

КОЛЬЦЕВОЙ НЕАВТОНОМНЫЙ ГЕНЕРАТОР ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ХАОСА

В.П. Круглов

Предложена схема кольцевой системы, генерирующей, как предполагается, гиперболический хаос. Принцип работы основан на удвоении фазы колебаний за полный цикл передачи сигнала по кольцу обратной связи, что является условием существования аттрактора Смейла–Вильямса в фазовом пространстве. Математически модель описывается неавтономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Произведен также переход к уравнениям для медленных комплексных амплитуд и к отображению возврата Пуанкаре. В работе представлены результаты численного моделирования системы. В сечении Пуанкаре наблюдается аттрактор, предположительно, типа Смейла–Вильямса. Расчеты подтверждают, что динамика фазы колебаний приближенно описывается отображением Бернулли. Вычислены показатели Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре и построены графики их зависимости от параметров системы. Отмечается гладкая зависимость старшего показателя Ляпунова от параметров, что подтверждает структурную устойчивость реализующегося аттрактора.

Ключевые слова: Гиперболический хаос, аттрактор Смейла–Вильямса, отображение Бернулли, структурная устойчивость.

Введение

Возникновение хаоса в диссипативных динамических системах связано с существованием в фазовом пространстве странного аттрактора – сложно устроенного притягивающего множества, к которому стремятся все траектории внутри некоторой области фазового пространства. В математической теории динамических систем наиболее изученным является класс однородно гиперболических аттракторов [1–5]. Такие аттракторы состоят только из седловых (гиперболических) траекторий.

Траектория в фазовом пространстве называется седловой, если в векторном пространстве всевозможных бесконечно малых возмущений любой точки данной траектории существует подпространство векторов, норма которых экспоненциально убывает при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов, норма которых экспоненциально убывает при эволюции в обратном времени [1–5]. Эти

подпространства векторов являются касательными к устойчивому и неустойчивому многообразиям траектории. Вектор произвольного малого возмущения может быть представлен в виде линейной комбинации векторов, принадлежащих указанным подпространствам.

В системах с гиперболическим аттрактором существование хаоса математически доказано. Такие системы обладают свойством грубости или структурной устойчивости. Это означает, что структура их фазового пространства и характер динамики нечувствительны к изменению параметров и функций, входящих в описывающие динамику уравнения. Старший показатель Ляпунова гиперболического аттрактора положительный и зависит от параметров системы гладким образом, без провалов в отрицательную область.

До недавнего времени не удавалось найти примеры физических систем, обладающих однородно гиперболическими аттракторами. Некоторые известные примеры – аттракторы Смейла–Вильямса и Плыкина – были представлены лишь искусственными геометрическими моделями с дискретным временем. За хаотическое поведение большинства известных нелинейных диссипативных систем отвечают квазиаттракторы [5,6], которые, в отличие от однородно гиперболических аттракторов, содержат в себе помимо седловых траекторий устойчивые предельные циклы с большим периодом и очень малым бассейном притяжения. Поэтому гиперболический хаос представлялся лишь математической абстракцией.

В неавтономных системах, таких как предложенная в данной работе, можно исследовать аттрактор с помощью отображения Пуанкаре за период внешнего воздействия. Для возникновения аттрактора Смейла–Вильямса необходимо, чтобы существовала некоторая угловая переменная, которая при однократном действии отображения Пуанкаре увеличивалась бы в целое число раз, что сопровождается сжатием фазового объема по остальным переменным [2–5]. В радиотехнических устройствах эта переменная может представлять собой фазу колебаний. Система должна быть устроена так, чтобы фаза подвергалась растягивающему отображению окружности.

Первый пример системы с аттрактором Смейла–Вильямса, основанной на упомянутом выше принципе манипуляции фазой, предложен в работе [7]. Эта система состоит из двух попеременно возбуждающихся осцилляторов ван дер Поля. В статье [8] представлены результаты ее экспериментального исследования. В работе [9] показано, что аттрактор в ее фазовом пространстве однородно гиперболический. Этот и другие примеры систем с однородно гиперболическими аттракторами обсуждаются также в обзоре [1]. Тем не менее, в ряду систем с хаотической динамикой примеры с гиперболическим хаосом остаются редкими и исключительными, так что разработка конкретных систем такого рода и принципов их конструирования представляется интересной и актуальной.

Известный пример кольцевого генератора хаоса – генератор Дмитриева–Кислова [10,4]. В конце 1960-х – начале 1970-х годов в институте радиотехники и электроники АН СССР под руководством В.Я. Кислова была создана кольцевая схема на основе ламп бегущей волны, в которой реализуются хаотические автоколебания. Позднее Дмитриев и Кислов разработали и изучили простую модель-аналог, представляющую собой замкнутую в кольцо систему из нелинейного усилителя, фильтра второго порядка и фильтра первого порядка. Эта модель в некоторой об-

ласти параметров обладает хаотическим аттрактором, который однако не является однородно гиперболическим.

