



## ФАЗОВАЯ ДИНАМИКА ВОЗБУЖДАЕМЫХ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

*А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Л.В. Тюрюкина*

В фазовом приближении исследуется синхронизация внешней силой двух связанных фазовых осцилляторов. Рассмотрены и сравниваются режимы, когда автономные осцилляторы демонстрируют захват частот и биений с несоизмеримыми частотами. Представлены карты Ляпунова, обсуждаются возможные типы режимов возбуждаемой системы. Выявлены и классифицированы различные типы двухчастотных торов. Предложена модификация метода карт динамических режимов для определения областей существования различных резонансных двухчастотных торов.

*Ключевые слова:* Синхронизация, фазовые осцилляторы, квазипериодическая динамика.

### Введение

Задача о воздействии гармонического сигнала на систему взаимно связанных автоколебательных осцилляторов является фундаментальной для теории колебаний и нелинейной динамики [1–4]. Она является составной частью еще более фундаментальной проблематики, связанной с рождением и синхронизацией многочастотных квазипериодических колебаний. Соответствующие постановки задач восходят к известному сценарию турбулентности Ландау–Хопфа [5], основанному на «включении» все большего числа квазипериодических составляющих движения при увеличении числа Рейнольдса. Как ни парадоксально, проблема синхронизации квазипериодических колебаний прояснена в меньшей степени, чем синхронизация регулярных и даже хаотических режимов [4]. В последнее время выявлен целый ряд новых аспектов такой задачи [4–11]. Существенный прогресс в понимании картины возникает с использованием уравнения для динамики фаз осцилляторов [10, 11]. Исследование динамики фаз существенно проще, чем анализ исходных уравнений, причем допускает аналитические методы и возможность простых физических интерпретаций [1–3, 11, 12]. В [10, 11] установлены важные особенности устройства плоскости

параметров частота – амплитуда воздействия возбуждаемых связанных фазовых осцилляторов. Найдены область точного захвата фаз осцилляторов внешней силой, области двух и трехчастотных квазипериодических режимов. Указано, что границей между последними являются линии седло-узловых бифуркаций устойчивой и неустойчивых инвариантных кривых, что отвечает аналогичным бифуркациям торов в исходной системе. Однако подробно был рассмотрен только режим, когда автономные осцилляторы демонстрируют взаимную синхронизацию (резонансный цикл на торе). В настоящей работе выявленная в [10,11] картина синхронизации захваченных осцилляторов дополнена. Главная же цель проведенных исследований – анализ механизма синхронизации внешней силой при переходе автономных осцилляторов из режима захвата в квазипериодический режим с несоизмеримыми частотами методом карт показателей Ляпунова. Ниже описаны выявленные в процессе анализа новые типы режимов динамики, характерные именно для случая несоизмеримых частот в автономной системе. Обсуждена классификация двухчастотных торов, позволившая предложить еще один метод анализа таких систем – модификацию метода карт динамических режимов [13] на случай резонансных двухчастотных торов. С его помощью указаны языки различных резонансных двухчастотных торов на плоскости параметров и обсуждены правила их расположения.

## 1. Укороченные и фазовые уравнения

Рассмотрим систему двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, возбуждаемых внешним гармоническим сигналом. Будем считать, что внешнее воздействие возбуждает первый осциллятор, причем частота сигнала  $\omega$  близка к частоте автономных осцилляторов. Система дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие осцилляторов указанного типа, имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + (1 - \Delta/2)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta/2)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\lambda$  – параметр отрицательного трения автономных осцилляторов,  $\Delta$  – их относительная частотная расстройка,  $\mu$  – коэффициент диссипативной связи,  $B$  – амплитуда воздействия, а  $\omega = 1 + \Omega$  – его частота. Центральная частота осцилляторов принята за единицу, так что  $\Omega$  представляет собой отстройку частоты сигнала от центральной.

Применим для анализа уравнений (1) метод медленно меняющихся амплитуд [14–17,1–3]. Условием применимости этого метода является традиционное условие малости параметров, входящих в (1):  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\Delta$ ,  $\Omega$  и  $B$  [14–17]. Представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{i\omega t} + a^*e^{-i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t} + b^*e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  – комплексные амплитуды осцилляторов, медленно меняющиеся на фоне колебаний с частотой сигнала  $\omega$ . Наложим стандартные дополнительные условия

$$\dot{a}e^{i\omega t} + \dot{a}^*e^{-i\omega t} = 0, \quad \dot{b}e^{i\omega t} + \dot{b}^*e^{-i\omega t} = 0.$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i\omega a e^{i\omega t} - i\omega a^* e^{-i\omega t}, \quad \dot{y} = i\omega b e^{i\omega t} - i\omega b^* e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

Подставим соотношения (2), (3) в уравнения (1), умножим полученные выражения на  $e^{-i\omega t}$  и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. При этом удобно представить внешнее воздействие в виде  $B \sin \omega t = B(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i$ . После соответствующих преобразований получаем следующие укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a + i \frac{1 - \omega^2 - \Delta/2}{\omega} a - \mu(a - b) - \frac{B}{2\omega}, \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i \frac{1 - \omega^2 + \Delta/2}{\omega} b - \mu(b - a). \end{aligned}$$

При условии  $\lambda \ll 1$  можно использовать, что  $\omega \approx 1$ , и положить  $(1 - \omega^2 \mp \Delta/2)/2\omega \approx \approx 1 - \omega \mp \Delta/4$  и  $B/\omega \approx B$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a + 2i\delta_1 a - \mu(a - b) - B/2, \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + 2i\delta_2 b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь параметры

$$\delta_{1,2} = \mp \Delta/4 - \Omega \quad (5)$$

имеют смысл отстроек частот первого и второго осцилляторов относительно частоты внешнего сигнала. Действительно, в соответствии с (1), для собственных частот осцилляторов имеем

$$\omega_{1,2} = \sqrt{1 \mp \Delta/2} \approx 1 \mp \Delta/4, \quad (6)$$

так что отстройки собственных частот осцилляторов от центральной  $\Omega_1 = -\Delta/4$  и  $\Omega_2 = +\Delta/4$ .

