

АТТРАКТОРЫ ТИПА СМЕЙЛА–ВИЛЬЯМСА В МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

С.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина

Сконструировано и исследовано несколько примеров модельных неавтономных систем с гиперболическими аттракторами типа Смейла–Вильямса в стробоскопическом отображении. Их динамика определяется присутствием внешнего воздействия в виде периодической последовательности коротких импульсов, причем за период воздействия угловая координата или фаза ведет себя соответственно итерациям растягивающего отображения окружности с хаотической динамикой.

Ключевые слова: Хаос, гиперболический аттрактор, импульсное воздействие, показатель Ляпунова, осциллятор.

Введение

В математической теории динамических систем известен класс *однородно гиперболических аттракторов* [1–6]. Это аттракторы, состоящие исключительно из траекторий седлового типа, причем хаотическая природа динамики для них строго математически обоснована. Они обладают свойством структурной устойчивости, то есть устройство фазового пространства и характеристики хаоса нечувствительны к вариации параметров и функций в уравнениях, определяющих динамику. В учебниках и обзорах по нелинейной динамике в качестве примеров с гиперболическими аттракторами обычно фигурируют модели с дискретным временем на основе геометрических конструкций [1–8]. Например, аттрактор Смейла–Вильямса в простейшем случае имеет место в трехмерном отображении, определенном так, что при его действии некоторая область в форме тора, претерпев продольное растяжение и поперечное сжатие, оказывается вложенной в виде двойной петли внутрь исходного тора (рис. 1). При этом угловая координата φ претерпевает преобразование удвоения: $\varphi' = 2\varphi \pmod{2\pi}$, о котором говорят как о растягивающем отображении окружности или отображении Бернулли. При многократном применении отображения результатом оказывается так называемый соленоид, содержащий бесконечное число витков с тонкой поперечной фрактальной структурой (типа канторова множества).

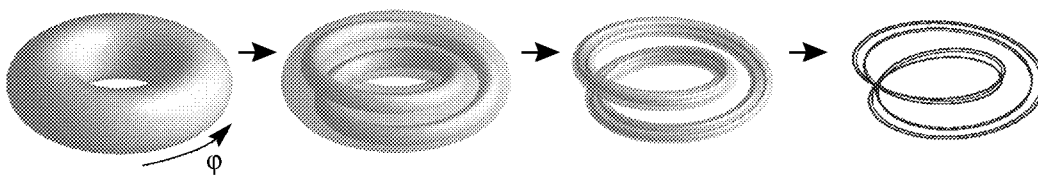


Рис. 1. Тороидальная область в трехмерном пространстве (слева), результат ее преобразования на двух итерациях, и соленоид Смейла–Вильямса, получающийся при многократном применении отображения (справа)

Первоначально ожидалось, что гиперболические аттракторы обеспечат адекватное математическое описание многих физических ситуаций, где встречается хаос. Однако по мере накопления примеров конкретных систем с хаотической динамикой стало ясно, что они не вписываются в рамки ранней гиперболической теории. Лишь в самое последнее время появились примеры физически реализуемых систем с гиперболическими аттракторами, причем указано несколько возможных подходов к конструированию таких примеров [9–17].

В настоящей работе предлагается ряд моделей с гиперболическими аттракторами на основе диссипативных систем в присутствии периодических импульсных толчков. Для данного класса систем как вполне естественный выступает способ описания динамики в дискретном времени с помощью стробоскопического отображения (отображения Пуанкаре), задающего изменение состояния за период внешнего воздействия. Ранее такого рода модели успешно привлекались для построения физически реализуемых примеров, описываемых отображениями Эно и Заславского [18–19].

В первом разделе статьи вводится механическая модель, динамика которой состоит в движении частицы на плоскости с вязким трением под действием периодических импульсных толчков, причем их интенсивность и направление зависят от мгновенного положения частицы. Кроме того, присутствует постоянное во времени потенциальное поле, обладающее вращательной симметрией. Во втором разделе обсуждается модель на основе осциллятора ван дер Поля, на который воздействует вспомогательная инерционная диссипативная подсистема, возбуждаемая периодическими импульсными толчками, сила которых зависит от мгновенной обобщенной координаты осциллятора.