В настоящей статье вводится в рассмотрение неавтономная кольцевая система, генерирующая гиперболический хаос и допускающая несложную реализацию в виде радиотехнического устройства. В отличие от ранее предложенных систем с гиперболическим хаосом [1], она не содержит автоколебательных элементов, что можно рассматривать как достоинство с точки зрения простоты практической реализации. Схема составлена из двух линейных осцилляторов – фильтров второго порядка, которые включены в кольцевую цепь вместе с активными элементами усилительного типа, обеспечивающими усиление неустойчивости, ее стабилизацию, и надлежащее преобразование фазы колебаний при передаче возбуждения. Принцип работы и математическое описание подробно изложены в разделе 1. В разделе 2 представлены результаты численного анализа системы. Раздел 3 посвящен выводу уравнений для медленно меняющихся амплитуд. Раздел 4 содержит результаты, основанные на численном решении укороченных уравнений.

1. Описание системы

Рассмотрим кольцевую неавтономную систему, состоящую из двух линейных фильтров второго порядка (осцилляторов) и двух нелинейных элементов, блок-схема которой показана на рис. 1. Через x и y обозначены соответственно сигналы от первого и второго осцилляторов. Собственная частота второго осциллятора равна удвоенной частоте первого. Первый нелинейный элемент обладает квадратичной характеристикой в области малых амплитуд и насыщением в области больших амплитуд. На схеме преобразованный сигнал обозначен как $f(x^2)$, вид этой функции указан ниже. На втором нелинейном элементе производится смешение сигнала удвоенной частоты со вспомогательным внешним сигналом $g(t)$, представляющим собой последовательность радиоимпульсов.

Модельные уравнения системы в безразмерных переменных выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= \gamma \frac{d}{dt} y g(t), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + 4\omega_0^2 y &= \gamma \frac{d}{dt} f(x^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь γ – коэффициент затухания, собственная частота первого осциллятора рав-

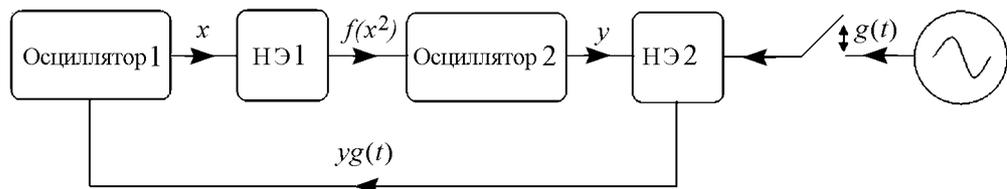


Рис. 1. Блок-схема рассматриваемой системы. НЭ1 – нелинейный элемент 1, НЭ2 – нелинейный элемент 2

на ω_0 , а второго – $2\omega_0$. Функция, описывающая преобразование сигнала на первом нелинейном элементе, имеет вид

$$f(x^2) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Функция

$$g(t) = \begin{cases} a^2 \sin \omega_0 t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T \end{cases}$$

описывает внешний сигнал, который включается с периодом $T = 2\pi N/\omega_0$ (N – целое число) на короткий временной интервал τ , a – коэффициент усиления. Введя дополнительно переменные u и v , можно перейти от уравнений (1) к системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega_0 u - \gamma x + \gamma g(t) y, \\ \frac{du}{dt} &= \omega_0 x, \\ \frac{dy}{dt} &= -2\omega_0 v - \gamma y + \gamma \frac{x^2}{1+x^2}, \\ \frac{dv}{dt} &= 2\omega_0 y. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим принцип работы системы. Пусть сначала внешний сигнал выключен, а первый осциллятор совершает затухающие гармонические колебания на частоте ω_0 с фазой φ . Когда сигнал от первого осциллятора проходит через первый нелинейный элемент, возникают постоянная составляющая сигнала и его вторая гармоника с удвоенной фазой и частотой. Вторая гармоника находится в резонансе с собственной частотой второго осциллятора и возбуждает в нем колебания. При включении вспомогательного сигнала происходит смещение этих колебаний с сигналом от второго осциллятора на втором нелинейном элементе. В результате появляется составляющая сигнала с фазой 2φ и частотой, близкой к ω_0 . Эта составляющая воздействует на первый осциллятор и передает ему свою фазу. Таким образом, через каждый период внешнего воздействия фаза колебаний удваивается, и ее динамика приближенно описывается отображением Бернулли

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}, \tag{3}$$

где n – номер периода, а константа учитывает добавку к фазе при передаче сигнала от одного осциллятора к другому (ее можно устранить сдвигом начала отсчета переменной φ). Это отображение называют также растягивающим отображением окружности.