В уравнениях (4)–(5) управляющий параметр  $\lambda$  может быть убран перенормировкой переменных и параметров

$$a = \sqrt{\lambda} \bar{a}, \quad b = \sqrt{\lambda} \bar{b}, \quad t = \bar{t}/\lambda, \quad \mu = \lambda \bar{\mu}, \quad \Delta = \lambda \bar{\Delta}, \quad \Omega = \lambda \bar{\Omega}, \quad B = \sqrt{\lambda} \bar{B},$$

что приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} 2\dot{\bar{a}} &= \bar{a} - |\bar{a}|^2 \bar{a} + 2i\delta_1 \bar{a} - \bar{\mu}(\bar{a} - \bar{b}) - \bar{B}/2, \\ 2\dot{\bar{b}} &= \bar{b} - |\bar{b}|^2 \bar{b} + 2i\delta_2 \bar{b} - \bar{\mu}(\bar{b} - \bar{a}). \end{aligned} \quad (7)$$

(Для сокращения записи черту над новыми переменными и параметрами опускаем. При этом параметры исходного уравнения будут нормированы на величину малого параметра  $\lambda$ , так что в (7) их можно считать уже не малыми.)

Положим далее  $a = \text{Re}^{i\psi_1}$  и  $b = r e^{i\psi_2}$ , где  $R, r$  и  $\psi_{1,2}$  – действительные амплитуды и фазы осцилляторов относительно внешнего сигнала. Тогда получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{R} &= R - R^3 + \mu(r \cos(\psi_2 - \psi_1) - R) - \frac{B}{2} \cos \psi_1, \\ 2\dot{r} &= r - r^3 + \mu(R \cos(\psi_1 - \psi_2) - r), \\ \dot{\psi}_1 &= \delta_1 + \frac{r}{2R} \mu \sin(\psi_2 - \psi_1) + \frac{B}{4} \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \delta_2 + \frac{R}{2r} \mu \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (8)$$

В уравнениях для фаз осцилляторов (8) вслед за [1–3] считаем, что они движутся в окрестности стационарных орбит  $R = r = 1$ . Тогда получаем

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \delta_1 + (\mu/2) \sin(\psi_2 - \psi_1) + b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \delta_2 + (\mu/2) \sin(\psi_1 - \psi_2),\end{aligned}\tag{9}$$

где  $b = B/4$  – нормированная амплитуда воздействия. Это и есть фазовые уравнения возбуждаемых внешним гармоническим сигналом связанных осцилляторов [10,11]<sup>1</sup>.

Уравнения (9) содержат все основные предельные переходы. Так, если осцилляторы не связаны и  $\mu = 0$ , то

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \delta_1 + b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \delta_2,\end{aligned}\tag{10}$$

и система (9) распадается на классическое фазовое уравнение синхронизации изолированного первого осциллятора [1–3, 12] и уравнение свободных колебаний второго.

Если отсутствует внешнее возбуждение, то, полагая  $b = 0$ , вводя относительную фазу осцилляторов  $\theta = \psi_1 - \psi_2$  и учитывая (5), получаем классическое уравнение Адлера для двух диссипативно связанных осцилляторов [1–3, 12]

$$\dot{\theta} = -\Delta/2 - \mu \sin \theta.\tag{11}$$

Оно описывает возможность захвата относительной фазы осцилляторов при  $|\Delta| < 2\mu$  и режима биений при  $|\Delta| > 2\mu$ . В режиме захвата скорость изменения относительной фазы равна нулю  $\dot{\theta} = 0$ . Это позволяет вычислить частоту захваченных колебаний. Действительно, из (9), (11) и (5) в этом случае находим

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = -\Omega.\tag{12}$$

С другой стороны, в соответствии с (1) наблюдаемая частота связана со скоростями изменения фаз соотношением

$$\omega_{1,2} = \omega + \dot{\psi}_{1,2},$$

так что  $\omega_{1,2} = \omega - \Omega = 1$ . Таким образом, автономные осцилляторы захватываются точно на центральной частоте.

## 2. Условия полной синхронизации осцилляторов внешней силой

Перейдем теперь к обсуждению описываемой уравнениями (9) динамики возбуждаемых внешним сигналом связанных осцилляторов. С этой целью изучим устройство традиционной для неавтономных систем плоскости параметров частота – амплитуда воздействия  $(\Omega, b)$ . При этом собственные параметры осцилляторов – взаимная частотная расстройка  $\Delta$  и величина связи  $\mu$  – будут фиксированы.

<sup>1</sup>Заметим, что они фактически эквиваленты [10, 11], но благодаря условию  $\omega \approx 1$  представлены в форме, более удобной для анализа и обсуждения типов динамики в пространстве параметров.

Сначала укажем область полной синхронизации осцилляторов [10, 11]. Условие точного захвата фаз обоих осцилляторов  $\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_1 = 0$  с учетом (5) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} -\Omega - \Delta/4 + (\mu/2) \sin(\psi_2 - \psi_1) + b \sin \psi_1 &= 0, \\ -\Omega + \Delta/4 + (\mu/2) \sin(\psi_1 - \psi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Исключим из первого из них  $\sin(\psi_2 - \psi_1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2\Omega &= b \sin \psi_1, \\ \Omega - \Delta/4 &= (\mu/2) \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда легко получаем условия седло-узловых бифуркаций, определяющих границы области полной синхронизации

$$b = \pm 2\Omega, \quad (15)$$

$$\Omega = \Delta/4 \pm \mu/2. \quad (16)$$

Условие (15) задает на плоскости  $(\Omega, b)$  классический по форме язык синхронизации, показанный на рис. 1. Он имеет основанием точку  $\Omega = 0$ , отвечающую частоте захвата автономных осцилляторов. Условие (16) дополняет (15) и определяет частотную ширину полосы режима захвата осцилляторов внешней силой. Центр этой полосы лежит на собственной частоте второго осциллятора  $\Omega_2 = \Delta/4$ , а сама она имеет ширину, равную константе связи  $\mu$ .

Область полной синхронизации системы осцилляторов внешней силой соответствует пересечению областей, границы которых заданы условиями (15,16). Она показана на рис. 1 темным цветом.

Нетрудно понять, что возможны два типа области полной синхронизации, показанные соответственно на рис. 1, *a* и *б*. Первая имеет место, если левая граница полосы (16) проходит левее вершины языка  $\Omega = 0$ . Тогда из (15), (16) следует, что она реализуется при  $|\Delta| < 2\mu$ , а вторая – при  $|\Delta| > 2\mu$ . Эти неравенства соответствуют условиям захвата и режима биений автономных связанных осцилляторов [1–3]. Таким образом, первый тип устройства области полной синхронизации отвечает ситуации, когда в отсутствие внешнего сигнала осцилляторы взаимно захвачены, а второй – когда они совершают квазипериодические колебания с несоизмеримыми частотами.