1. Механическая модель с гиперболическим аттрактором

Пусть на плоскости (x, y) частица единичной массы может перемещаться, испытывая вязкое трение, с силой, пропорциональной скорости. Для простоты примем коэффициент трения равным единице. Полагаем, что движение имеет место в потенциальном поле $U(x, y)$, обладающем вращательной симметрией относительно начала координат, причем минимум потенциала реализуется на окружности единичного радиуса. Кроме того, с периодом T производится на короткое время включение силового поля, величина и направление которого зависит от мгновенного положения частицы, в результате чего она получает импульс $\mathbf{P}(x, y) = P_x(x, y)\mathbf{i} + P_y(x, y)\mathbf{j}$.

В этих предположениях уравнения движения запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \dot{x} &= -\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + P_x(x, y) \sum_n \delta(t - nT), \\ \ddot{y} + \dot{y} &= -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} + P_y(x, y) \sum_n \delta(t - nT).\end{aligned}\quad (1)$$

Конкретное пространственное распределение силового поля $\mathbf{P}(x, y)$ подберем из следующих соображений. Пусть в начальный момент имеем кольцо из частиц, покоящихся на единичной окружности с координатами $x = \cos \varphi$ и $y = \sin \varphi$. После толчка, вызванного включением силового поля, частица, характеризуемая начальным углом φ , получит импульс с компонентами $P_x(x, y)$ и $P_y(x, y)$, что приведет через некоторое время к изменению ее координат. Если считать пока потенциальное поле отсутствующим, нетрудно показать, что частица, сместившись по плоскости, остановится из-за трения в точке с координатами

$$x' = x + P_x(x, y), \quad y' = y + P_y(x, y). \quad (2)$$

Потребуем, чтобы при этом частицы расположились опять по единичной окружности, но так, чтобы однократный обход исходного кольца соответствовал двукратному обходу окружности при новом их размещении, то есть угловая координата претерпела преобразование согласно соотношению

$$\varphi' = 2\varphi \pmod{2\pi}. \quad (3)$$

Для этого новые координаты частицы должны быть

$$x' = \cos \varphi' = \cos 2\varphi, \quad y' = \sin \varphi' = \sin 2\varphi. \quad (4)$$

Нужный результат будет достигнут, если задать функции, характеризующие распределение силового поля, через угловую координату

$$\begin{aligned}P_x(x, y) &= x' - x = \cos 2\varphi - \cos \varphi, \\ P_y(x, y) &= y' - y = \sin 2\varphi - \sin \varphi.\end{aligned}\quad (5)$$

Согласно известным соотношениям для тригонометрических функций, имеем $P_x(x, y) = 2 \cos^2 \varphi - 1 - \cos \varphi$, $P_y(x, y) = 2 \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi$. Принимая во внимание связь декартовых координат с угловой координатой при расположении частицы на единичной окружности $x = \cos \varphi$ и $y = \sin \varphi$, положим

$$P_x(x, y) = 2x^2 - x - 1, \quad P_y(x, y) = 2xy - y. \quad (6)$$

Далее добавим постоянное во времени потенциальное поле, обладающее вращательной симметрией, так чтобы минимум потенциала имел место на окружности единичного радиуса. Для этого введем потенциальную функцию

$$U(x, y) = -\frac{1}{2}\mu(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}\mu(x^2 + y^2)^2, \quad (7)$$

где μ – некоторый параметр. Тогда динамические уравнения (1), описывающие динамику частицы на плоскости (x, y) , примут вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \dot{x} - \mu x(1 - x^2 - y^2) &= (2x^2 - x - 1) \sum_n \delta(t - nT), \\ \ddot{y} + \dot{y} - \mu y(1 - x^2 - y^2) &= (2xy - y) \sum_n \delta(t - nT).\end{aligned}\tag{8}$$

Параметр μ выберем относительно малым, чтобы за характерное время, в течение которого происходит движение частицы вследствие импульсного толчка (в принятой нормировке оно порядка единицы), смещение под действием потенциального поля $U(x, y)$ было невелико. Кроме того, выберем достаточно большой интервал времени между толчками T так, чтобы за это время частица успевала подойти к минимуму потенциального поля. Эти условия не очень жесткие, и их достаточно обеспечить хотя бы в грубом приближении.

Существенным является топологическое свойство ансамбля частиц после трансформации, а именно образование конфигурации, дважды охватывающей начало координат. Именно в связи с этим в отображении за период воздействия следует ожидать присутствия аттрактора типа Смейла–Вильямса. Сжатие в поперечном направлении в фазовом пространстве обеспечивается трением и действием потенциального поля, благодаря которому имеет место смещение частицы к единичной окружности, где реализуется минимум потенциала.