2. Результаты численного моделирования

Система уравнений (2) решалась численно методом Рунге–Кутты. На рис. 2 представлены временные зависимости динамических переменных x и y в установившемся режиме на протяжении трех периодов внешнего воздействия при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$. Представлен также график функции $g(t)$, описывающей внешний сигнал.

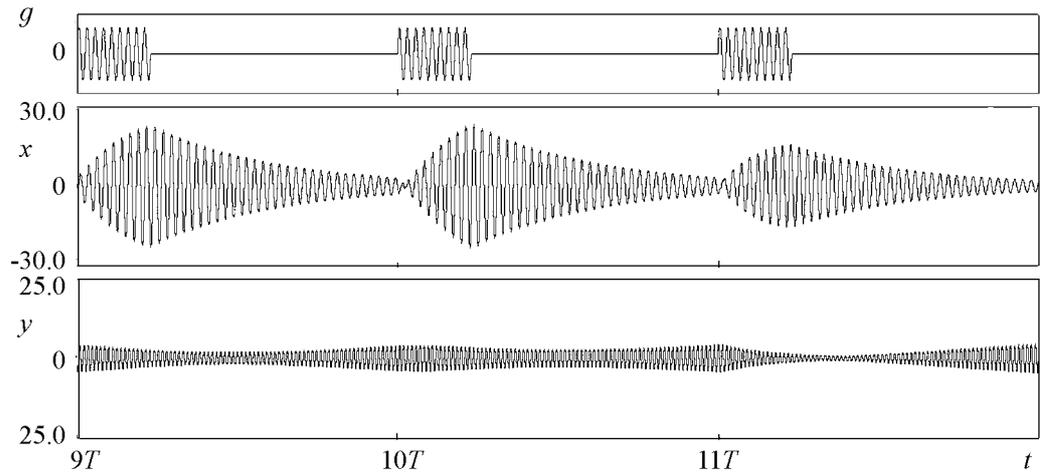


Рис. 2. График функции $g(t)$ и временные зависимости динамических переменных x и y в установившемся режиме, полученные при численном решении системы уравнений (3) при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$

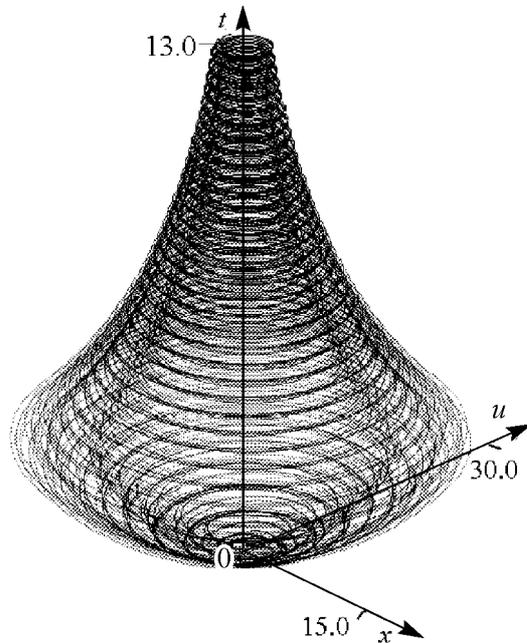


Рис. 3. Аттрактор исходной системы (2) в расширенном фазовом пространстве, представленный в трехмерной проекции (x, u, t) при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$.

Аттрактор исходной системы (2) в расширенном фазовом пространстве, представленный в трехмерной проекции (x, u, t) при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$ и ее увеличенный фрагмент. Фаза отнесена к интервалу от 0 до 2π и определяется выражением

$$\psi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(v/y), & y \geq 0, \quad v \geq 0, \\ \operatorname{arctg}(v/y) + p, & y < 0, \\ \operatorname{arctg}(v/y) + 2p & y \geq 0, \quad v < 0. \end{cases}$$

На рис. 3 показан аттрактор системы в расширенном фазовом пространстве в трехмерной проекции (x, u, t) , выполненный в технике кодирования плотности распределения тонами серого цвета. Для этого на каждом шаге вычисления фазовой траектории на экран выводилась точка, которой присваивался оттенок серого цвета, зависящий от оттенка пикселя в предыдущий момент. При попадании новой точки в данный пиксель число, кодирующее яркость, увеличивается на единицу.

Для перехода к описанию с помощью отображения возврата Пуанкаре в качестве секущей поверхности в расширенном фазовом пространстве бралась гиперплоскость $t_n = nT$, где T – период внешнего воздействия, n – номер периода. На рис. 4 представлена итерационная диаграмма отображения для фазы колебаний второго осциллятора при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$

Как видно из диаграммы, динамика фазы приближенно описывается растягивающим отображением окружности: за полный проход точкой ψ_n интервала от 0 до 2π ее образ ψ_{n+1} проходит этот интервал дважды.

На рис. 5 изображен аттрактор отображения возврата Пуанкаре за период внешнего воздействия в проекции на плоскость (x, u) и его увеличенные фрагменты. Полученный портрет визуально похож на аттрактор Смейла–Вильямса; это позволяет предполагать, что аттрактор однородно гиперболический. На рисунке отчетливо видна фрактальная структура аттрактора.

Для аттрактора исходной системы в сечении Пуанкаре были вычислены показатели Ляпунова по алгоритму Бенеттина с ортогонализацией по Граму–Шмидту [4]. В соответствии с этим методом выполняется совместное численное решение уравнений (2) и четырех наборов уравнений в вариациях за период внешнего воздействия. Каждый раз после пересечения траектории с секущей плоскостью $t_n = nT$ производится ортогонализация по Граму–Шмидту и нормализация векторов возмущений. Показатели Ляпунова определяются как отношения накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущений (после ортогонализации, но перед нормализацией) к числу полных периодов на каждом последующем возврате Пуанкаре. При значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$ получен полный спектр показателей Ляпунова

$$\Lambda_1 = 0.6695, \quad \Lambda_2 = -0.7751, \quad \Lambda_3 = -4.5398, \quad \Lambda_4 = -4.9983.$$

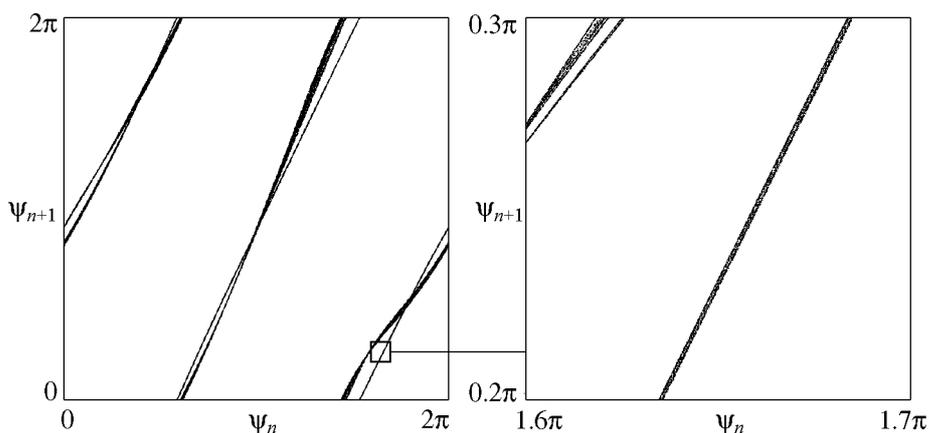


Рис. 4. Итерационная диаграмма для фазы колебаний второго осциллятора и ее увеличенный фрагмент при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$

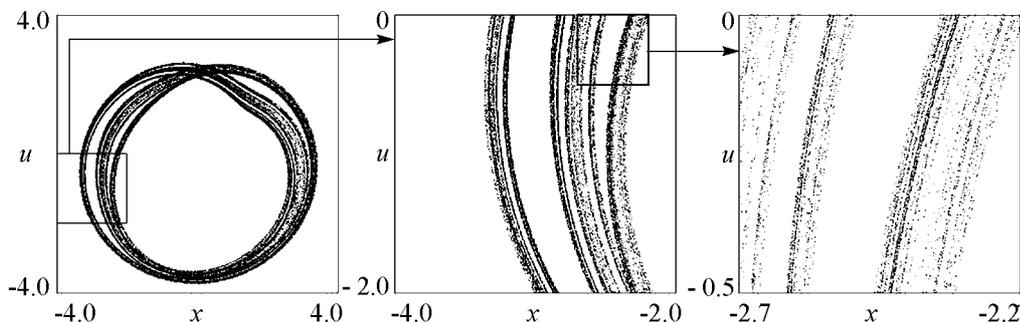


Рис. 5. Аттрактор системы (2) в сечении Пуанкаре на плоскости динамических переменных (x, u) и его увеличенные фрагменты при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$

Старший показатель Ляпунова положительный, что является количественным подтверждением присутствия хаоса. При этом он близок к величине $\ln 2$, равной показателю Ляпунова отображения Бернулли, которое приближенно описывает динамику фазы колебаний в системе. Остальные показатели отрицательные. Нулевой показатель отсутствует, что характерно для отображений и неавтономных потоковых систем с периодическими коэффициентами. Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве отображения Пуанкаре за одну итерацию испытывает растяжение по одному направлению и сжатие по остальным трем. Это соответствует построению гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса (если учесть, что растяжение происходит по угловой переменной), но в четырехмерном фазовом пространстве.

На рис. 6 показаны зависимости показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре от коэффициента усиления a при фиксированных значениях остальных параметров. На всем рассматриваемом интервале значений параметра a старший показатель положительный, а остальные отрицательные. Старший показатель гладко зависит от параметра. Резкие провалы в отрицательную область, характерные для негиперболических аттракторов, отсутствуют. При этом величина старшего показателя в широком диапазоне изменения параметра остается близкой к $\ln 2$.

Оценка фрактальной размерности для аттрактора в отображении Пуанкаре при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$ по формуле

Каплана–Йорке составила

$$D_{KY} = 1 + \frac{\Lambda_1}{|\Lambda_2|} \approx 1.86.$$

Соответственно, для аттрактора исходной неавтономной системы, вложенного в пятимерное расширенное фазовое пространство, фрактальная размерность больше на единицу: $D = D_{KY} + 1 \approx 2.86$.

Проводились расчеты корреляционной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре с помощью алгоритма Грассбергера–Прокаччия [4]. Для этого реализация, полученная путем численного решения уравнений, подвергалась обработке, состоящей в вычислении корреляционного интеграла с помощью программы OpenTSTOOL [11], использующей метод ближайших соседей в зависимости от размера ячейки покрытия аттрактора. На рис. 7 представлен график корреляционного интеграла. Полученная зависимость близка к линейной в широком диапазоне значений размера ячейки. Соответствующий угловой коэффициент дает оценку корреляцион-

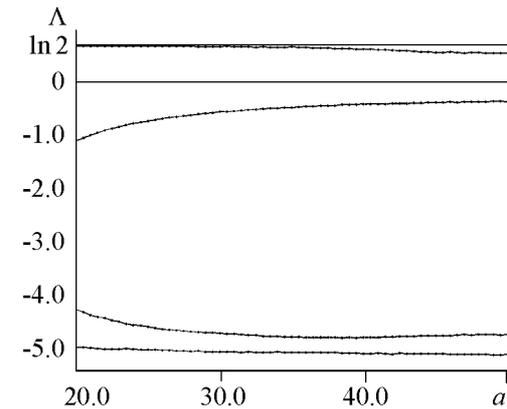


Рис. 6. Графики зависимости показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре от параметра a при фиксированных значениях остальных параметров ($\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$)

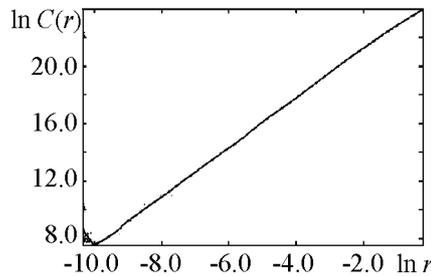


Рис. 7. График зависимости корреляционного интеграла $C(r)$ от размера ячейки r в логарифмическом масштабе ($\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0$)

ной размерности $D_C \approx 1.74$. Эта величина несколько меньше размерности Ляпунова, вычисленной по формуле Каплана–Йорке, но все же находится с ней в неплохом соответствии.

3. Вывод уравнений для медленно меняющихся амплитуд

Для рассматриваемого устройства как радиотехнической схемы уместно обратиться к описанию динамики в рамках метода медленно меняющихся амплитуд [12–15]. Метод медленных амплитуд применим в данном случае, если характерное время затухания колебаний $1/\gamma$ и период вспомогательного сигнала τ велики по сравнению с периодом высокочастотного заполнения, в то время как нелинейные члены относительно малы. В рамках этого метода достигается уменьшение количества параметров, характеризующих динамику системы. Метод медленных амплитуд является приближенным. Однако, если аттрактор гиперболический и, следовательно, структурно устойчивый, можно ожидать, что неточности, привносимые при приближенном описании, не повлияют существенным образом на качественный характер динамики. Приведенные ниже расчеты подтверждают это предположение. Описание в терминах медленных амплитуд можно рекомендовать как предпочтительное для систем, построенных по предложенной схеме в диапазоне высоких и сверхвысоких частот, где метод является разумным и адекватным.

Для получения укороченных уравнений системы (1) представим временные зависимости динамических переменных x и y и обобщенные скорости в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1(t) e^{i\omega_0 t} + A_1^*(t) e^{-i\omega_0 t}, \\ y(t) &= A_2(t) e^{2i\omega_0 t} + A_2^*(t) e^{-2i\omega_0 t}, \\ \dot{x}(t) &= i\omega_0 A_1(t) e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 A_1^*(t) e^{-i\omega_0 t}, \\ \dot{y}(t) &= 2i\omega_0 A_2(t) e^{2i\omega_0 t} - 2i\omega_0 A_2^*(t) e^{-2i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (4)$$

В этой записи $A_1(t)$ и $A_2(t)$ – комплексные амплитуды колебаний, медленно зависящие от времени, а звездочка означает комплексное сопряжение. Для вторых производных получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\omega_0^2 (A_1 e^{i\omega_0 t} + A_1^* e^{-i\omega_0 t}) + 2i\omega_0 \frac{dA_1}{dt} e^{i\omega_0 t}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -4\omega_0^2 (A_2 e^{2i\omega_0 t} + A_2^* e^{-2i\omega_0 t}) + 4i\omega_0 \frac{dA_2}{dt} e^{2i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для производных, стоящих в правых частях уравнений (1), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} yg &= g \frac{dy}{dt} + y \frac{dg}{dt} = \begin{cases} 3A_2 e^{3i\omega_0 t} + 3A_2^* e^{-3i\omega_0 t} - A_2 e^{i\omega_0 t} - A_2^* e^{-i\omega_0 t}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T, \end{cases} \\ \frac{d}{dt} f &= \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^*}{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^* + 1} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

В последнем выражении функцию под знаком производной можно разложить в ряд Фурье, пренебрегая зависимостью от времени на периоде для амплитуды A_1 ,

$$\frac{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^*}{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^* + 1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n e^{in\omega_0 t},$$

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^*}{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^* + 1} e^{-in\omega_0 t} d(\omega_0 t).$$

Так как нерезонансные члены при усреднении обратятся в нуль, оставим только слагаемое $I_2 e^{2i\omega_0 t}$. Применяя замену $e^{-2i\omega_0 t} = z$, интеграл I_2 можно вычислить, используя теорию вычетов,

$$I_2 = \frac{2A_1^2}{\sqrt{4|A_1|^2 + 1} \left(\sqrt{4|A_1|^2 + 1} + 2|A_1|^2 + 1 \right)}.$$

Подставив выражения (4), (6) и (7) в исходные уравнения (1), получим

$$\frac{dA_1}{dt} e^{i\omega_0 t} + \frac{\gamma}{2} (A_1 e^{i\omega_0 t} - A_1^* e^{-i\omega_0 t}) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{i\gamma a^2}{4} (3A_2 e^{3i\omega_0 t} + 3A_2^* e^{-3i\omega_0 t} - A_2 e^{i\omega_0 t} - A_2^* e^{-i\omega_0 t}), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T, \end{cases}$$

$$\frac{dA_2}{dt} e^{2i\omega_0 t} + \frac{\gamma}{2} (A_2 e^{2i\omega_0 t} - A_2^* e^{-2i\omega_0 t}) =$$

$$= \frac{\gamma A_1^2 e^{2i\omega_0 t}}{\sqrt{4|A_1|^2 + 1} \left(\sqrt{4|A_1|^2 + 1} + 2|A_1|^2 + 1 \right)} + \sum_{n=-\infty}^1 I_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=3}^{+\infty} I_n e^{in\omega_0 t}. \quad (7)$$

Считая, что A_1 , A_2 и их производные почти не меняются за период, умножим первое уравнение (7) на $e^{-i\omega_0 t}$, а второе на $e^{-2i\omega_0 t}$ и усредним их по периодам основных частот. В результате придем к системе уравнений для медленных комплексных амплитуд

$$\frac{dA_1}{dt} + \frac{\gamma}{2} A_1 = \begin{cases} \frac{i\gamma a^2}{4} A_2, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T, \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{dA_2}{dt} + \frac{\gamma}{2} A_2 = \frac{\gamma A_1^2}{\sqrt{4|A_1|^2 + 1} \left(\sqrt{4|A_1|^2 + 1} + 2|A_1|^2 + 1 \right)}.$$

Заметим, что комплексные амплитуды выражаются через вещественные амплитуды r_1 и r_2 и фазы колебаний φ и ψ следующим образом:

$$A_1(t) = \frac{r_1(t)}{2} e^{i\varphi(t)}, \quad A_2(t) = \frac{r_2(t)}{2} e^{i\psi(t)}. \quad (9)$$

4. Результаты численного решения укороченных уравнений

Обсудим результаты, полученные на основе уравнений для медленных амплитуд (8). На рис. 8 показаны временные реализации, найденные при численном решении уравнений для значений параметров $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$. На рис. 9 изображены зависимости вещественной амплитуды первого осциллятора r_1 и динамической переменной x от времени за два периода внешнего воздействия ($\omega_0 = 6\pi$).

Сравнение с результатами, обсуждавшимися в разделе 2, свидетельствует о хорошем соответствии между решениями исходных и укороченных уравнений, что подтверждает правомерность использования приближенных уравнений в рассматриваемой области параметров. Хаос в системе проявляется в случайной вариации максимумов амплитуды колебаний осцилляторов и случайных скачках фаз на последовательных периодах воздействия внешним сигналом.

На рис. 10 представлен портрет аттрактора для системы укороченных уравнений, в проекции на плоскость медленных амплитуд (r_1, r_2) . Это изображение выполнено в той же технике, что и рис. 3.

На рис. 11 показана диаграмма, иллюстрирующая динамику фазы второго осциллятора, построенная на основе численного решения укороченных уравнений. По горизонтальной оси отложено значение аргумента комплексной переменной A_2 в момент времени $t_n = nT$, а по вертикальной – в момент $t_{n+1} = (n+1)T$, где T – период внешнего воздействия. Фаза отнесена к интервалу от 0 до 2π . На рис. 12 изображен аттрактор системы укороченных уравнений в проекции на плоскость фаз колебаний (φ, ψ) . Очевидно сходство полученного изображения с итерационной диаграммой для отображения Бернулли.

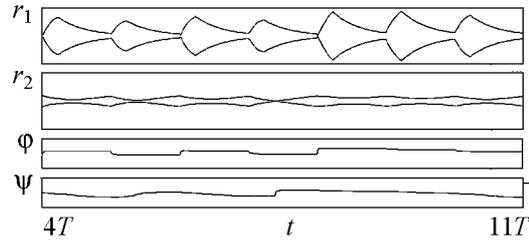


Рис. 8. Временные зависимости вещественных амплитуд r_1 , r_2 и фаз φ , ψ в установившемся режиме, полученные при численном решении системы уравнений (8) при значениях параметров $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$.

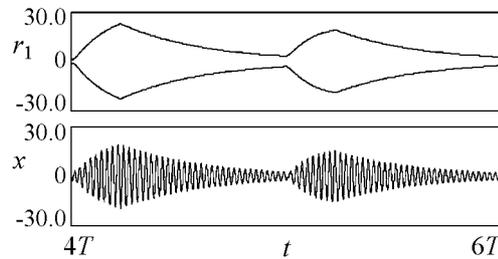


Рис. 9. Сравнение временных зависимостей вещественной амплитуды первого осциллятора r_1 и быстрой переменной x

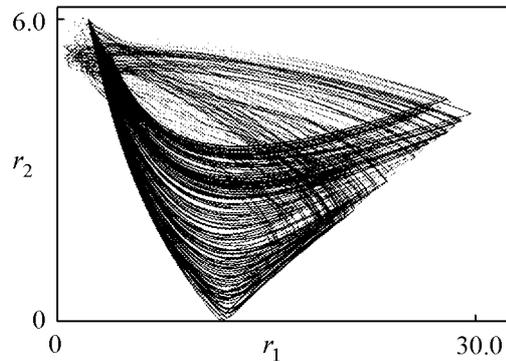


Рис. 10. Аттрактор системы укороченных уравнений в проекции на плоскость (r_1, r_2) .

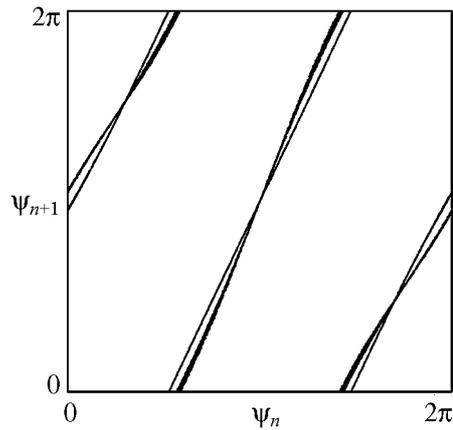


Рис. 11. Динамика фазы второго осциллятора для системы укороченных уравнений

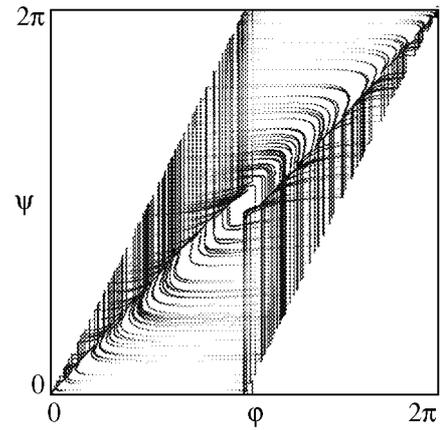


Рис. 12. Аттрактор системы укороченных уравнений в проекции на плоскость фаз колебаний \$(\varphi, \psi)\$

Заключение

В статье предложена схема генератора гиперболического хаоса в виде кольцевой системы, состоящая из двух линейных осцилляторов (полосовых фильтров), усилителя с квадратичной нелинейной характеристикой и нелинейного элемента, на который периодически подается последовательность радиоимпульсов. Собственная частота первого осциллятора вдвое меньше собственной частоты второго. На элементе с квадратичной нелинейной характеристикой происходит удвоение частоты и фазы сигнала от первого осциллятора. На другом нелинейном элементе сигнал от второго осциллятора смешивается с внешним вспомогательным сигналом и затем поступает на первый осциллятор. При определенных значениях параметров динамика фазы колебаний описывается растягивающим отображением окружности, что является принципиальным условием существования аттрактора Смейла–Вильямса в фазовом пространстве системы.

Математически модель описывается неавтономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с периодическими коэффициентами. Также получена система уравнений для медленных комплексных амплитуд. Проведено численное решение исходных уравнений и уравнений для медленных амплитуд, установлено хорошее соответствие обоих способов описания в рассматриваемой области параметров. Продемонстрирована хаотическая природа динамических режимов. От системы дифференциальных уравнений осуществлен переход к отображению возврата Пуанкаре. При этом в четырехмерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре реализуется аттрактор типа Смейла–Вильямса. На основании расчетов построена итерационная диаграмма для фазы колебаний, которая приблизительно совпадает с диаграммой для отображения Бернулли. Вычислены показатели Ляпунова отображения Пуанкаре и построены их графики в зависимости от управляющего параметра. Гладкая зависимость старшего показателя от параметра подтверждает предположение о структурной устойчивости аттрактора. При этом величина старшего показателя приблизительно равна $\ln 2$, что соответствует приближенному описанию динамики фазы колебаний растягивающим отображением окружности.

Полученные результаты позволяют предполагать существование гиперболического аттрактора в фазовом пространстве рассмотренной системы. Для подтверждения этого предположения представляется необходимой численная проверка выполнения критерия конусов [1,3,8] и более детальное исследование динамики системы. Тем не менее представленные в данной статье результаты уже свидетельствуют о том, что предложенная модель генератора может найти применение в радиотехнике, электронике и нелинейной оптике, поскольку позволяет реализовать хаотические режимы, нечувствительные к выбору параметров и характеристик системы. Одно из достоинств с точки зрения возможных информационно-коммуникационных приложений состоит в том, что для динамики на аттракторе типа Смейла–Вильямса, который реализуется в данной системе, естественным образом строится символическая динамика с бинарным кодированием принадлежащих аттрактору траекторий, каждой из которых однозначно сопоставляется бесконечная последовательность двух символов (например, 0 и 1).

Автор выражает благодарность руководителю работы профессору С.П. Кузнецову, а также И.Р. Сатаеву за полезные обсуждения и ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК–905.2010.2.

Библиографический список

1. *Кузнецов С.П.* Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 5.
2. *Синай Я.Г.* Как математики изучают хаос // Математическое просвещение. 2001. Сер. 3, вып. 5. С. 32.
3. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. 192 с.
4. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 290 с.
5. *Shilnikov L.* Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: Tutorial // International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.7, № 9, 1997. P. 1953.
6. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Основы теории сложных систем. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.
7. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
8. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, № 2. С. 400.
9. *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 3.
10. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.

11. TSTOOL Home Page: <http://www.physik3.gwdg.de/tstool/>
12. *Van der Pol B.* A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations // *Radio Review.* 1920. Vol. 1. P. 701, 754.
13. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1958. 406 с.
14. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Ю.* Теория колебаний: 2-е изд. М: Физматгиз, 1959. 916 с.
15. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*4.03.2010
14.05.2010*

CIRCULAR NON-AUTONOMOUS GENERATOR OF HYPERBOLIC CHAOS

V.P. Kruglov

A scheme of circular system is introduced, which is supposed to generate hyperbolic chaos. Its operation is based on doubling of phase on each complete cycle of the signal transmission through the feedback ring. That is a criterion for the attractor of Smale–Williams type to exist. Mathematically, the model is described by the fourth order non-autonomous system of ordinary differential equations. The equations for slowly varying complex amplitudes are derived, and the Poincaré return map is obtained. Numerical simulation data are presented. The attractor of Smale–Williams type is observed in the Poincaré cross-section. The computations indicate that the dynamics of phases is described approximately by the Bernoulli map. Lyapunov exponents for the Poincaré map are estimated, and their dependence on parameters is plotted. Smooth dependence of the largest Lyapunov exponent on parameters supports the structural stability of the observed attractor.

Keywords: Hyperbolic chaos, Smale–Williams attractor, Bernoulli map, structural stability.



Круглов Вячеслав Павлович – родился в 1990 году. В 2007 году окончил среднюю школу № 8 Саратова. В настоящее время студент 3 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. В 2009 году участвовал в научных конференциях «Нелинейные дни для молодых» и «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: kruglovyacheslav@gmail.com