



ГИПЕРХАОС В МОДЕЛЬНОЙ НЕАВТНОМНОЙ СИСТЕМЕ С КАСКАДНОЙ ПЕРЕДАЧЕЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПО СПЕКТРУ

С.П. Кузнецов, Ю.И. Соха

Одна из ключевых идей теории турбулентности – каскадная передача энергии по спектру от крупномасштабных образований к мелкомасштабным. Как представляется, эту идею можно попытаться привлечь для реализации сложной динамики в системах различной природы, даже когда уравнения заведомо не похожи на гидродинамические. В настоящей работе рассмотрена модель из четырех осцилляторов ван дер Поля, в которой генерация хаоса осуществляется благодаря каскадной передаче возбуждения от одного осциллятора к другому с удвоением частоты. В силу медленной принудительной модуляции параметра, отвечающего за возникновение автоколебаний, две пары осцилляторов становятся активными попеременно. В начале каждой новой стадии активности возбуждение осцилляторов со второго по четвертый стимулируется воздействием со стороны осциллятора вдвое меньшей частоты через квадратичный нелинейный элемент. От последнего осциллятора к первому возбуждение передается сигналом, получающимся на квадратичной нелинейности в присутствии вспомогательного гармонического сигнала. Согласно результатам численного исследования, в системе имеет место режим гиперхаоса с двумя положительными показателями Ляпунова.

Ключевые слова: Гиперхаос, связанные осцилляторы, показатели Ляпунова.

Введение

Теоретические представления, лежащие в основе понимания развитой гидродинамической турбулентности, основываются на идее каскадной передачи энергии по спектру от образований, характеризующихся большими пространственно-временными масштабами, к малым масштабам [1,2]. Эта идея с очевидностью носит общий характер и, по-видимому, ее имеет смысл использовать для построения систем различной природы с хаотической динамикой как руководящий принцип даже в ситуациях, когда уравнения не похожи на гидродинамические. Это можно отнести, в частности, к радиотехнике и электронике, для которых генерация хаоса традиционно представляет интерес, в том числе, для маскировки сигналов, шумовой локации, постановки помех, разработки систем скрытой коммуникации.

Недавно был предложен подход к построению генераторов хаоса, основанный на использовании попеременно возбуждающихся осцилляторов, которые передают возбуждение друг другу по очереди, так что последовательность фаз генерируемой последовательности радиоимпульсов описывается хаотическим отображением – растягивающим отображением окружности или отображением Аносова на торе [3–9]. Это позволило представить конкретные примеры физически реализуемых систем с однородно гиперболическими аттракторами. Аналогичные методики были применены для реализации систем, демонстрирующих ряд других феноменов сложной динамики, в частности, грубый странный нехаотический аттрактор, множества Мандельброта и Жюлиа [10,11].

В настоящей работе предлагается и исследуется численно генератор хаоса на основе четырех неавтономных осцилляторов ван дер Поля, функционирование которого обеспечивается каскадной передачей возбуждения от одного осциллятора к другому с последовательным удвоением частоты. Как показывает проведенное численное исследование, в системе в широком диапазоне изменения параметров имеет место режим гиперхаоса [12] с двумя положительными показателями Ляпунова.

1. Основная модель и ее принцип действия

Рассмотрим систему, построенную из четырех осцилляторов ван дер Поля, с рабочими частотами $\omega_0, 2\omega_0, 4\omega_0, 8\omega_0$, как показано на рис. 1. Параметр, управляющий бифуркацией Андронова–Хопфа, в каждом осцилляторе полагаем медленно изменяющимся во времени с амплитудой A и периодом $T = 2\pi/\Omega$, где $\Omega \ll \omega_0$, причем модуляция параметра производится в одной фазе для первого и третьего осцилляторов, и в противоположной фазе для второго и четвертого. Подходящей моделью служит система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (A \cos \Omega t - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon w \cos 7\omega_0 t, \\ \ddot{y} - (-A \cos \Omega t - y^2)\dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2, \\ \ddot{z} - (A \cos \Omega t - z^2)\dot{z} + 16\omega_0^2 z &= \varepsilon y^2, \\ \ddot{w} - (-A \cos \Omega t - w^2)\dot{w} + 64\omega_0^2 w &= \varepsilon z^2, \end{aligned} \tag{1}$$

где переменные x, y, z, w представляют собой обобщенные координаты осцилляторов, соответственно, с первого по четвертый. Считаем, что имеет место соотношение $\omega_0 T = 2\pi N$, где N – целое число, так что неавтономная система уравнений имеет периодические во времени коэффициенты.