Мгновенное состояние системы в момент, непосредственно предшествующий очередному n -му толчку, задается четырехмерным вектором $\mathbf{x}_n = \{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}_{t=nT-0}$. Изменение состояния за время до следующего толчка определяется некоторым четырехмерным отображением

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n).\tag{9}$$

Это стробоскопическое отображение Пуанкаре для данной системы. Его можно мыслить как результат последовательного выполнения двух отображений. Сначала имеет место аддитивная добавка к компонентам скорости частицы \dot{x}, \dot{y} без изменения ее координат x, y . Затем, в промежутке времени между импульсами происходит плавная эволюция четырехмерного вектора состояния, описываемая дифференциальными уравнениями (8) с нулевыми правыми частями. Отображение на первом этапе имеет вид $\{x', y', \dot{x}', \dot{y}'\} = \{x, y, \dot{x} + P_x(x, y), \dot{y} + P_y(x, y)\}$. Заметим, что оно обратимое: обратное преобразование $\{x, y, \dot{x}, \dot{y}\} = \{x', y', \dot{x}' + P_x(x', y'), \dot{y}' + P_y(x', y')\}$. Отображение, производимое на втором этапе, также обратимое, что является следствием теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. Получить его в аналитической форме не удастся, но можно реализовать как выполняемую на компьютере процедуру путем численного решения дифференциальных уравнений на интервале времени T . При этом начальные условия для компонент скорости задаются с учетом добавок, полученных в результате действия импульсного толчка. Как композиция двух обратимых преобразований, отображение (9) также является обратимым, как это и требуется для реализации аттрактора Смейла–Вильямса.

На рис. 2, *a* представлены графики показателей Ляпунова, количественно характеризующих хаотическую динамику системы, в зависимости от параметра μ при фиксированном периоде следования импульсов $T = 5$. Для вычисления показателей

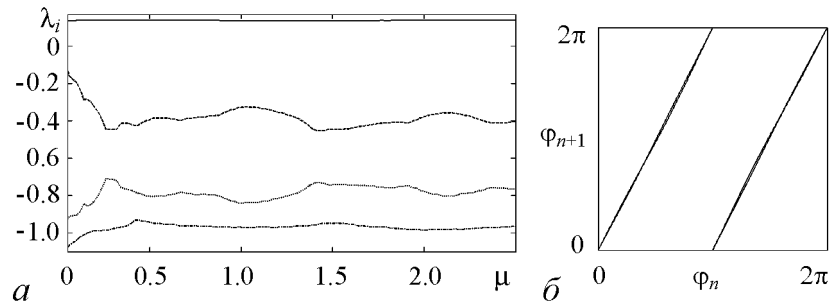


Рис. 2. *a* – Полученная численно зависимость спектра показателей Ляпунова от параметра μ для системы (8) при $T = 5$. В широком диапазоне старший показатель остается почти постоянным и хорошо согласуется с оценкой $\lambda_1 = T^{-1} \ln 2 \approx 0.1386\dots$ *б* – Итерационная диаграмма для угловой координаты точек на аттракторе системы (8) при $\mu = 0.44$ и $T = 5$. Угловая координата φ вычисляется в момент перед включением очередного импульса

Ляпунова был реализован алгоритм Бенеттина [19,20], состоящий в одновременном решении системы (8) и полученных из нее линеаризованных уравнений для возмущений в промежутке между импульсами. (Период T полагается содержащим целое число шагов разностной схемы.) Действие импульса учитывается при задании начальных условий для каждой следующей стадии эволюции, а именно надлежащим пересчетом обобщенных скоростей и их вариаций под действием импульсного толчка. На каждом периоде непосредственно перед включением импульса выполняется ортогонализация Грама–Шмидта и нормализация для четырех векторов возмущения. Показатели Ляпунова получаются как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов норм векторов возмущения (после ортогонализации, но до нормализации).