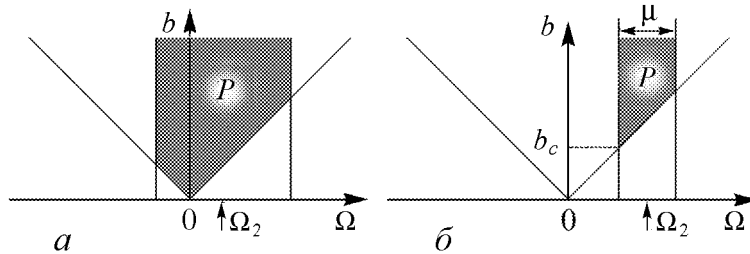


Рис. 1. Область точного захвата  $P$  (серый цвет) и биений (белый цвет) системы (9): *a* – взаимная синхронизация автономных осцилляторов, *б* – режим биений автономных осцилляторов.  $\Omega_2$  – собственная частота второго осциллятора,  $b_c$  – амплитудный порог синхронизации квазипериодических колебаний,  $\mu$  – величина связи

Из сравнения рис. 1, *a* и *б* видно, что внешний сигнал может точно захватить не только синхронизованные между собой осцилляторы, но и осцилляторы, совершающие квазипериодические колебания. При этом однако режим полной синхронизации квазипериодических колебаний носит пороговый характер по амплитуде. Из (15), (16) легко находим этот порог

$$b_c = \Delta/2 - 2\mu. \quad (17)$$

Как будет показано ниже, отличия этих двух случаев еще более существенны.

### 3. Режим захвата автономных осцилляторов

Перейдем к более детальному обсуждению устройства плоскости частота – амплитуда воздействия системы возбуждаемых фазовых осцилляторов (9), привлекая для анализа численные методы. На рис. 2 показаны полученные численно плоскости параметров  $(\Omega, b)$ . При этом рис. 2, *a* отвечает случаю, когда автономные осцилляторы захвачены, рис. 2, *б* – пороговой ситуации  $\Delta = 2\mu$ , а рис. 2, *в* – когда они демонстрируют режим биений.

«Техника» построения рис. 2 была следующая. Сначала вычислялись оба показателя Ляпунова системы (9)  $\Lambda_1, \Lambda_2$  в каждой точке плоскости параметров. Затем эта плоскость окрашивалась в соответствии с величиной показателей так, чтобы визуализировать следующие режимы:

- а)  $P$  – наличие устойчивой неподвижной точки (точный захват фаз),  $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0$ ,
- б)  $T_2$  – режим с одним нулевым показателем Ляпунова,  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$ ,
- в)  $T_3$  – режим с двумя нулевыми показателями Ляпунова,  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$ .

Карты показателей Ляпунова могут быть дополнены фазовыми портретами системы на плоскости  $(\psi_1, \psi_2)$  фаз осцилляторов, примеры которых даны на рис. 3.

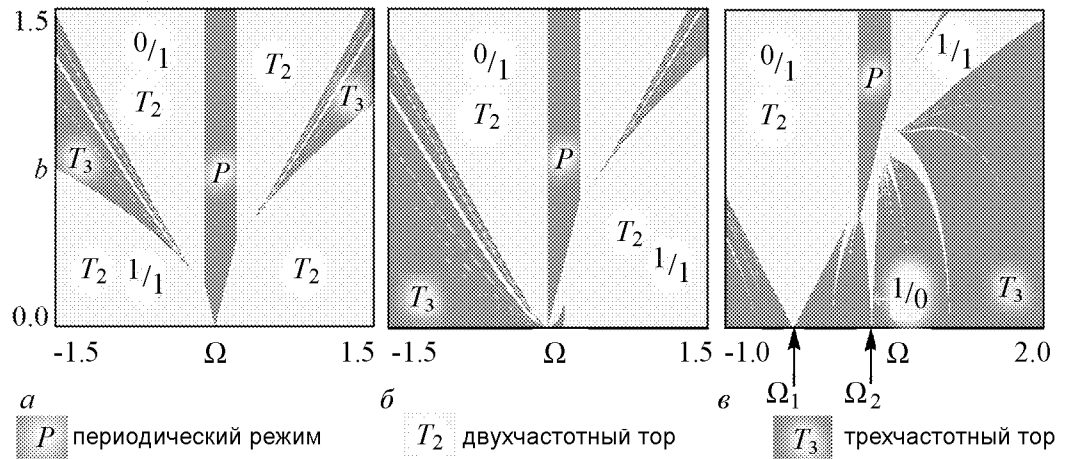


Рис. 2. Карты Ляпунова системы (9) для случаев: *a* – режим захвата автономных осцилляторов,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 0.2$ ; *б* – пороговая ситуация,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 0.6$ ; *в* – режим биений автономных осцилляторов,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 1.6$ .  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – собственные частоты первого и второго осцилляторов

На этом рисунке аттракторы показаны черным цветом, а некоторые фазовые траектории – серым.

Начнем обсуждение результатов численного исследования со случая захвата автономных осцилляторов. На рис. 2, *a* область  $P$  отвечает приведенному выше аналитическому рассмотрению. В этой области в системе имеется три неустойчивых и одна устойчивая неподвижная точка, которая и определяет режим полного захвата связанных осцилляторов. Соответствующий фазовый портрет приведен на рис. 3, *a*.

В областях  $T_2$  притягивающей является инвариантная кривая. Примеры соответствующих фазовых портретов даны на рис. 3, *б, в*. В области  $T_3$  реализуется поток фазовых траекторий и притягивающего объекта нет (рис. 3, *г*).

Для удобства дальнейшего анализа двух- и трехчастотных режимов, описываемых фазовым уравнением, целесообразно ввести следующие пояснения. Режиму  $T_2$  в исходной системе (1) отвечают двухчастотные квазипериодические колебания, фазовым портретом которых является двухчастотный тор. Режиму  $T_3$  в исходной системе отвечают трехчастотные квазипериодические колебания, фазовым портретом которых является трехчастотный тор.

Построение фазовых портретов выявляет два основных типа режимов двухчастотных торов, реализующихся в системе.

а) Рис. 3, *б*. В этом случае в установившемся режиме фаза первого осциллятора  $\psi_1$  колеблется около некоторого стационарного значения, в то время как фаза второго –  $\psi_2$  неограниченно нарастает. Этот режим можно охарактеризовать, как частичный захват первого осциллятора внешней силой.

