



## ОСОБЕННОСТИ МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫХ РЕЖИМОВ НЕСИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*М.В. Поздняков, А.В. Савин*

Исследуется явление мультистабильности в несимметрично связанных логистических отображениях. Выявлена эволюция областей существования мультистабильности в пространстве параметров, а также бассейнов притяжения сосуществующих режимов при введении асимметрии связи.

*Ключевые слова:* Мультистабильность, удвоения периода.

### Введение

Как хорошо известно, многие динамические системы демонстрируют мультистабильность – сосуществование нескольких (а иногда очень многих) аттракторов при одних значениях параметров [1–4]. При этом реализация какого-либо аттрактора в конкретном натурном либо численном эксперименте определяется выбором начальных условий, соответствующих бассейну притяжения этого аттрактора. Помимо практического интереса к исследованию мультистабильности, вызванного необходимостью оценить типичность исследуемого режима при произвольном выборе начальных условий, такое исследование является важной теоретической задачей, позволяющей углубить представления о вариантах эволюции различных динамических режимов. Отметим, что интерес к явлению мультистабильности не ослабевает (см., например, обзорную работу [5]).

Особый тип мультистабильности, исследуемый наиболее активно, возникает в связанных системах и выражается в сосуществовании аттракторов, для которых колебания различаются сдвигом фаз между подсистемами (фазовая мультистабильность) [3,4,6]. В системах с дискретным временем в этом случае сосуществуют синхронные (соответствующие идентичной динамике подсистем) и несинхронные аттракторы. Устройству бассейнов притяжения синхронного и несинхронного аттракторов, а также закономерностям появления и эволюции несинхронных аттракторов в

случае симметрично связанных систем с удвоениями периода посвящена обширная литература (см., например, [2–10]). В то же время явления, происходящие при введении несимметричной связи, изучены существенно меньше. Целью настоящей статьи и является некоторое восполнение этого пробела путем исследования эволюции как областей в пространстве параметров, в которых реализуется мультистабильность, так и бассейнов притяжения соответствующих аттракторов при отстройке связи от симметричной.

