличением вдвое всех временных периодов

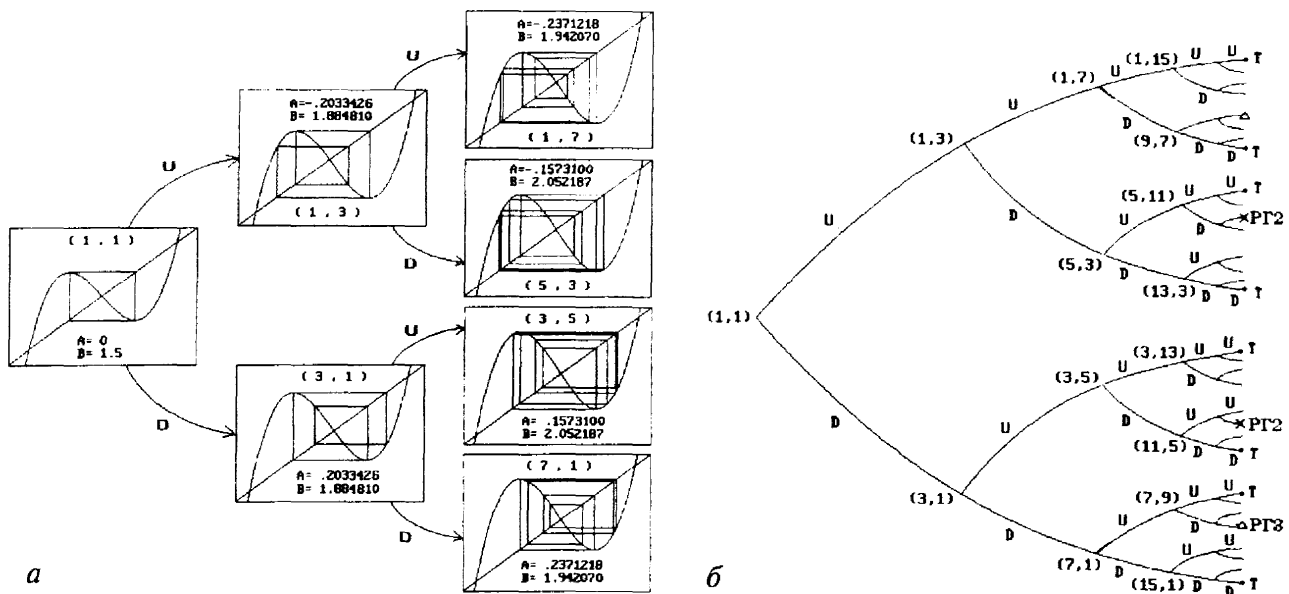


Рис. 3. а) Первые два поколения циклов двойной сверхустойчивости для кубического отображения. В каждой клетке указан тип цикла (p, q) и значения параметров, при которых он реализуется, а также приведена соответствующая итерационная диаграмма. б) Схематическое изображение бинарного дерева сверхустойчивых орбит на плоскости параметров бимодального отображения. Рядом с каждой вершиной указан тип соответствующего цикла двойной сверхустойчивости. Маршруты с кодами вида ...UUUUU... и ...DDDDD... ведут к трикритическим точкам T . Отмечены также точки, отвечающие ренормциклам периода 2 (UDUD... и DUDU..., обозначение PG2) и периода 3 (DDUDDU..., обозначение PG3)

Первым шагом к анализу этого множества является изящная процедура построения бинарного дерева сверхустойчивых орбит. Проиллюстрируем ее на примере кубического отображения

$$x_{n+1} = A - Bx_n + x_n^3, \tag{9}$$

где A и B — два управляющих параметра.

При некоторых, специальным образом подобранных значениях параметров, могут реализовываться циклы двойной сверхустойчивости, когда орбита содержит оба экстремума бимодального отображения (рис. 3 а). Цикл двойной сверхустойчивости называется циклом типа (p, q) , если точка максимума отображается в точку минимума за p итераций, а минимум отображается в максимум за q итераций. Период такого цикла равен, следовательно, $p + q$.

Пусть в некоторой точке на плоскости параметров (A, B) реализуется цикл двойной сверхустойчивости типа (p, q) периода $p + q = 2^k$. Из этой точки на плоскости параметров исходят две кривые, которые мы обозначим u_p и d_q : первая определяется условием того, что максимум отображается в минимум через p итераций, а вторая — условием того, что минимум отображается в максимум через q итераций. Двигаясь вдоль одной из кривых u_p или d_q , мы наблюдаем сначала бифуркацию удвоения цикла, а затем приходим в точку, где существует цикл двойной сверхустойчивости периода 2^{k+1} , тип которого, соответственно, $(p, p + 2q)$ на кривой u , и $(2p + q, q)$ на кривой d . Полное семейство кривых u и d представляет собой бинарное дерево, схематически показанное на рис. 3 б. Точки ветвления на этом дереве соответствуют циклам двойной сверхустойчивости.

Каждый цикл двойной сверхустойчивости естественным образом кодируется конечной последовательностью двух символов U и D . Такой код обозначает единственную последовательность участков кривых u и d на плоскости параметров, которая приводит к этому циклу от начальной точки, отвечающей циклу типа $(1, 1)$.

Предположим теперь, что задан некоторый бесконечный UD-код. Двигаясь вдоль ветвей бинарного дерева в соответствии с этим кодом и отслеживая динамику отображения, мы наблюдаем бесконечный каскад удвоений периода, причем в каждой точке ветвления бинарного дерева аттрактор представляет собой цикл двойной сверхустойчивости периода 2^k . Типы циклов двойной сверхустойчивости, встречающиеся в этом каскаде, определяются путем последовательного просмотра UD-кода по следующему правилу:

$$(p_{i+1}, q_{i+1}) = \begin{cases} (p_i, p_i + 2q_i), & \text{если } U; \\ (2p_i + q_i, q_i), & \text{если } D. \end{cases} \quad (10)$$

В пределе $i \rightarrow \infty$ получаем некоторую точку на плоскости параметров, на которую будем ссылаться как на *критическую точку коразмерности два, ассоциирующуюся с данным бесконечным UD-кодом*. Отметим, что закон накопления бифуркаций удвоений периода отличается от фейгенбаумовского и зависит от структуры UD-кода. Ниже приведены координаты некоторых частных критических точек, порождаемых простыми периодическими UD-кодами:

Код UUUUUUUU...	Код UDUDUDUDU...
$A = -0.242698757265$	$A = -0.158717925945$
$B = 1.951385777782$	$B = 2.102336520597$
Код UDUUDUUDU...	Код UDDUDDUU...
$A = -0.160653611834$	$A = -0.150462468665$
$B = 2.097746013474$	$B = 2.093181820358$

Заметим, что коды UUUUUUU... и DDDDDDD... отвечают трикритическим точкам (коразмерности два), которые, следовательно, включены в рассматриваемый формализм как частный случай.

Рассмотрим поведение в критических точках коразмерности два с точки зрения ренормгруппового подхода. Найдем критическую точку на плоскости параметров кубического отображения³ (9), отвечающую конкретному UD-коду, и, применив к исходному отображению $f_0(x)$ процедуру многократного РГ преобразования Фейгенбаума $f_{k+1}(x) = \alpha_k f_k(f_k(x/\alpha_k))$, произведем вычисление функций $f_n(x)$ при разных $n = 1, 2, 3, \dots$. При этом наблюдается простая связь между поведением последовательности функций $f_n(x)$ и структурой UD-кода. Если код имеет k -периодический хвост, т. е. определенная комбинация из k символов начинает повторяться начиная с некоторой позиции в UD-коде, то последовательность f_n также становится k -периодической для достаточно больших n . Таким образом, решение РГ уравнения (1) в этой точке сходится к циклу периода k , который называется *ренормциклом*. В частности, при $k = 1$ имеем неподвижную точку РГ уравнения, а для случайным образом построенных непериодических UD-кодов — решение в виде хаотической последовательности f_n , что можно обозначить термином *ренормхаос*.

Рассмотрим подробнее случай периодических решений. Найти элемент ренормцикла периода k значит найти новую универсальную функцию $g(x)$, являющуюся неподвижной точкой k -кратно итерированной версии уравнения (1):

$$f_{n+k}(x) = \alpha_n^{(k)} f_n^{2^k} \left(x / \alpha_n^{(k)} \right). \quad (11)$$

³ Здесь и далее для удобства начало координат перенесено в точку одного из экстремумов, для определенности, максимума. Иными словами, вместо отображения $x \rightarrow f(x)$, где $f(x) = A - Bx + x^3$, мы рассматриваем смещенное отображение $f_0(x) = f(x + x_1) - x_1$, где $x_1 = -\sqrt{B/3}$.

Здесь $\alpha_n^{(k)} = 1/f_n^{2^k}(0) = \prod_{i=0}^{2^k-1} \alpha_{n+i}$. Другими словами, функция $g(x)$ должна быть решением функционального РГ уравнения, являющегося обобщением уравнения Фейгенбаума—Цвитановича:

$$g(x) = \alpha g^{2^k}(x/\alpha), \quad (12)$$

где $\alpha = 1/g^{2^k}(0)$. Отметим, что в случае РГ-цикла периода k уравнение (12) имеет k неподвижных точек, которые циклически переходят друг в друга под действием РГ преобразования (1). Достаточно, однако, найти одну из них, чтобы проанализировать все интересующие свойства критической динамики.

Результаты численного решения уравнения (12) — масштабные константы и коэффициенты полиномиальных аппроксимаций приведены в табл. 1 и 2 для трех простых критических точек, описываемых кодами периода 2, 3 и 4.

Таблица 1. Универсальные константы для некоторых критических точек коразмерности два

Код	α	δ	μ_n
UUUUUU..., период 1	-1.69030297	7.28768622	-2.0509405
		2.85712414	
DDDDDD..., период 1	2.85712414	7.28768622	-2.0509405
		2.85712414	
UDUDUD..., период 2	-4.86264509	35.9286114	-2.2751695
		14.5957450	-2.2751695
UUDUUD..., период 3	8.03026759	244.768707	-2.1434758
		46.2910330	-2.2539228
			-2.2778750
UUDDUU..., период 4	23.61530584	1275.15727	-2.1663709
		195.693975	-2.2407195
			-2.1663709
			-2.2407195

Как уже отмечалось, коды UUUUUUU... и DDDDDDD... относятся к трикритическим точкам. Для кода UUUUUUU... получается непосредственно трикритическая универсальная функция $g_T(x)$. Для кода DDDDDDD... в пределе последовательности $f_n(x)$ получается другое решение, $g_T^*(x)$. Оно, однако, связано с $g_T(x)$ заменой переменной, а именно, $g_T^*(x) = [g_T(x^{1/2})]^2$ [12]. Функция $g_T(x)$ получится, если в качестве начала координат взять точку минимума, а не максимума исходного отображения $f(x)$. Таким образом, нет необходимости различать эти два случая. Трикритические точки встречаются парами. В каждой паре обе точки имеют одинаковой структуры начало UD-кода и отличаются присоединенным к нему хвостом — ... UUUUUU... или ... DDDDDDD....

Тот факт, что обе последовательности UUUUUU... и DDDDDDD... ассоциируются с одним и тем же типом критического поведения, является проявлением некоторого общего свойства. Для произвольных UD-кодов решение РГ уравнения остается инвариантным при взаимной замене

символов U и D в коде и переносе начала координат в другой экстремум. Таким образом, максимум и минимум играют равноправную роль в динамике бимодального отображения. (Это обстоятельство было положено в основу РГ теории, развитой Мак-Кеем и Ван-Зейтцем [18], но не отражено в явном виде в использованной здесь более простой версии РГ анализа [19].)

Таблица 2. Полиномиальные аппроксимации для седловых циклов уравнения РГ (1)

Цикл периода 2 РГ уравнения, код UDUDUDUD...

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 = -4.862645091$$

$$g_1(x) = 1 - 2.659451025x^2 - 0.457073109x^4 + 2.998999170x^6 - \\ - 0.776220408x^8 - 1.414948457x^{10} + 1.370177562x^{12} - \\ - 0.068984505x^{14} - 0.580666023x^{16} + 0.174967752x^{18} + \\ + 0.400482740x^{20} - 0.536278594x^{22} + 0.338283919x^{24} - \\ - 0.126059065x^{26} + 0.026941179x^{28} - 0.002582550x^{30}$$

Цикл периода 3 РГ уравнения, код UUDUUDUUD...

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 8.030267587$$

$$g_1(x) = 1 - 2.325802068x^2 - 0.431810277x^4 + 1.769729435x^6 + \\ + 0.021283412x^8 - 0.743118612x^{10} + 0.209345906x^{12} - \\ - 0.012063820x^{14} + 0.679983089x^{16} - 1.504391919x^{18} + \\ + 1.918087529x^{20} - 1.799808881x^{22} + 1.244301917x^{24} - \\ - 0.586942935x^{26} + 0.166339351x^{28} - 0.021240091x^{30}$$

Цикл периода 4 РГ уравнения, код UUDDUUDD...

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = 23.61530584$$

$$g_1(x) = 1 - 3.005022672x^2 + 1.304518421x^4 + 0.672542054x^6 - \\ - 0.398605759x^8 + 0.019878591x^{10} - 0.060673710x^{12} + \\ + 0.539901292x^{14} - 1.603044699x^{16} + 3.215644640x^{18} - \\ - 4.614042318x^{20} + 4.711635022x^{22} - 3.3418011671x^{24} + \\ + 1.565300588x^{26} - 0.435557963x^{28} + 0.054543824x^{30}$$

Отметим особенность, характерную для таких UD-кодов, которые воспроизводят себя при сдвиге, сопровождаемом взаимной заменой символов (например, код периода два UDUDUD... и код периода четыре UUDDUUDD...). Для этих кодов подобие (скейлинг) в динамическом поведении наблюдается не только после k шагов РГ преобразования, но и после $k/2$ шагов. Можно сказать, что для этого класса кодов «период скейлинг-цикла» (т. е. число удвоений периода необходимых для воспроизведения динамики) вдвое меньше, чем период РГ-цикла. Для других кодов они совпадают.

6. От одномерных отображений к двумерным

Как известно, нетривиальное динамическое поведение в автономных системах с непрерывным временем реализуется начиная с размерности фазового пространства $N = 3$. Такие системы можно описывать точно, без каких-либо приближений, с помощью двумерных обратимых отображений, если использовать процедуру построения сечения Пуанкаре. Одномерные необратимые отображения, хотя и оказываются очень часто полезными для описания и объяснения динамики нелинейных систем, в реалистичных случаях должны рассматриваться, вообще говоря, только как приближенный способ описания.

Таким образом, переход от одномерных к двумерным отображениям является принципиальным шагом в развитии теории. В какой же мере изложенные выше результаты анализа различных типов критического поведения одномерных отображений применимы в двумерном случае?

Известно, что в однопараметрических семействах двумерных отображений может наблюдаться фейгенбаумовский тип критического поведения с переходом к хаосу через каскад удвоений периода. В случае общего положения ему присущи те же самые свойства количественной универсальности и скейлинга, что и в одномерных унимодальных отображениях с квадратичным экстремумом (масштабные константы $\delta = 4.6692\dots$ и $\alpha = -2.5029\dots$ и т.п.). Благодаря этому, статус одномерных отображений повышается. Это не просто приближенные модели реалистичной динамики, но представители того же самого класса количественной универсальности, к которому относятся и реальные нелинейные диссипативные системы [26].

Естественно спросить теперь — выживают ли при переходе к двумерным отображениям рассмотренные выше нефейгенбаумовские типы критичности, присущие одномерным отображениям?

Как мы видели, в одномерных отображениях трикритическое поведение может встречаться как феномен коразмерности два. По аналогии с универсальностью Фейгенбаума, можно было бы ожидать, что трикритическое поведение должно достаточно часто встречаться в нелинейных системах при двухпараметрическом анализе перехода к хаосу. Однако до последнего времени трикритичность была обнаружена только в одномерных отображениях (квартичное отображение, кубическое отображение, отображение окружности), но не в системах с многомерным фазовым пространством. Очевидно, это не случайно, поскольку вопрос о трикритической универсальности оказался более тонким, чем в случае обычного фейгенбаумовского каскада удвоений периода.

Как было показано, появление трикритических точек коразмерности два в бимодальных одномерных отображениях обусловлено специфической скрытой симметрией. Из-за того, что квартичный экстремум реализуется не в исходном, а в проитерированном отображении, одна из трех собственных мод линеаризованного уравнения РГ не дает вклада в возмущение неподвижной точки, возникающее при «шевелении» параметров исходного отображения.

В работе [13] на примере отображений типа Эно (Hénon-like maps) вида

$$x_{n+1} = f(x_n) - Dy_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (13)$$

где $f(x)$ — бимодальная функция, было показано, что включение второго измерения приводит к разрушению трикритической ситуации коразмерности два. Когда параметр D становится отличным от нуля, возникает возмущение неподвижной точки уравнения РГ, содержащее все три собственных моды. Поэтому в пространстве параметров двумерного отображения трикритическая точка превращается в объект коразмерности три. Иными словами, добавление второго измерения устраняет скрытую симметрию, а попытка найти трикритичность в двумерном отображении вблизи рассматриваемой точки обречена на провал.

Итак, в отличие от фейгенбаумовской критичности, которая имеет место в типичных однопараметрических семействах нелинейных диссипативных систем произвольной размерности, трикритичность появляется по-разному в одно- и многомерном случаях. В одномерном случае возможна дупараметрическая трикритичность. В двумерных отображениях типа Эно и, очевидно, в других многомерных системах — отображениях и дифференциальных уравнениях, для реализации трикритичности необходимо иметь три управляющих параметра. (Примеры трикритических точек коразмерности 3 в двумерных отображениях также приведены в [13].)

Похожая ситуация имеет место в отношении S и E -типов поведения: при переходе к многомерным системам скрытая симметрия нарушается, «правила отбора» перестают работать, и истинная коразмерность оказывается именно такой, как это и следует из анализа полного спектра собственных чисел в методе РГ (пять для S и семь для E типа критичности).

В работе [13] на примере отображений типа Эно было продемонстрировано, что другие критические ситуации коразмерности два, для которых хвост UD-кода не сводится к повторению одного

символа (раздел 5), *выживают* при включении второго измерения. В [21] этот вопрос подробно рассмотрен на примере двумерного отображения, описывающего реальную физическую систему — схему Чуа. Было обнаружено также, что несмотря на отсутствие трикритичности коразмерности два в строгом смысле слова, на плоскости параметров системы можно отыскивать «псевдо-трикритические» точки. В них характерное для трикритичности скейлинговое поведение реализуется как промежуточная асимптотика, оставаясь в силе для удвоений периода до некоторого, иногда очень глубокого, уровня.

В целом надо заключить, что результаты, полученные при многопараметрическом анализе моделей в виде одномерных отображений следует переносить на исходные системы гораздо аккуратнее, нежели при однопараметрическом анализе.

В обсуждавшихся здесь ситуациях двумерность играла лишь роль «включателя» скрытых ранее неустойчивых направлений, в то время как предельная динамика оставалась одномерной. Возникают, однако, и новые моменты, при рассмотрении которых невозможно уже ограничиваться одномерными отображениями. Исследование двумерных отображений привело к выявлению новых типов универсального критического поведения [22–32, 35–38]. Изложение соответствующих результатов, однако, выходит за рамки настоящей публикации.

Заключение

Итак, идея типичности и понятие коразмерности оказываются эффективными в анализе проблемы «сценариев перехода к хаосу». Опираясь на эти идеи и исследуя РГ уравнение Фейгенбаума—Цвитановича, можно прийти к ситуациям *мультипараметрической критичности*, которые являются в некотором роде вырожденными по отношению к сценарию Фейгенбаума.

Пусть мы имеем нелинейную систему, способную демонстрировать в зависимости от нескольких параметров регулярное и хаотическое поведение. В пространстве параметров будут присутствовать тогда некоторые критические поверхности коразмерности 1, вблизи которых разыгрываются известные однопараметрические сценарии возникновения хаоса, например, через удвоения периода. Может случиться, что двигаясь вдоль такой поверхности мы натолкнемся на некоторую границу, критическую поверхность коразмерности 2. В свою очередь, эта поверхность может быть ограничена поверхностью коразмерности 3 и т. д.

Очевидно, существует иерархия типов критического поведения, со своими правилами подчинения (см., работу [24], где такая иерархия вскрыта для одной частной задачи). В настоящей работе представлена лишь некоторая часть общей картины. Если говорить о более широкой панораме, то, во-первых, следует указать на типы критичности, присущие двумерным отображениям и не встречающиеся в одномерных [22–32]. (Для этого случая следует использовать двумерное обобщение РГ уравнения Фейгенбаума—Цвитановича [28, 22, 23].) Во-вторых, кроме каскада удвоений периода существуют другие пути перехода к хаосу, скажем через перемежаемость или разрушение квазипериодических движений [33, 34]. Необходимо упомянуть также круг вопросов, связанный с анализом свойств универсальности и скейлинга в комплексных аналитических отображениях, в частности «утроения периода» [35–38].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 96–15–96921).

Литература

- [1] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, Москва, 1978.
- [2] Арнольд В. И. Теория катастроф, Наука, Москва, 1990.
- [3] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений, Наука, Москва, 1982.
- [4] Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1978. V. 19. P. 25–52.
- [5] Feigenbaum M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1979. V. 21. P. 669–706.
- [6] Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141. № 2. С. 343.
- [7] Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм. УМН.

1984. Т. 39. № 3. С. 3–37.
- [8] *Hu B. and Satija I.* A spectrum of universality classes in period doubling and period tripling // *Phys. Lett.* 1983. V. A98. P. 143–150.
- [9] *Hu B.* Introduction to real-space renormalization-group methods in critical and chaotic phenomena // *Phys. Rep.* 1982. V. 91. № 5. P. 233–295.
- [10] *Hu B., Mao J. M.* Period Doubling: Universality and Critical Point Order // *Phys. Lett.* 1982. Vol. 25A, № 6, 3259.
- [11] *Van der Weele J. P., Capel H. W., Kluiving R.* On the scaling factors (z) and (z) // *Phys. Lett.* 1986. V. A119. № 1. P. 15.
- [12] *Chang S. J., Wortis M. and Wright J. A.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior // *Phys. Rev.* 1981. V. A24. P. 2669–2684.
- [13] *Kuznetsov S. P.* Tricriticality in two-dimensional maps // *Phys. Lett.* 1992. V. A169. P. 438–444.
- [14] *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P. and Sataev I. R.* Three-parameter scaling for one-dimensional maps // *Phys. Lett.* 1994. V. A189. P. 367–373.
- [15] *Arnold V. I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // *Chaos.* 1991. V. 1(1). P. 20.
- [16] *Schmidt G.* Universality of dissipative systems, in: *Direction in Chaos*, ed. Hao Bai-lin, vol. 2 (World Scientific, 1988). P. 1–15.
- [17] *Fraser S. and Kapral R.* Universal vector scaling in one-dimensional maps // *Phys. Rev.* 1984. V. A25. P. 3223–3233.
- [18] *MacKay R. S. and van Zeijts J. B. J.* Period doubling for bimodal maps: a horseshoe for a renormalization operator // *Nonlinearity* 1988. V. 1. P. 253–277.
- [19] *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R. and Chua L. O.* Two-parameter study of transition to chaos in Chua's circuit: Renormalization group, universality and scaling // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1993. V. 3. P. 943–962.
- [20] *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P. and Sataev I. R.* From bimodal one-dimensional maps to Hénon-like two-dimensional maps: does quantitative universality survive? // *Phys. Lett.* 1994. V. A184. P. 413–421.
- [21] *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R. and Chua L. O.* Multi-parameter criticality in Chua's circuit at period-doubling transition to chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1996. V. 6. P. 119–148.
- [22] *Kuznetsov S. P. and Sataev I. R.* New types of critical dynamics for two-dimensional maps // *Phys. Lett.* 1992. V. A162. P. 236–242.
- [23] *Kuznetsov S. P. and Sataev I. R.* Period-doubling for two-dimensional non-invertible maps: renormalization group analysis and quantitative universality // *Physica D.* 1997. V. 101. P. 249–269.
- [24] *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P. and Sataev I. R.* Variety of types of critical behavior and multistability in period-doubling systems with unidirectional coupling near the onset of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1993. V. 3. P. 139–152.
- [25] *Greene J. M., MacKay R. S., Vivaldi F., and Feigenbaum M. J.* Universal behavior in families of area preserving maps // *Physica* 1981. V. D3. P. 468–486.
- [26] *Collet P., Eckmann J.-P. and Koch H.* On universality for area-preserving maps of the plane // *Physica.* 1981. V. D3. P. 457.
- [27] *Widom M. and Kadanoff L. P.* Renormalization group analysis of area-preserving maps // *Physica* 1982. V. D5. P. 287–292.
- [28] *Eckmann J.-P., Koch H. and Wittwer P.* Existence of a fixed point of the doubling transformation for area-preserving maps of the plane // *Phys. Rev.* 1982. V. A26. P. 720–722.
- [29] *Gunaratne G. H. and Feigenbaum M. J.* Trajectory scaling functions for bifurcations in area-preserving maps on the plane // *Physica.* 1985. V. D17. P. 295–307.
- [30] *Helleman R. H. G.* Self-generated chaotic behavior in nonlinear mechanics. In: *Fundamental problems in statistical mechanics*, ed. *Cohen E. G. D.* Vol. 5 (North-Holl. Publ., Amsterdam, 1981).
- [31] *Лухтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. *Lichtenberg A. J. and Lieberman M. A.* Regular and Stochastic Motion (Springer, Heidelberg-New York, 1982).
- [32] *Zisook A. B.* Universal effects of dissipation in two-dimensional mappings // *Phys. Rev.* 1981. V. A24. P. 1640.
- [33] *Ostlund S., Rand D., Sethna J. and Siggia E. D.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // *Physica* 1983. V. D8. P. 303–342.
- [34] *Zisook A. B.* The complete set of Hamiltonian intermittence scaling behaviors // *Commun. Math. Phys.* 1984. V. 96. P. 361–371.
- [35] *Гольберг А. И., Синай Я. Г., Ханин К. М.* Универсальные свойства последовательности утроения периода // *УМН.* 1983. Т. 38. № 1 С. 159.
- [36] *Cvitanović P., Myrheim J.* Universality for period n -tuplings in complex mappings // *Phys. Lett.*, 1983. V. 94A. P. 329.
- [37] *Cvitanović P., Myrheim J.* Complex universality // *Commun. Math. Phys.* 1989. V. 121. P. 225.
- [38] *Кузнецов С. П.* Каскад удвоенных периода в комплексном кубическом отображении // *Изв. вузов. ПНД,* 1996. Т. 4, 5. С. 3–12.

A. P. KUZNETSOV, S. P. KUZNETSOV, I. R. SATAEV

CODIMENSION AND TYPICITY IN THE CONTEXT OF DESCRIPTION OF TRANSITION TO CHAOS VIA PERIOD-DOUBLING IN DISSIPATIVE DYNAMICAL SYSTEMS

Received November 15, 1997

While considering multiparameter families of nonlinear systems, types of behavior at the onset of chaos may appear which are distinct from Feigenbaum's universality. We present a review of such situations which can be met in families of one-dimensional maps and discuss a possibility for their realization and observation in nonlinear dissipative systems of more general form.