б) Рис. 3, *в*. В этом случае неограниченно дрейфуют фазы обоих осцилляторов, однако относительная фаза осцилляторов  $\theta = \psi_1 - \psi_2$  колеблется около стационарного значения. Это режим частичного захвата относительной фазы осцилляторов.

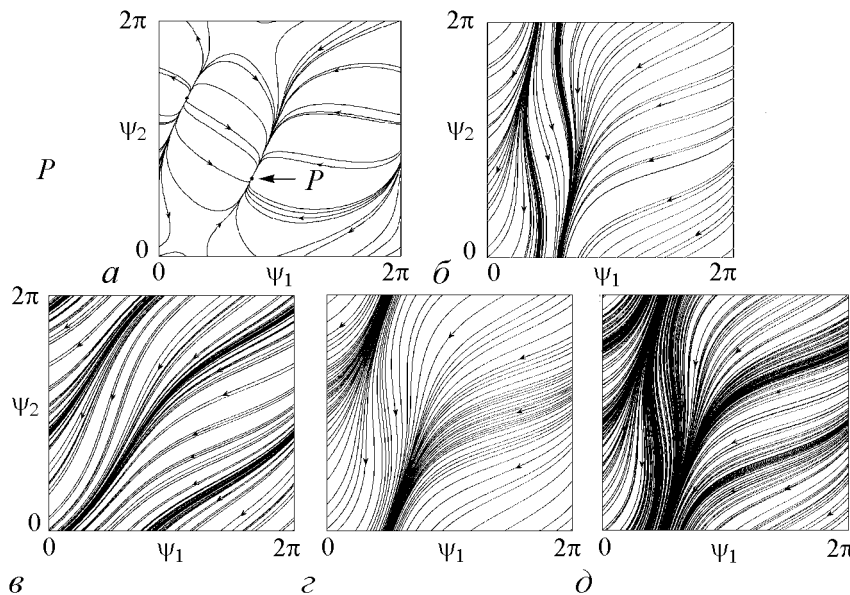


Рис. 3. Фазовые портреты возбуждаемой системы (9) в режиме захвата автономных осцилляторов,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 0.2$ : *a* – полный захват обоих осцилляторов,  $P$  – устойчивая неподвижная точка,  $\Omega = 0.1$ ,  $b = 0.3$ ; *б* – частичный захват фазы первого осциллятора,  $\Omega = 0.75$ ,  $b = 0.9$ ; *в* – частичный захват относительной фазы осцилляторов  $\Omega = 0.75$ ,  $b = 0.4$ ; *г* – трехчастотный тор,  $\Omega = 0.75$ ,  $b = 0.75$ ; *д* – резонансный двухчастотный тор  $w = 1/2$ ,  $\Omega = 0.75$ ,  $b = 0.79$

Режимы двухчастотных торов удобно обозначать отношением  $w = p/q$ , где числа  $p$  и  $q$  отвечают количеству пересечений инвариантной кривой с вертикальной и горизонтальной стороной фазового квадрата. Тогда первый из указанных режимов имеет тип  $0/1$ , а второй –  $1/1$ . На плоскости  $(\Omega, b)$  на рис. 2,  $a$  располагаются характерные бифуркационные точки коразмерности два

$$b = \Delta/2 \pm \mu, \quad \Omega = \Delta/4 \pm \mu/2, \quad (18)$$

в которых сходятся области двухчастотных торов, трехчастотных торов и периодических режимов. Их можно назвать точками рождения торов<sup>2</sup>. Они определяют пороговый уровень амплитуды сигнала, при котором становятся возможными трехчастотные режимы. Выходящие из этих точек языки трехчастотных торов  $T_3$  делят область двухчастотных торов на две характерные области.

Первая из них располагается в области больших амплитуд. Внутри нее имеет место режим частичного захвата первого осциллятора  $1/1$ . При этом картина в качественном отношении симметрична – указанные режимы реализуются как слева, так и справа от области полной синхронизации.

Физическая картина появления двух таких режимов понятна – маленькая внешняя сила не способна разрушить сильный захват автономных осцилляторов, но может синхронизовать их как единое целое. Если же амплитуда воздействия велика, то взаимная синхронизация разрушается, и внешняя сила захватывает непосредственно возбуждаемый первый осциллятор. Следует отметить, что отсутствует (по крайней мере, на визуальном уровне) возможность частичного захвата второго осциллятора – он может захватываться внешней силой только точно и одновременно с первым внутри области  $P$ .

Численное построение карт Ляпунова выявляет и другие режимы рассматриваемой системы. Внутри области  $T_3$  на рис. 2,  $a$  видны очень узкие полосы (языки), в которых также реализуются двухчастотные торы. Это *резонансные торы более высокого порядка*, лежащие на поверхности соответствующего трехмерного тора. О резонансном характере этих торов можно судить по примеру фазового портрета на рис. 3,  $e$ , отвечающего самому широкому языку. Видно, что когда фаза первого осциллятора набегает на  $2\pi$ , фаза второго набегает на  $4\pi$ , так что это тор типа  $1/2$ .

#### 4. Точка перехода от захвата к квазипериодической динамике

Увеличим теперь взаимную частотную расстройку осцилляторов  $\Delta$ . При этом будет наблюдаться переход от режима захвата автономных осцилляторов к режиму биений. Карта показателей Ляпунова для порогового значения  $\Delta = 2\mu$  показана на рис. 2,  $b$ . Сравнивая его с рис. 2,  $a$ , заключаем, что произошли заметные изменения. Левая точка рождения торов «влипает» в основание (острие) языка синхронизации, что свидетельствует о возникновении *новой ситуации коразмерности три*. В области частот, меньших центральной частоты автономных осцилляторов  $\Omega < 0$ , область трехчастотных торов не имеет амплитудного порога. Это означает, что трехчастотные режимы могут возникать при сколь угодно малой величине внешнего сигнала.

<sup>2</sup>С позиций теории бифуркаций в указанных точках сходятся две линии седло-узловых бифуркаций неподвижных точек (15), (16) и две линии седло-узловых бифуркаций инвариантных кривых [10,11]. Заметим, что аналогичная точка для связанных отображений поворота в [18] названа *saddle node fan* – «седло-узловой веер». Название обусловлено характерным расположением расходящихся от этой точки областей резонансных двухчастотных торов высшего порядка.