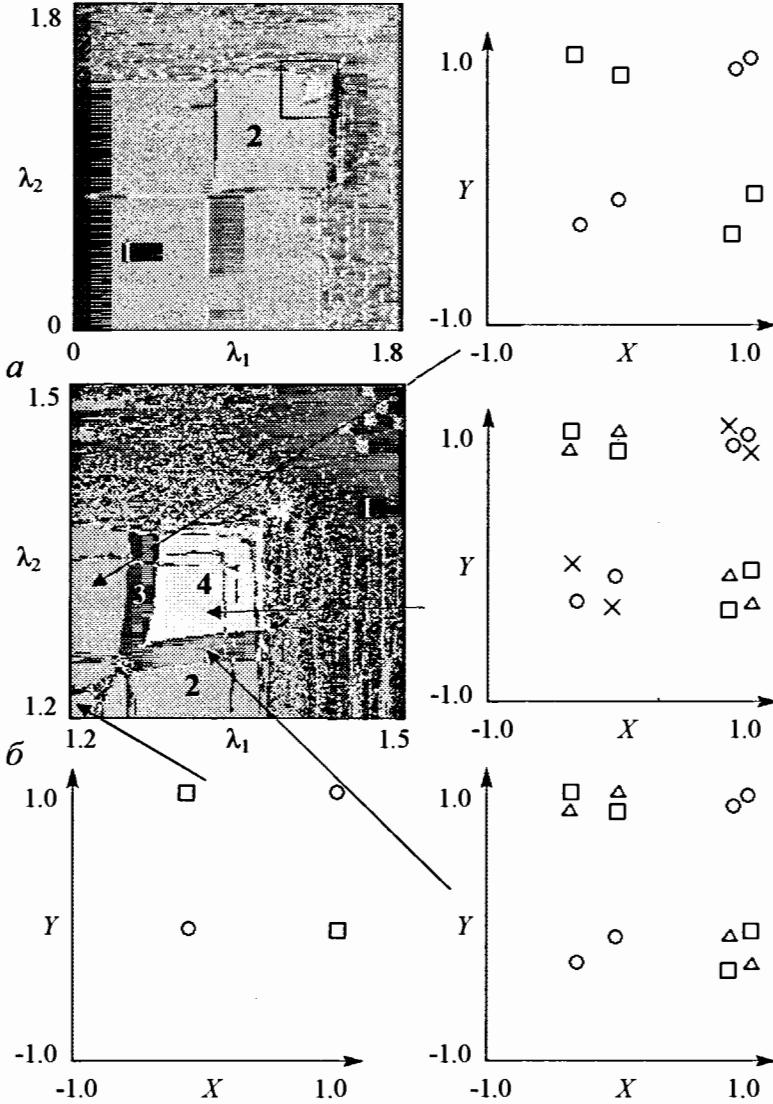


Рис. 1. Карта мультистабильности (а) и ее увеличенный фрагмент (б) системы (1) в симметричном случае ( $\epsilon = 0.01$ ;  $\delta = 0$ ). Цифрами обозначено количество сосуществующих в каждой области аттракторов, сами аттракторы в некоторых точках карты приведены на выносных рисунках; различные символы (кружки, квадратики, треугольники и крестики) обозначают положение элементов различных аттракторов

# 1. Исследование мультистабильности в несимметрично связанных логистических отображениях

В настоящей работе исследования проводились на примере системы связанных логистических отображений с инерционной связью [11]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda_1 x_n^2 + \varepsilon_1 (y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= 1 - \lambda_2 y_n^2 + \varepsilon_2 (x_n - y_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Для случая несимметричной связи коэффициенты  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  выбирались в виде  $\varepsilon_1 = \varepsilon - \delta, \varepsilon_2 = \varepsilon + \delta$ . Параметр  $\delta$  имеет в этом случае смысл расстройки связи.

Для численного исследования мультистабильности построим плоскость параметров системы, на которой различными оттенками серого будем обозначать области, соответствующие сосуществованию различного количества аттракторов. (Далее будем называть такую плоскость параметров «картой мультистабильности».) Для численного построения такой карты в каждой точке плоскости параметров путем итерации большого числа начальных условий определялись количество и тип сосуществующих аттракторов. Соответствующие карты для случая симметричной связи малой величины ( $\varepsilon = 0.01$ ) приведены на рис. 1. Для идентификации сосуществующих режимов на рис. 2 приведена «традиционная» карта динамических режимов [12] системы (1), на которой различными оттенками серого обозначены области устойчивости различных динамических режимов, при этом для моделирования в каждой точке плоскости параметров используется только один набор начальных условий  $x_0 = 0.1, y_0 = 0.3$ .

Сравнивая карту режимов с картой мультистабильности (см. рис. 1), можно видеть, что область сосуществования двух аттракторов опирается на линию бифуркации удвоения периода неподвижной точки, а после удвоения цикла периода два появляются области сосуществования трёх и четырёх аттракторов, что согласуется с результатами, полученными в [1–3].

Области мультистабильности располагаются вдоль диагонали  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Имеется одна область сосуществования двух аттракторов, опирающаяся на линию рождения цикла периода два. Если двигаться дальше вдоль диагонали, то после следующего удвоения периода появляются две смещенные относительно друг друга области сосуществования трех аттракторов, а в области их перекрывания наблюдается сосуществование четырех аттракторов. Сосуществующие в этих областях аттракторы пока-

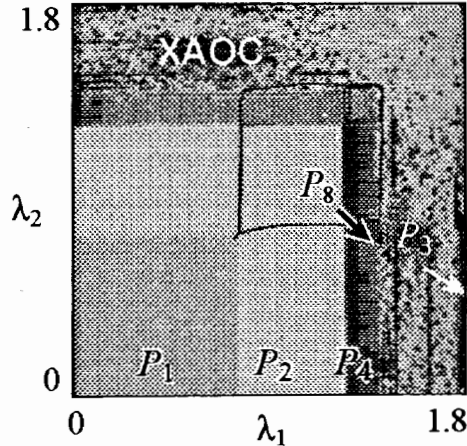


Рис. 2. Карта динамических режимов системы (1) в симметричном случае ( $\varepsilon = 0.01, \delta = 0$ ). Различными оттенками серого отмечены области устойчивости циклов различных периодов ( $P_1$  – неподвижная точка,  $P_2$  – цикл периода 2 и т.д.). Области сосуществования нескольких аттракторов обведены жирными линиями, сосуществующие в них аттракторы приведены на рис. 1

заны на выносных рисунках. Следует также отметить, что с ростом амплитуды связи  $\epsilon$  листы сосуществования трех аттракторов смещаются вдоль диагонали, уменьшаясь при этом по площади, и при несколько больших значениях амплитуды связи перекрывания листов не происходит.

Для анализа структуры аттрактора в зависимости от параметра в нелинейной динамике традиционно применяется метод построения бифуркационных деревьев [11]. В нашей работе была использована модификация этого метода [13,14], заключающаяся в построении на одном рисунке набора бифуркационных деревьев, различающихся выбранными начальными условиями.

Для удобства анализа синхронных и несинхронных режимов была использована замена динамических переменных в виде

$$\begin{aligned} U &= \frac{x+y}{2}, \\ V &= \frac{x-y}{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

соответствующая выбору осей координат на фазовой плоскости вдоль главной диагонали и перпендикулярно к ней.

Построенные в этих переменных деревья, соответствующие изменению параметров вдоль главной диагонали, приведены на рис. 3. Отметим, что на дереве для «поперечной» переменной  $V$  видна линия  $V = 0$ , соответствующая синхронному аттрактору. Остальные структуры отображают динамику на несинхронных аттракторах. В частности, можно видеть возникновение несинхронного аттрактора периода 2, а также возникновение одновременно с его удвоением еще двух несинхронных аттракторов периода 4.

Дерево для «продольной» переменной  $U$  отображает преимущественно динамику основного синхронного аттрактора, претерпевающего каскад бифуркаций удвоения периода. Сохраняющаяся после первой бифуркации удвоения центральная линия соответствует несинхронному аттрактору периода 2, так как вследствие присущей рассматриваемой системе симметрии значения переменной  $U$  в обеих точках этого аттрактора совпадают.

Теперь рассмотрим влияние введения отстройки связи от симметричной на мультистабильность. На рис. 4 приведены карта мультистабильности отображения (1) на плоскости управляющих параметров для значения амплитуды связи  $\epsilon = 0.01$  и

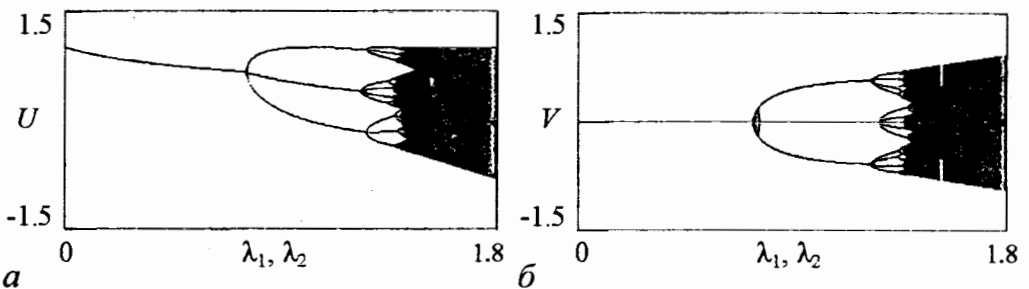


Рис. 3. Бифуркационные деревья системы (1) в переменных  $U$  (а) и  $V$  (б), построенные вдоль диагонали плоскости управляющих параметров отображения (1) при  $\epsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0$

отстройки по параметру связи  $\delta = 0.02$ , и соответствующая ей карта динамических режимов, на которой жирными линиями обведены области мультистабильности с тремя аттракторами. Видно, что эти области начинают расходиться перпендикулярно диагонали  $\lambda_1 = \lambda_2$ , а их площадь сокращается по сравнению с симметричным случаем. При этом соответствующие вновь образующимся аттракторам линии на бифуркационных деревьях (рис. 5) в отличие от симметричного случая не выходят из центральной линии. Причиной служит тот факт, что основание листов мультистабильности в этом случае не лежит на диагонали, поэтому при движении вдоль нее мы не наблюдаем самого момента отделения несимметричного аттрактора от диагонали.

При дальнейшем увеличении расстройки ( $\delta = 0.03$ ) листы, соответствующие сосуществованию трех аттракторов, перестают перекрываться, и сосуществования четырех аттракторов не наблюдается (рис. 6, а), а затем (при  $\delta = 0.05$ , рис. 6, б) эти листы существенно уменьшаются по площади.

Была также исследована эволюция листа, соответствующего сосуществованию двух аттракторов, на примере значения параметра связи  $\varepsilon = 0.1$ . Начиная со значения отстройки по параметру связи  $\delta = 0.05$ , становится заметным искажение этого

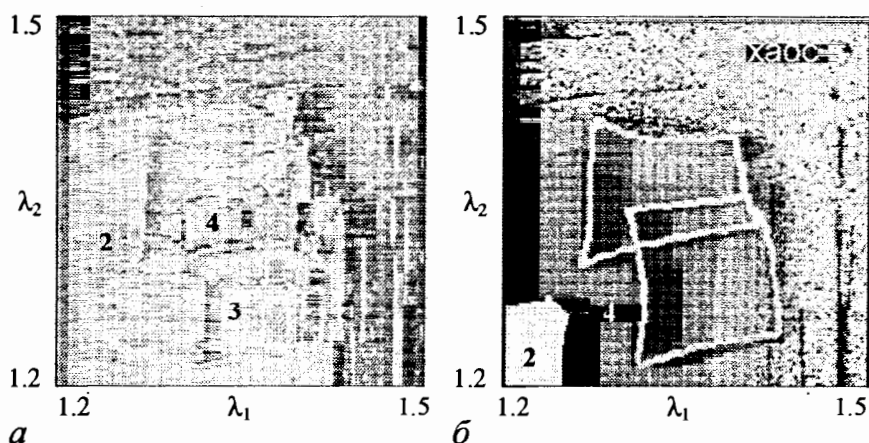


Рис. 4. Карта мультистабильности (а) и карта динамических режимов (б) отображения (1) при  $\varepsilon = 0.01$  и  $\delta = 0.02$ . На карте динамических режимов отмечены контуры, ограничивающие области сосуществования трех аттракторов

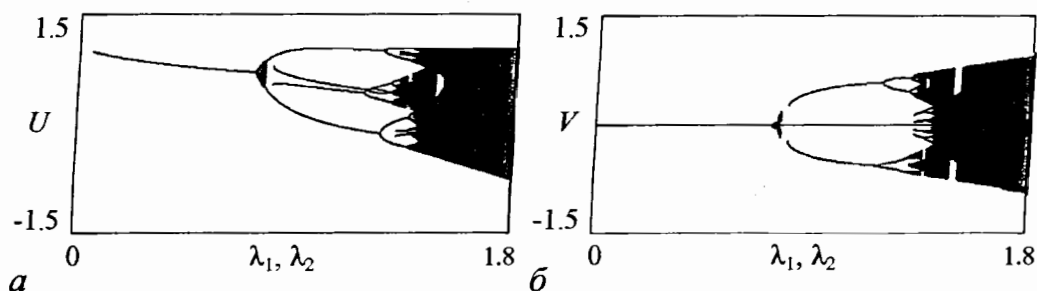


Рис. 5. Бифуркационные деревья системы (1) в переменных  $U$  (а) и  $V$  (б), построенные вдоль диагонали плоскости управляющих параметров отображения (1) при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.02$

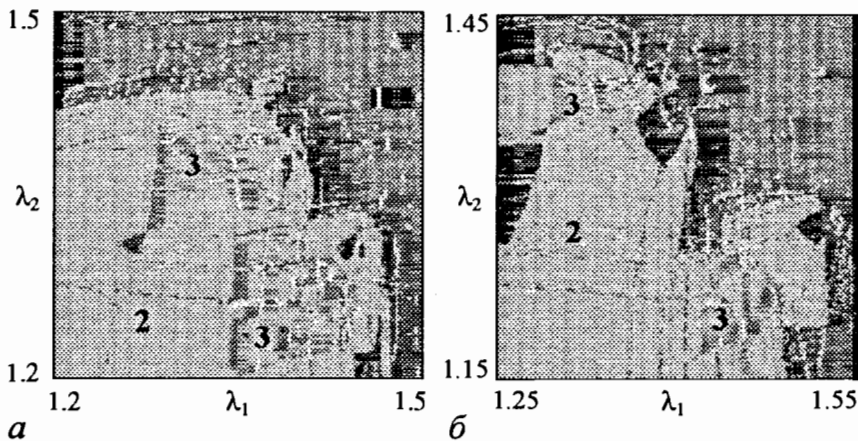


Рис. 6. Карта мультистабильности отображения (1) при различных значениях параметров:  $a - \epsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.03$ ;  $b - \epsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.05$

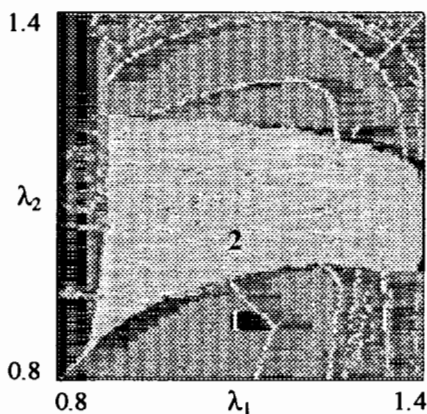


Рис. 7. Карта мультистабильности отображения (1) при  $\epsilon = 0.1$  и  $\delta = 0.05$

листа относительно диагонали (рис. 7). С ростом  $\delta$  сокращается его площадь, он становится несимметричным, но, в отличие от областей сосуществования трех аттракторов, продолжает опираться на диагональ.

Таким образом, можно заметить, что площадь областей мультистабильности сокращается при введении несимметричности связи. На рис. 8 приведены графики зависимости площади, занимаемой областями мультистабильности в пространстве параметров, от величины расстройки связи. Площадь оценивалась следующим образом: плоскость управляющих параметров сканировалась с определённым шагом по параметрам  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , затем подсчитывалось количество  $N$  точек плоскости, в которых сосуществует требуемое число аттракторов (то есть 2, 3 или 4). Полученное число умножалось на шаг по параметру  $\lambda_1$  ( $\Delta\lambda_1$ ) и по параметру  $\lambda_2$  ( $\Delta\lambda_2$ )

$$S = N\Delta\lambda_1\Delta\lambda_2. \quad (3)$$

При этом площадь области сосуществования двух аттракторов в случае  $\epsilon = 0.01$  определялась как сумма площадей всех мультистабильных состояний (с сосуществованием 2-х, 3-х и 4-х аттракторов), поскольку лист, на котором сосуществуют три аттрактора, образуется в результате удвоения периода несимметричного аттрактора и фактически является продолжением области сосуществования двух аттракторов. Общая площадь листов сосуществования трех аттракторов определялась как сумма площади области сосуществования трех аттракторов и удвоенной площади областей сосуществования четырех, так как последняя представляет собой перекрытие двух разных листов сосуществования трех аттракторов. Из графиков видно, что

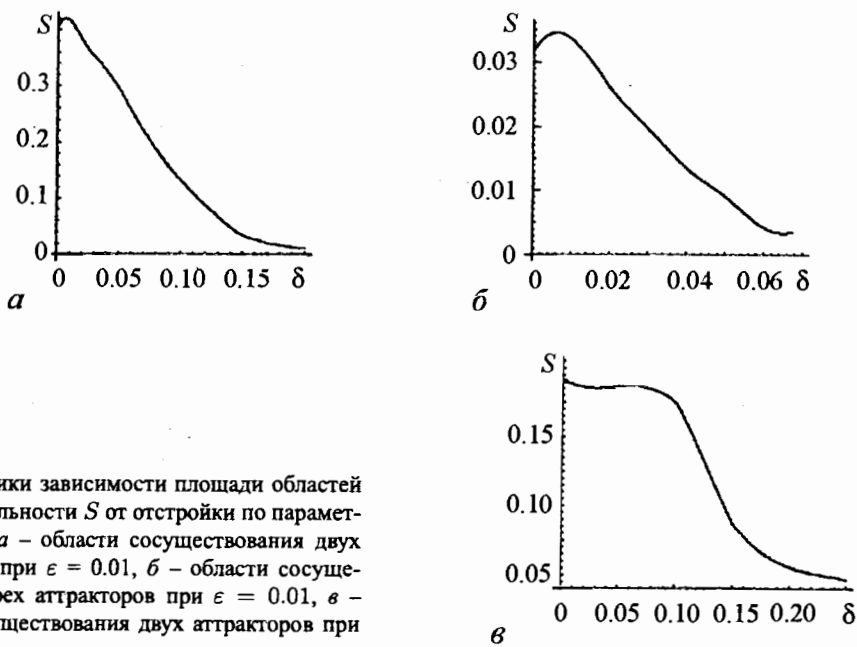


Рис. 8. Графики зависимости площади областей мультистабильности  $S$  от отстройки по параметру связи  $\delta$ :  $a$  – области сосуществования двух аттракторов при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $b$  – области сосуществования трех аттракторов при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $v$  – области сосуществования двух аттракторов при  $\varepsilon = 0.1$

изменение площади областей сосуществования двух и трех аттракторов происходит одинаково: вблизи значения отстройки по параметру связи, равному амплитуде связи, наблюдается некоторое увеличение площади, а при дальнейшем увеличении  $\delta$  происходит равномерное ее уменьшение.

При значениях отстройки  $\delta \approx 0.3$  мультистабильность переставала наблюдаться для обоих рассмотренных случаев величины связи ( $\varepsilon = 0.01$  и  $\varepsilon = 0.1$ ).

Наряду с исследованием областей пространства параметров, в которых возможна мультистабильность, существенный интерес представляет исследование бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов.

Были построены бассейны притяжения аттракторов отображения (1) для значений амплитуды связи  $\varepsilon = 0.01$  и  $\varepsilon = 0.1$  (рис. 9 и 10, соответственно). В симметричном случае они даже вблизи границ листов мультистабильности (рис. 9,  $a$ , 10,  $a$ ) имеют типичный для связанных систем вид, который сохраняется при введении небольшой отстройки по параметру связи  $\delta \sim 0.01 - 0.02$ . Однако с ростом отстройки, по мере того как листы мультистабильности с тремя аттракторами на плоскости управляющих параметров удаляются от диагонали, их бассейны притяжения существенно искажаются. При небольшом значении параметра связи возможно увеличение площади бассейна одного несинхронного\* аттрактора и уменьшение площади другого, в том числе слияние нескольких частей бассейна в одну связную область (рис. 9,  $b$ ). При большем его значении возможны более интересные трансформации бассейнов, в том числе «изрешечивание» бассейнов притяжения и фрактализация их границ (рис. 10,  $b$ ,  $v$ ).

\*Здесь мы продолжаем употреблять термины «синхронный» и «несинхронный» для обозначения аттракторов, хотя строго говоря, в случае несимметричной связи они не вполне корректны. В данном случае под синхронным следует понимать аттрактор, расположенный на диагонали при симметричной связи и вблизи нее при слабо несимметричной связи.

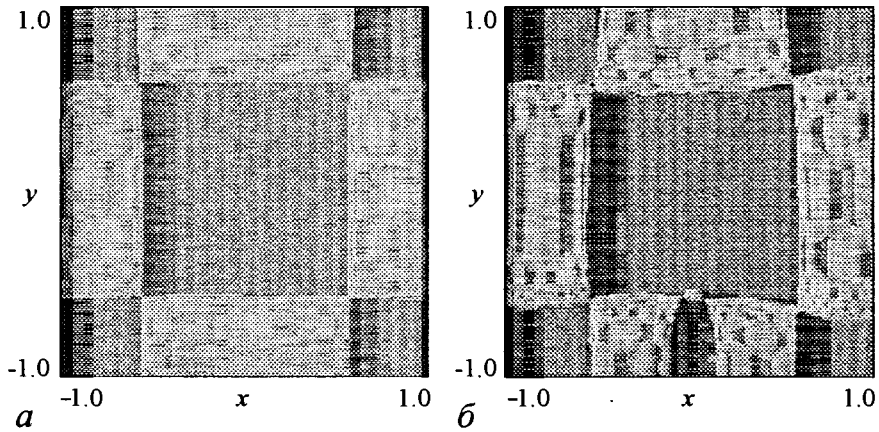


Рис. 9. Бассейны притяжения отображения (1) при значении амплитуды связи  $\varepsilon = 0.01$  и различных управляющих параметров: *a* –  $\lambda_1 = 1.3, \lambda_2 = 1.27, \delta = 0$ ; *б* –  $\lambda_1 = 1.485, \lambda_2 = 1.2, \delta = 0.05$ . Темным оттенком отмечен бассейн притяжения синхронного аттрактора, светлым – двух сосуществующих несинхронных аттракторов

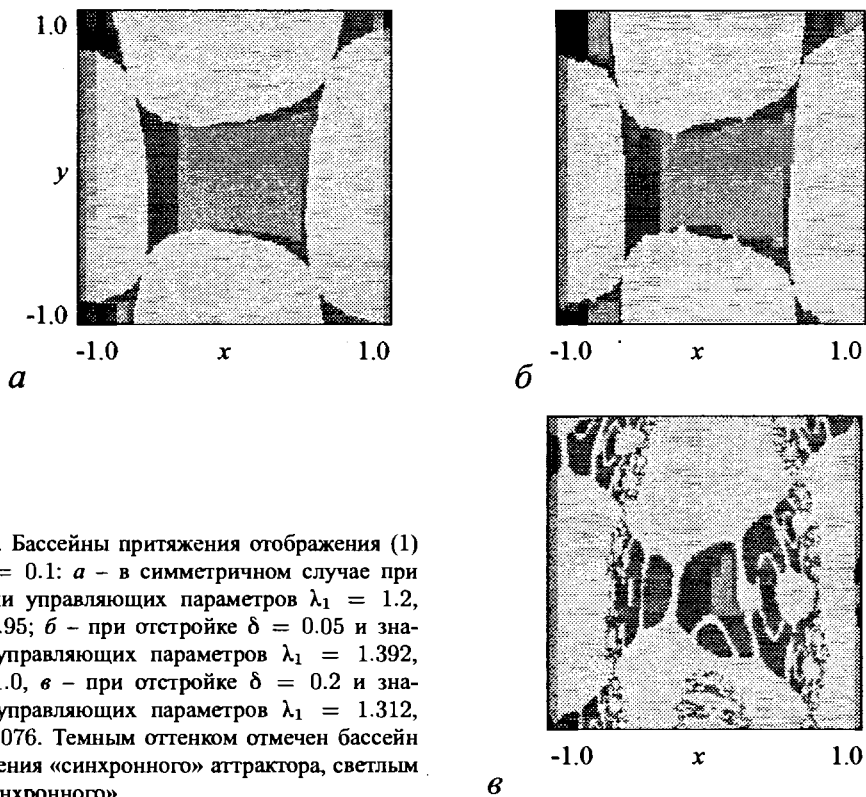


Рис. 10. Бассейны притяжения отображения (1) при  $\varepsilon = 0.1$ : *a* – в симметричном случае при значении управляющих параметров  $\lambda_1 = 1.2, \lambda_2 = 0.95$ ; *б* – при отстройке  $\delta = 0.05$  и значении управляющих параметров  $\lambda_1 = 1.392, \lambda_2 = 1.0$ , *в* – при отстройке  $\delta = 0.2$  и значении управляющих параметров  $\lambda_1 = 1.312, \lambda_2 = 1.076$ . Темным оттенком отмечен бассейн притяжения «синхронного» аттрактора, светлым – «несинхронного»



## Заключение

Для исследования мультистабильных состояний связанных (как симметричным, так и несимметричным образом) логистических отображений предложено осуществлять построение «карт мультистабильности», которые на плоскости управляющих параметров фиксируют число мультистабильных состояний. Такие карты удобно дополнять построением семейств бифуркационных деревьев, построенных не для одного, а для целого набора начальных условий. Введение несимметричной компоненты связи между взаимодействующими логистическими отображениями заметно сказывается на картине динамических режимов: области мультистабильности на плоскости управляющих параметров при введении отстройки связи смещаются относительно диагонали и становятся несимметричными, при этом их площадь спадает до нуля, демонстрируя незначительный максимум при малой, но ненулевой величине расстройки связи. Это говорит о заметном уменьшении числа мультистабильных состояний при введении асимметрии связи. При введении асимметрии связи существенно искажаются бассейны притяжения аттракторов. При небольшой асимметрии возможно слияние различных частей бассейнов в одну связную область, а при большой – появление «изрешечивания» бассейнов и фрактализация их границ.

Авторы благодарят профессора А.П. Кузнецова и к.ф.-м.н. И.Р. Сатаева за полезные консультации.

*Работа поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1./1738) Минобрнауки РФ и РФФИ (грант 09-02-00707).*

## Библиографический список

1. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во СГУ, 1999.
2. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнёв Е.П. Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ. 1990. Т. 60, вып. 10. С. 19.
3. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнёв Е.П. Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 3. С. 60.
4. Безручко Б.П., Селезнёв Е.П. Бассейны притяжения хаотических аттракторов в связанных системах с удвоением периодов // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, №4. С. 40.
5. Feudel U. Complex dynamics in multistable systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, № 6. P. 1607.
6. Fujisaka H., Yamada Y. Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32.
7. Postnov D.E., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Balanov A.G., and Mosekilde E. Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization // Chaos. 1999. Vol. 9. P. 227.
8. Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Balanov A.G., and Astakhov V.V. Phase multistability of synchronous chaotic oscillations // Discrete dynamics in Society and Nature. 2000. Vol. 4. P. 231.

9. *Sosnovtseva O.V., Postnov D.E., Nekrasov A.M., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.H.* Phase multistability of self-modulated oscillators // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. P. 0362.
10. *Постнов Д.Э., Некрасов А.М.* Механизмы фазовой мультистабильности при синхронизации 3D-осцилляторов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т.13, № 1–2. С. 47.
11. *Кузнецов С.П.* О критическом поведении одномерных цепочек // *Письма в ЖТФ.* 1983. Т. 9, №2. С. 94.
12. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
13. *Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A.* Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 1. P. 71.
14. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В.* Особенности динамики почти консервативного отображения Икеды // *Письма в ЖТФ.* 2007. Т. 33, вып. 3. С. 57.

*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию  
После доработки*

*3.12.2009  
20.05.2010*

## MULTISTABLE REGIMES IN ASYMMETRICALLY COUPLED PERIOD-DOUBLING SYSTEMS

*M.V. Pozdnyakov, A.V. Savin*

Multistable regimes in asymmetrically coupled logistic maps are investigated. The evolution of the multistability regions in the parameter plane and the basins of coexisting attractors are revealed.

*Keywords:* Multistability, period-doublings.



*Поздняков Михаил Валерьевич* – родился в Саратове (1986). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2008). В настоящее время аспирант кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – динамические режимы и мультистабильность в несимметрично связанных системах. Принимал участие в нескольких международных конференциях. Имеет 9 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: mpozdneyakov@yandex.ru



*Савин Алексей Владимирович* – родился в Саратове в 1980 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Доцент факультета нелинейных процессов СГУ, старший научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет более 20 научных публикаций в журналах. Область научных интересов – особенности поведения близких к консервативным нелинейным динамическим систем.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: savinA@info.sgu.ru