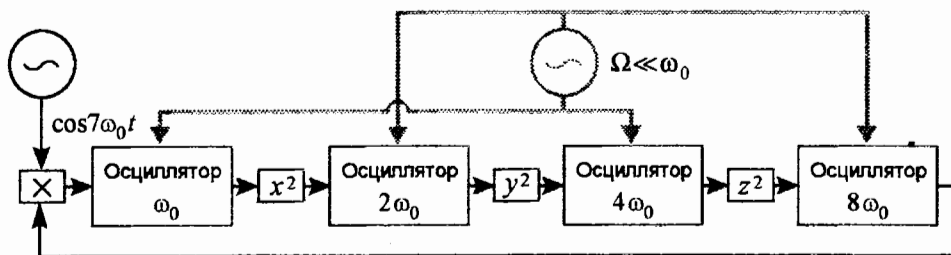


Рис. 1. Блок-схема исследуемой системы

Благодаря принятому способу модуляции параметра, активными по очереди становятся две пары осцилляторов. Стимуляция возбуждения в начале каждой новой стадии активности для второго, третьего и четвертого осцилляторов осуществляется передачей возбуждения от осциллятора вдвое меньшей частоты через квадратичный нелинейный элемент. При этом надо заметить, что преобразование сигнала на квадратичной нелинейности сопровождается появлением второй гармоники, благодаря чему стимуляция носит резонансный характер. При передаче возбуждения величина, определяющая фазовый сдвиг, удваивается. Действительно, при квадратичном преобразовании сигнала $\cos(\omega t + \varphi)$ имеем $\cos^2(\omega t + \varphi) = 1/2 + (1/2) \cos(2\omega t + 2\varphi)$, где надо принимать во внимание только составляющую на второй гармонике, поскольку именно она попадает в резонанс с возбуждаемым осциллятором. От четвертого осциллятора к первому возбуждение передается посредством составляющей разностной частоты, которая получается смешением сигнала на квадратичной нелинейности со вспомогательным сигналом частоты $7\omega_0$. При этом фаза колебаний передается без изменения. В самом деле, $\cos(8\omega_0 t + \theta) \cos 7\omega_0 t = (1/2) \cos(\omega_0 t + \theta) + \dots$, где опущено нерезонансное слагаемое, несущественное с точки зрения стимуляции возбуждения осциллятора с рабочей частотой ω_0 .

Чтобы яснее представить преобразование фаз в процессе функционирования системы, обратимся к таблице. Столбцы таблицы отвечают осцилляторам с первого по четвертый, а строки – последовательным полупериодам медленной модуляции параметра. Начальная строка соответствует стадии активности первого и третьего осцилляторов, характеризующихся фазами φ_0 и θ_0 . Второй и четвертый осцилляторы на этом этапе не активны и не имеют хорошо определенной фазы, так что соответствующие ячейки оставлены пустыми. Они оказываются возбужденными на следующем полупериоде и, как следует из приведенных выше пояснений, получают фазы, соответственно, $2\varphi_0$ и $2\theta_0$ (с точностью до постоянной добавки). Далее процесс повторяется. В таблице для большей ясности приведено несколько строк, отвечающих последовательным шагам преобразования.

Как можно видеть из таблицы, за один период медленной модуляции параметров трансформация фаз двух изначально активных осцилляторов определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= 2\theta_n + \text{const} \pmod{2\pi}, \\ \theta_{n+1} &= 4\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}. \end{aligned} \tag{2}$$

Таблица

Преобразование фаз осцилляторов с номерами 1–4
на последовательных стадиях активности

	1	2	3	4
0	φ_0		θ_0	
1/2		$2\varphi_0 + \text{const}$		$2\theta_0 + \text{const}$
1	$2\theta_0 + \text{const}$		$4\varphi_0 + \text{const}$	
3/2		$4\theta_0 + \text{const}$		$8\varphi_0 + \text{const}$
2	$8\varphi_0 + \text{const}$		$8\theta_0 + \text{const}$	

Иными словами, двумерный вектор $v_n = (\varphi_n, \theta_n)$, компоненты которого определены по модулю 2π , отображается в другой вектор $v_{n+1} = (\varphi_{n+1}, \theta_{n+1})$ такого же типа, то есть имеет место отображение, определенное на двумерном торе. Оно обладает специфическим вырождением, а именно полная последовательность фаз φ_n или θ_n составлена из двух независимых подпоследовательностей, так что в процессе временной эволюции их члены чередуются. Динамика подпоследовательностей хаотическая. За два шага малые возмущения для каждой из них увеличиваются восьмикратно. Поэтому отображение (2) характеризуется присутствием двух одинаковых положительных показателей Ляпунова $\Lambda_{1,2} = (1/2) \ln 8 \approx 1.0397$.

В следующем разделе даны результаты численного решения системы дифференциальных уравнений (1) и продемонстрировано, что при надлежащем выборе параметров поведение модели соответствует приведенным качественным рассуждениям.

2. Численные результаты исследования динамики модели

Для численного решения задачи применялся конечно-разностный метод второго порядка точности.

Расчеты показывают, что ожидаемый тип динамики реализуется в достаточно широком диапазоне изменения параметров. Для детального анализа выбран случай $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\epsilon = 0.6$. На рис. 2 показаны зависимости динамических переменных для четырех осцилляторов от времени. Каждый осциллятор генерирует последовательность радиоимпульсов, следующих друг за другом регулярно через интервал времени T . Частоты заполнения соответствуют рабочей частоте осцилляторов. Хаос выражается в том, что фаза заполнения от импульса к импульсу меняется

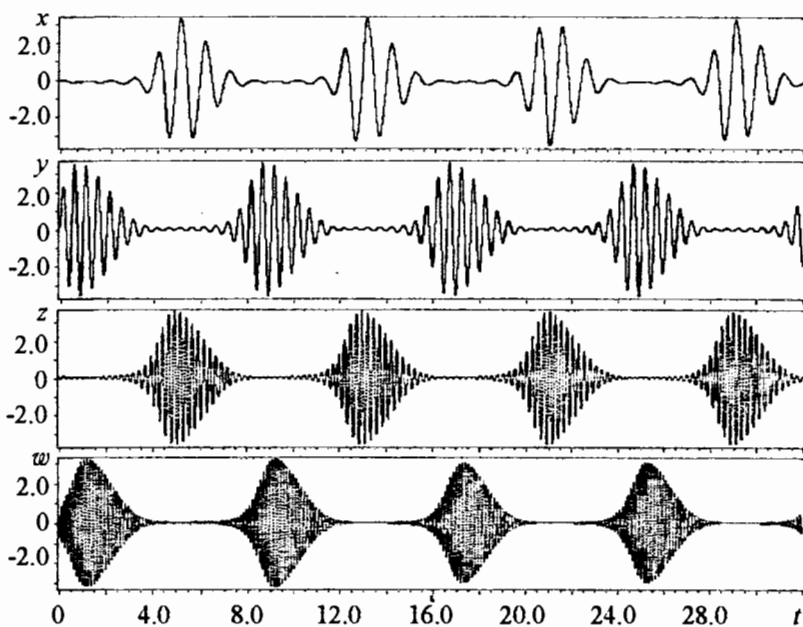


Рис. 2. Зависимости динамических переменных для составляющих систему четырех осцилляторов от времени при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\epsilon = 0.6$

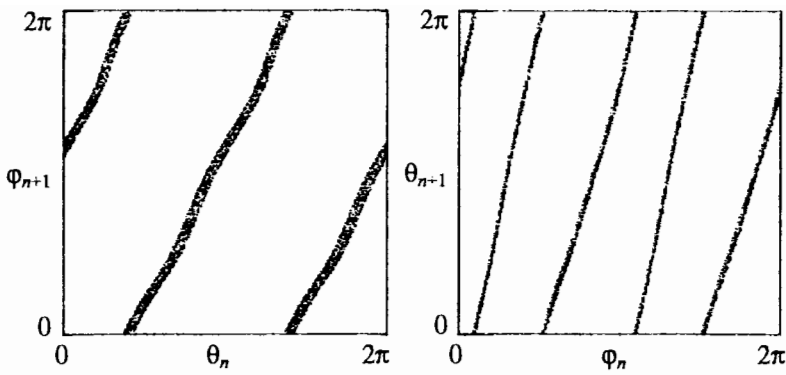


Рис. 3. Итерационные диаграмма для фаз первого и третьего осцилляторов, обозначенных, соответственно, φ_n и θ_n , на последовательных стадиях их активности при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\varepsilon = 0.6$

хаотическим образом. Присутствие хаоса обусловлено описанным выше механизмом передачи фазы между осцилляторами и от предыдущих стадий процесса к последующим.

На рис. 3 показаны итерационные диаграммы для фаз, из которых видно, что их динамика действительно соответствует в известном приближении отображению (2). Фазы, отвечающие каждой очередной стадии активности первого и третьего осциллятора, определяются в момент времени, фиксированный по отношению к сигналу, обеспечивающему медленную модуляцию параметра, по формуле

$$\varphi_n = \begin{cases} \arctan \frac{\dot{x}}{\omega_0 x}, & x > 0, \\ \arctan \frac{\dot{x}}{\omega_0 x} + \pi, & x < 0, \end{cases} \quad \theta_n = \begin{cases} \arctan \frac{\dot{z}}{4\omega_0 z}, & z > 0, \\ \arctan \frac{\dot{z}}{4\omega_0 z} + \pi, & z < 0. \end{cases} \quad (3)$$

На рис. 4 показан портрет аттрактора в проекции из расширенного восьмимерного фазового пространства на фазовую плоскость первого осциллятора (x, \dot{x}). Изображение представлено тонами серого цвета,

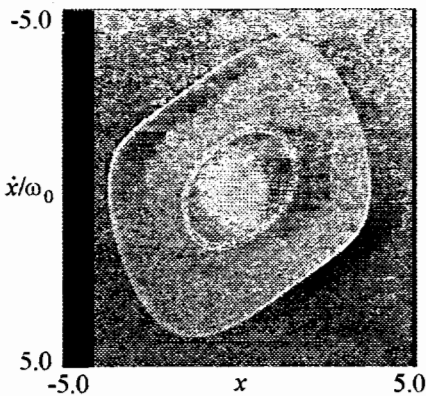


Рис. 4. Аттрактор в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора. Белым цветом выделены точки, отвечающие максимуму значения бифуркационного параметра в первом осцилляторе, которые образуют портрет аттрактора в сечении Пуанкаре

так что более светлые пиксели отвечают относительно большей вероятности пребывания изображающей точки.

Для расчета показателей Ляпунова использовалась реализованная в виде компьютерной программы процедура, осуществляющая выполнение отображения Пуанкаре и вычисление матрицы Якоби. При многократных итерациях этой процедуры отслеживалась эволюция восьми векторов малых возмущений путем их умножения на получаемые в ходе итераций матрицы Якоби. После каждой итерации выполнялась ортогонализация Грама-Шмидта и нормализация для этих восьми векторов [13,14]. Показатели Ляпунова определяются как

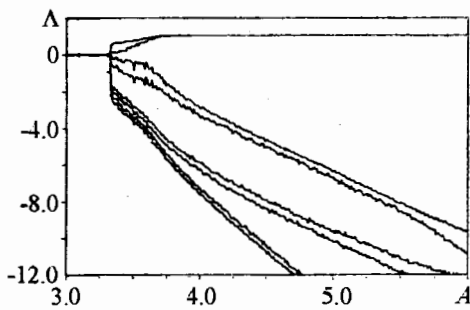


Рис. 5. Зависимость показателей Ляпунова от параметра глубины модуляции A при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $\varepsilon = 0.6$

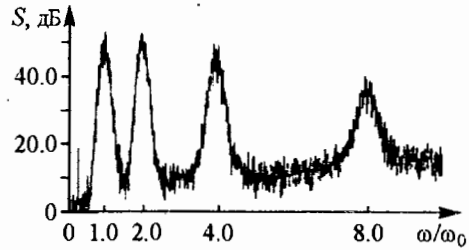


Рис. 6. Спектр мощности сигнала $X = x + y + z + w$, генерируемого системой, при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\varepsilon = 0.6$

средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов норм для векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией).

На рис. 5 показана зависимость показателей Ляпунова от параметра глубины модуляции A при фиксированных остальных параметрах. В широком интервале изменения параметра два наибольших показателя остаются почти постоянными и близкими к $(\ln 8)/2$. В частности, при $A = 4.5$ показатели Ляпунова составляют

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = 1.038, \quad \Lambda_2 = 1.037, \quad \Lambda_3 = -4.622, \quad \Lambda_4 = -5.077, \\ \Lambda_5 = -7.914, \quad \Lambda_6 = -8.403, \quad \Lambda_7 = -10.335, \quad \Lambda_8 = -10.722, \end{aligned} \quad (4)$$

а размерность аттрактора в сечении Пуанкаре, по Каплану–Йорке [14], равна 2.449.

На рис. 6 показан спектр генерируемого системой сигнала, в качестве которого рассматривалась сумма переменных, относящихся ко всем четырем осцилляторам, $X = x + y + z + w$. Для его построения использовался метод статистической оценки спектральной плотности мощности, рекомендуемый в теории случайных процессов [15] и состоящий в разбиении имеющейся реализации на участки конечной протяженности, выполнении преобразования Фурье для каждого участка и последующем усреднении квадратов амплитуд спектральных компонент.

Спектр сплошной, что отражает хаотическую природу динамики на аттракторе. В спектре можно видеть четыре хорошо выраженных пика; максимумы соответствуют частотам четырех составляющих систему осцилляторов. Дискретная составляющая, которую можно видеть в левой части спектра, отвечает частоте медленной периодической модуляции параметров.

Заключение

В настоящей работе введена в рассмотрение неавтономная система из четырех осцилляторов ван дер Поля, генерирующая колебания в виде последовательности импульсов, фаза заполнения которых изменяется хаотически. Интересным принципиальным моментом представляется использование для построения генератора хаоса одной из ключевых идей теории гидродинамической турбулентности – каскадной

передачи энергии по спектру. Аналогия, впрочем, носит скорее качественный и эвристический характер: в данном случае речь идет о передаче возбуждения по цепочке осцилляторов, становящихся активными попеременно, с последовательными удвоениями частоты.

Показано, что в широкой области параметров режим динамики характеризуется присутствием двух положительных показателей Ляпунова, которые близки по величине и слабо зависят от параметров, в то время как остальные шесть показателей отрицательны. Схема с очевидностью допускает реализацию в виде радиотехнического устройства.

Особенность системы состоит в том, что полная частотная полоса генерируемого сигнала довольно велика. Это объясняется наличием совокупности осцилляторов, каждый из которых функционирует в своей полосе частот. Количество осцилляторов в цепочке можно увеличить, что обеспечит дальнейшее расширение частотной полосы генерируемого хаотического сигнала.

Вопрос, является ли аттрактор системы гиперболическим, в данной работе не обсуждается и требует специального исследования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-02-00426), а также Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Программы развития научного потенциала высшей школы (грант № 2.1.1/1738).

Библиографический список

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720с.
3. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
4. Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Vol. 129, № 2. С. 400.
5. Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. Р. 3.
6. Isaeva O.B., Jalnine A.Yu. and Kuznetsov S.P. Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74, 046207.
7. Kuznetsov S.P. and Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica D. 2007. Vol. 232. P. 87.
8. Кузнецов С.П. О реализации некоторых классических моделей и феноменов нелинейной динамики на основе связанных неавтономных осцилляторов // В кн.: Нелинейные волны' 2006 / Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2007. С. 68.

9. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В. Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
10. Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П. О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // ЖТФ. 2007. Т. 77, № 4. С. 10.
11. Кузнецов С.П., Исаева О.Б., Осбалдестин А. Феномены комплексной аналитической динамики в системе связанных неавтономных осцилляторов с поочередным возбуждением // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, вып. 17. С. 69.
12. Rössler O.E. An equation for hyperchaos // Phys. Lett. A. 1979. Vol. 71, № 2–3. С. 155.
13. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9.
14. Kaplan J.L. and Yorke J.A. Lecture Notes in Mathematics 730 (Springer-Verlag, Berlin 1979). P. 204.
15. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы, 1968. 464 с.

СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 15.06.2009
После доработки 4.09.2009

HYPERCHAOS IN MODEL NONAUTONOMOUS SYSTEM WITH A CASCADE EXCITATION TRANSMISSION THROUGH THE SPECTRUM

S.P. Kuznetsov, Y.I. Sokha

One of the key turbulence theory idea is a cascade energy transmission through the spectrum from large to small scales. It appears that this idea could be used for complex dynamics realization in a different-nature systems even when equations are knowingly differ from hydrodynamical. The system of four van der Pol oscillators is considered in this paper. Chaos generation is realized by cascade excitation transmission from one oscillator to another with frequency doubling. Due to slow forced modulation of the parameters responsible for the self-excitation two pair of oscillators become active turn by turn. In the beginning of each new active stage the excitation of oscillators from second to fourth are stimulated by oscillators with the half frequencies through quadratic nonlinear element. Excitation from the last oscillator to the first one is transmitted by the signal accepted via quadratic nonlinearity in the presence of auxiliary harmonic signal. In accordance with the results of numeric investigation the two positive Lyapunov exponents hyperchaos mode takes place.

Keywords: Hyperchaos, coupled oscillator, Lyapunov exponents.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и учебника «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 180 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
им. В.А. Котельникова
E-mail: spkuz@rambler.ru



Соха Юрий Иванович – родился в городе Балаково Саратовской области (1985), окончил Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (2007). В настоящее время – аспирант факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Участник всероссийских школ-конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2003, 2006, 2007, 2009 гг.). Участник конференции молодых ученых «Нанозлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», Саратов. Имеет опубликованные работы в сборниках трудов школы-конференции.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ysokha@yandex.ru