Показатели Ляпунова для дифференциальных уравнений λ_k и для стробоскопического отображения Λ_k связаны очевидным соотношением $\lambda_k = \Lambda_k/T$, $k = 1, 2, 3, 4$. Из рис. 2, *a* видно, что в широком диапазоне изменения параметра μ старший показатель Ляпунова Λ_1 остается практически постоянным и находится в хорошем соответствии с оценкой $\lambda_1 = \ln 2/T \approx 0.1386\dots$, где $\Lambda_1 = \ln 2$ – показатель для одномерного отображения Бернулли (3), описывающего динамику угловой координаты φ . Остальные показатели отрицательны. Спектр показателей Ляпунова указывает на наличие приблизительно двукратного локального растяжения по одному направлению, соответствующему угловой координате, и сжатия по остальным направлениям.

На рис. 2, *б* приводится итерационная диаграмма для угловой координаты, определяемой по формуле

$$\varphi = \arg(x + iy) \quad (10)$$

при динамике на аттракторе по результатам численных расчетов при $\mu = 0.44$ и $T = 5$. (Величина φ вычисляется в момент непосредственно перед включением каждого очередного импульсного толчка.) Как можно видеть из рисунка, отображение для угловой координаты соответствует по топологическому типу отображению Бернулли, поскольку однократный обход окружности для прообраза отвечает двукратному обходу для образа.

На рис. 3 показан портрет аттрактора и его увеличенный фрагмент в проекции на плоскость (x, y) в стробоскопическом сечении, отвечающем моменту непосредственно перед действием очередного импульса. На рисунке хорошо различима поперечная фрактальная структура аттрактора, который демонстрирует очевидное визуальное сходство с соленоидом Смейла–Вильямса. Оценка фрактальной размерности хаотического аттрактора, представленного на рис. 3, проводилась двумя методами: по спектру показателей Ляпунова с использованием формулы Каплана–Йорке, которая в данном случае имеет вид $D_\lambda = 1 + \lambda_1/|\lambda_2|$ (ляпуновская размерность), и численно на основе обработки временного ряда, порождаемого динамикой стробоскопического отображения, с применением алгоритма Грассбергера–Прокаччия (корреляционная размерность) [7,19]. Проведенные вычисления показали, что обе размерности находятся в неплохом соответствии. Ляпуновская размерность составила $D_\lambda = 1.328$, а корреляционная размерность $D_c = 1.325$.

Обратимся к другой модификации модели (1) и зададим силовое поле таким образом, чтобы кольцо из частиц в результате импульсного толчка трансформировалось не в двойное, а в тройное кольцо. По аналогии с предыдущим случаем, если $x = \cos \varphi$ и $y = \sin \varphi$ есть начальные координаты частиц на единичной окружности, то их новые координаты должны удовлетворять соотношениям

$$x' = \cos \varphi', \quad y' = \sin \varphi', \quad (11)$$

где

$$\varphi' = 3\varphi \pmod{2\pi}. \quad (12)$$

Это достигается, если компоненты импульса задать через угловую координату в виде

$$\begin{aligned} P_x(x, y) &= x' - x = \cos 3\varphi - \cos \varphi, \\ P_y(x, y) &= y' - y = \sin 3\varphi - \sin \varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя известные соотношения для тригонометрических функций, можно переписать выражения для составляющих в декартовых координатах. Это дает

$$P_x(x, y) = 4x^3 - 4x, \quad P_y(x, y) = -4y^3 + 2y. \quad (14)$$

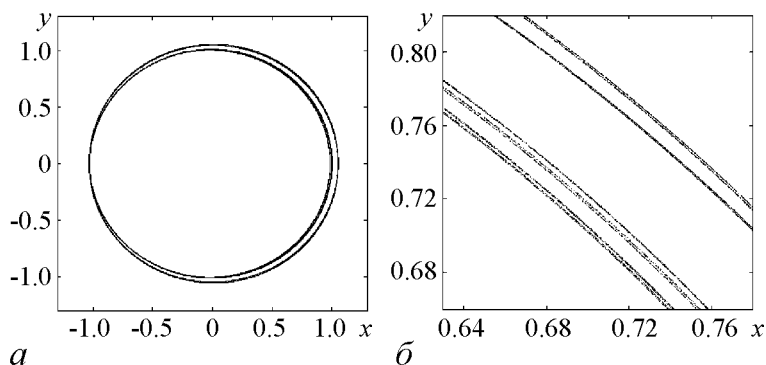


Рис. 3. Аттрактор (а) и его увеличенный фрагмент (б) в сечении Пуанкаре, отвечающем моменту непосредственно перед включением очередного импульса, в системе (8). Значения параметров $\mu = 0.44$ и $T = 5$