Полосы двухчастотных резонансных торов более высокого порядка все еще достаточно узкие, но ширина их немного увеличилась. Теперь области их существования подходят к основанию языка  $\Omega = 0$ , а значит, соответствующие резонансные торы могут наблюдаться при малых амплитудах сигнала.

В высокочастотной области  $\Omega > 0$  изменения менее заметны, они имеют место лишь в окрестности острия языка синхронизации, где возникла небольшая область трехчастотных торов.

### 5. Случай режима биений автономных осцилляторов

Увеличим расстройку осцилляторов еще больше и перейдем в режим биений автономных осцилляторов. Соответствующая карта приведена на рис. 2, *в*.

Можно видеть область  $P$  точного захвата обоих осцилляторов внешней силой, соответствующую рис. 1, *б*. Теперь точный захват возможен в окрестности собственной частоты второго осциллятора, равной при выбранных значениях параметров  $\Omega_2 = \Delta/4 = 0.4$ . Область полной синхронизации имеет пороговый по амплитуде характер, величина которого определяется формулой (17).

Существенно изменились области трехчастотных торов. Амплитудный порог возникновения таких торов исчез и в высокочастотной области. Таким образом, трехчастотные торы занимают всю нижнюю часть плоскости параметров частота – амплитуда воздействия. Область частичного захвата первого осциллятора  $w = 0/1$  приобрела вид традиционного языка, погруженного в область трехчастотных торов. Острие языка отвечает собственной частоте первого осциллятора  $\Omega_1 = -\Delta/4$ . Эта область вытесняет режимы синхронизации относительной фазы.

Особенностью рассматриваемого режима является возможность двухчастотного тора типа  $1/0$ , фазовый портрет которого показан на рис. 4, *а*. В этом случае фаза второго осциллятора  $\psi_2$  совершает колебания, в то время как фаза первого  $\psi_1$  неограниченно нарастает, то есть реализуется режим *частичного захвата второго осциллятора*. Область существования этого режима имеет вид языка, который при уменьшении амплитуды сигнала продолжает область точного захвата  $P$ , а острие располагается на оси частот в точке собственной частоты второго осциллятора  $\Omega_2 = \Delta/4$ .

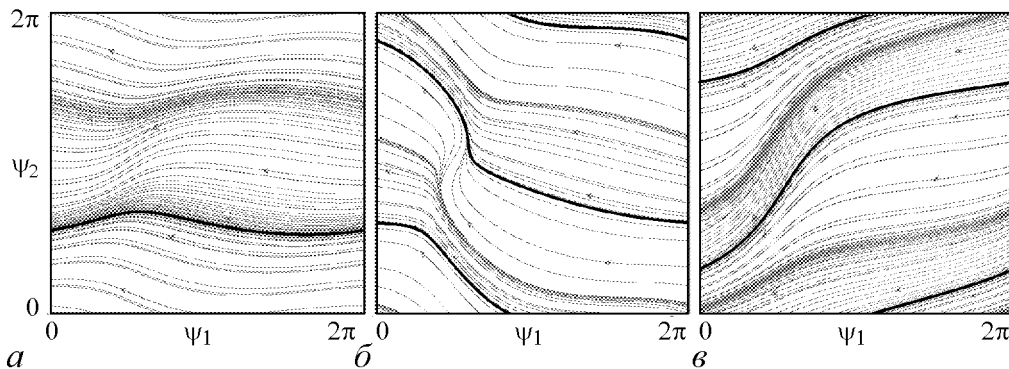


Рис. 4. Фазовые портреты возбуждаемой системы (9) в режиме биений автономных осцилляторов,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 1.6$ : *а* – частичный захват фазы второго осциллятора,  $\Omega = 0.35$ ,  $b = 0.45$ ; *б* – резонансный двухчастотный тор  $w = 2/1$ ,  $\Omega = 0.22$ ,  $b = 0.41$ ; *в* – резонансный двухчастотный тор  $w = 2/1$ ,  $\Omega = 0.8$ ,  $b = 0.77$

Таким образом, в рассматриваемом случае возможен частичный захват второго осциллятора, непосредственно не возбуждаемого внешней силой, и даже при малой амплитуде сигнала. Это существенное отличие от случая, когда автономные осцилляторы демонстрируют взаимный захват. Связь осцилляторов при этом сильная, и при воздействии на частоте  $\Omega \approx \Omega_2$  при малых амплитудах сигнала возможен только режим захвата относительной фазы. Если же частотная расстройка осцилляторов велика настолько, что автономные осцилляторы переходят в режим квазипериодических колебаний, то первый осциллятор не оказывает столь сильного воздействия на второй. При этом внешняя сила способна захватить второй осциллятор на фоне фазового дрейфа первого.

Режим частичного захвата относительной фазы осцилляторов  $w = 1/1$  сохраняется, но ему теперь отвечают две существенно неравноценные по размеру области. При  $\Omega > 0$  первая из них на рис. 2, *в* отделена от оси частот широкой областью трехчастотных торов. Второй области такого режима соответствует очень узкий язык с вершиной при  $\Omega = 0$ .

Имеется также множество языков других резонансных двухчастотных торов с основаниями на оси частот, погруженных в область трехчастотного режима. В качестве примера на рис. 4, *б* и *в* показаны фазовые портреты двух режимов, для которых  $w = 2/1$ . Для них при набеге фазы второго осциллятора на  $2\pi$  фаза первого набегает на  $4\pi$ . Устройство этой системы языков обсуждается ниже.

## 6. Классификация двухчастотных торов и карта торов

Проведенное обсуждение показало, что в системе могут наблюдаться различные типы двухчастотных торов. Как отмечалось, их удобно классифицировать по числам  $p$  и  $q$  пересечений инвариантной кривой с вертикальной и горизонтальной сторонами фазового квадрата  $(\psi_1, \psi_2)$ . Этой классификации соответствует простая геометрическая интерпретация. Действительно, переменные в уравнениях (9) являются фазами осцилляторов, что позволяет фазовую плоскость  $(\psi_1, \psi_2)$  периодически продолжать с периодом  $2\pi$  по каждой из них. Это можно проиллюстрировать, трансформируя фазовый квадрат в тор, «склеивая» его дважды, как показано на рис. 5 [19, 20]. Тогда инвариантные кривые превращаются в замкнутые орбиты на поверхности «тора фаз». Каждой из них соответствует число вращения  $w = p/q$ , где  $p$  – число оборотов по поверхности тора по параллели, а  $q$  – по меридиану.

Так, кривая  $C$  на рис. 5, отвечающая частичному захвату первого осциллятора, трансформируется в замкнутую кривую, обходящую тор только по меридиану. Для нее число вращения  $w = 0/1$ . Кривая  $C'$ , соответствующая частичному захвату относительной фазы осцилляторов, делает по одному обороту по меридиану и по параллели. Для нее число вращения  $w = 1/1$ . Режим частичного захвата второго осциллятора описывается кривой, огибающей тор только по параллели, и для него  $w = 1/0$ .

Инвариантная кривая для двухчастотного резонансного тора более высокого порядка с числом вращения  $w = 1/2$  показана на рис. 6, *а*. Трехчастотному тору в исходной системе в такой интерпретации будет соответствовать «фазовый» эргодический тор, как показано на рис. 6, *б*. Фазовая траектория кривая всюду плотно покрывает его поверхность.

Указанная интерпретация позволяет предложить еще один способ численного исследования устройства пространства параметров фазовой системы (9), модифици-

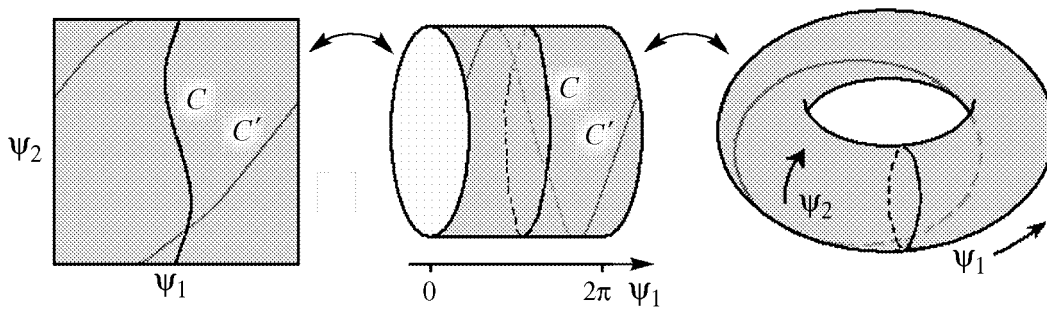


Рис. 5. Качественная картина замыкания плоскости фазовых переменных  $(\psi_1, \psi_2)$  в тор. Показаны инвариантные кривые  $C$  и  $C'$ , отвечающие простейшим двухчастотным торам с числами вращения  $0/1$  и  $1/1$

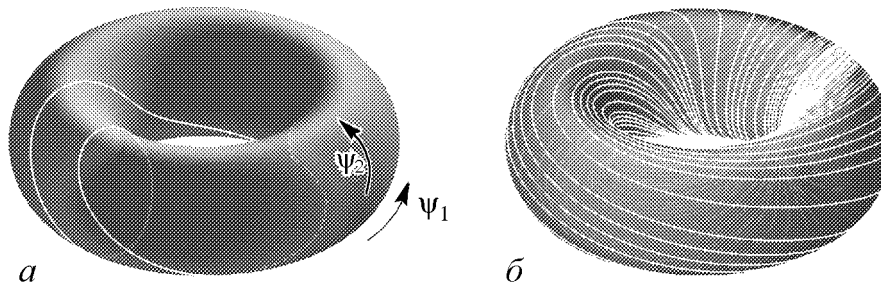


Рис. 6. Траектории на «фазовом торе»:  $a$  – резонансный двухчастотный тор с числом вращения  $w = 1/2$ ,  $b$  – трехчастотный тор. Параметры соответствуют рис. 3,  $d$  и  $e$

руя для данной задачи метод карт динамических режимов [13]. Фиксируем сначала точку на плоскости параметров  $(\Omega, b)$ . Решаем затем численно систему (9) для этих значений параметров и находим установившийся режим. Задавшись координатами пересечения установившейся траектории с одной из сторон фазового квадрата, определяем период устойчивого режима по возврату траектории обратно в эту точку (с определенным малым допуском). Определяем на периоде этого режима числа пересечений фазовой траектории с границами фазового квадрата:  $p$  с левой и правой сторонами и  $q$  – с верхней и нижней. Затем окрашиваем точку плоскости параметров в определенный цвет, свой для каждого типа двухчастотного тора. Трехчастотные торы фиксируются как неперiodические режимы. После этого выполняем аналогичную процедуру в каждой точке плоскости параметров. Начальные условия во всех расчетах выбирались нулевыми:  $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$ .

Следует иметь в виду однако, что числа  $p$  и  $q$ , определяющие число вращения, совпадают с числом пересечений притягивающей кривой сторон фазового квадрата только для простейших двухчастотных торов. В случае торов высокого порядка фаза может совершать колебательные движения, что приводит к «ложным» пересечениям, которые учитывать не нужно. Примером может служить инвариантная кривая, показанная на рис. 7,  $a$ . В этом случае кривая пересекает нижнюю границу фазового квадрата, появляется у верхней границы, затем возвращается назад, вновь пересекает верхнюю границу и т.д. В этом случае  $q = 1$ , что легко понять, если провести мысленно горизонтальное сечение на рис. 7,  $a$  не при  $\psi_2 = 0$ , а при  $\psi_2 = \pi$ , например.

Таким образом, принимая во внимание отождествление правой/левой и верхней/нижней сторон фазового квадрата, получаем следующее правило суммирования:

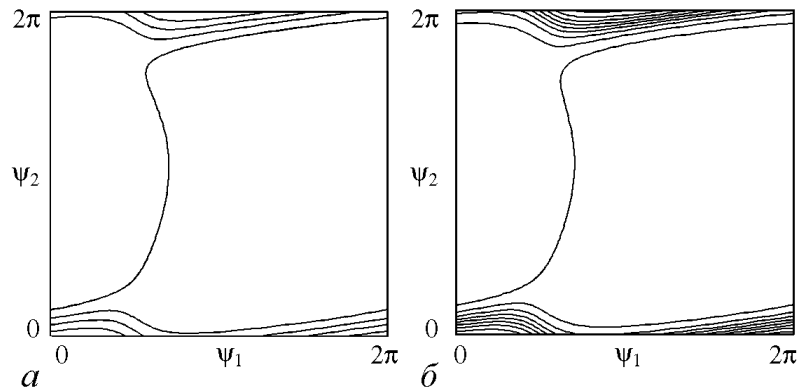


Рис. 7. Притягивающие инвариантные кривые на фазовой плоскости, отвечающие двухчастотным торам с числами вращения  $w$ : (а) –  $5/1$ , (б) –  $10/1$ . Параметры автономных осцилляторов  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 1.6$

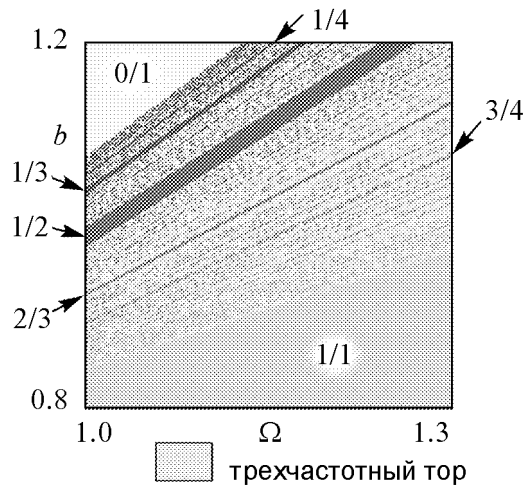


Рис. 8. Карта торов системы (9) в режиме захвата автономных осцилляторов, демонстрирующая сложное устройство области трехчастотных торов,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 0.2$

если траектория покидает фазовый квадрат через верхнюю границу и снова входит в него через нижнюю, значение  $p$  увеличивается на единицу, а если наоборот – уменьшается. Точно так же, если траектория покидает фазовый квадрат через правую границу и снова входит в него через левую, значение  $q$  увеличивается на единицу, а если наоборот – уменьшается. Окончательно имеем число вращения  $|p|/|q|$ .

Для построения карт используем наиболее интересные увеличенные фрагменты рис. 2. Так, на рис. 8 представлен фрагмент, иллюстрирующий устройство области трехчастотных торов в режиме захвата автономных осцилляторов. Режимы двухчастотных торов с разными числами вращения обозначены оттенками серого цвета, основные из них подписаны на рисунке. Области трехчастотных торов показаны более светлым оттенком серого, который для удобства восприятия дан под рисунком. На рисунке можно видеть многочисленные области различных двухчастотных торов, проходящих «веером» сквозь область трехчастотных. При этом число вращения языков резонансных торов монотонно уменьшается при пересечении области трехчастотных торов снизу вверх. Наиболее широкое окно отвечает числу вращения  $w = 1/2$ .

На рис. 9 показана карта торов, отвечающая режиму биений автономных осцилляторов. Числа вращения некоторых основных языков указаны стрелками. Отметим наиболее существенные моменты в организации языков резонансных двухчастотных торов в режиме биений автономных осцилляторов. Самый широкий язык  $w = 0/1$  соответствует частичному захвату первого осциллятора, а его вершина располагается на собственной частоте этого осциллятора  $\Omega = \Omega_1 = -\Delta/4$ . Язык  $w = 1/0$ , отвечающий частичному захвату второго осциллятора, продолжает область полного захвата осцилляторов. Его основание, как отмечалось, определяется

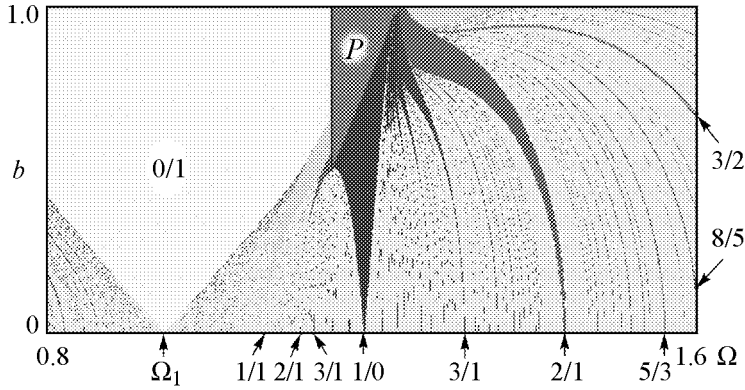


Рис. 9. Карта торов системы (9) в режиме биений автономных осцилляторов,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 1.6$ . Указаны числа вращения некоторых резонансных двухчастотных торов

собственной частотой второго осциллятора  $\Omega = \Omega_2 = \Delta/4$ . В свою очередь, точка  $\Omega = \Omega_2$  является центром целой системы языков двухчастотных торов более высокого порядка. При этом языки образуют пары с одинаковыми числами вращения, располагающиеся по разные стороны языка  $w = 1/0$ . Это хорошо видно на примере двух наиболее широких языков  $w = 2/1$ . Фазовые портреты для них показаны на рис. 4, б и в. Можно видеть, что они отличаются наклоном инвариантных кривых в противоположные стороны. Кроме того, поток фазовых траекторий направлен в разные стороны: справа налево и снизу вверх на рис. 4, б и слева направо и снизу вверх на рис. 4, в<sup>3</sup>.

Установим правило расположения оснований языков двухчастотных торов на оси частот. Пусть связь осцилляторов и амплитуда сигнала исчезающе малы. Тогда уравнения (9) описывают простое вращение осцилляторов с частотами

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\Delta/4 - \Omega, \\ \dot{\psi}_2 &= \Delta/4 - \Omega.\end{aligned}\tag{19}$$

Резонансу порядка  $w = p/q$  соответствует условие  $p/q = \pm\dot{\psi}_1/\dot{\psi}_2$ . Тогда из (19) следует, что

$$\Omega = \frac{p+q}{p-q}\Omega_2, \quad \text{или} \quad \Omega = \frac{p-q}{p+q}\Omega_2.\tag{20}$$

Здесь  $\Omega_2 = \Delta/4$  – собственная частота второго осциллятора.

В таблице приведены полученные с помощью (20) координаты острий некоторых основных языков двухчастотных торов. Нетрудно видеть, что карта на рис. 9 находится в хорошем соответствии с данной таблицей.

Как следует из таблицы, пары значений частот  $\Omega$  для одного числа вращения соответствуют двум разным знакам в соотношении  $p/q = \pm\dot{\psi}_1/\dot{\psi}_2$ . Поэтому для каждой пары потоки фазовых траекторий оказываются разнонаправленными, что отмечалось выше при обсуждении фазовых портретов на рис. 4, б, в.

<sup>3</sup>Отметим, что возможность разных направлений потока фазовых траекторий создает некоторый дополнительный момент, который необходимо учитывать при построении карты торов. Действительно, для традиционного сечения Пуанкаре выбираются только те траектории, которые пересекают это сечение в одном направлении [13,16]. В случае фазовых переменных необходимо учитывать возможность смены направления потока траекторий.

Таблица

|                                 |                     |              |                          |                          |                          |
|---------------------------------|---------------------|--------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $w = 0/1$                       | $w = 1/0$           | $w = 1/1$    | $w = 2/1$                | $w = 3/1$                | $w = 3/2$                |
| $\Omega = -\Omega_2 = \Omega_1$ | $\Omega = \Omega_2$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 3\Omega_2$     | $\Omega = (1/3)\Omega_2$ | $\Omega = 2\Omega_2$     |
|                                 |                     |              | $\Omega = (1/2)\Omega_2$ | $\Omega = 5\Omega_2$     | $\Omega = (1/5)\Omega_2$ |

Как следует из рис. 9, наиболее сложно устроена нижняя граница области полной синхронизации. На рис. 10 показана карта, демонстрирующая соответствующую область в увеличенном виде, на которой наблюдается множество языков двухчастотных торов разного порядка. Отметим, что в случае захвата автономных осцилляторов протяженный «контакт» с областью полной синхронизации имеют только режимы двухчастотных торов с числами вращения  $w = 0/1$  и  $1/1$  (рис. 2, а). В случае режима биений автономных осцилляторов при выходе за пределы области полной синхронизации наблюдаются существенно более разнообразные типы двухчастотных торов (рис. 10). Отметим также появление семейства достаточно широких языков двухчастотных торов типа  $2/1$ ,  $3/1$ ,  $4/1$  и т.д. На рис. 7 показаны фазовые портреты инвариантных кривых, принадлежащих этому семейству торов с числами вращения  $5/1$  и  $10/1$ .

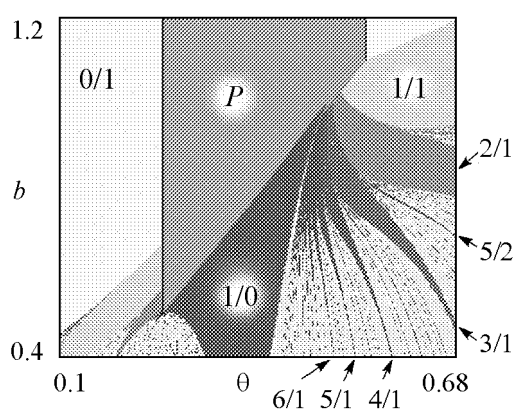


Рис. 10. Нижняя граница области полной синхронизации внешней силой в режиме биений автономных осцилляторов,  $\mu = 0.3$  и  $\Delta = 1.6$

### Заключение

При анализе синхронизации двухчастотных колебаний внешней силой следует различать случаи захвата и биений колебаний автономных осцилляторов с несоизмеримыми частотами. В первом случае доминируют режимы полного захвата двух осцилляторов внешней силой, режимы частичного захвата относительной фазы осцилляторов и частичного захвата первого осциллятора. Возникновение трехчастотных торов имеет пороговый характер по амплитуде сигнала. В режиме биений автономных осцилляторов так же возможен одновременный точный захват фаз обоих осцилляторов внешней силой, однако этот эффект носит пороговый по амплитуде характер. При уменьшении амплитуды становится возможным режим частичного захвата второго осциллятора. Соответствующая область на плоскости параметров частота – амплитуда сигнала имеет вид языка, который окружен системой языков резонансных двухчастотных торов более высокого порядка. Амплитудный порог возбуждения режимов трехчастотных торов исчезает, и они становятся более типичными.

Эффективным методом анализа фазовых уравнений, описывающих возбуждение квазипериодических осцилляторов внешней силой, служит метод карт Ляпунова

и модификация метода карт динамических режимов. В рамках последнего плоскость параметров окрашивается в различные цвета в соответствии с числом вращения, которое можно приписать каждому резонансному двухчастотному тору. Рассмотренные методы применимы для анализа других аналогичных систем.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09–02–00426 и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.*

## Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
4. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
5. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 8. С. 339.
6. Hopf E. A mathematical example displaying the features of turbulence // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1948. Vol. 1. P. 303.
7. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Chaos. 2008. Vol. 18. 037123.
8. Анищенко В.С., Николаев С.М. Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. 2008. Т.4, №1. С.39.
9. Анищенко В.С., Николаев С.М. Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 2. С. 69.
10. Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
11. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
12. Scholarpedia. Phase model. [http://www.scholarpedia.org/article/Phase\\_model/](http://www.scholarpedia.org/article/Phase_model/)
13. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
14. Van der Pol B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibration // Radio Review. 1920. Vol. 1. P. 701.
15. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1958. 406 с.
16. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Ю. Теория колебаний. 2-е изд. М: Физматгиз, 1959. 916 с.
17. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
18. Арнольд В.И., Ильясенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 5. 2000. 149 с.

19. *Keith W.L., Rand R.H.* 1/1 and 2/1 phase entrainment in a system of two coupled limit cycle oscillators // *Journal of Mathematical Biology*. 1984. Vol. 20. P. 133.
20. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S. and MacKay R.S.* Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Physica*. 1991. Vol. D49, № 3. P. 87.

*Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию  
После доработки*

*15.12.2009  
20.05.2010*

## PHASE DYNAMICS OF PERIODICALLY DRIVEN QUASIPERIODIC SELF-VIBRATING OSCILLATORS

*A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, L.V. Turukina*

Synchronization phenomena are studied in phase dynamics approximation in the periodically driven system of two coupled oscillators. The cases are discussed when the autonomous oscillators demonstrate phase locking or beats with incommensurate frequencies. Lyapunov charts are presented, the possible regimes of dynamics of the driven system are discussed. Different types of two-dimensional tori are revealed and classified. The modification of computer generated charts of dynamical regimes method is suggested to identify the domains of existence for different two-dimensional tori.

*Keywords:* Synchronization, phase oscillators, quasiperiodic dynamics.



*Тюрюкина Людмила Владимировна* – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор более 50 научных публикаций, из них около 20 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.

410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
E-mail: lvtur@rambler.ru



*Сатаев Игорь Рустамович* – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - критические явления в нелинейной динамике, моделирование динамики на пороге хаоса, применение численных методов для решения ренормгрупповых уравнений. Автор более 30 научных публикаций.

410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
E-mail: