

НА ПУТИ К МНОГОМЕРНЫМ ТОРАМ

А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Л.В. Тюрюкина

Обсуждаются задачи о динамике автономной и неавтономной системы трех взаимно связанных автоколебательных осцилляторов, причем во втором случае внешний сигнал непосредственно возбуждает один осциллятор. Выявляются области существования полной синхронизации, двух-, трех- и четырехчастотных торов и хаоса. Выявлены три характерные ситуации внешнего воздействия сигнала на систему трех осцилляторов, одна из которых относится к случаю взаимного захвата автономных осцилляторов, а две других – к их квазипериодическим колебаниям. Показано, что в двух последних случаях многомерные торы не вытесняются хаосом и даже могут доминировать. Для рассматриваемой неавтономной системы обнаружены режимы, когда полная синхронизация внешним сигналом становится невозможной ни при какой амплитуде и частоте сигнала.

Ключевые слова: Синхронизация, фазовые осцилляторы, квазипериодическая динамика, хаос

Введение

Проблема синхронизации многочастотных колебаний является фундаментальной в нелинейной динамике и теории колебаний [1–5]. Исторически концепция поэтапного рождения все более многочастотных движений была выдвинута Ландау и Хопфом [6,7] для объяснения гидродинамической турбулентности. Подход Рюэля и Такенса [8] способствовал распространению мнения о том, что такой сценарий усложнения колебаний должен быть нетипичным – начиная с трехмерных систем многочастотные торы вытесняются хаотическими аттракторами. В последнее время выявлены новые интересные аспекты картины, которые заставляют по-новому взглянуть на задачу о синхронизации многочастотных, в частности, квазипериодических, колебаний высокой размерности. Так, в серии работ [5,9–13] обсуждены и установлены механизмы синхронизации резонансных циклов на торе, которые оказались существенно отличными от синхронизации «обычных» предельных циклов. Эти работы подкреплены радиофизическими экспериментами. В [12–13] использованы фазовые уравнения, описывающие возбуждение двух связанных автоколебательных осцилляторов внешней силой. Показано, что за возникновение трехчастотного режима отвечает бифуркация слияния и исчезновения устойчивой и неустойчивой инвариантных

кривых, чему в исходной системе соответствует аналогичная бифуркация торов. На плоскости частота – амплитуда воздействия область трехчастотных режимов имеет вид «языка», заканчивающегося в точке коразмерности два, в которой сходятся также две линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия, ограничивающие область полной синхронизации осцилляторов [12–13]. В [14] дан анализ той же плоскости параметров с использованием метода карт показателей Ляпунова, который выявил большое число резонансных двухчастотных режимов. Исследовались две качественно разные ситуации, которые отвечают режиму захвата двух автономных осцилляторов и режиму биений. В последнем случае появляется амплитудный порог полной синхронизации, и режимы трехчастотной квазипериодичности могут реализоваться даже при малой амплитуде сигнала.

Для обсуждения проблемы более многомерных торов необходимо повысить размерность системы и тем самым перейти к задаче о вынужденной синхронизации трех связанных автоколебательных осцилляторов. В качестве первого шага однако нужно рассмотреть в стиле работ [12–14] динамику трех взаимно связанных фазовых осцилляторов. Таким образом, в настоящей работе обсуждаются следующие вопросы:

- как располагаются в пространстве параметров трех диссипативно связанных фазовых осцилляторов области полной и частичной синхронизации, а также трехчастотной и двухчастотной квазипериодичности (включая резонансные режимы);
- какие качественно разные типы поведения демонстрирует неавтономная система трех возбуждаемых осцилляторов в зависимости от «внутренней» настройки параметров системы;
- типичны ли режимы трех- и четырехчастотной квазипериодичности в неавтономной системе трех фазовых осцилляторов и вытесняются ли многочастотные режимы хаотическими.

При обсуждении этих вопросов важно «отталкиваться» от физической постановки задачи, для чего в краткой форме приводится вывод соответствующих фазовых уравнений, использующий методику решения аналогичных задач для связанных осцилляторов ван дер Поля.

Отметим, что задача о динамике трех взаимно связанных фазовых осцилляторов в значительной мере исследовалась (например, фундаментальные монографии [2,3] или [15]). Здесь однако она представляет интерес несколько в ином контексте, что будет ясно из дальнейшего. Кроме того, ее обсуждение необходимо как предварительный этап для перехода к неавтономной системе трех осцилляторов. Следует отметить также, что исследование фазовых систем представляет интерес и в контексте динамики ансамблей из фазоуправляемых генераторов – систем фазовой автоподстройки частоты (ФАП) [15–17]. В рамках укороченных уравнений вопросы синхронизации многомодовых генераторов обсуждались также в [18].

1. Фазовая динамика трех связанных автоколебательных осциллятора

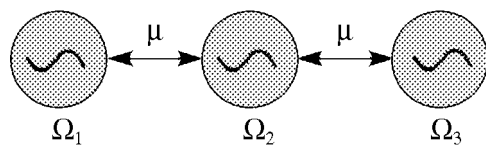


Рис. 1. Схематическое изображение трех связанных автоколебательных осцилляторов

1.1. Фазовые уравнения. Рассмотрим систему трех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, соединенных в цепочку, как показано на рис. 1. Система дифференциальных уравнений, описывающая взаимо-

действие таких осцилляторов, имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь λ – параметр возбуждения автономных осцилляторов, Δ_1 – частотная расстройка второго осциллятора относительно первого, Δ_2 – частотная расстройка третьего относительно первого, μ – коэффициент диссипативной связи. Частота первого осциллятора принята за единицу.

Если параметр возбуждения λ мал, то для анализа уравнений (1) можно применить метод медленно меняющихся амплитуд [1–5,19]. С этой целью представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{it} + a^*e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^*e^{-it}, \quad z = ce^{it} + c^*e^{-it}.\quad (2)$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – комплексные амплитуды осцилляторов, которые будем полагать медленно меняющимися на фоне колебаний с единичной частотой.

Наложим традиционные для такого метода дополнительные условия [19]

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{c}e^{it} + \dot{c}^*e^{-it} = 0.\quad (3)$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i(ae^{it} - a^*e^{-it}), \quad \dot{y} = i(be^{it} - b^*e^{-it}), \quad \dot{z} = i(ce^{it} - c^*e^{-it}).\quad (4)$$

Подставим соотношения (2)–(4) в уравнения (1), умножим полученные выражения на e^{-it} и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. После соответствующих преобразований приходим к следующим укороченным уравнениям:

$$\begin{aligned}2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_1 b - \mu_1(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_2 c - \mu(c - b).\end{aligned}\quad (5)$$

В полученных уравнениях управляющий параметр λ можно убрать следующей перенормировкой переменных и параметров:

$$a = \sqrt{\lambda}\bar{a}, \quad b = \sqrt{\lambda}\bar{b}, \quad c = \sqrt{\lambda}\bar{c}, \quad t = \bar{t}/\lambda, \quad \mu = \lambda\bar{\mu}, \quad \Delta_{1,2} = \lambda\bar{\Delta}_{1,2}.\quad (6)$$

В дальнейшем для сокращения записи черту над нормированными величинами будем опускать. Положим далее $a = Re^{i\psi_1}$, $b = re^{i\psi_2}$ и $c = ve^{i\psi_3}$ где R , r , v –

действительные амплитуды, а $\psi_{1,2,3}$ – фазы осцилляторов. Кроме того, в уравнениях для фаз вслед за [1–3] будем считать, что осцилляторы движутся в окрестностях стационарных невозмущенных орбит $R = r = v = 1$. Тогда получим

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2) + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_3 - \psi_2), \\ \dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_3).\end{aligned}\tag{7}$$

Вводя относительные фазы осцилляторов

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3,\tag{8}$$

приходим к фазовым уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta.\end{aligned}\tag{9}$$

При выключенной связи из (7) получаем следующие выражения для собственных частот первого, второго и третьего осцилляторов в принятой нормировке:

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \frac{\Delta_1}{2}, \quad \Omega_3 = \frac{\Delta_2}{2}.\tag{10}$$

Для дальнейшего анализа понадобятся значения частот захвата пар первый-второй и второй-третий осциллятор Ω_{1-2} и Ω_{2-3} при выключенной связи с оставшимся. Поскольку в случае диссипативной связи два осциллятора захватываются на частоте, являющейся средним арифметическим собственных частот [2], то

$$\Omega_{1-2} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} = \frac{\Delta_1}{4}, \quad \Omega_{2-3} = \frac{\Omega_2 + \Omega_3}{2} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4}.\tag{11}$$

1.2. Условие полной синхронизации трех осцилляторов. Найдем теперь условия полной синхронизации трех связанных осцилляторов (7), то есть режима, когда реализуется точный захват фаз всех трех осцилляторов. В этом случае $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3$. Тогда $\dot{\theta} = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$, и из (9) находим выражения для относительных фаз

$$\begin{aligned}\mu \sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3}, \\ \mu \sin \varphi &= \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3}.\end{aligned}\tag{12}$$

Отсюда следуют уравнения границ области захвата

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3},\tag{13}$$

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3}.\tag{14}$$

В пространстве параметров $(\Delta_1, \Delta_2, \mu)$ условия (13), (14) задают некоторые поверхности. Фиксируем одну из расстроек, например Δ_2 , и изучим устройство плоскости частотная расстройка Δ_1 – величина связи μ . На плоскости (Δ_1, μ) условия (13), (14) задают линии, показанные на рис. 2. Они определяют два языка традиционного вида с вершинами в точках

$$\Delta_1 = -\Delta_2, \quad \Delta_1 = 2\Delta_2. \quad (15)$$

Появление таких значений частотных расстроек имеет простое физическое объяснение. Разобьем исследуемую систему на две подсистемы, как показано на рис. 3, *а*. Частота захвата кластера из второго и третьего осцилляторов как единого целого в соответствии с (11) равна Ω_{2-3} . Условие резонанса этой частоты с частотой первого осциллятора следующее:

$$\Omega_1 = \Omega_{2-3}.$$

Подставляя сюда выражения для соответствующих частот из (10,11), получаем первое из условий (15). Если же разбить три осциллятора на две подсистемы, как показано на рис. 3, *б*, то получим резонансное условие

$$\Omega_{1-2} = \Omega_3.$$

Используя (10) и (11), в этом случае приходим ко второму условию (15).

Однако в отличие от случая двух осцилляторов, языки с вершинами в точках (15) при малой величине связи не отвечают состояниям равновесия. Обсудим этот вопрос подробнее. Внутри области P на рис. 2 в системе имеются четыре неподвижных точки: устойчивый и неустойчивый узел и два седла. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 4, *а*. Устойчивый узел отвечает за режим полной синхронизации. При выходе из области P при пересечении ее границы все четыре точки попарно сливаются, причем соответствующие бифуркации относятся к типу бифуркаций петли сепаратрисы седло-узловой положения равновесия. Пороговая ситуация показана на рис. 4, *б*. После этого равновесия исчезают, и остаются устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые (рис. 4, *в*). При этом режим полной синхронизации разрушается с возникновением двухчастотных колебаний.

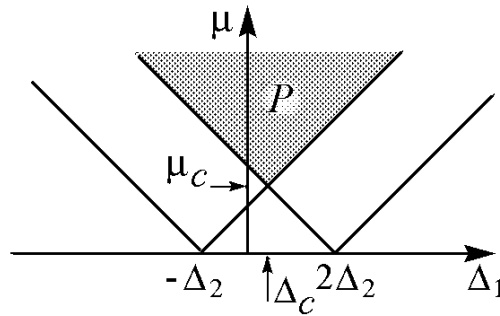


Рис. 2. Область полного захвата трех фазовых осцилляторов P и квазипериодических режимов (белый цвет). Линии отвечают условиям (13) и (14)

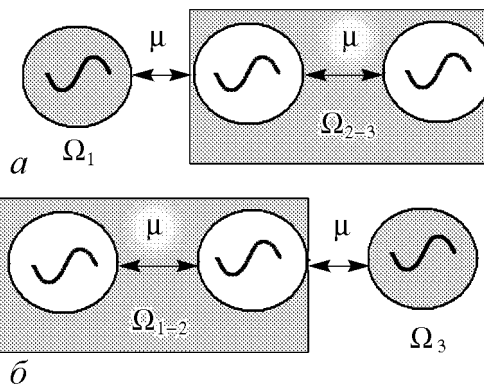


Рис. 3. Объединение трех связанных осцилляторов в подсистемы

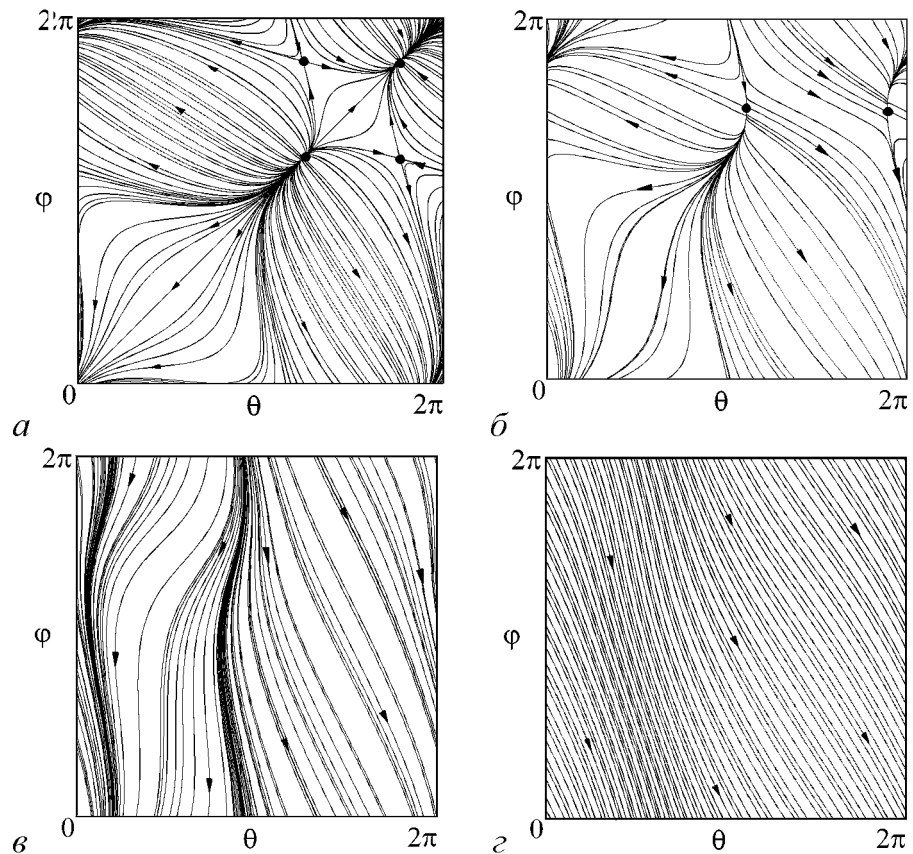


Рис. 4. Фазовые портреты системы (9) при $\Delta_2 = 1$: $a - \Delta_1 = 0.5, \mu = 0.75$; $b - \Delta_1 = -0.25, \mu = 0.75$; $v - \Delta_1 = -0.25, \mu = 0.25$; $z - \Delta_1 = -1.0, \mu = 0.25$

Как можно видеть из рис. 4, v , фаза θ осциллирует около положения равновесия. Поскольку, по определению, θ – относительная фаза первого и второго осцилляторов, это означает, что осцилляторы частично взаимно захвачены (см. рис. 3, b). Если затем уменьшить (с учетом знака) частотную расстройку Δ_1 , то устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые сливаются, режим двухчастотного тора разрушается и возникает режим трехчастотных колебаний, которому отвечает «поток» фазовых траекторий на фазовой плоскости (рис. 4, z).

Поясним механизм наблюдаемого поведения. Из соотношений (12) видно, что решения появляются парами: θ_1 и θ_2 для первого уравнения, φ_1 и φ_2 – для второго. При этом имеют место четыре неподвижные точки: $(\varphi_1, \theta_1), (\varphi_1, \theta_2), (\varphi_2, \theta_1), (\varphi_2, \theta_2)$. На фазовой плоскости они располагаются в вершинах прямоугольника (рис. 5, a). Их устойчивые и неустойчивые многообразия образуют замкнутый гетероклинический контур, как схематически показано на рисунке. Будем теперь варьировать одну из комбинаций параметров, стоящих в правых частях (12), например, вторую. Тогда решения θ_1 и θ_2 не меняются, а решения φ_1 и φ_2 сближаются. При выполнении условия (14) они сливаются. На рис. 5, b это будет отвечать одновременному слиянию пар состояний равновесия. После такой бифуркации остаются два многообразия, обозначенные M_1 и M_2 . Из них и возникают неустойчивая и устойчивая инвариантные кривые, причем вторая отвечает за режим частичного

захвата первого и второго осцилляторов. Если выйти через другую границу области полной синхронизации, то сливаются решения θ_1 и θ_2 и возникает режим частичного взаимного захвата второго и третьего осцилляторов¹ (см. рис. 3, а).

Две линии седло-узловых бифуркаций описанного типа сходятся на рис. 2 в точке, которую легко найти, совмещая (13) и (14),

$$\mu_c = \frac{\Delta_2}{2}, \quad \Delta_c = \frac{\Delta_2}{2}. \quad (16)$$

Эти значения отмечены стрелочками на рис. 2. Таким образом, область полной синхронизации имеет пороговый характер по величине связи, что отличает обсуждаемую ситуацию от случая двух связанных осцилляторов.

Вычислим теперь частоту захвата трех осцилляторов. Подставляя в любое из уравнений (7) условия (12), получаем

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}. \quad (17)$$

С учетом (10) это отвечает тому, что три осциллятора захватываются на частоте Ω^* , являющейся средним арифметическим собственных частот:

$$\Omega^* = \frac{\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3}{3} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}. \quad (18)$$

1.3. Различные режимы динамики трех осцилляторов. Проведенный выше анализ касался простейших режимов колебаний трех связанных осцилляторов. Для более полного исследования необходимо детально проанализировать устройство пространства параметров, привлекая численные методы и идентифицируя при этом режимы двух и трехчастотной квазипериодичности. С этой целью можно использовать численное определение сигнатуры спектра показателей Ляпунова, как это сделано, например, в [20,21,14]. При этом необходимо численно определить количество нулевых показателей. Равенство нулю показателей Ляпунова проверялось с точностью до допуска, величина которого составляла 10^{-3} . Точность вычисления самих показателей составляла порядка 10^{-4} . Следует отметить при этом, что вид карт на плоскости параметров не меняется существенно при увеличении длительности и точности расчетов и определенного уменьшения «невязки». Как и в [14], результаты будем представлять в виде карты, на которой разными цветами фиксируются типы динамики с разной сигнатурой спектра показателей Ляпунова. С этой целью вычисляются оба показателя Ляпунова системы (9) Λ_1, Λ_2 в каждой точке плоскости

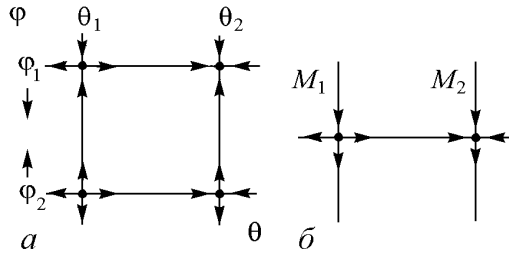


Рис. 5. а – «Каркас» из состояний равновесия и их многообразий системы (10), б – ситуация на пороге разрушения полной синхронизации

¹Эта картина обсуждается столь подробно, поскольку в данном случае она описывается во многом аналитически. Гомоклинические бифуркации более сложных типов играют важную роль в картине синхронизации сетей из небольшого числа фазовых осцилляторов [27,28].

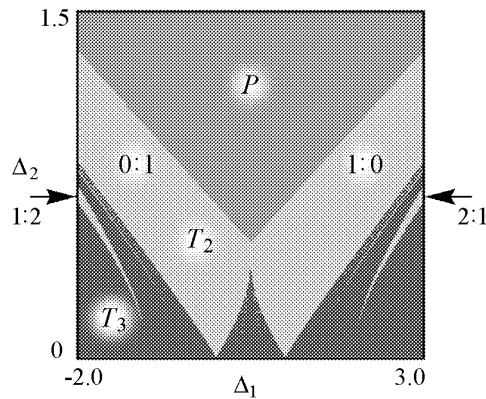


Рис. 6. Карта ляпуновских показателей трех связанных фазовых осцилляторов, $\Delta_2 = 1$

T_3 – трехчастотный тор. Эти термины весьма удобно использовать при характеристике режимов, что и будем делать далее. При этом нужно иметь в виду, что речь идет все же о двухчастотных и трехчастотных режимах, описанных с помощью фазовых уравнений.

Полученная карта системы (9) представлена на рис. 6. Анализируя этот рисунок, прежде всего отмечаем наличие области точного захвата всех трех осцилляторов P , которая отвечает аналитическому рассмотрению. В частности, выявляется амплитудный порог полной синхронизации трех осцилляторов. Область трехчастотной квазипериодичности занимает нижнюю часть карты. В нее погружены области двухчастотной квазипериодичности, имеющие вид характерных языков. Острия этих языков лежат на оси частотной расстройки.

В режиме двухчастотной квазипериодичности T_2 на «фазовом квадрате» $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ аттрактором системы (9) является инвариантная кривая (см. рис. 4, в). Такие режимы можно классифицировать с помощью величины $w = p : q$, где числа p и q отвечают количеству пересечений инвариантной кривой с вертикальной и горизонтальной сторонами фазового квадрата [22,23]. Поскольку фазовое пространство системы 2π -периодично по каждой переменной θ и φ , то оно может быть по ним замкнуто, так что образуется тор. При этом число $w = p : q$ определяет число вращения на этом торе [22,23].

Для простейших режимов числа вращения двухчастотных режимов легко определяются визуально по фазовым портретам, например, для рис. 4, в имеем $w = 0 : 1$. Однако для получения более детальной картины следует иметь удобный численный метод, пригодный для анализа всей плоскости параметров. Для этого можно модифицировать метод карт динамических режимов [24]. Выполним сечения Пуанкаре системы (9) линиями $\theta = 0$ и $\varphi = 0$ и определим числа p и q – период получаемого дискретного отображения в соответствующем сечении. При этом поскольку фаза может осциллировать, то нужно учитывать только существенные пересечения. Так, если траектория покидает фазовый квадрат через верхнюю границу и снова входит в него через нижнюю, значение p увеличивается на единицу, а если наоборот – уменьшается. Аналогично – для правой и левой границ.

Затем каждая точка плоскости параметров окрашивается в свой цвет в соответствии с величиной числа вращения. В результате получаем своего рода «карту торов», которая для наиболее интересных фрагментов плоскости параметров показана на рис. 7. Для удобства на более «крупномасштабной» ляпуновской карте на рис. 6 также указаны числа вращения основных режимов.

параметров (Δ_1, μ) . Затем эта плоскость окрашивается в соответствии с величиной показателей, так чтобы визуализировать следующие режимы:

- P – наличие устойчивой неподвижной точки (точный захват фаз), $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$;
- T_2 – двухчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$;
- T_3 – трехчастотный квазипериодический режим $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$.

Отметим, что режиму T_2 в исходной системе (1) в фазовом пространстве отвечает двухчастотный тор, а режиму

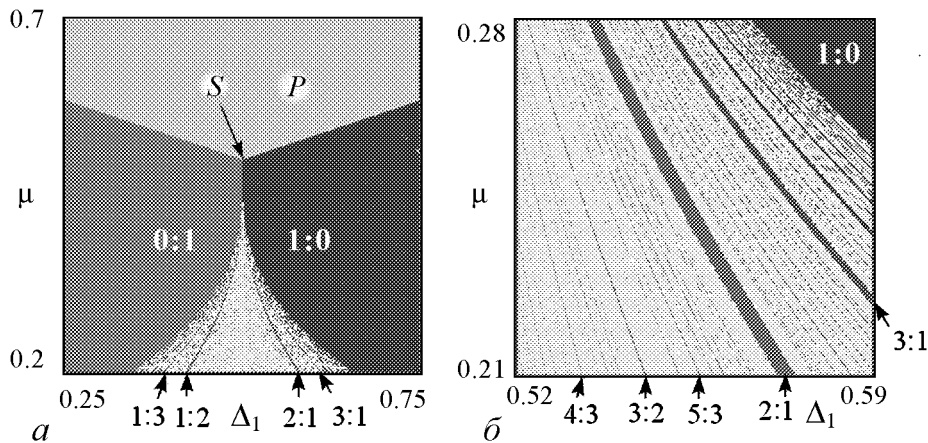


Рис. 7. «Карта торов» трех связанных фазовых осцилляторов в окрестности точки коразмерности два, обозначенной буквой S , $\Delta_2 = 1$

Самые большие языки резонансных двухчастотных торов на рис. 7 имеют числа вращения $w = 0 : 1$ и $w = 1 : 0$. В первом случае относительная фаза первого и второго осцилляторов осциллирует около равновесного значения (осцилляторы частично захвачены), в то время как фаза третьего неограниченно нарастает. Для $w = 1 : 0$ частично захвачена относительная фаза второго и третьего осцилляторов.

На рис. 7, *a* можно видеть очень сложное устройство плоскости параметров, которое на самом деле имеет место в окрестности точки (16), отвечающей порогу полной синхронизации и обозначенной S на карте. Так, область трехчастотных торов пронизана целой системой языков резонансных двухчастотных торов, самые широкие из которых имеют числа вращения $1 : 2$ и $2 : 1$, следующие – числа вращения $1 : 3$ и $3 : 1$ и т.д. О многообразии возможных двухчастотных торов можно судить по увеличенному фрагменту карты на рис. 7, *б*, на котором фиксируются области резонансных торов с числами вращения $4 : 3$, $3 : 2$, $5 : 3$ и т.д. При этом все языки имеют вершины в точке S .

Наличие точек такого типа, по-видимому, характерный атрибут задач о трехчастотной квазипериодичности. Так, аналогичные точки были представлены в работе [25] для связанных отображений поворота, моделирующих динамику связанных осцилляторов (рис. 4.21 в [25].) Там они получили название *saddle node fan* – «седлоузловой веер» в соответствии с характерным расположением системы высших языков двухчастотных торов. Например, об их наличии «сигнализирует» вид плоскости параметров в радиоэлектронном эксперименте [26]. Аналогичная точка для возбуждаемой системы двух осцилляторов наблюдается на иллюстрациях в [12,13] (правда, не представлены языки двухчастотных торов высокого порядка).

2. Неавтономная система трех фазовых осцилляторов

2.1. Фазовые уравнения возбуждаемой системы трех осцилляторов. Рассмотренная выше ситуация являлась простейшим примером появления двух- и трехчастотных колебаний. В духе подхода Ландау–Хопфа за этим следует рассмотреть ситуацию, когда возможными становятся четырехчастотные торы. Физически соответствующая постановка задачи получается, если добавить в систему (1) внешнее воздействие.

Рассмотрим систему трех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, возбуждаемых внешней силой

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь обозначения те же, что и в (1), а B и ω – амплитуда и частота внешней силы, соответственно.

Как и принято для метода медленно меняющихся амплитуд для неавтономных систем [1,19], в качестве «опорного» используем колебание на частоте сигнала, полагая

$$x = ae^{i\omega t} + a^*e^{-i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t} + b^*e^{-i\omega t}, \quad z = ce^{i\omega t} + c^*e^{-i\omega t}. \quad (20)$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – комплексные амплитуды осцилляторов. Накладывая дополнительное условие, аналогичное (3), получаем для скоростей осцилляторов

$$\dot{x} = i\omega(ae^{i\omega t} - a^*e^{-i\omega t}), \quad \dot{y} = i\omega(be^{i\omega t} - b^*e^{-i\omega t}), \quad \dot{z} = i\omega(ce^{i\omega t} - c^*e^{-i\omega t}). \quad (21)$$

Подставляя (20) и (21) в (19) и оставляя лишь слагаемые, изменяющиеся по закону $e^{i\omega t}$ (остальные являются быстро осциллирующими на этом фоне и исчезают при усреднении), получим

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a + i\frac{1 - \omega^2}{\omega}a - \mu(a - b) - \frac{B}{2\omega}, \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\frac{1 - \omega^2 + \Delta_1}{\omega}b - \mu(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c - i\frac{1 - \omega^2 + \Delta_2}{\omega}c - \mu(c - b). \end{aligned} \quad (22)$$

При условии $\lambda \ll 1$ можно использовать, что $\omega \approx 1$, и положить $(1 - \omega^2 + \Delta)/(2\omega) \approx 1 - \omega + \Delta/2$ и $B/\omega \approx B$. Кроме того, используя замену переменных, аналогичную (6), можно устранить параметр λ . В результате получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= a - |a|^2 a - 2i\Omega - \mu(a - b) - \frac{B}{2}, \\ 2\dot{b} &= b - |b|^2 b - i(2\Omega - \Delta_1)b - \mu(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= c - |c|^2 c - i(2\Omega - \Delta_2) - \mu(c - b). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\Omega \approx (\omega - 1)/\lambda$ – безразмерная отстройка частоты сигнала от единичной.

Уравнения для фаз получаем, полагая в (23) $a = Re^{i\psi_1}$, $b = re^{i\psi_2}$ и $c = ve^{i\psi_3}$. В этом случае фазы определены относительно внешнего сигнала. Считая, что осцилляторы движутся вблизи автономных орбит $R = r = v = 1$, для фаз осцилляторов

получаем

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\Omega - \frac{\mu}{2} \sin \theta + b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= -\Omega + \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\psi}_3 &= -\Omega + \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{24}$$

Здесь введены относительные фазы осцилляторов

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3.\tag{25}$$

2.2. Условия полной синхронизации трех осцилляторов внешней силой.

Найдем условие полной синхронизации трех осцилляторов внешней силой. Полагая в (24) $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3$, получаем

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{\mu}{2} \sin \theta + b \sin \psi_1, \\ \Omega - \frac{\Delta_1}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \theta - \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \Omega - \frac{\Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{26}$$

Разрешим эти уравнения относительно синусов фаз

$$\begin{aligned}3\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} &= b \sin \psi_1, \\ 2\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \theta, \\ \Omega - \frac{\Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{27}$$

Отсюда легко находим условия седло-узловых бифуркаций

$$\begin{aligned}b &= \pm 3 \left(\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6} \right), \\ \Omega &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4} \pm \frac{\mu}{4}, \\ \Omega &= \frac{\Delta_2}{2} \pm \frac{\mu}{2}.\end{aligned}\tag{28}$$

Входящие в эти уравнения значения частотных расстроек имеют простой физический смысл. $\Omega^* = (\Delta_1 + \Delta_2)/6$ – частота захвата трех автономных осцилляторов, $\Omega_{2-3} = (\Delta_1 + \Delta_2)/4$ – частота захвата второго и третьего при отключенном первом, а $\Omega_3 = \Delta_2/2$ – собственная частота третьего осциллятора.

По аналогии с обсуждением раздела 1.2 из соотношений (27) заключаем, что в режиме полной синхронизации система имеет ровно восемь состояний равновесия. Решения каждого из уравнений (27) появляются парами, так что в трехмерном пространстве $(\psi_1, \theta, \varphi)$ состояния равновесия располагаются в вершинах параллелепипеда. При вариации любой из комбинаций параметров в левой части (27) две

грани этого параллелепипеда будут сближаться, а другие будут неподвижными. При выполнении одного из условий (28) две соответствующие грани сливаются. Таким образом, в системе (24) при разрушении режима полной синхронизации одновременно попарно сливаются все восемь неподвижных точек. Эта картина аналогична рис. 5, только имеет место в трехмерном фазовом пространстве.

Обратимся теперь к устройству плоскости параметров частота – амплитуда воздействия (Ω, b) системы (24). Первое условие (28) задает на ней язык с вершиной, отвечающей центральной частоте трех осцилляторов Ω^* , как показано на рис. 8. Второе условие (28) определяет полосу, центр которой отвечает частоте взаимного захвата второго и третьего осцилляторов Ω_{2-3} , а ширина $\mu/2$ определяется величиной связи. Третье условие (28) также задает полосу, центр которой соответствует собственной частоте третьего осциллятора Ω_3 , а ширина равна точно константе связи μ .

При вариации параметров осцилляторов $(\Delta_1, \Delta_2, \mu)$ взаимное положение языка и двух указанных полос будет меняться. При этом реализуется достаточно большое количество вариантов. Они однако разбиваются на следующие три характерные группы в соответствии с рис. 8:

- а) полосы имеют общую область, которая захватывает вершину языка (рис. 8, а);
- б) полосы имеют общую область, однако она не захватывает вершину языка (рис. 8, б);
- в) обе полосы не имеют общей области (рис. 8, в).

Эти три ситуации определяют три типа динамики возбуждаемых осцилляторов. В случае а) в системе возможен полный захват трех осцилляторов внешней силой, причем амплитудный порог синхронизации отсутствует. В случае б) полный захват также возможен, но имеет место порог по амплитуде. В случае в) полный захват невозможен.

Отметим, что первые два случая имеют аналоги для задачи о возбуждении двух осцилляторов [12,14], а третий – нет. Итак, особенность системы из трех осцилляторов в том, что их можно «настроить» так, что полный захват внешней силой невозможен ни при каких значениях частоты и амплитуды сигнала.

Какой тип поведения из трех перечисленных реализуется, зависит от параметров автономных осцилляторов. Полезно указать конфигурацию соответствующих областей в пространстве этих параметров. Из (28) нетрудно получить, что две полосы не имеют общей области, если $\mu < (\Delta_1 - \Delta_2)/3$ или $\mu < (\Delta_2 - \Delta_1)/3$. В свою

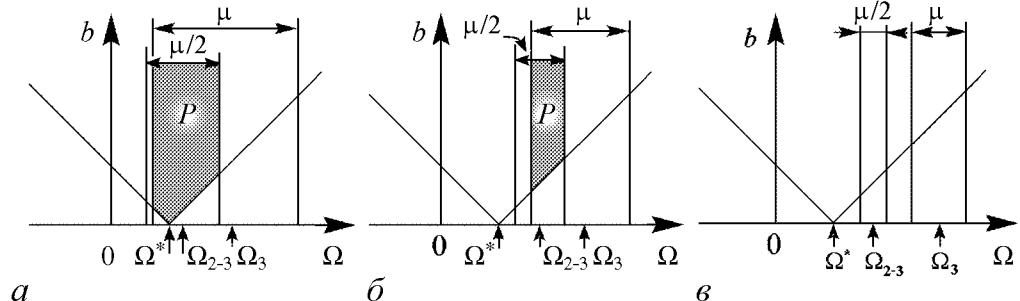


Рис. 8. Три основных типа устройства плоскости параметров частота – амплитуда воздействия (Ω, b) системы (24). Выделена область P полного захвата трех осцилляторов внешним сигналом

очередь, первая полоса захватывает вершину языка, если $\mu > (\Delta_1 - 2\Delta_2)/3$. Если $\mu > (2\Delta_2 - \Delta_1)/3$, то вторая полоса захватывает вершину языка.

Суммарный рисунок показан на рис. 9. На нем более темным цветом показана область, соответствующая ситуации а). Замечательно, что она одновременно отвечает взаимному захвату трех осцилляторов в отсутствие внешнего сигнала. Светло-серым цветом показаны значения параметров, которые отвечают ситуации б), и белым – ситуации в).

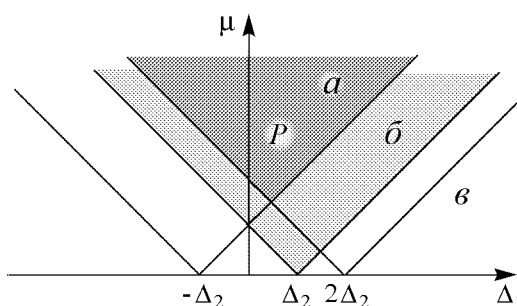


Рис. 9. Области на плоскости «внутренних» параметров системы трех осцилляторов, отвечающие трем типам а), б), в) устройства плоскости частота – амплитуда воздействия неавтономной системы на рис. 8

2.3. Многочастотные режимы. Карты показателей Ляпунова. Обратимся теперь к численному исследованию плоскости параметров частота – амплитуда воздействия (Ω, b) возбуждаемой внешним сигналом системы трех связанных осцилляторов (24). Параметры автономных осцилляторов выбираем следующим образом. Фиксируем частотные расстройки осцилляторов $\Delta_1 = 0.3$, $\Delta_2 = 1$ и используем три значения величины связи: а) $\mu = 0.65$, б) $\mu = 0.4$, в) $\mu = 0.15$. В этом случае реализуются режимы, отвечающие трем ситуациям, показанным на рис. 8, а, б, в. На рис. 10 представлены полученные численно соответствующие карты показателей Ляпунова. Отметим, что размерность системы (24) равна трем, поэтому она характеризуется тремя показателями Ляпунова.

На рисунке показаны области следующих режимов:

- P – наличие устойчивой неподвижной точки, $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$;
- T_2 – режим, отвечающий двухчастотному тору, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$;
- T_3 – режим, отвечающий трехчастотному тору, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 < 0$;
- T_4 – режим, отвечающий четырехчастотному тору, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = 0$;
- C – хаотический режим, $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$.

Если связь между осцилляторами велика, то вид карты на рис. 10, а соответствует случаю возбуждения двух осцилляторов [12–14]. Наблюдаются режимы полной синхронизации и двух-, и трехчастотных торов. При этом область полной синхронизации P имеет вид языка с острием точно на частоте взаимного захвата трех автономных осцилляторов Ω^* . Области трехчастотных торов имеют вид языков, вытянутых к точкам, в которых пересекаются две граничные линии области полной синхронизации. Более детальный анализ типов двухчастотных торов выявляет однако определенные отличия от случая возбуждения двух осцилляторов, как показано ниже.

Ситуация существенным образом меняется при переходе к случаю «умеренной» связи, когда осцилляторы в отсутствие внешнего сигнала не захвачены, рис. 10, б. Появляются два новых типа режимов – четырехчастотные торы и хаос. Эти типы динамики приходят на смену областям трехчастотных торов на рис. 10, а и располагаются как раз в области их локализации. Кроме того, исчезает амплитудный

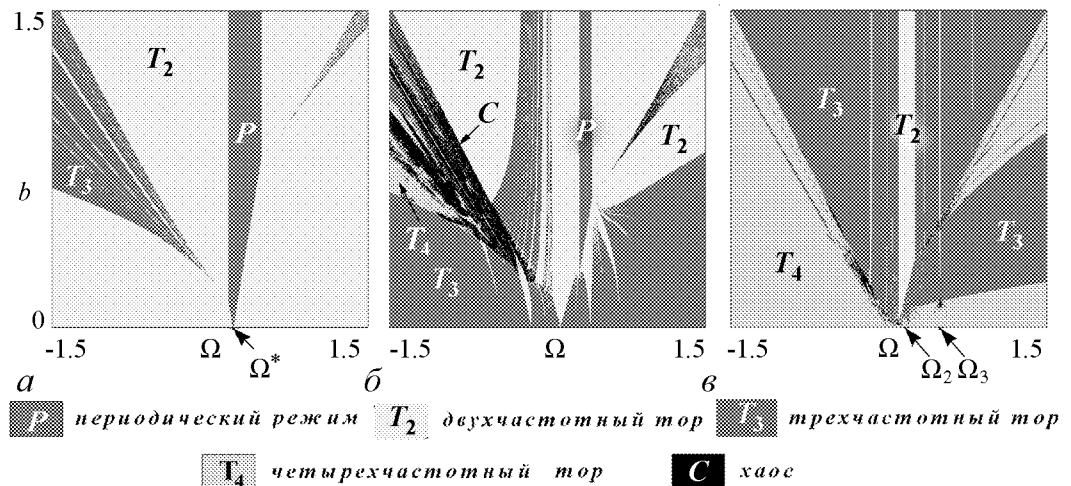


Рис. 10. Карты ляпуновских показателей системы (24) при $\Delta_1 = 0.3$, $\Delta_2 = 1$ и различных значениях μ : $a - 0.65$, $b - 0.4$, $v - 0.15$. Цветовая палитра расшифрована в подписи под рисунком; Ω^* – частота взаимного захвата трех автономных осцилляторов, Ω_2 и Ω_3 – собственные частоты второго и третьего осцилляторов

порог области полной синхронизации. В нижней части карты на смену двухчастотным торам на рис. 10, *a* приходят трехчастотные торы на рис. 10, *b*. Можно видеть однако еще одну область трехчастотных торов, пересекающую плоскость параметров сверху вниз. Детали ее внутреннего устройства также обсуждаются ниже.

Интересно обсудить полученную картину в контексте гипотезы Рюэля–Такенса. Подключение третьего осциллятора приводит к тому, что трехчастотные торы разрушаются; однако возникают как области хаоса, так и четырехчастотных торов. Области четырехчастотных торов и хаоса сосуществуют; при этом и тот, и другой режим являются типичными, ни один не превалирует над другим. Таким образом, картина вытеснения высокоразмерных торов хаотическими режимами не наблюдается.

Если еще более уменьшить связь, то четырехчастотные торы начинают доминировать (рис. 10, *v*). Они вытесняют области хаоса, которые становятся очень незначительными. Четырехчастотные торы наблюдаются теперь и в области малых амплитуд. Режим полной синхронизации осцилляторов исчезает вообще. Вместо него наблюдается лишь узкая полоса двухчастотных торов в окрестности собственной частоты второго осциллятора Ω_2 . Имеются еще несколько очень узких окон двухчастотных торов в виде вертикальных полос. Таким образом, в системе доминируют трех и четырехчастотные торы. Области хаоса располагаются только вдоль границ области трехчастотных торов, причем при не очень больших амплитудах сигнала. Хаос может наблюдаться также в узких областях пространства параметров в окрестности собственной частоты третьего осциллятора Ω_3 .

2.4. Многочастотные режимы. Карты торов. Для более детального описания и классификации наблюдаемых режимов дадим иллюстрации устройства пространства параметров системы (24) в виде «карт торов». Для этого при фиксированных параметрах системы определяем числа p , q и r существенных пересечений фазовой траектории с гранями фазового куба со сторонами $[0, 2\pi]$ в пространстве

(ψ_1, ψ_2, ψ_3) . После этого плоскость параметров окрашивается в разные цвета в соответствии с числами вращения $w = p : q : r^2$.

Полученные «карты торов» представлены на рис. 11. Числа вращения основных двухчастотных торов подписаны. Области трех, четырехчастотных торов и хаоса, которые в ходе численной процедуры фиксируются как непериодические режимы, показаны серым цветом.

Сначала обсудим случай большой связи (рис. 11, *a*), который соответствует карте Ляпунова на рис. 10, *a*. В области малых амплитуд доминируют режимы типа $w = 1 : 1 : 1$. В этом случае первый, второй и третий осциллятор демонстрируют частичный взаимный захват, то есть их относительные фазы $\theta = \psi_1 - \psi_2$ и $\varphi = \psi_2 - \psi_3$ осциллируют, но система в целом внешней силой не захвачена.

В области больших амплитуд в левой части карты имеется область трехчастотных торов, которую пересекают языки резонансных двухчастотных торов. Основные типы резонансных торов характеризуются числами вращения $w = p : q : r$, где $q = r$. Это означает, что второй и третий осциллятор взаимно (частично) захвачены. Система в определенном смысле ведет себя как два осциллятора: первый и взаимно захваченные второй и третий. Именно поэтому картина на рис. 10, *a* так похожа на случай двух осцилляторов. При увеличении частоты (движение слева направо на карте) из этих резонансов остается

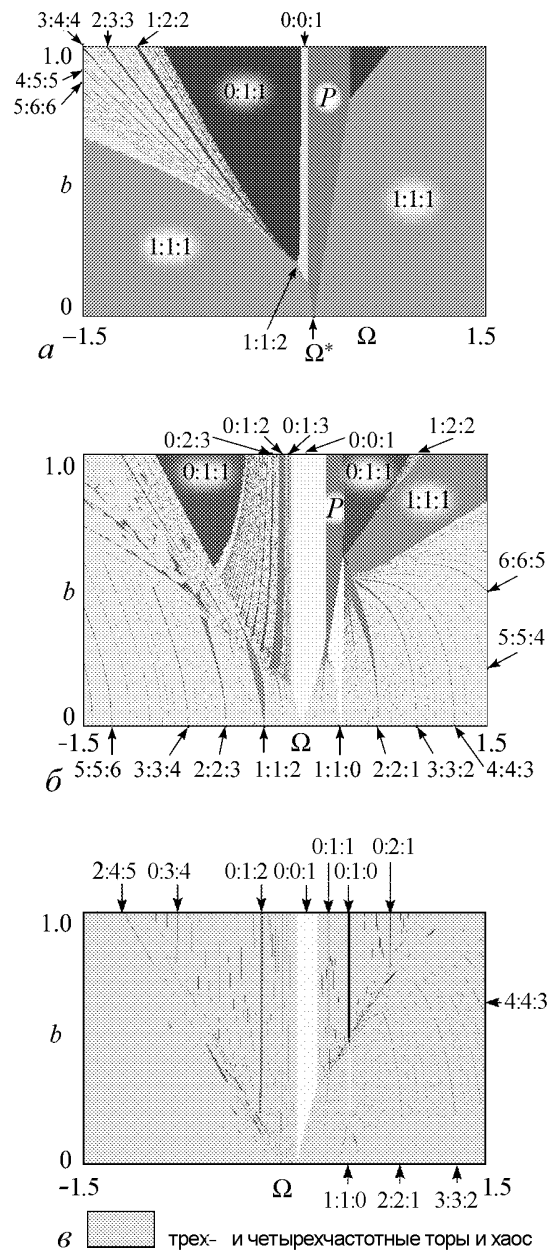


Рис. 11. Карты торов возбуждаемой системы трех связанных осцилляторов (24). Случаи *a*, *b*, *v* относятся к соответствующим конфигурациям на рис. 8, а значения параметров – на рис. 10

²К сожалению, в журнале можно представить только черно-белые иллюстрации, однако поскольку выбор цветовой палитры для чисел вращения вида $w = p : q : r$ априорно не столь очевиден, все же представляется целесообразным описать здесь использованную нами цветовую схему. Сначала определялось наибольшее число из трех чисел p, q, r : $M = \max(p, q, r)$. Затем красный, зеленый и синий цвета смешивались в пропорции $P/M : (1 - q/M) : r/M$. Делалось только одно исключение: для режима $1 : 0 : 1$ по такому правилу соответствовал белый цвет, плохо различимый на картах, поэтому он заменялся на светло-зеленый. Такие правила дают приемлемую цветовую гамму, причем соседние на карте языки с близкими числами вращения оказываются окрашенными в близкие цвета.

режим с числом вращения $w = 0 : 1 : 1$. Это означает, что внешняя сила произвела частичный захват первого осциллятора, а второй и третий по-прежнему взаимно захвачены, но их фазы неограниченно нарастают. Эта область достаточно широка. При дальнейшем увеличении частоты наступает момент, когда частично захваченным внешней силой оказывается и второй осциллятор, а фаза третьего неограниченно растет, так что $w = 0 : 0 : 1$. Наконец, захватываются внешней силой все три осциллятора, при этом захват оказывается уже не частичным, а полным – область P на рис. 11, *a*.

Указанные особенности приводят к разрушению характерной точки типа *saddle node fan*, в которой для системы двух возбуждаемых осцилляторов сходятся области трехчастотных торов и полной синхронизации. Действительно, теперь области трехчастотных торов и полной синхронизации не только разделены режимами $w = 0 : 0 : 1$, но вблизи нижней границы последней наблюдается еще и область $w = 1 : 1 : 2$. Более детальное исследование выявляет в ее окрестности и другие типы торов, например, $w = 1 : 1 : 3$ и т.д., занимающие малую, но конечную область на плоскости параметров. Отметим, что такая картина имеет место только вблизи низкочастотной границы области полной синхронизации P . Вблизи высокочастотной границы мы сразу попадаем в область $w = 0 : 1 : 1$.

Случай умеренной связи на рис. 11, *б* наиболее богат различными резонансами. В области больших амплитуд сигнала при переходе от рис. 11, *a* к рис. 11, *б* значительная часть резонансов $w = 0 : 1 : 1$ оказывается разрушенной. Ее пронизывает целая система областей, отвечающих частичному захвату внешним сигналом первого осциллятора при различных соотношениях с частотами второго и третьего осцилляторов. Наиболее широкие окна отвечают резонансам $0 : 2 : 3$, $0 : 1 : 2$, $0 : 1 : 3$, которые окружены областями трехчастотных торов. При этом уже не наблюдается захват относительной фазы второго и третьего осцилляторов.

Область одновременного частичного захвата внешней силой первого и второго осцилляторов $w = 0 : 0 : 1$ заметно увеличилась по ширине, и практически исчез амплитудный порог возбуждения таких колебаний. Область же полного и точного захвата всех трех осцилляторов P , наоборот, уменьшилась в размере и приобрела конечный амплитудный порог.

В области малых амплитуд наиболее широкие окна отвечают резонансам типа $w = p : p : q$, для которых, как нетрудно понять, взаимно захваченным (частично) является относительное движение первого и второго осцилляторов. При этом для третьего осциллятора, как правило, $q = p \pm 1$. Таким образом, первый и второй осцилляторы сильно связаны. Поэтому картина в области малых амплитуд также напоминает случай двух связанных осцилляторов.

Случай малой связи представлен на рис. 11, *в*. Как следует из аналитического рассмотрения и карты ляпуновских показателей, область полной синхронизации всех трех осцилляторов внешней силой исчезает вообще. Двухчастотные торы практически вытеснены более высокоразмерными. Резонансы типа $w = 0 : 1 : 1$ и $w = 1 : 1 : 1$, которым в предыдущих случаях отвечали самые большие области, практически полностью исчезают. Наиболее широкое оставшееся окно двухчастотных торов отвечает $w = 0 : 0 : 1$ – первый и второй осциллятор частично захвачены внешней силой. Эта область приходит на смену области полной синхронизации осцилляторов. Остальные резонансы, как правило, соответствуют частичному захвату

только первого осциллятора; им отвечают очень узкие области в виде вертикальных полос. При малой амплитуде воздействия резонансные области фактически сохраняются только при $\Omega > 0$ в виде традиционных языков, которые однако очень узкие.

Заключение

Особенность задачи о взаимной синхронизации трех автоколебательных осцилляторов состоит в наличии порога полной синхронизации по величине связи при фиксированной частотной расстройке одной пары. В области малой связи имеет место обширная область трехчастотных режимов, в которую встроены языки двухчастотных режимов, имеющие основания на оси частотной расстройки. Наиболее представительной, с точки зрения наблюдаемых режимов, является точка коразмерности два (saddle node fan, по терминологии [25]), отвечающая порогу полной синхронизации. В ее окрестности наблюдаются режимы частичной синхронизации первого и второго осциллятора и, соответственно, второго и третьего, а также система языков резонансных двухчастотных режимов различного типа.

Задача о возбуждении трех осцилляторов внешней силой выявляет три качественно разные ситуации. Первая из них соответствует режиму взаимного захвата трех автономных осцилляторов, а две вторые – их квазипериодическим колебаниям. В первом случае карта ляпуновских показателей выглядит качественно аналогично случаю вынужденной синхронизации двух связанных осцилляторов, однако имеются и определенные отличия. Так, характерная точка коразмерности два на плоскости параметров разрушается, а на ее месте формируется система мелкомасштабных областей различных двухчастотных режимов. При умеренной связи трех осцилляторов амплитудный порог трехчастотных режимов исчезает, теперь они доминируют в области малой связи. Возникают области четырехчастотных режимов и хаоса, которые однако имеют порог по величине связи.

Существенно новый момент для системы трех неавтономных осцилляторов состоит в том, что можно так «настроить» внутренние параметры осцилляторов, что режим полной синхронизации внешней силой становится вообще невозможным ни при каких амплитуде и частоте воздействия. Ему на смену приходит резонансный двухчастотный режим, отвечающий ситуации частичного захвата двух первых осцилляторов внешней силой, причем фаза третьего неограниченно нарастает. Области хаоса практически полностью исчезают, и режимы четырех и трехчастотной квазипериодичности доминируют. При этом четырехчастотные режимы возможны как в области малой, так и большой связи, если расстройка осцилляторов достаточно велика.

В системе возможно большое число различных типов двухчастотных резонансных режимов, которым соответствуют различные числа вращения $w = p : q : r$. Среди них выделяются семейства, отвечающие различным вариантам частичного захвата осцилляторов внешней силой.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00426 и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
2. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
3. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
4. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
5. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
6. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 8. С. 339.
7. *Hopf E.* A mathematical example displaying the features of turbulence // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1948. Vol. 1. С. 303.
8. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Commun. Math. Phys. 1971. Vol. 20, № 3. P. 167.
9. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // CHAOS. 2008. Vol. 18. 037123 (7 pages).
10. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 1. С. 39.
11. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 2. С. 69.
12. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
13. *Анищенко В.С., В.В. Астахов, Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
14. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 10. С. 73.
15. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Особенности динамики трех каскадно связанных генераторов с фазовым управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, №. 1–2. С. 159.
16. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Режимы поведения системы двух взаимосвязанных генераторов с фазовым управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, №. 4. С. 52.
17. *Матросов В.В., Корзинова М.В.* Коллективная динамика каскадного соединения фазовых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 2. С. 10.

18. Мельникова В.А. Кандидатская диссертация «О синхронизации многомодовых генераторов», 1977.
19. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания, 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
20. Battelino P.M. Persistence of three-frequency quasiperiodicity under large perturbations // *Phys. Rev. A*. 1988. Vol. 38, P. 1495.
21. Pazo D., Sanchez E., Matias M.A. Transition to high-dimensional chaos through quasiperiodic motion // *Journal of Bifurcation and Chaos*. 2001. Vol. 11, № 10. P. 2683.
22. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Том 1*. 2000. 149 с.
23. Keith W.L., Rand R.H. 1:1 and 2:1 phase entrainment in a system of two coupled limit cycle oscillators // *Journal of Mathematical Biology*. 1984. Vol. 20. P. 133.
24. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
25. Baesens C., Guckenheimer J., Kim S. and MacKay R.S. Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Physica D*. 1991. Vol. 49. P. 387.
26. Linsay P.S., Cumming A.W. Three-frequency quasiperiodicity, phase locking, and the onset of chaos // *Physica D*. 1989. Vol. 40. P. 196.
27. Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Y. Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators // *Physica D*. 2008. Vol. 237. P. 454.
28. Karabacak O., Ashwin P. Heteroclinic Ratchets in a System in Networks of Coupled Oscillators // *J. Nonlinear Sci*. 2010. Vol 20. P. 105.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

Поступила в редакцию 2.03.2010
После доработки 5.10.2010

ON THE WAY TOWARDS MULTIDIMENSIONAL TORI

A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, L.V. Turukina

The problem of the dynamics of three coupled self-oscillators and three coupled periodically driven self-oscillators is discussed, in the last case only one of the oscillators is directly excited by the external force. The regions of complete synchronization, two-, three- and four-frequency tori and chaos are revealed. Three typical situations of synchronization of three self-oscillators by the external driving are found. First situation refers to the mode locking of autonomous oscillators. Two other situations refer to quasi-periodic dynamics in the coupled autonomous oscillators. It is shown that multi-dimensional tori are not replaced by chaos and may dominate in the latter two cases. For the non-autonomous system under consideration the types of dynamics of three coupled oscillators are found, for which the complete synchronization of the system by the external driving is impossible independently of signal's amplitude and frequency.

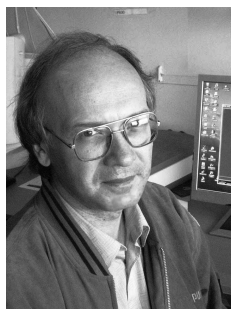
Keywords: Synchronization, phase oscillators, quasi-periodic dynamics, chaos.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).



410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: apkuz@rambler.ru

Сатаев Игорь Рустамович – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - критическая явления в нелинейной динамике, моделирование динамики на пороге хаоса, применение численных методов для решения ренормгрупповых уравнений. Автор более 30 научных публикаций.



410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: sataevir@rambler.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском государственном университете (2000), кандидат физико-математических наук (2003, СГУ). В настоящее время старший научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособий.



410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru