

АТТРАКТОР ТИПА СМЕЙЛА–ВИЛЬЯМСА В КОЛЬЦЕВОЙ СИСТЕМЕ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ЧАСТОТЫ

В.П. Круглов

В работе предложена радиотехническая модель кольцевой неавтономной системы, генерирующей, как предполагается, гиперболический хаос. Принцип работы модели основан на удвоении фазы колебаний за полный цикл передачи сигнала, что является условием существования аттрактора Смейла–Вильямса в фазовом пространстве. Функционирование схемы осуществляется благодаря плавной периодической вариации собственной частоты одной из двух колебательных подсистем, составляющих кольцо, от исходного значения до удвоенной величины.

Ключевые слова: Гиперболический хаос, аттрактор Смейла–Вильямса, структурная устойчивость.

В последнее время было предложено несколько подходов к построению систем с гиперболическим хаотическим аттрактором типа соленоида Смейла–Вильямса [1,2]. Главное преимущество этих систем, делающее их привлекательными для приложений, заключается в структурной устойчивости – нечувствительности характеристик генерируемого хаоса по отношению к вариации параметров, шумам и помехам.

Первый пример системы с аттрактором Смейла–Вильямса предложен в работе [3]. Схема строится на основе двух осцилляторов ван дер Поля, которые, благодаря модуляции параметра, становятся активными попеременно, и при этом передающих возбуждение друг другу с трансформацией фазы, описываемой растягивающим отображением окружности. Процесс преобразования возбуждения подразумевает удвоение частоты (и фазы) сигнала и смешение со вспомогательным сигналом фиксированной частоты и фазы, благодаря чему происходит возвращение в исходный частотный диапазон. Необходимость использования вспомогательного сигнала составляет очевидный недостаток этой схемы. Вариант без вспомогательного сигнала, основанный на нерезонансной передаче возбуждения, также возможен [4], но для него характерно существенное сужение области параметров, где реализуется гиперболический хаос, и представляется проблематичной возможность продвижения в область высоких частот (сравнительно с частотой модуляции параметров).

В настоящей работе предлагается схема, реализующая аттрактор типа Смейла–Вильямса, в которой в качестве модулируемого параметра выступает собственная

частота одной из подсистем. Благодаря этому оказывается возможным обеспечить требуемое преобразование частоты передаваемого возбуждения, сохранив резонансный характер процесса.

Рассмотрим кольцевую систему, состоящую из двух линейных фильтров второго порядка (осцилляторов) и одного нелинейного элемента (рис. 1). Через x и y обозначены соответственно сигналы от первого и второго осцилляторов. Частота первого осциллятора постоянна, частота второго изменяется периодически, причем ее минимальное значение совпадает с частотой первого осциллятора, а максимальное – превышает ее в два раза. Нелинейный элемент преобразовывает сигнал от первого осциллятора, обладая квадратичной характеристикой в области малых амплитуд и насыщением в области больших. Сигнал, прошедший через нелинейный элемент, обозначен как $f(x)$.

Предложенная модель математически описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= a\gamma \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \omega^2(t) y &= a\gamma \frac{d}{dt} f(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь γ – коэффициент затухания; a – коэффициент усиления; ω_0 – частота первого осциллятора; $\omega(t)$ – функция, описывающая модуляцию частоты второго осциллятора

$$\omega(t) = \omega_0 \left(1 + \sin^2 \left(\frac{\pi t}{T} \right) \right),$$

T – период модуляции. Функция, описывающая преобразование сигнала на нелинейном элементе, имеет вид

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

На рис. 2 изображены спектры сигналов $x(t)$ и $y(t)$, иллюстрирующие передачу возбуждения между осцилляторами (при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$). Наибольшей интенсивностью обладают составляющие сигналов в интервале между частотой первого осциллятора ω_0 и максимальной частотой второго осциллятора $2\omega_0$. Максимум плотности мощности первого осциллятора приходится на частоту ω_0 , второго – на $2\omega_0$, эти частоты отмечены на графиках вертикальными пунктирными линиями. При этом в спектре колебаний первого осциллятора содержатся гармоники с частотами, близкими к $2\omega_0$, возбуждаемые сигналом от второго осциллятора. Также в спектрах имеются гармоники, связанные с модуляцией частоты второго осциллятора.

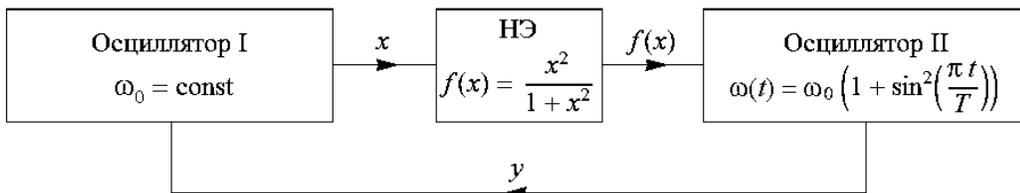


Рис. 1. Блок-схема предложенной модели

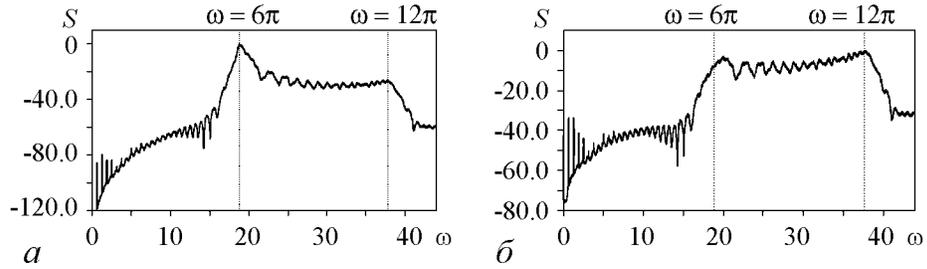


Рис. 2. Спектры плотности мощности сигналов от первого (а) и второго (б) осцилляторов ($\omega_0 = 6\pi$, $T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$). Значения по оси ординат отложены в логарифмическом масштабе в децибелах

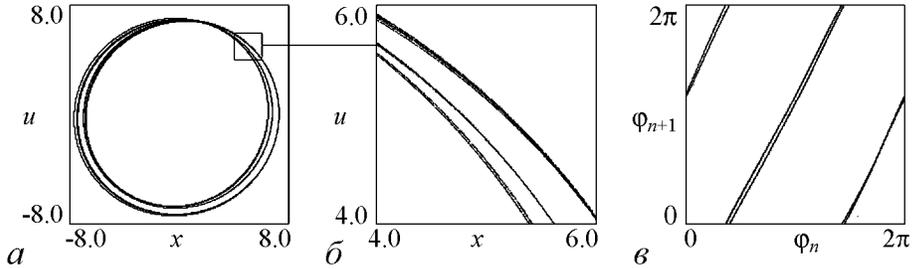


Рис. 3. Аттрактор системы (2) в сечении Пуанкаре (а) на плоскости динамических переменных (x, u) и его увеличенный фрагмент (б), итерационная диаграмма для фазы колебаний первого осциллятора (в) при тех же значениях параметров, что и на рис. 2

На рис. 3 изображен аттрактор отображения возврата Пуанкаре за период модуляции частоты в проекции на плоскость (x, u) , где u – дополнительная переменная ($\dot{u} = \omega_0 x$), и его увеличенный фрагмент. Полученный портрет визуально похож на аттрактор Смейла–Вильямса; это позволяет предполагать, что аттрактор является однородно гиперболическим. На рисунке отчетливо видна фрактальная структура аттрактора. На рис. 3, в представлена итерационная диаграмма отображения Пуанкаре для фазы колебаний первого осциллятора при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$. Фаза отнесена к интервалу от 0 до 2π . Как видно из диаграммы, динамика фазы приближенно описывается растягивающим отображением окружности: за полный проход точкой φ_n интервала от 0 до 2π ее образ φ_{n+1} проходит этот интервал дважды.

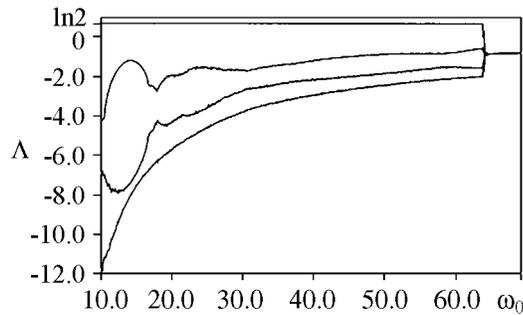


Рис. 4. Графики зависимости показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре от частоты первого осциллятора ω_0 при фиксированных значениях остальных параметров ($T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$)

Для аттрактора отображения Пуанкаре системы (1) был вычислен полный спектр показателей Ляпунова по алгоритму Бенеттина с ортогонализацией по Граму–Шмидту [5]. На рис. 4 показаны зависимости показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре от частоты первого осциллятора ω_0 при фиксированных значениях остальных параметров ($T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$). В широком интервале значений ω_0 старший показатель Ляпунова положителен, а остальные – отрицательны. В этом интервале старший показате-

тель гладко зависит от параметра, резкие провалы в отрицательную область, характерные для негиперболических аттракторов, отсутствуют. При этом величина старшего показателя в широком диапазоне изменения параметра остается близкой к $\ln 2$ – показателю Ляпунова отображения Бернулли, которое приближенно описывает динамику фазы колебаний в системе. Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве отображения Пуанкаре испытывает растяжение по одному направлению и сжатие по остальным трем за одну итерацию. Это соответствует построению гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса в четырехмерном фазовом пространстве.

Для аттрактора в сечении Пуанкаре была выполнена оценка распределения углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями в точках их пересечения. На рис. 5 представлена гистограмма распределения. Пересечения с углами, близкими или равными нулю, отсутствуют. Это подтверждает предположение о гиперболичности аттрактора, тогда как наличие касаний между многообразиями свидетельствовало бы о том, что аттрактор негиперболический [1,2].

Была выполнена оценка распределения инвариантной меры вдоль волокон аттрактора по алгоритму, разработанному И.Р. Сатаевым и описанному в главе 7 книги [1]. Распределение в проекции на плоскость (x, u) при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$ представлено на рис. 6. Распределение вдоль волокон гладкое, сингулярности и разрывы, характерные для негиперболических аттракторов [5], отсутствуют.

Полученные результаты (итерационная диаграмма для фаз, характерный вид аттрактора в сечении Пуанкаре, значения показателей Ляпунова) позволяют предполагать существование аттрактора типа Смейла–Вильямса в фазовом пространстве предложенной системы. Гладкая зависимость старшего показателя Ляпунова от параметра, дистанцированное от нуля распределение углов между многообразиями и гладкое распределение инвариантной меры вдоль волокон аттрактора являются типичными атрибутами гиперболической динамики.

Преимущество предложенной в настоящей работе схемы состоит в том, что для ее функционирования требуется единственный внешний гармонический сигнал, подаваемый только на один осциллятор и обеспечивающий периодическое изменение его собственной частоты. При этом система устроена так, что осуществляется резонансная передача возбуждения между осцилляторами. Система не содержит автоколебательных элементов, усиление неустойчивостей и их стабилизация обеспечиваются единственным нелинейным элементом. Поэтому на основе этой схемы

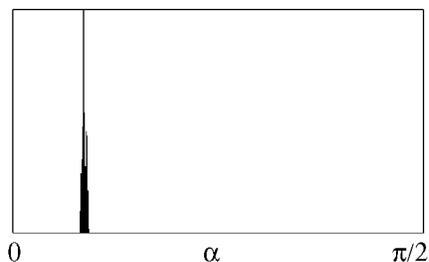


Рис. 5. Гистограмма распределения углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями для аттрактора в сечении Пуанкаре при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$

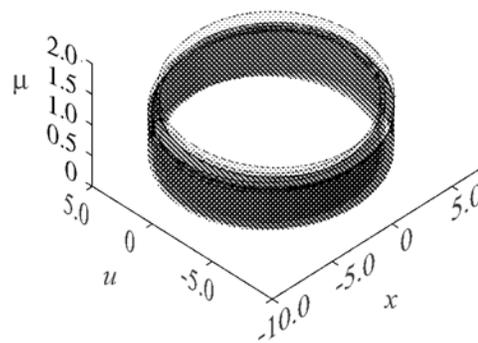


Рис. 6. Распределение инвариантной меры вдоль волокон аттрактора при тех же значениях параметров, что и на рис. 5

представляется возможным создание широкополосного генератора хаоса, не чувствительного к вариации параметров, шумам и помехам. Подобный генератор может найти применение в области информационных технологий, поскольку каждой траектории на аттракторе типа Смейла–Вильямса, который предположительно реализуется в данной системе, однозначно сопоставляется бесконечная последовательность двух символов (например, 0 и 1).

Автор выражает благодарность профессору С.П. Кузнецову и ведущему научному сотруднику И.Р. Сатаеву за обсуждение и помощь.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-02-00343.

Библиографический список

1. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012. 336 p.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // Успехи физических наук. 2011. Т. 181, № 2. С. 121.
3. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
4. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В.* Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 290 с.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 13.02.2012

ATTRACTOR OF SMALE–WILLIAMS TYPE IN A RING SYSTEM WITH PERIODIC FREQUENCY MODULATION

V.P. Kruglov

A scheme of circular nonautonomous system is introduced, which is supposed to generate hyperbolic chaos. Its operation is based on doubling of phase on complete cycle of the signal transmission. This is a criterion for the Smale–Williams attractor to exist. The performance is realized due to smooth periodic variation of natural frequency in one of the two oscillatory subsystems, which compose the ring, from reference value to the doubled one.

Keywords: Hyperbolic chaos, Smale–Williams attractor, structural stability.



Круглов Вячеслав Павлович – родился в 1990 году. В 2007 году окончил среднюю школу № 8 Саратова. В настоящее время студент 5 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Опубликовал 2 статьи в научных журналах, участник научных конференций «Нелинейные дни для молодых», «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» в 2009–2011 годах, школы-конференции «ХАОС-2010». Лауреат стипендии фонда «Династия».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: kruglovvyacheslav@gmail.com