



ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

П.В. Купцов

Приведен анализ задачи о синхронизации хаотических систем при наличии двух типов связи – инерционной и диссипативной. В отличие от обычно рассматриваемой ситуации, когда присутствует только один тип связи, развиваемый в статье подход позволяет наблюдать все известные типы устойчивости синхронного режима – сильную и слабую устойчивость, сильную и слабую неустойчивость. В качестве примера рассмотрена синхронизация двух обобщенных отображений тента.

В последнее время большое внимание исследователей привлекает эффект синхронизации связанных хаотических систем [1–5], представляющий значительный интерес как для теоретической, так и для прикладной науки. На основе этого эффекта разработаны новые средства передачи конфиденциальной информации [6,7]. Исследование синхронизации хаотических систем привело к открытию таких явлений как On–Off перемежаемость [8] или клокочущий (bubbling) аттрактор [9] и пористый (riddled) бассейн притяжения [10,11].

В работе [12] на основании РГ–анализа связанных систем, демонстрирующих переход к хаосу через удвоения периода, было предложено ввести в рассмотрение два типа связи – инерционный и диссипативный. Эту идею можно использовать и при более общей постановке задачи, не апеллируя ни к РГ–анализу, ни к конкретному типу динамики составляющих систему элементов.

В литературе чаще всего исследуется синхронизация при наличии одной только инерционной связи. Мы рассмотрим ситуацию, когда хаотические системы взаимодействуют по двум каналам связи. Один канал отвечает за инерционную, а другой за диссипативную связь. Каждый тип связи характеризуется своим параметром, так что задача становится двухпараметрической. При таком подходе оказывается возможным вскрыть более полную картину динамического поведения связанных систем и реализовать разнообразные варианты синхронизации.

Рассмотрим два идентичных нелинейных отображения

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad v_{n+1} = f(v_n). \quad (1)$$

На рис. 1, *а* приводится схема, иллюстрирующая их последовательные итерации. Пусть теперь введена связь, так что после каждой итерации обе подсистемы обмениваются информацией о своих предшествующих состояниях (рис. 1, *б*). Взаимодействие происходит в обход нелинейности и, следовательно, сохраняет информацию о прошлых состояниях системы. Этот тип связи естественно назвать инерционным. Связь другого типа осуществляется, когда на каждой итерации

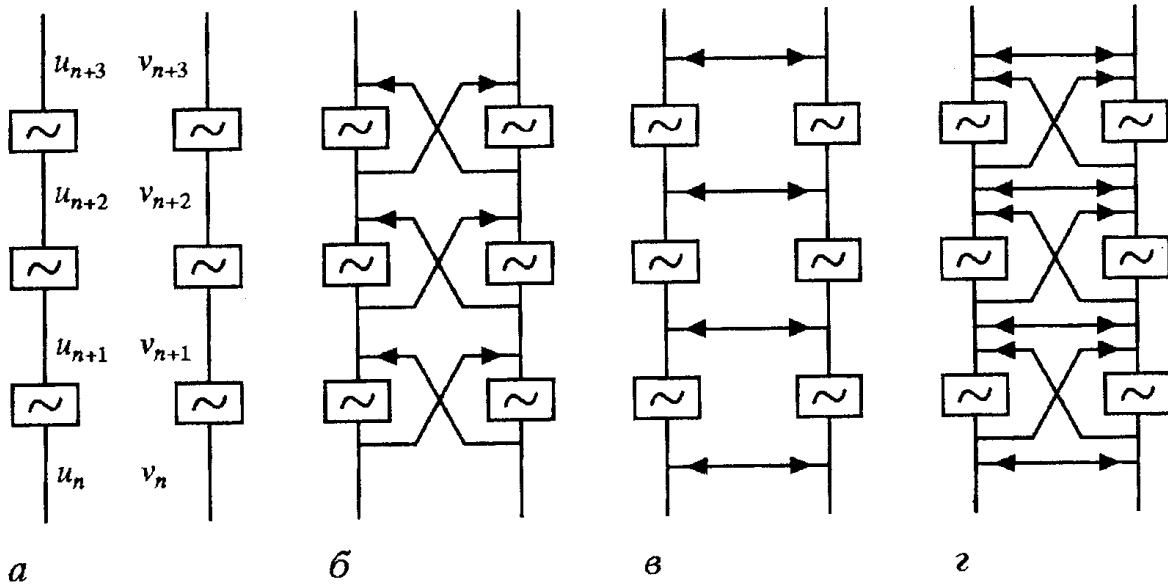


Рис. 1. Различные способы введения связи между отображениями (1): а – связи нет; б – инерционная связь; в – диссипативная связь; г – комбинированная связь (рисунок взят из [12])

подсистемы обмениваются информацией о своих текущих состояниях (рис. 1, в). Это способствует выравниванию состояний и приводит к потере информации о прошлом. Поэтому такую связь естественно назвать диссипативной. Мы можем рассмотреть также случай, когда присутствуют оба типа связи (рис. 1, г), при этом уравнения, описывающие динамику связанных систем, представляются в виде

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n) + \varepsilon_i(v_n - u_n) + \varepsilon_d(f(v_n) - f(u_n)), \\ v_{n+1} &= f(v_n) + \varepsilon_i(u_n - v_n) + \varepsilon_d(f(u_n) - f(v_n)), \end{aligned} \quad (2)$$

где ε_i и ε_d – параметры инерционной и диссипативной связи, соответственно.

Можно заметить, что динамика системы (2) инвариантна относительно преобразования параметров связи

$$\varepsilon_i \rightarrow -\varepsilon_i, \quad \varepsilon_d \rightarrow 1 - \varepsilon_d. \quad (3)$$

Следовательно, плоскость параметров $(\varepsilon_i, \varepsilon_d)$ обладает симметрией. В этом можно убедиться, если подставить (3) в (2) и принять во внимание, что подсистемы идентичны друг другу. Центром симметрии является точка

$$\varepsilon_i = 0, \quad \varepsilon_d = 1/2. \quad (4)$$

Если начальные состояния подсистем точно совпадают, $u_0 = v_0$, то наличие связи не сказывается на динамике, и система демонстрирует синхронный режим $u_n \equiv v_n$. При этом в фазовом пространстве на линии $u = v$ существует симметричный аттрактор, структура которого идентична структуре аттрактора частичного отображения (1).

В точке симметрии (4) система (2) преобразуется к виду

$$u_{n+1} = [f(u_n) + f(v_n)]/2, \quad v_{n+1} = [f(u_n) + f(v_n)]/2,$$

и с очевидностью после первой же итерации переходит в режим синхронизации, причём аттрактор синхронного режима в этом случае имеет в определённом смысле наибольшую устойчивость. Поэтому точку плоскости параметров с координатами (4) будем называть точкой сверхустойчивой синхронизации.

Введём новые переменные x и y , характеризующие, соответственно, симметричную и антисимметричную компоненты движения системы (2)

$$x_n = 1/2(u_n + v_n), \quad y_n = 1/2(u_n - v_n). \quad (5)$$

В новых переменных уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1/2[f(x_n+y_n) + f(x_n-y_n)], \\ y_{n+1} &= (1/2 - \epsilon_d) [f(x_n+y_n) - f(x_n-y_n)] - 2\epsilon_i y_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Если антисимметричная компонента мала, то в линейном приближении по y можно записать

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n), \\ y_{n+1} &= y_n [f'(x_n)(1 - 2\epsilon_d) - 2\epsilon_i]. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда видно, что при малых y движение на симметричном аттракторе описывается парциальным отображением.

Под устойчивостью режима синхронизации естественно понимать устойчивость симметричной траектории ($u=v$ или $y=0$) по отношению к малому поперечному возмущению, описываемому переменной y . Если возмущение затухает, то есть $|y|$ уменьшается, то происходит синхронизация, и напротив, с ростом поперечного возмущения синхронный режим разрушается. В качестве характеристического признака устойчивости можно использовать поперечный ляпуновский показатель

$$\lambda_{\perp} = 1/N \sum_{n=1}^N \ln |f'(x_n)(1 - 2\epsilon_d) - 2\epsilon_i|, \quad (8)$$

где x_1, x_2, \dots, x_N — N точек симметричной траектории. Когда поперечный ляпуновский показатель меньше нуля, то малые перпендикулярные возмущения затухают и траектория является устойчивой.

Зафиксируем параметр диссипативной связи, положив $\epsilon_d = 1/2$, а инерционную связь будем изменять. При таком выборе ϵ_d поперечный ляпуновский показатель λ_{\perp} является однозначной функцией параметра ϵ_i и не зависит от вида парциальных отображений. Приравнявая λ_{\perp} к нулю, находим, что все симметричные траектории поперечно устойчивы и система находится в режиме синхронизации, когда

$$-1/2 < \epsilon_i < 1/2. \quad (9)$$

В точке сверхустойчивой синхронизации (4) λ_{\perp} стремится к минус бесконечности.

Рассмотрим теперь чистую диссипативную связь, то есть положим $\epsilon_i = 0$. В этой ситуации потеря симметричными траекториями поперечной устойчивости происходит, когда ϵ_d удовлетворяет уравнению

$$\ln |1 - 2\epsilon_d| = -\lambda_{\parallel}, \quad (10)$$

где $\lambda_{\parallel} = 1/N \sum_{n=1}^N \ln |f'(x_n)|$ — продольный ляпуновский показатель траектории.

Чтобы отыскать в общем случае значения параметров ϵ_i и ϵ_d , при которых поперечный ляпуновский показатель λ_{\perp} обращается в нуль, удобно сделать замену

$$\epsilon_d = (1 - r \cos 2\pi\phi)/2, \quad \epsilon_i = -(r \sin 2\pi\phi)/2, \quad (11)$$

где $r > 0$, $0 \leq \phi < 1$. Подставив (11) в (8), получим, что $\lambda_{\perp} = 0$ при

$$r = [\prod_{n=1}^N |f'(x_n) \cos 2\pi\phi + \sin 2\pi\phi|]^{-1/N}. \quad (12)$$

Сценарий возникновения и разрушения синхронного режима существенным образом зависит от структуры симметричного аттрактора. Если аттрактор является неподвижной точкой или циклом, то, как видно из формулы (8), в зависимости от величины связи он может быть либо устойчивым ($\lambda_{\perp} < 0$), либо неустойчивым ($\lambda_{\perp} > 0$).

Значительно более сложная ситуация имеет место, если симметричный аттрактор является хаотическим. В этом случае при различных значениях параметров связи возможны четыре типа поведения [13].

1. *Сильная устойчивость.* Все траектории на аттракторе являются устойчивыми к поперечным возмущениям, $\lambda_{\perp} < 0$. Аттрактор имеет однородный бассейн притяжения, то есть всегда можно отыскать такую окрестность аттрактора, все точки которой притягиваются к нему.

2. *Слабая устойчивость.* Хотя в среднем аттрактор является устойчивым, то есть для типичной траектории $\lambda_{\perp} < 0$, однако существуют траектории, покидающие аттрактор при малом поперечном возмущении. Бассейн притяжения такого аттрактора имеет фрактальную структуру и называется пористым (riddled): в окрестности каждой его точки существует множество ненулевой меры, точки которого не принадлежат бассейну [10,11]. Аттрактор с пористым бассейном называют слабым в смысле определения, данного Милнором [14]. Существование пористого бассейна может быть объяснено наличием инвариантных множеств, вложенных в симметричный хаотический аттрактор – неподвижных точек, циклов, канторовых множеств и т. д., неустойчивых по отношению к возмущениям, не нарушающим симметрию [15]. Поперечная устойчивость этих множеств характеризуется ляпуновским показателем (8) и зависит от параметров связи. Как только теряет устойчивость хотя бы одно инвариантное множество, появляются траектории, которые могут проходить сколь угодно близко к аттрактору и, тем не менее, не притягиваться к нему. В результате бассейн притяжения становится пористым.

3. *Слабая неустойчивость.* Этот тип поведения возникает, когда аттрактор в среднем неустойчив, $\lambda_{\perp} > 0$, но не все вложенные инвариантные множества потеряли поперечную устойчивость. Это приводит к возникновению On–Off перемежаемости, которая характеризуется чередованием всплесков хаотических колебаний антисимметричной компоненты и возвратов траектории в окрестность аттрактора [8]. Такой аттрактор называют клокочущим (bubbling) [9].

4. *Сильная неустойчивость.* Этот тип поведения имеет место, когда $\lambda_{\perp} > 0$ и все вложенные инвариантные множества неустойчивы относительно поперечных возмущений.

Таким образом, потеря симметричным хаотическим аттрактором поперечной устойчивости происходит не при строго определённых значениях параметров. Эта бифуркация «размазана» по пространству параметров, занимает в нем определённую область («ползучая бифуркация», по образному выражению А.И. и Н.К. Рахмановых [16]).

Рассмотрим обобщённое отображение тента, которое описывается уравнением

$$x_{n+1} = px_n + (l - p)(|x_n + 1/l| - |x_n - 1/l|)/2 \quad (13)$$

(рис. 2). Параметры l и p регулируют наклон графика отображения к оси абсцисс в точке $x=0$ и в точках $|x|=1$, соответственно. Свойства отображения (13) обсуждаются в работах [17–19]. Когда параметры удовлетворяют неравенствам

$$l > 1, \quad -2l/(l-1) < p \leq -l/(l-1), \quad (14)$$

то отображение имеет хаотический аттрактор, занимающий интервал $[-1,1]$. Если же

$$l > 1, \quad -l/(l-1) < p \leq -1, \quad (15)$$

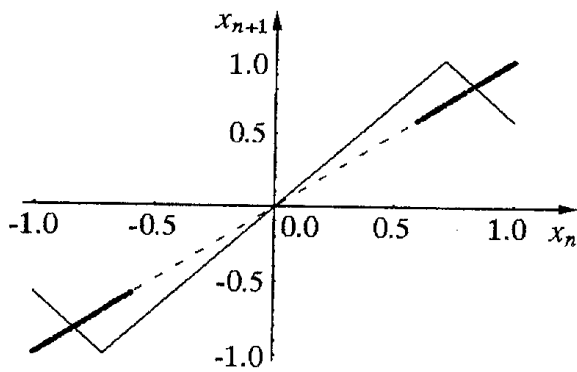


Рис. 2. Отображение (13) при $l=-p=2^{1/2}$. На диагонали отложены точки двух симметрично расположенных хаотических аттракторов этого отображения

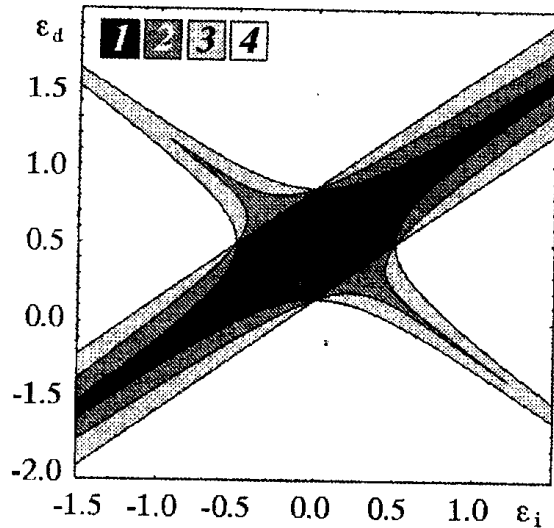


Рис. 3. Карта синхронизации системы двух связанных отображений (13). Цифрами обозначены различные типы синхронной динамики: 1 – сильная устойчивость; 2 – слабая устойчивость; 3 – слабая неустойчивость; 4 – сильная неустойчивость

то на интервале $[-1,1]$ существуют два хаотических аттрактора, которые расположены симметрично относительно нуля. Далее полагаем, что параметры имеют значения $l=-p=2^{1/2}$ (см. рис. 2).

Задача о синхронизации двух отображений тента, связанных только одним каналом связи, уже изучалась в литературе. В работе [16] исследован случай, когда между этими отображениями имеется чистая диссипативная связь, а в статье [13] рассматривалась синхронизация при наличии только инерционной связи. Мы обсудим синхронизацию при наличии как инерционной, так и диссипативной связи.

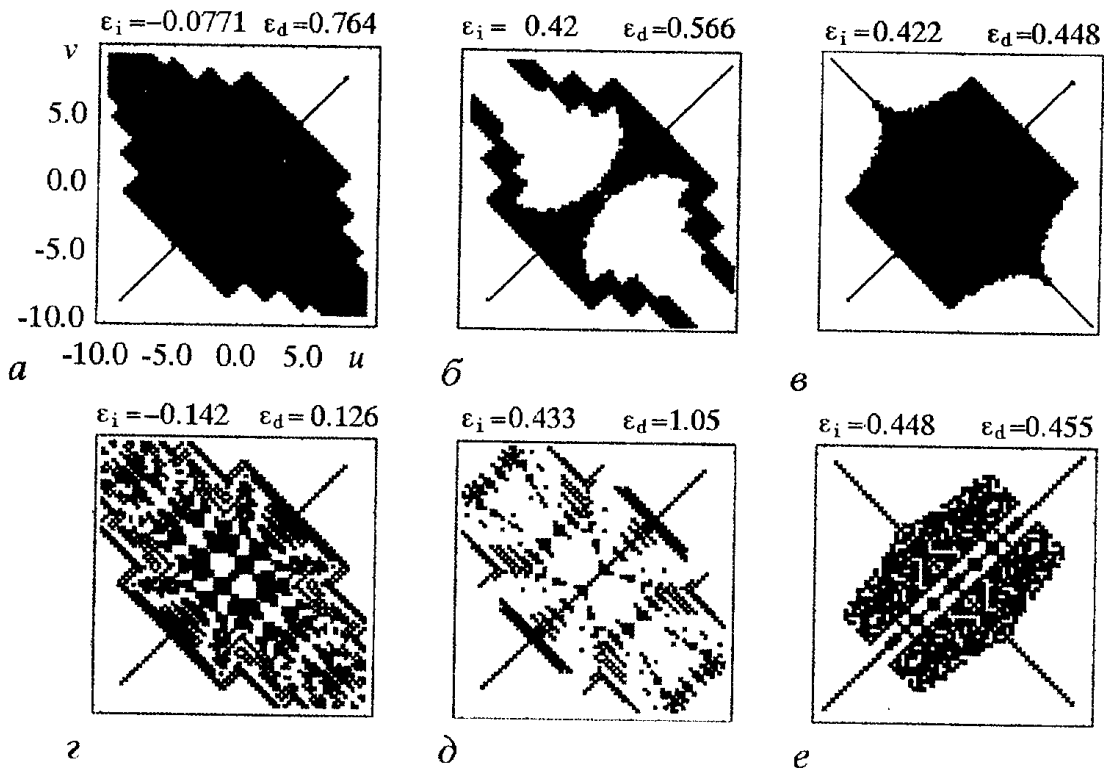


Рис. 4. Бассейны притяжения симметричного аттрактора системы двух связанных отображений (13). Диаграммы (а-в) в верхнем ряду получены для случая сильной устойчивости. На диаграммах нижнего ряда (г-е) изображены пористые бассейны аттрактора, имеющего слабую устойчивость

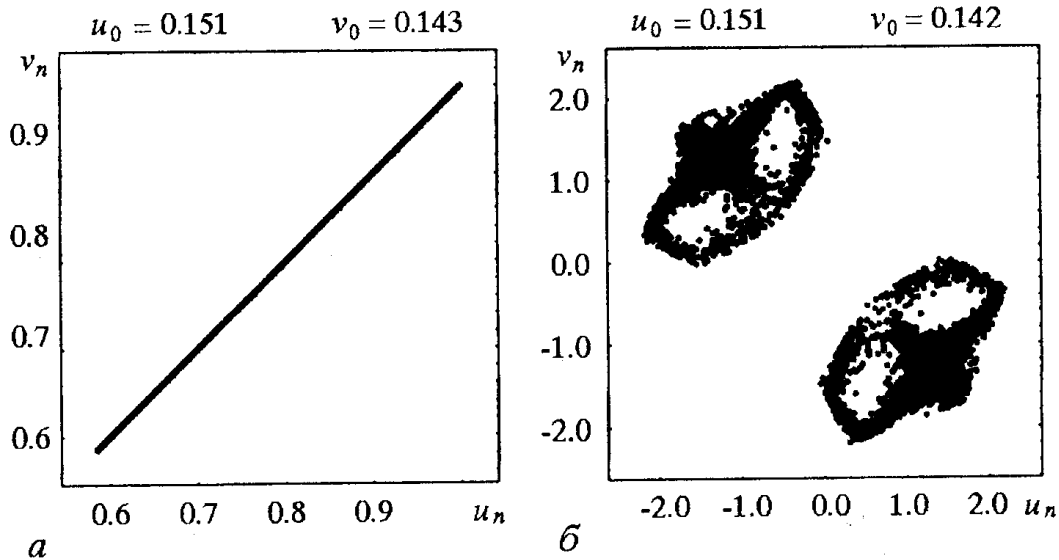


Рис. 5. Аттрактор системы двух связанных отображений (13) при $\epsilon_i=0.433$, $\epsilon_d=1.050$ (режим слабой устойчивости). При построении диаграмм (а) и (б) выбраны разные стартовые точки (u_0, v_0)

Рассмотрим систему (2), когда парциальные подсистемы задаются отображением (13). Руководствуясь приведёнными выше определениями, построим на плоскости параметров связи (ϵ_i, ϵ_d) карту синхронизации, на которой отобразим четыре области, соответствующие различным типам синхронного поведения. Для этого численно определим расположение неподвижных точек и циклов, вложенных в симметричный аттрактор рассматриваемой системы (ограничимся циклами с периодом, меньшим 20). Затем, используя формулу (12), для симметричного аттрактора и вложенных в него циклов построим на плоскости параметров линии потери поперечной устойчивости и по расположению этих линий выделим искомые области.

Карта синхронизации (рис. 3), обладает симметрией с центром в точке сверхустойчивой синхронизации (4). Через центр симметрии можно провести три прямые, двигаясь вдоль которых, нельзя наблюдать типичную картину динамических эффектов. Две из них, $\epsilon_d=1/2$ и $\epsilon_i=0$, не проходят через области слабой устойчивости и слабой неустойчивости. (Напомним, что существование линии $\epsilon_d=1/2$ обусловлено устройством системы (2) и не зависит от свойств парциальных отображений). Третья линия никогда не покидает область сильной устойчивости.

Обсудим поведение системы в различных областях карты синхронизации.

Сильная и слабая устойчивость. На рис. 4, а–в построены бассейны притяжения симметричного аттрактора, обладающего сильной устойчивостью. Порисованные бассейны, отвечающие слабой устойчивости, представлены на рис. 4, г–е. Видно, что из-за наличия пор имеются точки вблизи симметричного аттрактора, которые им не притягиваются. Это иллюстрирует рис. 5, где показано, как в режиме слабой устойчивости две траектории, испущенные из близких к симметричному аттрактору и друг к другу точек, демонстрируют качественно различное поведение. На диаграмме (а) в системе возникает режим синхронизации, а на диаграмме (б) траектория приходит к хаотическому аттрактору.

Сильная и слабая неустойчивость. На рис. 6 иллюстрируется поведение антисимметричной компоненты y одной и той же, произвольно выбранной траектории при различных значениях параметров связи. Слева изображены восстановленные итерационные диаграммы, то есть зависимости y_{n+1} от y_n . Они позволяют выявить механизм, управляющий поведением компоненты y . Видно, что точки на этих диаграммах располагаются между двумя прямыми линиями. Одна из линий всегда имеет наклон больше единицы и, следовательно, отвечает за уход траектории от симметричного аттрактора. Вторая линия на диаграмме (а),

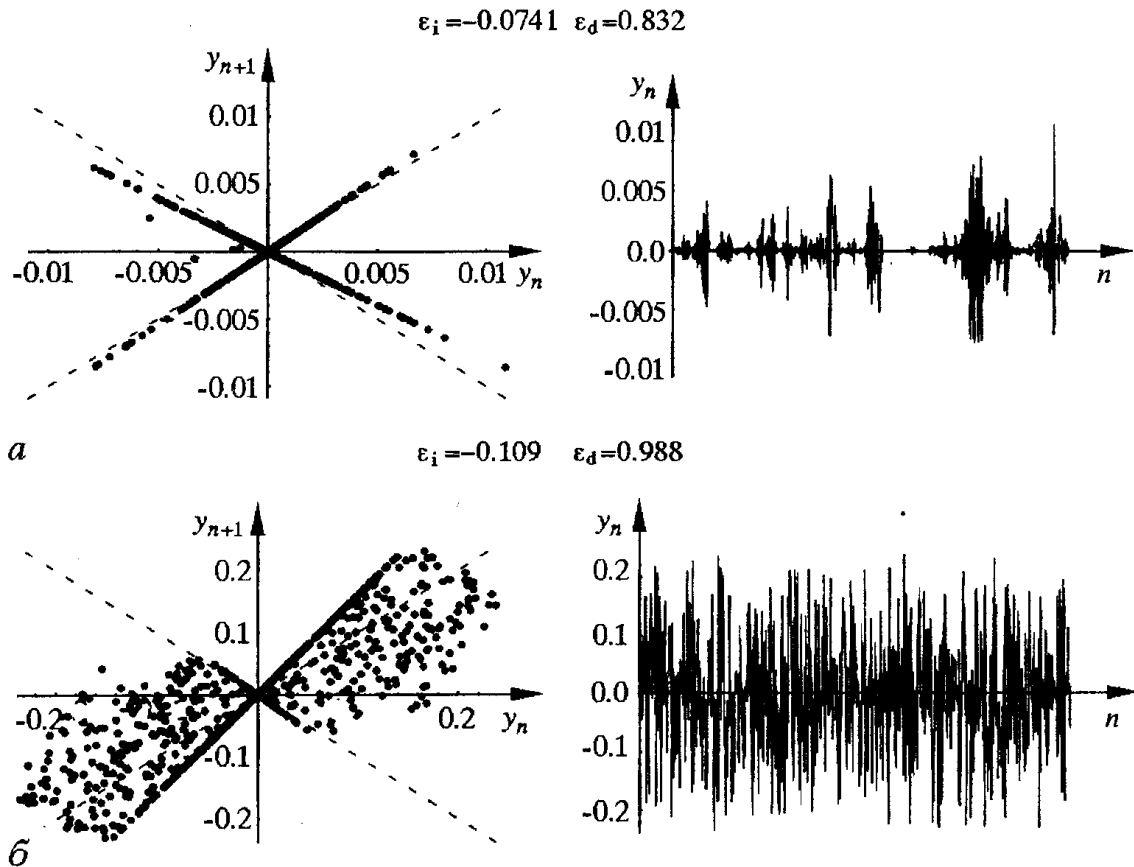


Рис. 6. Поведение антисимметричной компоненты y траектории системы двух связанных отображений (13). Стартовая точка ($u_0=0.526664$, $v_0=0.510808$) выбрана произвольно вблизи симметричного аттрактора. На диаграмме (а) система находится в режиме слабой неустойчивости, а на диаграмме (б) – в режиме сильной неустойчивости

построенной для режима слабой неустойчивости, имеет наклон меньше минус единицы, то есть отвечает возвращающему механизму. Возвраты траектории к симметричному аттрактору можно наблюдать также и на диаграмме справа, где построена временная зависимость компоненты y_n . Видно, что имеет место характерная для режима слабой неустойчивости On–Off перемежаемость. На диаграмме (б), иллюстрирующей режим сильной неустойчивости, наклон второй линии чуть больше минус единицы. Это означает, что возвращающий механизм не работает, и антисимметричная компонента демонстрирует хаотическое поведение.

Явление синхронизации взаимодействующих динамических систем играет большую роль в различных областях науки. Исследованию этого явления посвящено значительное количество работ, при этом обнаружено много интересных эффектов. Однако до сих пор ряд вопросов изучен недостаточно. Один из них состоит в том, сколько и каких каналов связи нужно установить между подсистемами, чтобы можно было наблюдать полную картину динамических эффектов? В теории переходов к хаосу через удвоения периода этот вопрос решается при помощи метода ренорм–группового анализа [20]. В работе [12] при помощи ренорм–группового анализа показано, что универсальной моделью для изучения перехода к хаосу двух слабо взаимодействующих подсистем с удвоениями периода является уравнение (2), где присутствуют два канала связи. В работе [21] методом ренорм–группы исследован переход к хаосу в системе двух связанных отображений окружности и показано что полная картина наблюдается при наличии трех каналов связи.

Мы рассмотрели задачу о синхронизации двух связанных хаотических систем. Как известно, они могут демонстрировать четыре основных типа синхронной динамики. В современной литературе чаще всего рассматривается ситуация, когда между подсистемами существует только один канал связи. При

этом не во всех случаях можно наблюдать все четыре типа поведения. Как показано в настоящей работе, в этом смысле полная картина возникает, если задействовать одновременно два типа связи – инерционную и диссипативную. Результаты работы дают основания полагать, что двух каналов связи достаточно и введение третьего канала никак не обогатит наблюдаемую картину.

Автор выражает признательность С.П. Кузнецову за полезное обсуждение работы и ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 97–02–16414.

Библиографический список

1. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems // *Prog.Theor.Phys.* 1983. Vol. 69. P. 32.
2. Pikovsky A.S. On the interaction of strange attractors // *Z. Phys. B.* 1984. Vol. 55. P. 149.
3. Афрамович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Общая синхронизация // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 29. С. 795.
4. Pecora L.M., Carrol T.L. Synchronization in chaotic systems // *Phys.Rev.Lett.* 1990. Vol. 64. P. 821.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Е., Сафонова М.А. // *Радиотехника и электроника.* 1991. Т. 36. С. 338.
6. Cuomo K., Oppenheim A.V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // *Phys.Rev.Lett.* 1993. Vol. 71, № 1. P. 65.
7. Rulkov N. F. Images of synchronized chaos: experiments with circuits // *chaos.* 1996. Vol. 6, № 3. P. 262.
8. Platt N., Spiegel E. A., Tresser C. On–Off intermittency: a mechanism for bursting // *Phys.Rev.Lett.* 1993. Vol. 70, № 3. P. 279.
9. Ashwin P., Buescu J., Stewart I. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators // *Phys.Lett. A.* 1994. Vol. 193. P. 126.
10. Alexander J.C., Yorke J.A., You Z., Kan I. Riddled basins // *Int.J.Bif.Chaos.* 1992. Vol. 2, № 4. P. 795.
11. Ott E., Sommerer J.C. Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on–off intermittency // *Phys.Lett. A.* 1994. Vol. 188. P. 39.
12. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
13. Maistrenko Yu., Kapitaniak T. Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps // *Phys.Rev.E.* 1996. Vol. 54, № 4. P. 3285.
14. Milnor J. On the concept of attractor // *Commun.Math.Phys.* 1985. Vol. 99. P. 177.
15. Heagy J.F., Carrol T.L., Pecora L.M. Desynchronization by periodic orbits // *Phys.Rev.E.* 1995. Vol. 52, № 2. P. R1253.
16. Rakhmanov A.I. On an attractor of two coupled tent maps // *Abstr. of DEBC.* Kiev, Ukraine. 1994. P. 84.
17. Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Chua L.O. Cycles of chaotic intervals in a time–delayed Chua’s circuit // *Int.J.Bif.Chaos.* 1993. Vol. 3, № 6. P. 1557.
18. Maistrenko V.L., Maistrenko Yu.L., Sushko J.M. // *Chaos and Nonlinear Mechanics* / eds. Kapitaniak T., Brindley J., World Scientific, Singapore. 1994.
19. Nusse H.E., Yorke J.A. Border–collision bifurcations for piecewise smooth one–dimensional maps // *Int.J.Bif.Chaos.* 1995. Vol. 5, № 1. P. 189.
20. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. A variety of period–doubling universality classes in multi–parameter analysis of transition to chaos // *Physica D.* 1997. Vol. 109. P. 91.
21. Pikovsky A.S., Shekhov V.G. Universal behaviour of two coupled circle maps // *J.Phys. A: Math Gen.* 1991. Vol. 24. P. 183.

Саратовское отделение ИРЭ РАН

Поступила в редакцию
после доработки

06.07.99
05.10.99

TWO-PARAMETER ANALYSIS OF CHAOS SYNCHRONIZATION

P.V. Kuptsov

The problem of synchronization of chaotic systems with inertial and dissipative coupling is considered. There are many investigations of one-parameter synchronization. Introducing the additional channel of coupling and respectively the second parameter of coupling gives the opportunity to observe all known types of stability of synchronized chaotic regime – strong and week stability and strong and week instability. As an example the two-parameter analysis of synchronization of two skew tent maps is developed.



Купцов Павел Владимирович родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского университета (1994). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1998). Область научных интересов – нелинейная динамика, теория критических явлений. Автор нескольких научных работ по этой теме.