Постоянно действующее потенциальное поле оставим таким же, как и в предыдущем случае, см. формулу (7). Тогда уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \dot{x} &= \mu x(1 - x^2 - y^2) + (4x^3 - 4x) \sum_n \delta(t - nT), \\ \ddot{y} + \dot{y} &= \mu y(1 - x^2 - y^2) + (-4y^3 + 2y) \sum_n \delta(t - nT).\end{aligned}\tag{15}$$

Обратим внимание, что в данном случае потенциальным является не только постоянное поле, но и импульсное силовое поле тоже. При этом x -компонента и y -компонента силового поля зависят только от соответствующей координаты, что можно рассматривать как достоинство модели с точки зрения простоты ее практической реализации.

Как и в предыдущем случае, эволюция состояния системы за период описывается четырехмерным обратимым диссипативным отображением. Теперь, однако, в качестве аттрактора выступает разновидность соленоида Смейла–Вильямса, получающаяся растяжением некоторой тороидальной области втрое, сжатием в поперечном направлении и вложением образа в виде тройной петли внутрь исходного тора. На рис. 4 показан аттрактор системы (15) в проекции на плоскость (x, y) в стробоскопическом сечении, отвечающем моментам непосредственно перед включением каждого очередного импульса, а также фрагмент аттрактора с увеличенным разрешением. Из рисунка можно видеть, что аттрактор обладает поперечной фрактальной структурой.

На рис. 5, *a* приводится построенная численно итерационная диаграмма для угловых координат точек на аттракторе системы (15), вычисляемых по формуле (10) непосредственно перед включением каждого очередного импульса. Она демонстрирует хорошее соответствие с соотношением (12) – отображением типа Бернулли.

Чтобы количественно охарактеризовать хаотическую динамику, для системы (15) была построена зависимость показателей Ляпунова от параметра μ при фиксированной величине периода следования импульсов $T = 8$ (рис. 5, *б*). Видно, что старший показатель остается почти постоянным в достаточно широком диапазоне изменения параметра μ и близок к величине $\lambda_1 = (\ln 3)/T \approx 0.1373\dots$, что

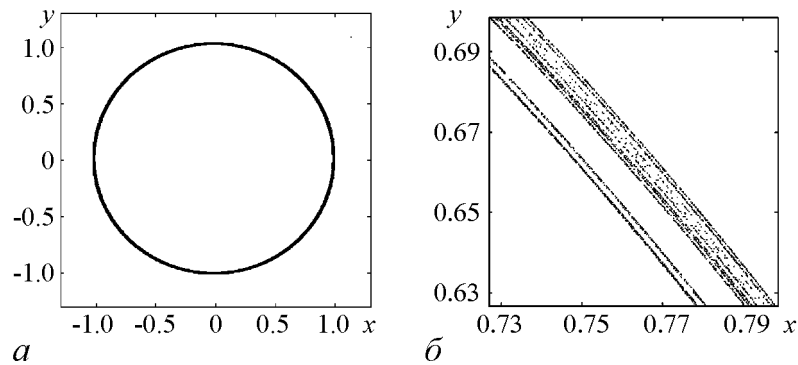


Рис. 4. Аттрактор (*a*) и его увеличенный фрагмент (*б*) системы (15) в сечении Пуанкаре, отвечающем моменту непосредственно перед включением импульсного воздействия. Аттрактор построен для $\mu = 0.22$ и $T = 8$

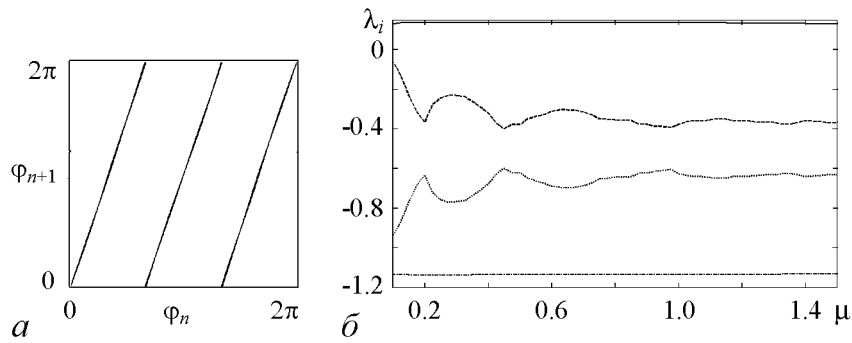


Рис. 5. *a* – Численно построенная итерационная диаграмма для угловой координаты φ точек на аттракторе системы (15) для $\mu = 0.22$ и $T = 8$. Угловая координата φ вычислялась в моменты времени перед включением импульсного воздействия. *b* – Полученная численно зависимость показателей Ляпунова от параметра μ для системы (15) при $T = 8$

соответствует приближенному описанию с помощью отображения утроения угловой переменной (12). Вычисление ляпуновской и корреляционной размерностей для хаотического аттрактора, представленного на рис. 4, дает результат, соответственно, $D_\lambda = 1.47$ и $D_c = 1.42$.

2. Система с гиперболическим аттрактором на основе осциллятора ван дер Поля

Достоинством рассмотренных выше механических моделей является их простота, однако, полная размерность фазового пространства отображений, описывающих эволюцию за период внешнего воздействия, в них на единицу больше минимальной размерности, требуемой для реализации аттрактора Смейла–Вильямса. Чтобы сконструировать пример с минимально необходимой размерностью фазового пространства, обратимся к модели на основе осциллятора ван дер Поля. В этом случае более естественной представляется скорее радиотехническая, нежели механическая интерпретация.

Классический осциллятор ван дер Поля задается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (16)$$

Или, что эквивалентно, системой двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = \omega_0 y, \quad \dot{y} = -\omega_0 x + (A - x^2)y. \quad (17)$$

Здесь x и y – динамические переменные, ω_0 – собственная частота осциллятора, A – управляющий параметр. В области отрицательных A на фазовой плоскости (x, y) имеется устойчивая неподвижная точка в начале координат. При постепенном увеличении параметра, при $A = 0$ имеет место бифуркация рождения предельного цикла, размер которого увеличивается пропорционально \sqrt{A} . В частности, при $A = 0.25$ предельный цикл на плоскости (x, y) приближенно совпадает с единичной окружностью.

Отправляясь от уравнений (17), введем в рассмотрение следующую систему трех дифференциальных уравнений первого порядка, содержащую дополнительную динамическую переменную z :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_0 y + z, \\ \dot{y} &= -\omega_0 x + (A - x^2)y, \\ \gamma^{-1} \dot{z} + z &= (4x^3 - 4x) \sum_n \delta(t - nT) + (-4x^3 + 2x) \sum_n \delta(t - \pi/2\omega_0 - nT). \end{aligned} \quad (18)$$

Первые два уравнения относительно динамических переменных x и y задают осциллятор ван дер Поля, на который воздействует вспомогательная подсистема, описываемая переменной z . Динамика этой подсистемы состоит в релаксации к положению равновесия в нуле с характерным временем, которое полагаем малым в сравнении с периодом колебаний осциллятора, то есть $\gamma^{-1} \ll 2\pi/\omega_0$. Она возбуждается последовательностью импульсных толчков с периодом $T \gg 2\pi/\omega_0$ и амплитудой, зависящей от мгновенного значения x обобщенной координаты осциллятора ван дер Поля. При этом на каждом полном периоде внешнего воздействия T имеет место пара толчков, разнесенных на четверть периода основной частоты осциллятора, $\pi/(2\omega_0)$. Поскольку четверть периода отвечает на фазовой плоскости повороту на 90° , то результат действия пары толчков приблизительно соответствует действию двух одновременных толчков в поперечных направлениях, как в модели (15). Если рассмотреть ансамбль идентичных осцилляторов, начальные состояния которых равномерно распределены по предельному циклу, то после воздействия пары импульсных толчков и релаксации с характерным временем γ^{-1} состояния систем ансамбля в проекции на фазовую плоскость образуют тройное кольцо. Динамика фазы осциллятора ван дер Поля будет описываться одномерным отображением типа Бернулли $\varphi' = 3\varphi + (\text{mod } 2)\pi$. Следовательно, можно ожидать, что в качестве аттрактора стробоскопического отображения будет иметь место объект типа соленида Смейла–Вильямса, подобно предыдущей механической модели, но в трехмерном пространстве состояний (x, y, z) . На одном шаге реализуется растяжение некоторой тороидальной области, охватывающей предельный цикл осциллятора ван дер Поля втрое, сжатие в поперечном направлении и вложение образа в виде тройного кольца в исходный тор.

В процессе эволюции во времени третья переменная z испытывает скачки, обусловленные присутствующими в системе уравнений (18) членами с дельта-функцией Дирака. Зависимость от времени переменных x и y непрерывная (хотя для x временная зависимость имеет изломы, то есть разрывы первой производной, а для y присутствуют разрывы второй производной). Численное решение уравнений на компьютере производится на интервалах времени между дельта-толчками обычным конечно-разностным методом с достаточно мелким шагом. Параметры системы и шаг разностной схемы выбраны так, чтобы эти интервалы содержали целое число шагов. В момент толчка переменные x и y не меняются, но производится переопределение переменной z с учетом приобретаемой ей конечной добавки. Далее вычисления продолжают с новыми начальными условиями, отвечающими состоянию (x, y, z) сразу после толчка.

На рис. 6 в проекции на плоскость (x, y) показан аттрактор системы в стробоскопическом сечении, соответствующем моменту времени перед первым импульсом за период. Аттрактор построен для значений параметров $\omega_0 = 2\pi$, $\gamma = 35$, $A = 0.25$ и $T = 36$. Из рисунка видно, что аттрактор имеет вид, характерный для соленоида Смейла–Вильямса, и обладает фрактальной поперечной структурой. На рис. 7 показаны построенная численно итерационная диаграмма для фазы осциллятора ван дер Поля и график зависимости показателей Ляпунова от параметра A . Фаза осциллятора определялась в стробоскопическом сечении, соответствующем моменту перед началом первого за период импульса и вычислялась по формуле $\varphi = \arg(x + iy)$. Как можно видеть, полученное численно отображение для фазы топологически соответствует отображению типа Бернулли: однократный обход окружности при вариации фаз для прообраза отвечает трехкратному обходу для образа.

На графике зависимости показателей Ляпунова от параметра A можно видеть две области, в которых старший показатель остается почти постоянным и близок к величине, получаемой из оценки, основанной на отображении для фазы, а именно $\lambda_1 = (\ln 3)/T \approx 0.03052\dots$, где $T = 36$. Ляпуновская размерность аттрактора, показанного на рис. 6, составляет $D_\lambda = 1.119$, а корреляционная размерность, согласно результатам численных расчетов по методу Грассбергера–Прокаччия, $D_c = 1.12$.

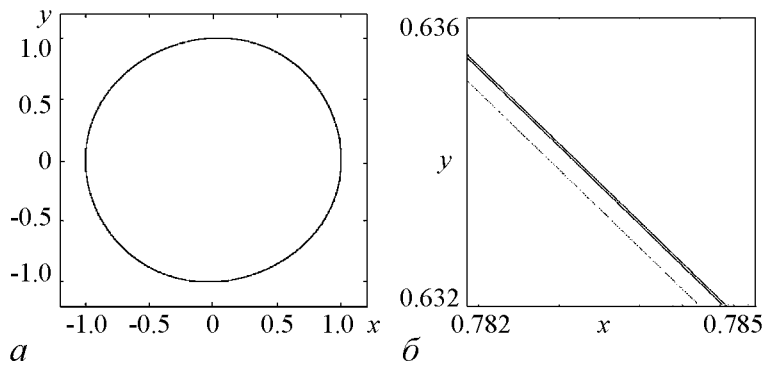


Рис. 6. Проекция аттрактора системы (18) на плоскость (x, y) (а) и ее увеличенный фрагмент (б) в сечении Пуанкаре, отвечающем моменту непосредственно перед включением первого за период импульса. Значения параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $\gamma = 35$, $A = 0.25$ и $T = 36$

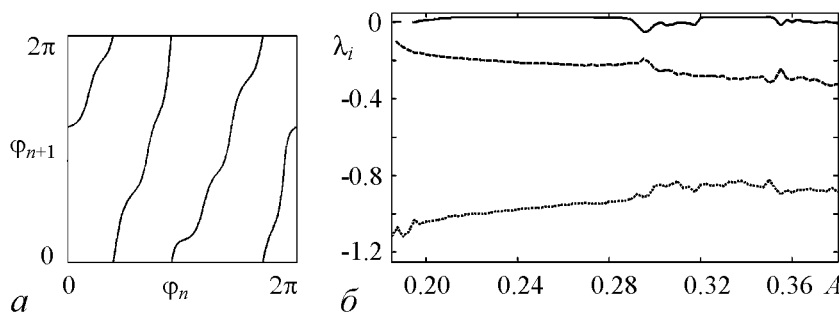


Рис. 7. а – Численно построенная итерационная диаграмма для фазы осциллятора ван дер Поля в стробоскопическом сечении, отвечающем моментам времени непосредственно перед началом первого за период импульса при $A = 0.25$. б – Полученная численно зависимость показателей Ляпунова от параметра A для системы (18). Значения остальных параметров $\omega_0 = 2\pi$, $\gamma = 35$, и $T = 36$

Заклучение

Предложен принцип построения моделей с гиперболическими аттракторами типа Смейла–Вильямса на основе диссипативных систем с периодическим импульсным воздействием.

Представлена механическая модель движения частицы на плоскости с вязким трением в потенциальном поле с вращательной симметрией и минимумом на окружности при действии импульсных толчков, величина и направление которых зависят от мгновенного положения частицы. При этом аттрактор стробоскопического отображения вложен в четырехмерное пространство состояний.

Введена также модель на основе осциллятора ван дер Поля при наличии действующей на него вспомогательной диссипативной подсистемы, возбуждаемой периодической последовательностью попарно действующих импульсов, интенсивность которых зависит от мгновенной обобщенной координаты осциллятора. В этом случае стробоскопическое отображение трехмерное, что соответствует минимальной размерности, необходимой для присутствия аттрактора типа Смейла–Вильямса.

Предложенные модели с гиперболическими аттракторами просты и наглядны, почти тривиальны, благодаря чему могут представлять интерес в методических целях, в том числе для включения в учебные курсы и компьютерные практикумы.

Авторы благодарят профессора А.С. Пиковского за внимание к работе и полезное обсуждение.

Работа выполнена в ходе визитов авторов в университет Потсдама при поддержке гранта РФФИ-ННИО 08-02-91963.

Библиографический список

1. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // В кн. Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. 192 с.
2. *Гукенхеймер Дж., Холмс П.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2002. 559 с.
3. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. NY: Addison–Wesley, 1989.
4. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A Tutorial // Int. J. of Bif. & Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
5. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Факториал, 1999. 768 с.
6. *Afraimovich V. and Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems // AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol.28. American Mathematical Society, Providence RI, International Press, Somerville, MA, 2003.
7. *Ott E.* Chaos in Dynamical Systems. Cambridge University Press, 1993.
8. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
9. *Кузнецов С.П.* Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. P. 5.

10. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of a Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
11. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖТЭФ.* 2006. Т. 129, № 2. С. 400.
12. *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Проверка устойчивости гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2006. Т. 14, № 5. С. 3.
13. *Купцов П.В., Кузнецов С.П.* О феноменах, сопровождающих переход к режиму синхронного хаоса в связанных неавтономных осцилляторах, представленных уравнениями для комплексных амплитуд // *Нелинейная динамика.* 2006. Т. 2, № 3. С. 307.
14. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica D.* 2007. Vol. 232. P. 87.
15. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В.* Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
16. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // *Письма в ЖТФ.* 2008. Т. 34. Вып.18, 1-8.
17. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // *Europhysics Letters.* 2008. № 28.10013.
18. *Heagy J.F.* A physical interpretation of the Hénon map // *Physica D* 57. 1992. P. 436.
19. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
20. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application // *Meccanica.* 1980. Vol. 15. P. 9.

*СФ ИРЭ им. Котельникова РАН
Университет Потсдама*

*Поступила в редакцию 10.12.2009
После доработки 30.04.2010*

ATTRACTORS OF SMALE–WILLIAMS TYPE IN PERIODICALLY KICKED MODEL SYSTEMS

S.P. Kuznetsov, L.V. Turukina

Examples of model non-autonomous systems are constructed and studied possessing hyperbolic attractors of Smale–Williams type in their stroboscopic maps. The dynamics is determined by application of a periodic sequence of kicks, in such way that on one period of the external driving the angular coordinate, or the phase of oscillations, behaves in accordance with an expanding circle map with chaotic dynamics.

Keywords: Chaos, hyperbolic attractor, kicked pulse, Lyapunov exponent, oscillator.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и учебника «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 180 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены восемь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники РАН им. В.А. Котельникова
E-mail: spkuz@rambler.ru



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор более 50 научных публикаций, из них около 20 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.

410019, Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru