Изв. вузов «ПНД», т. 20, № 3, 2012 УДК 517.9

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ СВЯЗАННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ПРОСТЕЙШИХ ФАЗОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Ю.В. Седова, Л.В. Тюрюкина

Рассматривается задача описания динамики связанных автоколебательных осцилляторов с помощью дискретных отображений на торе. Обсуждается методология построения таких отображений как простейших формальных моделей, так и физически мотивированных систем. Обсуждаются отличия случаев диссипативной и реактивной связи осцилляторов. С помощью метода карт ляпуновских показателей выявляются области двух- и трехчастотной квазипериодичности и хаоса. Исследуется и сопоставляется устройство резонансной паутины Арнольда для разных моделей.

Ключевые слова: Синхронизация, квазипериодические колебания, отображение для фазы.

Введение

Круг вопросов, ассоциирующихся с динамикой связанных автоколебательных осцилляторов, является фундаментальным в теории колебаний и нелинейной динамике [1–10]. Описание различных систем такого рода используется в радиофизике, микроволновой электронике, биофизике, химии [1–18]. Случай двух осцилляторов стал уже классическим и обсуждается во многих учебниках и монографиях. Однако, задача о поведении уже трех осцилляторов оказывается существенно более сложной и прояснена в гораздо меньшей степени. Одним из подходов к исследованию проблемы синхронизации многочастотных колебаний может служить построение и анализ отображений, которые гораздо проще для исследования, чем соответствующие дифференциальные уравнения. Для этого необходимо сопоставить фазовому потоку некоторое отображение, которое расширяет и дополняет свойства «порождающего» потока с позиций явления синхронизации и сопутствующих эффектов. В этом плане характерным является соотношение двух базовых моделей теории колебаний, описывающих динамику фазы в случае двух осцилляторов: уравнения Адлера для потока и синус-отображения окружности в случае дискретного времени [1, 2, 19, 20]. Моделирование трех связанных осцилляторов с помощью отображений явилось одной из основных мотиваций серии работ [21–23], в которых предложена простейшая и достаточно общая (по мнению авторов) модель. Несмотря на ее простоту, такая модель демонстрирует очень сложное и разнообразное поведение[1]. Однако проблема имеет некоторые важные моменты, которые пока не достаточно освещены и обсуждаются в настоящей работе. Мы покажем, что в случае трех осцилляторов не удается построить столь универсальную модель, как синус-отображение окружности в случае двух осцилляторов. Поэтому важным является физическая мотивация построения отображений, то есть учет тех или иных физических факторов и четкая физическая интерпретация использованных параметров. При этом мы дадим краткий обзор некоторых важных для физических задач результатов работ [21–23], а также представим некоторые новые иллюстрации для предложенной там модели. Однако главным является построение моделей в виде отображений для фаз на торе двух типов: для диссипативной и реактивной связи осцилляторов, а также их сопоставление с моделью Кима–Остлунда [21–23]. При этом мы будем использовать полученные сравнительно недавно результаты для фазовых потоков на торе [24–26], обобщающие уравнения Адлера и подходы к его анализу в случае трех осцилляторов.

1. Отображение окружности

Для дальнейшего нам понадобится краткое изложение мотивации введения в рассмотрение отображения окружности, как дискретного фазового осциллятора, что позволит пояснить подход, который применяется к большему числу осцилляторов. Кроме того, в этом разделе кратко коснемся особенностей синхронизации осцилляторов с диссипативной и реактивной связью, что также важно для дальнейшего обсуждения.

Как известно, если связь между автоколебательными системами мала, то для описания динамики достаточно изучить поведение их относительных фаз [1–10]. Наиболее простым инструментом для анализа фазовой динамики может служить дискретное отображение, которое возникает, например, при построении сечения Пуанкаре. В простейшем случае двух осцилляторов такое отображение для относительной фазы будет одномерным

$$\varphi_{n+1} = f(\varphi_n). \tag{1}$$

Для невозмущенной системы

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n, \tag{2}$$

так что фаза при каждой итерации получает постоянную добавку Ω. С точки зрения физики, уравнение (2) соответствует свободным колебаниям, а параметр Ω определяет разность собственных частот осцилляторов.

Свойство 2π-периодичности фазы позволяет считать, что после каждой итерации она остается в пределах интервала $(0, 2\pi)$.

Этот факт учитывают в отображении (2), записывая его как

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n, \quad \bmod 2\pi. \tag{3}$$

Знак $\bmod 2\pi$ означает, что отбрасывается часть, кратная 2π. В дальнейшем будем полагать такую процедуру выполненной, а знак $\mathrm{mod}2\pi$ для сокращения опускать.

[1]Достаточно сказать, что работа [23] занимает 89 страниц журнального текста.

Влияние дополнительных факторов (например, взаимодействие осцилляторов) может возмущать динамику отображения поворота (1), так что в общем случае следует записать

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n + f(\varphi_n), \tag{4}$$

где $f(\varphi)$ – 2π-периодическая функция. При итерациях отображения (4) можно считать, что изображающая точка движется по окружности, и поэтому отображение (4) является отображением окружности на себя.

Свойства отображения окружности зависят от конкретного вида функции $f(\varphi)$. Наиболее простой и популярной моделью является синус-отображение окружности [1,19,20]. К этой модели можно прийти разными способами. Например, используем свойство периодичности фазы и разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \sum a_m \sin m\varphi + \sum b_m \cos m\varphi. \tag{5}$$

Оставим теперь только первые, наиболее существенные члены ряда

$$f(\varphi) = b_0 + a_1 \sin\varphi + b_1 \cos\varphi + ... \tag{6}$$

Сумму $a\sin\varphi + b\cos\varphi$ можно представить в виде единственного гармонического члена с новой амплитудой и фазой: $a\sin\varphi + b\cos\varphi = c\sin(\varphi + \alpha)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\alpha = \mathrm{arctg}\,(b/a)$.

Таким образом, исходное отображение можно переписать в виде

$$\varphi_{n+1} = \Omega + b_0 + \varphi_n + c\sin(\varphi_n + \alpha). \tag{7}$$

Сделав замены $\varphi \to \varphi + \alpha$, $\Omega \to \Omega + b_0$, получаем одномерное синус-отображение окружности

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n + c\sin\varphi_n. \tag{8}$$

Представленный вывод не содержит физическую мотивацию построения отображения, соответственно его параметры, в определенном смысле, являются формальными. Поэтому используем другой подход, который позволяет прояснить связь параметров отображения с параметрами физической системы в контексте задач синхронизации.

Базовой моделью теории колебаний, описывающей явление взаимной синхронизации, является система двух связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля [1–4]

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (\lambda - x^2)\,\dot{x} + (1 - \Delta/2)\,x + \mu\,(\dot{x} - \dot{y}) + \varepsilon\,(x - y) = 0, \\ &\ddot{y} - (\lambda - y^2)\,\dot{y} + (1 + \Delta/2)\,y + \mu\,(\dot{y} - \dot{x}) + \varepsilon\,(y - x) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь λ – параметр отрицательного трения, отвечающий за возможность автоколебаний в отдельном осцилляторе, Δ – параметр частотной расстройки осцилляторов, μ – величина *диссипативной* связи, ε – величина *реактивной* связи.

В физическом плане система (9) описывает два связанных радиофизических автогенератора [1,2]. С этой точки зрения, важной является возможность двух типов связи. В первом случае автогенераторы связаны через резистор (сопротивление), а во втором – через реактивный элемент (емкость) [2].

Явление синхронизации состоит в том, что фазы осцилляторов подстраиваются друг под друга. Если параметр возбуждения, частотная расстройка и величина связи малы, то уравнения (9) допускают анализ в рамках квазигармонического приближения. Если, кроме того, предельные циклы автономных систем за счет связи практически не возмущаются, то достаточно следить только за относительной фазой осцилляторов φ. В случае диссипативной связи соответствующее уравнение хорошо известно и носит название уравнения Адлера [1,2,10]

$$\dot{\varphi} = -\Delta/2 - \mu \sin \varphi. \tag{10}$$

Уравнение Адлера описывает основные эффекты в системе, а именно, захват фазы колебаний внешним сигналом при $\mu > |\Delta|$ и режим биений при $\mu < |\Delta|$. Таким образом, на плоскости (Δ, μ) захвату фазы отвечает область внутри языка синхронизации (языка Арнольда), а квазипериодическим режимам – область вне его [1–10].

В расчетах дифференциальные уравнения заменяются конечными разностями, например, с помощью схемы Эйлера

$$\dot{\varphi} \to \left(\varphi_{n+1} - \varphi_n\right)/h, \tag{11}$$

где h – шаг дискретизации. На эту процедуру можно посмотреть и несколько иначе – как на один из способов построения *новых дискретных моделей*. Этот прием широко используется в работах одних из создателей теории стохастических колебаний Г.М. Заславского, Б.В. Чирикова, а также других авторов [27–30] при построении таких канонических моделей, как, например, стандартное отображение и др.

Применив такую процедуру к уравнению Адлера, получим

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \Delta h + h\mu \sin \varphi_n. \tag{12}$$

Параметр дискретизации в соотношении (12) можно убрать перенормировкой

$$\Delta \to \Delta/h, \quad \mu \to \mu/h. \tag{13}$$

В результате приходим к одномерному отображению для фазы в форме синус-отображения окружности

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \Delta + \mu \sin \varphi_n. \tag{14}$$

Таким образом, это отображение можно рассматривать как *дискретный фазовый осциллятор*, моделирующий синхронизацию двух диссипативно связанных автоколебательных систем.

Отображение окружности «наследует» основное свойство системы-прототипа – наличие основного языка синхронизации, которому теперь отвечает неподвижная точка отображения (14). При этом его граница, как и для уравнения Адлера, задается условием $\mu = \pm\Delta$. Однако, происходит и расширение круга описываемых феноменов, которые обнаруживают дополнительные особенности явления синхронизации.

Обратимся к карте динамических режимов синус-отображения окружности (8) (рис. 1). Карта получена следующим образом [20]: в каждой точке плоскости параметров (Δ, μ) численно определяется период цикла отображения (8), и эта точка окрашивается в определенный цвет в соответствии с полученным периодом. Эта

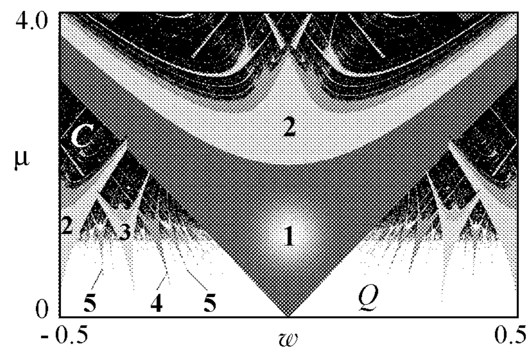

Рис. 1. Карта динамических режимов синус-отображения окружности. Цифрами указаны периоды циклов, Q – квазипериодические режимы, C – хаос

процедура повторяется для всей плоскости параметров. Периоды основных режимов подписаны на карте. Кроме того, белым цветом показаны квазипериодические режимы Q, а черным – хаоса C. Для визуализации этих режимов дополнительно рассчитывался ляпуновский показатель системы, при этом хаосу отвечает положительный показатель, а квазипериодическим режимам – нулевой.

На карте можно видеть усложнение картины в основной области синхронизации: внутри языка периода 1 наблюдаются удвоения периода, так называемые структуры *crossroad area* [20], и переход к хаосу. Также возникают языки синхронизации высшего порядка, которые фиксируются как режимы периода 2, 3, 4 и т.д., для которых частота колебаний и частота сигнала оказываются в некотором кратном отношении.

Несколько сложнее обстоит дело в случае реактивной связи. Этот тип связи – явление существенно более тонкое [1,2,5,31–33]. Влияние реактивной связи становится существенным (в отличие от диссипативной), только если возникает разница в размере орбит осцилляторов. Поэтому в фазовом приближении синхронизация оказывается эффектом второго порядка по величине связи (см. [31–33] и Приложение). В результате можно прийти к следующему фазовому уравнению:

$$2\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon^2 \sin 2\varphi. \tag{15}$$

Границы языка синхронизации в случае реактивной связи даются соотношениями $\varepsilon = \pm\sqrt{\Delta}$, так что язык имеет очень острое основание в виде корневой особенности. При этом возникает также новый эффект – *фазовая бистабильность*, когда устойчивый режим синхронизации возможен как в фазе $\varphi \approx 0$, так и в противофазе $\varphi \approx \pi$ [4,32–33]. Отметим, что задача о синхронизации многих осцилляторов в случае реактивной связи достаточно интересна не только в радиофизической интерпретации: например, она возникает при изучении структурообразования в ионных ловушках [34].

2. Отображения на торе

Если динамика фаз описывается it двумерным отображением, то в общем случае его можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + f(\varphi_n, \psi_n), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + g(\varphi_n, \psi_n), \end{aligned} \tag{16}$$

где функции являются 2π-периодическими по обоим аргументам: $f(\varphi + 2\pi n, \psi + +2\pi m) = f(\varphi, \psi)$ и $g(\varphi + 2\pi n, \psi + 2\pi m) = g(\varphi, \psi)$.

Благодаря свойствам периодичности, динамика двумерного отображения фаз происходит в области $0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \psi < 2\pi$. Отображение (16) называют *отображением на торе*. В физическом плане эта задача отвечает взаимодействию трех осцилляторов, так что φ и ψ – относительные фазы осцилляторов.

В отсутствии возмущений система (16) распадается на два несвязанных отображения поворота

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n, \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n. \end{aligned} \tag{17}$$

При этом первая фаза вращается с угловой скоростью Ω_1, а вторая – с угловой скоростью Ω_2. Параметры Ω_1 и Ω_2определяются разностью собственных частот первого-второго и второго-третьего осцилляторов. Функции $f(\varphi, \psi)$ и $g(\varphi, \psi)$ определяют возмущения отображений поворота.

Для двумерных отображений на торе не удается построить простую и достаточно универсальную единую модель, как в случае одной фазовой переменной. Действительно, разложение функций в двумерный ряд Фурье с учетом только первых членов приводит к отображению

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a_1 \sin\varphi_n + b_1 \sin\varphi_n + c_1 \sin\psi_n + d_1 \cos\psi_n, \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a_2 \sin\psi_n + b_2 \sin\psi_n + c_2 \sin\varphi_n + d_2 \cos\varphi_n. \end{aligned} \tag{18}$$

С помощью процедуры сдвига для переменных и частотных параметров, аналогичной описанной выше, можно прийти к системе

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a_1 \sin\varphi_n + \mu_1 \sin(\psi_n - \alpha), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a_2 \sin\psi_n + \mu_2 \sin(\varphi_n - \beta). \end{aligned} \tag{19}$$

Полученная модель содержит восемь существенных параметров. Столь большое их число обусловлено, в частности, тем, что подсистемы могут быть неидентичными по своим параметрам, и кроме того, несимметрично связанными. Такой проблемы нет в случае единственной фазовой переменной.

Если индивидуальные подсистемы идентичны (за исключением собственных частот $\Omega_{1,2}$), а связь симметрична, то приходим к модели

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a \sin\varphi_n + \mu \sin(\psi_n - \alpha), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a \sin\psi_n + \mu \sin(\varphi_n - \alpha). \end{aligned} \tag{20}$$

Впрочем, и модель (20) оказывается все же не столь универсальной, как синус-отображение окружности. Причина состоит в том, что в случае двух взаимодействующих подсистем связь может быть организована также через разность фаз переменных, что приводит к такой форме отображения на торе:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a \sin\varphi_n + \mu \sin(\varphi_n - \psi_n), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a \sin\psi_n + \mu \sin(\psi_n - \varphi_n). \end{aligned} \tag{21}$$

Подобная ситуация возникает, например, при оптической связи в системе взаимодействующих лазеров [35]. Определенное значение может иметь и *геометрия связи*.

Действительно, три осциллятора можно соединить в цепочку, а можно – в кольцо, что будет приводить к разным моделям [29,36]. Наконец, при описании *реактивного* взаимодействия осцилляторов будут существенными функции удвоенного угла, то есть члены типа $\sin 2\varphi_n$.

Таким образом, в случае динамики на торе не удается построить столь простую и столь универсальную модель, как в случае динамики на окружности. Поэтому можно идти двумя путями. Во-первых, можно выбирать те или иные комбинации коэффициентов в модели (20) или (21), руководствуясь чисто формальными соображениями простоты. Во-вторых, можно обращаться к дополнительной физической мотивации в постановке задачи. Мы рассмотрим оба этих подхода и сравним их.

3. Отображение Кима–Остлунда

В работах [21–23] была предложена и исследована модель – *отображение Кима–Остлунда (Kim–Ostlund)*, которое представляет собой два связанных простейшим образом отображения поворота

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &= \Omega_1 + \psi_n - \mu \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \Omega_2 + \varphi_n - \mu \sin \psi_n. \end{aligned} \tag{22}$$

Его особенность состоит в том, что возмущение данной переменной содержит только члены, относящиеся к другой. Далее удобно будет использовать нормированные частотные параметры, так что $\Omega_{1,2} = 2\pi w_{1,2}$. Величины $w_{1,2}$ имеют смысл чисел вращения для фазовых переменных при выключенной связи.

Представим здесь в обзорном плане наиболее физически значимые результаты [21–23] и дополним их некоторыми иллюстрациями. Карта динамических режимов отображения (22) на плоскости чисел вращения (w_1, w_2) для уровня связи $\mu = 0.7$ приведена на рис. 2, *а*. На рис. 2, *б* представлена в тех же масштабах карта ляпуновских показателей.

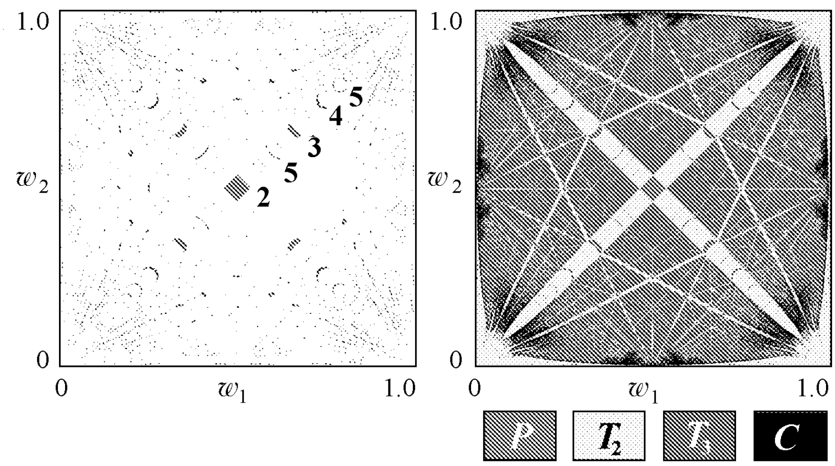

Рис. 2. *а* – карта динамических режимов; *б* – карта ляпуновских показателей отображения Кима–Остлунда; $\mu = 0.7$. Цифрами указаны периоды некоторых резонансов. Для ляпуновской карты под рисунком дана тоновая палитра

При построении карты ляпуновских показателей рассчитывался *спектр* показателей Ляпунова Λ_1, Λ_2 отображения (22), а затем плоскость параметров окрашивалась так, чтобы визуализировались следующие режимы:

- P – периодический режим, $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$,
- T_2 – двухчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$,
- T_3 – трехчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$,
- C – хаос, $\Lambda_1 > 0$.

При малой связи доминируют режимы трехчастотной квазипериодичности, поскольку вращения каждой переменной «почти» независимы. С ростом связи, при ее «умеренном» значении, чему отвечает рис. 2, возникают достаточно выраженные области как двухчастотных, так и периодических режимов, а также небольшие области хаоса.

Возникновение двухчастотных T_2 и периодических P режимов связано с определенными резонансами в системе. При этом при выполнении *одного* резонансного условия может возникнуть двухчастотная квазипериодичность, а при выполнении *двух* резонансных условий – периодический режим. Обсудим этот вопрос подробнее.

Двумерная фазовая система имеет характерные частоты, определяемые числами вращения w_1 и w_2. Они могут находиться в резонансом соотношении

$$nw_1 + mw_2 = p, \tag{23}$$

где n, m и p – целые числа. Если собственные частоты w_1 и w_2 фиксированы, то соотношение (23) представляет собой *Диофантово уравнение*, которое надо разрешить в целых числах относительно n, m и p. Эти величины и определяют тип резонанса. При этом чем меньше величины n, m и p, тем более сильным является резонанс.

На соотношение (23) можно посмотреть и несколько иначе. Фиксируем набор резонансных чисел (n, m, p). Тогда уравнение (23) на плоскости чисел вращения задает прямую линию. Вдоль этой линии выполняется резонансное условие, а значит, возникают резонансные колебания. Поскольку это условие одно, то вдоль линии (23) будут возникать полосы двухчастотных резонансных режимов, которым на карте ляпуновских показателей будут отвечать области с одним нулевым показателем. Чем сильнее резонанс, тем более широкими будут эти полосы.

Для примера на рис. 3, *а* показано несколько линий, заданных уравнением (23) с небольшими значениями (n, m, p), в частности,

$$w_1 - w_2 = 0, \quad w_1 + w_2 = 1, \quad 2w_1 - w_2 = 0, \quad w_1 - 2w_2 = 0, \tag{24}$$

$$w_1 + 2w_2 = 1, \quad w_1 - 2w_2 = -1, \; ...$$

В результате возникает структура *резонансной паутины Арнольда* (*Arnold web* [37]), рис. 3, *а*[2]. Эта картина хорошо согласуется с устройством ляпуновской карты на рис. 2, *б*.

[2]Строго говоря, термин «паутина Арнольда» используется в теории консервативного хаоса для описания соответствующих резонансных структур в фазовом пространстве, например, для пары переменных «действие» двух связанных систем [39,40]. В то же время, процедура построения такой структуры аналогична обсуждаемой на рис. 3. Поэтому авторы [37] относят этот термин и к соответствующему устройству плоскости параметров диссипативных систем.

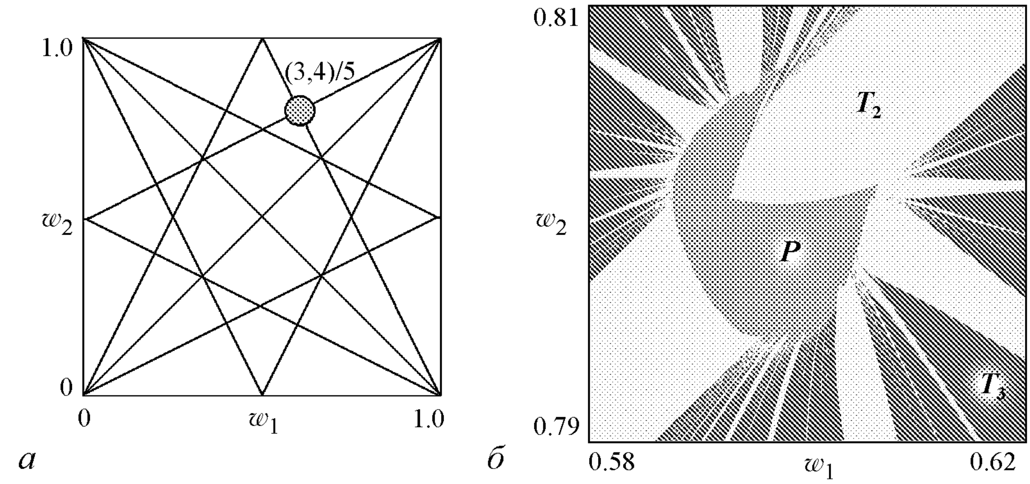

Рис. 3. *а* – схематическая иллюстрация построения резонансной паутины Арнольда, кружочком показана область локализации резонанса (3,4)/5; *б* – ляпуновская карта отображения Кима–Остлунда в окрестности резонанса (3,4)/5

В свою очередь, на пересечении линий (23) лежат резонансы, которым на плоскости (w_1, w_2) отвечают уже области *периодических режимов*. Периодические режимы характеризуются теми или иными комбинациями двух чисел вращения w_1 и w_2 взаимодействующих подсистем. При этом каждый периодический резонанс удобно характеризовать фактором $(p, q)/n$, где после сокращения дроби величина $w_1 = p/n$ представляет собой первое число вращения, $w_2 = q/n$ – второе, а n – общий знаменатель. На карте динамических режимов такой резонанс фиксируется как область периода n. Характеристику резонанса $(p, q)/n$ можно назвать комбинационным числом вращения.

В случае отображения Кима–Остлунда в соответствии с картой на рис. 2, *а* самый сильный резонанс отвечает области периода 2 и характеризуется комбинационным числом вращения (1,1)/2. Этот резонанс лежит на пересечении резонансных линий $w_1 - w_2 = 0$ и $w_1 + w_2 = 1$. На ляпуновской карте (рис. 2, *б*) в окрестности этих линий возникают две самые широкие полосы двухчастотных режимов. Внутри этих полос, в свою очередь, наблюдается семейство наиболее выраженных периодических резонансов с совпадающими числами вращения $w_1 = w_2$, отмеченных на карте цифрами 2, 3, 4, ... в соответствии с их периодами. Это, своего рода, «главная последовательность» резонансов отображения Кима–Остлунда.

Пример более слабого периодического резонанса другого типа в структуре резонансной паутины показан кружочком на рис. 3. Ему отвечает комбинационное число вращения (3,4)/5. Резонанс лежит на пересечении линий

$$w_1 - 2w_2 = -1, \quad 2w_1 + w_2 = 2. \tag{25}$$

Следует отметить, что периодические режимы занимают некоторые конечные области на плоскости чисел вращения. Поэтому через каждую такую область проходят не только две линии $nw_1 + mw_2 = p$, порождающие данный резонанс, но и другие линии двухчастотных резонансов. В результате вокруг периодических областей возникают характерные «звезды» из лучей двухчастотных режимов. Пример такой структуры представлен на рис. 3, *б*.

Области периодических режимов на рис. 2 могут быть устроены по-разному. *Простейший* резонанс выглядит так, как показано на рис. 4 на примере резонанса (3,3)/4. На этом рисунке можно видеть две линии седло-узловых бифуркаций SN в форме двух вложенных друг в друга овалов. Эти линии соединяются линиями бифуркации Неймарка–Сакера NS, которые, в свою очередь, заканчиваются на линиях седло-узловых бифуркаций в точках резонанса 1:1 R_1. При этом на плоскости параметров возникают следующие области, отмеченные на рис. 4:

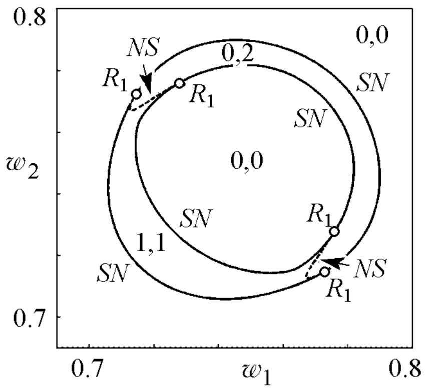

Рис. 4. Бифуркационный портрет «простейшего» резонанса (3,3)/4 для отображения Кима–Остлунда; $\mu = 0.9$

(1,1) – когда имеется одна устойчивая и одна неустойчивая неподвижные точки[3];

(0,2) – когда устойчивых точек нет, и имеются две неустойчивые точки;

(0,0) – неподвижных точек нет вообще.

Таким образом, область полной синхронизации представляет собой половину «бублика», образованного линиями седло-узловых бифуркаций. Верхняя граница этой области дается линиями бифуркаций Неймарка–Сакера, на которых одна неподвижная точка теряет устойчивость и порождает устойчивую инвариантную кривую. На карте динамических режимов такие простейшие резонансы отображаются в виде небольших «полумесяцев». Следует отметить, что на рис. 4 даны только линии локальных бифуркаций. Полная картина включает и множество различных нелокальных бифуркаций [22,23].

Портреты резонансов на рис. 2,3,4, на первый взгляд, кажутся достаточно разнообразными. Однако, как обосновывается в [21–23], в случае небольшой связи картина линий седло-узловых бифуркаций представляет собой проекции торов на плоскость параметров. Этот факт хорошо виден для простейшего резонанса (см. рис. 4). В свою очередь, с ростом связи на линиях седло-узловых бифуркаций могут появляться четыре точки сборки, что отвечает проекции немного развернутого в пространстве тора. Такие иллюстрации можно найти не только в работах [21–23], но и в работе [38]. Полная картина бифуркаций, однако, включает большое количество нелокальных бифуркаций и бифуркаций коразмерности два и очень сложна [23].

С ростом связи описанная картина нарушается. На бифуркационных линиях возникают дополнительные пары сборок, а также возникают бифуркации удвоения периода. Рис. 5 иллюстрирует картину для случая большой связи $\mu = 1.18$. Области трехчастотных режимов исчезают и вытесняются хаосом. Более того, почти полностью разрушаются области двухчастотных торов, за исключением режимов, лежащих вблизи значения $w_2 = 1$. Области периодических режимов, наоборот, увеличиваются в размере. При этом внутри многих точных резонансов возникают области удвоенных периодов. Особенно хорошо это видно для резонансов периода 5. На

[3]В соответствии с порядком резонанса неподвижные точки определены через четыре итерации отображения.

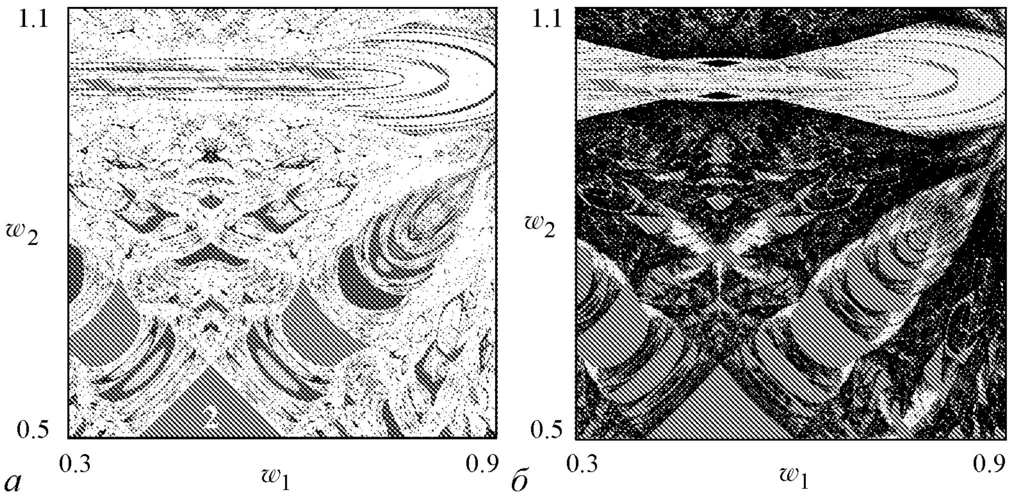

Рис. 5. *а* – карта динамических режимов и *б* – карта ляпуновских показателей отображения Кима–Остлунда; $\mu = 1.18$. Оттенки серого цвета на рис. 5, *б* соответствуют таковым на рис. 2, *б*

карте ляпуновских показателей (см. рис. 5) можно видеть, что области хаоса возникают также внутри резонансов, и что на «главной последовательности», фактически, возникает ситуация перекрытия резонансов.

4. Отображение на торе: три диссипативно связанных фазовых осциллятора

Как уже отмечалось, для динамики на торе нет столь универсальной модели, как в случае динамики на окружности. Поэтому целесообразно развить подход, основанный на конструировании моделей в виде дискретных осцилляторов, отталкивающийся от физической постановки задачи. Это, во-первых, позволит конкретизировать вид отображений и, в какой-то мере, классифицировать их, а во-вторых, – придать четкий физический смысл используемым параметрам.

Обратимся поэтому к простейшей физической задаче, в которой возникает ситуация трехчастотного взаимодействия, – цепочке из трех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля. Исходные уравнения в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (\lambda - x^2)\,\dot{x} + \omega_1^2 x + \mu\,(\dot{x} - \dot{y}) = 0,\\ &\ddot{y} - (\lambda - y^2)\,\dot{y} + \omega_2^2 y + \mu\,(\dot{y} - \dot{x}) + \mu\,(\dot{y} - \dot{z}) = 0,\\ &\ddot{z} - (\lambda - z^2)\,\dot{z} + \omega_3^2 z + \mu\,(\dot{z} - \dot{y}) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь λ – параметр возбуждения автономных осцилляторов, ω_i – собственная частота i-го осциллятора, μ – коэффициент диссипативной связи. Нормировку уравнений всегда можно выбрать так, чтобы частота первого осциллятора равнялась единице. Кроме того, введем удобные для дальнейшего обозначения, так что

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2^2 = 1 + \Delta_{21}, \quad \omega_3^2 = 1 + \Delta_{31}. \tag{27}$$

Здесь параметры Δ_{21} и Δ_{31} характеризуют отстройку собственных частот второго и третьего осцилляторов от частоты первого. По своему смыслу эти параметры могут быть как положительными, так и отрицательными.

Действуя стандартным образом в рамках метода медленно меняющихся амплитуд, можно получить следующие уравнения для относительных фаз осцилляторов[4]:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{\Delta_{21}}{2} - \mu \sin\theta + \frac{\mu}{2}\sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\Delta_{32}}{2} - \mu \sin\varphi + \frac{\mu}{2}\sin\theta, \end{aligned} \tag{28}$$

где θ – разность фаз первого и второго, φ – разность фаз второго и третьего осцилляторов; параметр $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$ характеризует частотную расстройку третьего осциллятора относительно второго. Как всегда при использовании метода медленно меняющихся амплитуд, параметр λ считается малым, а все параметры в (28) нормированы на его величину.

Выполняя дискретизацию системы (28) и используя перенормировку (13), получаем дискретную фазовую модель трех диссипативно связанных осцилляторов

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= 2\pi w_1 + \theta_n - \mu \sin\theta_n + \frac{\mu}{2}\sin\varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= 2\pi w_2 + \varphi_n - \mu \sin\varphi_n + \frac{\mu}{2}\sin\theta_n. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь параметр w_1 имеет смысл числа вращения, характеризующего собственную частоту второго осциллятора (частота первого фиксирована), а w_2 – относительную частоту второго и третьего осцилляторов.

Карты динамических режимов и ляпуновских показателей отображения (29) на плоскости чисел вращения (w_1, w_2) показаны на рис. 6, *а,б* для значения параметра связи $\mu = 0.6$. На рис. 6, *в* (фрагменты «1»–«6») представлены примеры фазовых портретов, иллюстрирующие некоторые возможные колебательные режимы. Портреты построены для точек, отмеченных соответствующими цифрами на ляпуновской карте.

В области P отображение имеет устойчивую неподвижную точку (период 1 на рис. 6, *а*). В этом случае значения относительных фаз осцилляторов θ_n и φ_n не меняются во времени, и наблюдается *полная синхронизация* всех трех осцилляторов. На физическом языке это означает, что произошел взаимный захват осцилляторов с соотношением частот 1:1:1.

Фазовый портрет «1» на рис. 6, *в* соответствует выходу из области полной синхронизации через ее нижнюю границу. В этом случае возникает устойчивая инвариантная кривая, которой отвечает решение со слабо осциллирующей фазой θ. Это означает, что происходит *частичный захват* первого и второго осцилляторов: их относительная фаза непостоянна, но ее колебания носят характер осцилляций с небольшой амплитудой. Отметим, что фаза θ на фрагменте «1» колеблется около значения $\theta = 0$, так что наблюдается *синфазная синхронизация* осцилляторов.

Фазовый портрет «2» соответствует выходу через левую границу полной синхронизации. В результате возникает устойчивая инвариантная кривая, отвечающая частичному захвату второго и третьего осцилляторов, когда небольшие колебания совершает уже фаза φ. Здесь тоже наблюдается синфазная синхронизация.

[4]В случае диссипативной связи осцилляторов этот вывод можно найти в [2,26,31,32].

При удалении от области полной синхронизации инвариантная кривая меняется незначительно (фазовый портрет «3»), а затем на ней могут возникать полные резонансы «главной» последовательности более высокого порядка, например, периода 3 (см. фрагмент «4»). Физически это отвечает полному захвату осцилляторов, но с кратным соотношением частот.

Если теперь уменьшить второе число вращения, то устойчивая инвариантная кривая сталкивается с неустойчивой инвариантной кривой и исчезает в результате соответствующей *квазипериодической седло-узловой бифуркации*. В результате рождается трехчастотный режим «5». В этом случае тор на рис. 4 является эргоди-

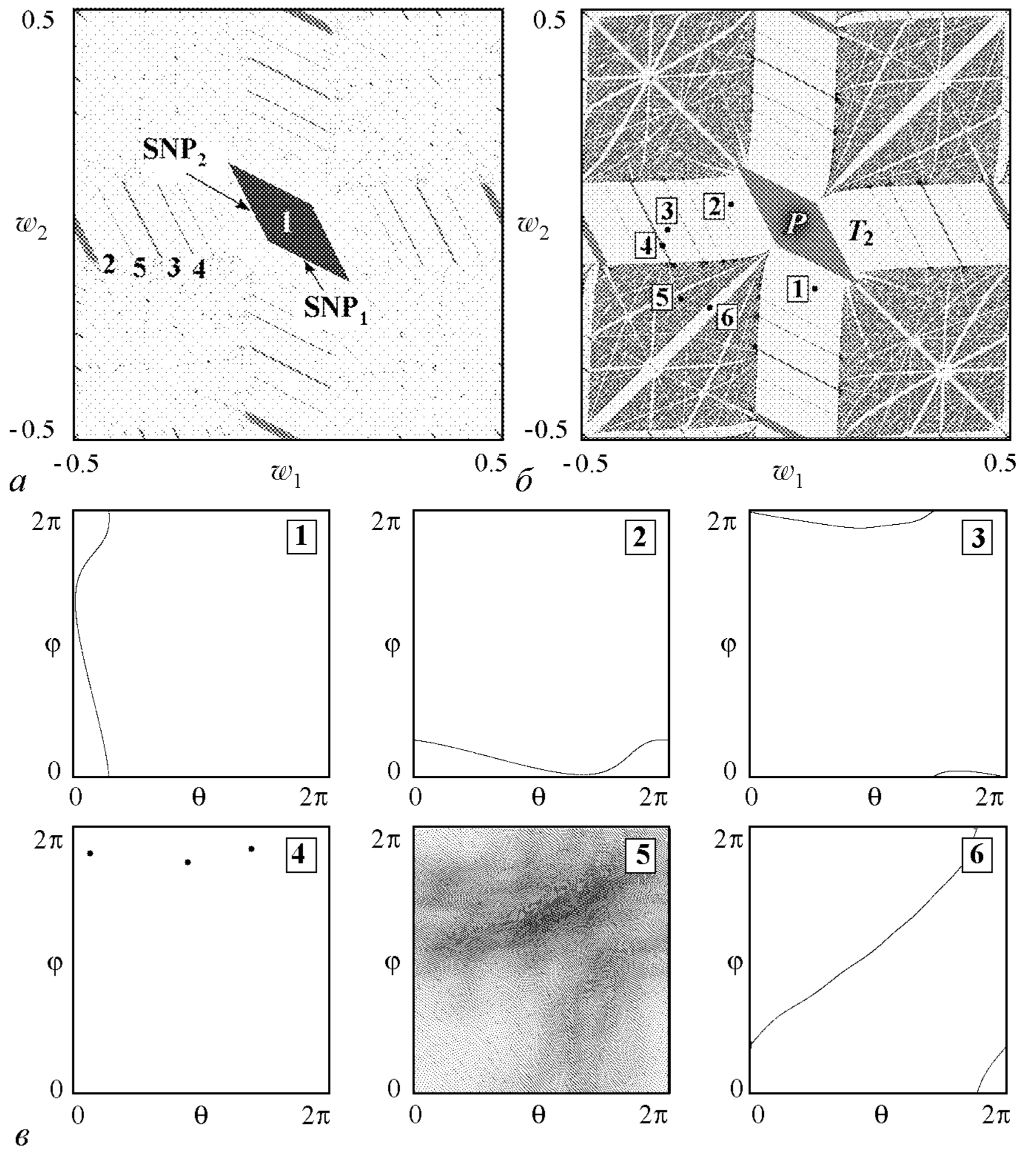

Рис. 6. *а* – карта динамических режимов, *б* – карта ляпуновских показателей и *в* – фазовые портреты для трех диссипативно связанных дискретных фазовых осцилляторов на плоскости чисел вращения; $\mu = 0.6$; SNP – saddle node point, вырожденные седло-узловые бифуркации неподвижных точек. Оттенки серого цвета на рис. 6, *б* соответствуют таковым на рис. 2, *б*

ческим – траектории всюду плотно покрывают его поверхность. Наконец, внутри области трехчастотных режимов возникают различные резонансные двухчастотные режимы, один из простейших примеров дан на фрагменте «б».

Интересно сопоставить полученную картину режимов с динамикой отображения Кима–Остлунда (22). При этом обнаруживаем определенные аналогии и в то же время некоторые отличия. Например, на рис. 6 также можно видеть характерную *резонансную паутину Арнольда*. Однако для трех диссипативно связанных осцилляторов определяющую роль в организации плоскости параметров играет режим неподвижной точки (периода один), отсутствующий в системе (22). Если перевести последнее утверждение на «физический язык», то это означает, что полная взаимная синхронизация, когда относительные фазы осцилляторов постоянны, в отображении Кима–Остлунда невозможна.

Второе существенное отличие – появление двух очень широких полос двухчастотных режимов, на пересечении которых и лежит область периода один. Эти полосы возникают около нулевых значений чисел вращения

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0. \tag{30}$$

В соответствии с их определением, первое резонансное условие (30) означает равенство собственных частот первого и второго осцилляторов $\omega_1 = \omega_2$, а второе – равенство собственных частот второго и третьего осцилляторов $\omega_2 = \omega_3$.

Таким образом, две эти полосы отвечают колебательным режимам частичного попарного захвата осцилляторов: первый-второй и второй-третий, что согласуется с представленными выше портретами на рис. 6, *в*. В эти полосы встроена система полных резонансов высшего порядка. Периоды наиболее сильных резонансов такого типа указаны на рис. 6, *а*. Отметим, что они не выглядят «традиционными» серпами, а имеют вид узких вытянутых полос.

Сама область периода 1 имеет своеобразное бифуркационное устройство, не совпадающее с резонансами типов, представленных на рис. 3, *б* и рис. 4. На картах рис. 6, *а*, *б* эта область представлена параллелограммом. В силу простоты отображения (29), ее границы легко найти аналитически. Действительно, для неподвижных точек (θ_0, φ_0) из (29) можно получить выражения для синусов относительных фаз

$$\begin{aligned} 2w_1 + w_2 &= 3\mu/4\pi \sin\theta_0, \\ w_1 + 2w_2 &= 3\mu/4\pi \sin\varphi_0. \end{aligned} \tag{31}$$

Условие обращения хотя бы одного из синусов в единицу отвечает седло-узловой бифуркации. Таким образом, параллелограмм на рис. 6, *а*, *б* образован линиями

$$\begin{aligned} 2w_1 + w_2 &= \pm 3\mu/4\pi, \\ w_1 + 2w_2 &= \pm 3\mu/4\pi. \end{aligned} \tag{32}$$

Нетрудно показать, что внутри него отображение (29) имеет четыре неподвижные точки: устойчивый узел, неустойчивый узел и два седла. При выполнении условий (32) неподвижные точки *одновременно* попарно сливаются и исчезают. Таким образом, область полной синхронизации ограничена линиями, своего рода, *вырожденных* седло-узловых бифуркаций. Отметим, что аналогичная картина имеет место и для

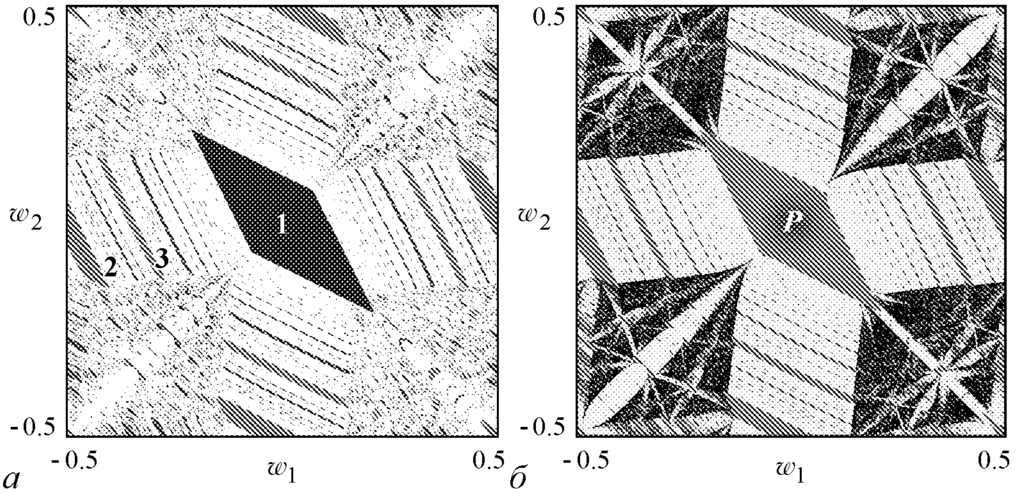

Рис. 7. *а* – карта динамических режимов и *б* – карта ляпуновских показателей для трех диссипативно связанных дискретных фазовых осцилляторов на плоскости чисел вращения; параметр связи $\mu = 0.9$. Оттенки серого цвета на рис. 7, *б* соответствуют таковым на рис. 2, *б*

потоков на торе и описана в [24–26][5], только вместо неподвижных точек выступают состояния равновесия соответствующего потока.

Как вытекает из (32), размер резонансной области для основного резонанса пропорционален параметру связи μ. Это хорошо видно из рис. 7, отвечающего увеличенному значению $\mu = 0.9$. Рост параметра связи приводит к увеличению зоны основного резонанса. Соответственно увеличиваются полосы частичного захвата осцилляторов и размеры встроенных в них областей полных резонансов высшего порядка. Как видно из рис. 7, *б*, трехчастотные режимы разрушаются, и их вытесняет хаос. В то же время вдоль диагоналей «фазового квадрата» выявляются, хотя и небольшие по размерам, резонансы характерной «серповидной» формы. А вот вблизи значений $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$ форма резонансов периода 2, 3 и т.д. близка к параллелограммам.

При исследовании взаимодействующих осцилляторов традиционный интерес представляет также устройство плоскости параметров «собственная частота – величина связи». Для двух осцилляторов именно на такой плоскости наблюдается язык Арнольда.

В случае трех осцилляторов, с физической точки зрения, удобно зафиксировать две собственные частоты, например, первого и третьего осцилляторов и менять частоту центрального. Это требует некоторого изменения используемого набора параметров. Напомним, что числа вращения w_1 и w_2 характеризуют расстройки частот первого-второго и второго-третьего осцилляторов. Поскольку частота первого осциллятора фиксирована, то параметр w_1, фактически, задает частоту второго. Введем далее $w_3 = w_1 + w_2$, тогда w_3 и будет определять собственную частоту третьего осциллятора.

[5]Обратим внимание на тот факт, что для фазовых потоковых уравнений область полной синхронизации имеет вид параллелограмма, указано еще П.С. Ландой [2].

Отображение (29) в таких параметрах примет вид

$$\begin{aligned}
&\theta_{n+1} = 2\pi w_1 + \theta_n - \mu \sin\theta_n + \mu/2 \sin\varphi_n,\\
&\varphi_{n+1} = 2\pi(w_3 - w_1) + \varphi_n - \mu \sin\varphi_n + \mu/2 \sin\theta_n.
\end{aligned} \tag{33}$$

На рис. 8 представлены карты режимов на плоскости (w_1, μ) при фиксированных значениях параметра w_3, задающего собственную частоту третьего осциллятора. При этом рис. 8, *а* относится к случаю, когда собственные частоты первого и третьего осцилляторов близки ($w_3 = -0.01$), а рис. 8, *б* – когда они уже заметно отличаются ($w_3 = -0.1$). Эти карты полезно сравнить с картой отображения окружности (см. рис. 1), моделирующего два связанных осциллятора.

В центре рисунка располагается область полной синхронизации всех трех осцилляторов – область периода 1. Границы этой области даются соотношениями (32), которые теперь нужно разрешить относительно параметра связи, используя выражение для частоты третьего осциллятора $w_3 = w_2 + w_1$,

$$\begin{aligned}
&\mu = \pm\, 4\pi/3(w_1 + w_3),\\
&\mu = \pm\, 4\pi/3(-w_1 + 2w_3).
\end{aligned} \tag{34}$$

В отличие от случая двух осцилляторов, на рис. 8 имеет место *порог полной синхронизации*, который легко находим из (34):

$$\mu = 2\pi\,|w|\,, \quad w_1 = w/2. \tag{35}$$

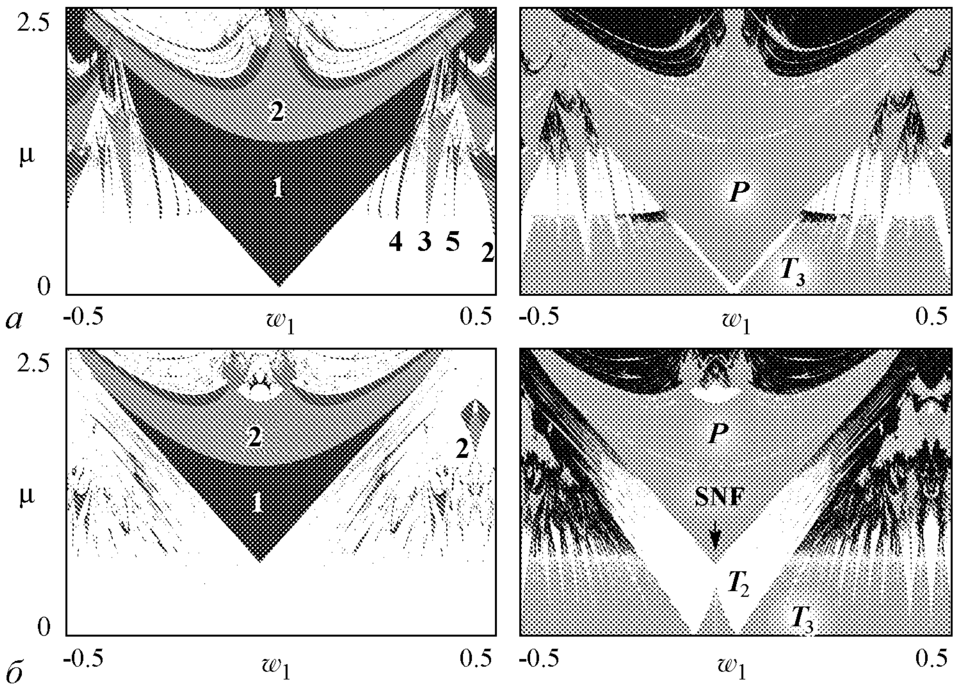

Рис. 8. Карты динамических режимов (левая колонка) и ляпуновских показателей (правая колонка) трех диссипативно связанных дискретных фазовых осцилляторов на плоскости «частота центрального осциллятора – величина связи» с частотными параметрами w третьего осциллятора: *а* – (-0.01); *б* – (-0.1). SNF – точка *saddle node fan* (седло-узловой веер)

С точки зрения теории бифуркаций, формулы (35) определяют координаты точки коразмерности два, в которую на фазовой плоскости стягиваются одновременно все четыре неподвижные точки отображения. В [23] аналогичные точки получили название *saddle node fan – седло-узловой веер*, в соответствии с характерной картиной расходящихся от них подобно вееру областей двухчастотных режимов на плоскости параметров. Такие точки можно видеть также и на плоскости чисел вращения (см. рис. 6, *б*) на диагонали $w_2 = w_1$.

При малой частоте третьего осциллятора w_3 на рис. 8, *а* можно обнаружить модифицированную по сравнению с рис. 1 картину. Нижняя часть карты теперь представлена режимами трехчастотной квазипериодичности. Они лежат, в основном, в области $\mu \leq 0/6$. Языки полной синхронизации разных периодов «отрываются» от оси абсцисс. Теперь все типы режимов полной синхронизации имеют порог по величине связи. Вблизи их оснований формируются области двухчастотных режимов, которые «вторгаются» в область трехчастотной квазипериодичности в виде некоторых локальных областей. При больших значениях связи картина режимов полной синхронизации, тем не менее, аналогична случаю синус-отображения окружности.

Увеличим теперь расстройку частот третьего и первого осцилляторов (рис. 8, *б*). При этом граница трехчастотных режимов по величине связи почти не меняется. Отметим, что внутри нее формируется выраженная система языков двухчастотных режимов. Особо заметными являются две области, граничащие с языком периода 1 и отвечающие ситуации попарного захвата первого-второго и второго-третьего осцилляторов. При этом внутри таких областей возникает новая система узких языков полных резонансов, перекрытие которых при $\mu \approx 1.5$ приводит к хаосу.

Увеличение расстройки третьего и первого осцилляторов приводит к тому, что структура областей полной синхронизации высокого порядка, характерная для отображения окружности, разрушается. На рис. 8. *б* кроме языка периода один можно видеть только еще одну такую область на базе периода 2. Существенно модифицируется и внутреннее устройство основного языка полной синхронизации по сравнению со случаем синус-отображения окружности. Обращает на себя внимание факт возникновения *вторичной бифуркации Неймарка–Сакера* и связанной с ней новой области квазипериодичности на базе цикла периода 2 внутри основного языка.

5. Дискретные модели осцилляторов: сопоставление

Мы рассмотрели две системы: формальную модель Кима–Остлунда и дискретное отображение, моделирующее три осциллятора с диссипативной связью, приводящее к отображению на торе. Они дают понимание многих существенных моментов задачи трехчастотной синхронизации, таких как полная и частичная синхронизация, возможность трех- и двухчастотных квазипериодических режимов. Наличие трех частот позволяет ввести в рассмотрение еще одну важную иллюстрацию: плоскость чисел вращения, на которой возникает новый феномен – резонансная паутина Арнольда. При этом для системы с диссипативной связью резонанс 1:1:1 является самым сильным и значительно влияет на общую картину, в частности, порождает «главную последовательность» резонансов.

Если говорить об отображении Кима–Остлунда (37) в контексте описания связанных осцилляторов, то его недостаток – отсутствие основного резонанса 1:1:1, ассоциирующегося с устойчивой неподвижной точкой отображения. Действительно, неподвижные точки отображения (22) удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \mu \sin \varphi_0, \\ \Omega_2 &= \mu \sin \psi_0. \end{aligned} \tag{36}$$

На первый взгляд, задача представляется аналогичной модели (29), поскольку имеются четыре неподвижных точки, которые испытывают седло-узловые бифуркации при пересечении сторон квадрата, образованного линиями $\Omega_1 = \pm\mu$, $\Omega_2 = \pm\mu$. Но особенность отображения Кима–Остлунда в том, что все его неподвижные точки неустойчивы. Действительно, матрица Якоби отображения (22) имеет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \cos \varphi_0 \\ -\mu \cos \psi_0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Таким образом, ее след $S = 2$. В соответствии с бифуркационным анализом двумерных отображений [20] такие точки *всегда неустойчивы*. В результате самый сильный резонанс и «главная последовательность» связаны с колебаниями другого типа – периода 2.

Интересно прояснить физическую сторону этого момента задачи. Для этого развитый подход можно применить, чтобы «восстановить» исходную систему, которая может порождать отображение Кима–Остлунда (22). Потоковая система-прототип, очевидно, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \Omega_1 - \varepsilon \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \Omega_2 - \varepsilon \sin \psi. \end{aligned} \tag{38}$$

Нетрудно показать, что ей отвечает следующая форма связанных осцилляторов ван дер Поля:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) = 0, \\ &\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y - \mu(\dot{y} - \dot{x}) - \mu(\dot{y} - \dot{z}) = 0, \\ &\ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

В этом можно убедиться, применив к набору уравнений (39) метод медленно меняющихся амплитуд. Отличие от системы трех осцилляторов (26) состоит в изменении знака связи во втором уравнении. Таким образом, для второго осциллятора связь не диссипативная, а *активная*. Это предполагает наличие в цепи связи некоторого активного элемента (например, операционного усилителя). Таким образом, наличие активной компоненты в связи и разрушает основной резонанс. Еще одна особенность – асимметрия связи, поскольку для первого осциллятора член связи имеет диссипативную форму.

В то же время следует отметить, что отображение Кима–Остлунда (22) описывает важные детали картины: возможность резонансной паутины Арнольда, систему нелокальных бифуркаций и точки коразмерности два, которые демонстрируют очень сложную и емкую картину [21–23].

Заметим также, что возможна и другая геометрия связи: три осциллятора могут быть соединены в кольцо. Особенность такой задачи – возможность фазовой мультистабильности для основного резонанса, отвечающей колебаниям осцилляторов с разными фазовыми сдвигами [2,29,36].

6. Отображение на торе: три реактивно связанных осциллятора

Рассмотрим теперь другой тип связи осцилляторов, которому отвечают уравнения

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x-y) = 0, \\ &\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1+\Delta_{21})y + \varepsilon(y-x) + \varepsilon(y-z) = 0, \\ &\ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1+\Delta_{31})z + \varepsilon(z-y) = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь ε – параметр *реактивной* связи. Отличие от системы (26) состоит в том, что связь осуществляется не через скорости изменения переменных, а непосредственно через их значения. С физической точки зрения связь в случае (26) дает добавку к параметру диссипации, а в случае (40) – к собственной частоте колебаний. При радиофизической реализации генератора ван дер Поля диссипативная связь осуществляется через резистор (сопротивление), а реактивная – через конденсатор (емкость).

Как мы отмечали, реактивная связь – явление физически более тонкое, чем диссипативная и для описания синхронизации даже двух осцилляторов необходимо учитывать эффекты второго порядка по величине связи. Фазовые уравнения для случая реактивной связи трех осцилляторов с учетом этой особенности получены в Приложении и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &2\dot{\theta} = -\varepsilon - \Delta_{21} + \varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2\left(\sin\varphi\cos\theta - 1/2\sin\theta\cos\varphi + 1/2\sin 2\varphi - \sin 2\theta\right), \\ &2\dot{\varphi} = \varepsilon - \Delta_{32} - \varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2\left(\sin\theta\cos\varphi - 1/2\sin\varphi\cos\theta + 1/2\sin 2\theta - \sin 2\varphi\right). \end{aligned} \tag{41}$$

Здесь θ и φ – фазы второго осциллятора относительно первого и третьего относительно второго, соответственно, $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$.

Уравнения для случая двух осцилляторов можно получить аналогично [39] или просто отбросив в (41) члены, содержащие вторую фазу,

$$2\dot{\theta} = -\Delta - \varepsilon^2 \sin 2\theta. \tag{42}$$

Это тоже уравнение Адлера, но в другой форме, которая и определяет особенности реактивной связи (см. обсуждение в п. 1).

Перейдем теперь к дискретной модели аналогично тому, как это было сделано для случая диссипативной связи

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} = {} & 2\pi w_1 - \varepsilon/2 + \theta_n + \varepsilon/2\cos\varphi_n + \\ & + \varepsilon^2/2\left(\sin\varphi_n\cos\theta_n - 1/2\sin\theta_n\cos\varphi_n + 1/2\sin 2\varphi_n - \sin 2\theta_n\right), \\ \varphi_{n+1} = {} & 2\pi w_2 + \varepsilon/2 + \varphi_n - \varepsilon/2\cos\theta_n + \\ & + \varepsilon^2/2\left(\sin\theta_n\cos\varphi_n - 1/2\sin\varphi_n\cos\theta_n + 1/2\sin 2\theta_n - \sin 2\varphi_n\right). \end{aligned} \tag{43}$$

Карты динамических режимов и ляпуновских показателей этого отображения на плоскости чисел вращения (w_1, w_2) показаны на рис.9 для уровня связи $\varepsilon = 0.6$. На этих картах можно видеть резонансную паутину Арнольда, но для нее характерна некоторая асимметрия. Она связана с воздействием реактивной связи на частоту (члены в виде добавок $\pm\,\varepsilon/2$ к числам вращения.)

Если отбросить члены второго порядка, то отображение (43) превращается, фактически, в отображение Кима–Остлунда. Таким образом, это отображение более близко к случаю реактивной связи. При этом, однако, исчезает и основной эффект – синхронизация всех трех осцилляторов с соотношением частот 1:1:1. Более точное отображение учитывает этот эффект и приводит к картине, подобной приведенной на рис. 9, включая возможность полной синхронизации всех трех осцилляторов.

Как уже отмечалось, два реактивно связанных осциллятора могут захватиться как в фазе, так и в противофазе. Для трех осцилляторов число возможных конфигураций точного захвата увеличивается, и все они могут реализоваться в модели (43). Этот факт иллюстрируют фазовые портреты на рис. 10, *б*. Они построены в точках, отмеченных соответствующими цифрами на увеличенном фрагменте карты, представленном на рис. 10, *а*. Для удобства интерпретации все четыре портрета даны на одном рис. 10, *б*.

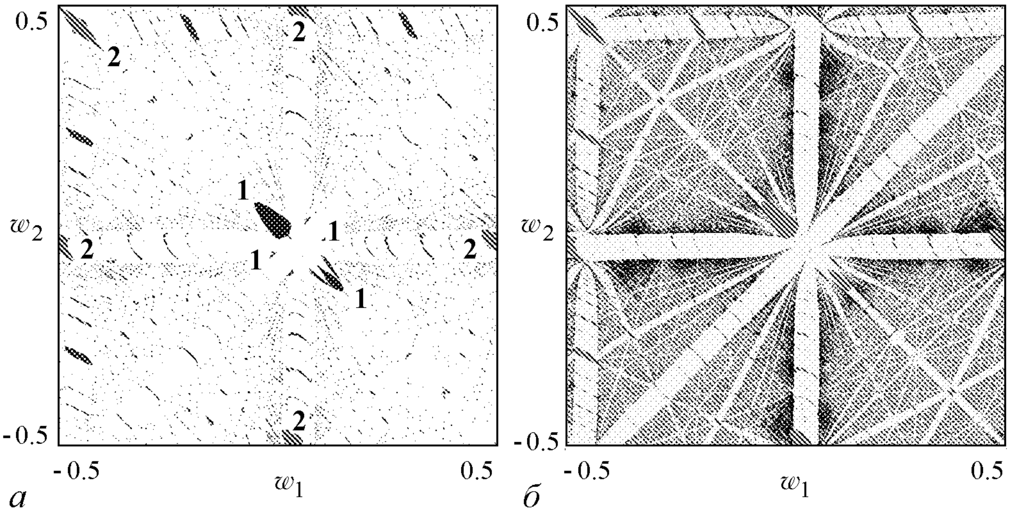

Рис. 9. *а* – карта динамических режимов и *б* – карта ляпуновских показателей на плоскости чисел вращения трех реактивно связанных осцилляторов. Цифры на карте (*а*) означают периоды циклов, параметр связи $\varepsilon = 0.6$. Оттенки серого цвета на рис. 9, *б* соответствуют таковым на рис. 2, *б*

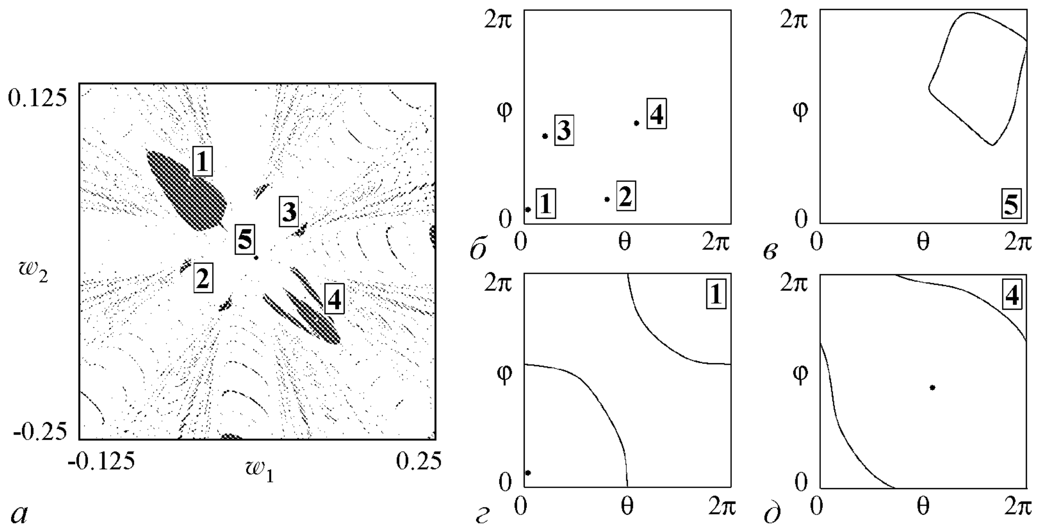

Рис. 10. *а* – Увеличенный фрагмент карты динамических режимов трех реактивно связанных осцилляторов и фазовые портреты: *б* – четыре типа захвата осцилляторов в режиме полной синхронизации, *в* – инвариантная кривая, *г–д* – сосуществование неподвижных точек и инвариантной кривой

Как видно из рис. 10, *б*, для точки 1 выполняется: $(\theta \approx 0, \varphi \approx 0)$. Напомним, что θ – это относительная фаза первого и второго осциллятора, а φ – второго и третьего. Таким образом, в данном случае все три осциллятора захватываются синфазным образом, и их фазы примерно равны друг другу. В свою очередь, для точки 2 справедливо: $(\theta \approx \pi, \varphi \approx 0)$. Это означает, что в фазе колеблются второй и третий осцилляторы, а первый движется относительно них в противофазе. В точке 3:$(\theta \approx 0, \varphi \approx \pi)$, так что первый и второй осцилляторы захватились в фазе, а третий колеблется относительно них в противофазе. И, наконец, в точке 4: $(\theta \approx \pi, \varphi \approx \pi)$.

Такой тип колебаний соответствует тому, что крайние осцилляторы колеблются в фазе, а центральный – в противофазе.

В случае реактивной связи существенной оказывается мультистабильность, когда режимы полной синхронизации могут сосуществовать с квазипериодическими. Так, на рис. 10, *г, д* показаны сосуществующие неподвижные точки и инвариантные кривые в точках 1 и 4. В то же время в точках 2, 3 и 5 мультистабильность не наблюдается.

Интересный режим реализуется в точке 5. В этом случае инвариантная кривая представляет собой замкнутую линию в виде овала. Это означает, что обе относительные фазы осциллируют около некоторых равновесных значений. Соответственно основные наблюдаемые частоты совпадают, но захват не точный: фазы не равны строго константам. Это будет приводить к некоторой модуляции на фоне колебаний с основной частотой. Отметим, что инвариантные кривые типа, изображенного на рис. 10, *г, д* и рис. 10, *в*, отличаются топологически – последняя может быть стянута в точку, а две первые нет. Соответственно кривые первого типа называются *вращательные (rotational)*, а второго – *стягиваемые* (*contractible*) [23].

Заключение

Модели в виде отображений для фаз (отображения на торе) являются удобным инструментом исследование динамики связанных автоколебательных осцилляторов. В случае уже двух фазовых переменных, однако, не удается построить достаточно простую и одновременно универсальную модель. Поэтому важным является построение моделей с учетом их физической мотивации (тип связи, геометрия связи и т.д.), которая позволяет дать наглядную интерпретацию использованных параметров. Исследование таких отображений выявляет основные элементы картины трехчастотных взаимодействий: области полной и частичной синхронизации, устройство точных резонансов, наличие резонансной паутины Арнольда на плоскости чисел вращения, мультистабильность в форме сосуществования квазипериодических режимов и режимов точного захвата и т.д. При этом осцилляторы с диссипативной и реактивной связью демонстрируют ряд существенных отличий (в устройстве области полной синхронизации, возможность как синфазной, так и противофазной синхронизации разных пар осцилляторов в цепочке и т.д.) Некоторые физически значимые элементы этой картины не описываются простейшей формальной моделью Кима–Остлунда.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-02-91334-ННИО.

Фазовые уравнения трех реактивно связанных осцилляторов

Рассмотрим случай реактивно связанных осцилляторов. Исходные уравнения в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x - y) = 0,\\
&\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_{21})y + \varepsilon(y - x) + \varepsilon(y - z) = 0,\\
&\ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_{31})z + \varepsilon(z - y) = 0.
\end{aligned} \tag{П.1}$$

Если параметр возбуждения λ мал, а также малы частотные расстройки и величина связи, то для анализа уравнений (П.1) можно применить метод медленно меняющихся амплитуд [1,2,10]. С этой целью представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{it} + ae^{-it}, \quad y = be^{it} + be^{-it}, \quad z = ce^{it} + ce^{-it}. \tag{П.2}$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – комплексные амплитуды осцилляторов, которые являются медленно меняющимися на фоне колебаний с единичной частотой.

Наложим традиционные для этого метода дополнительные условия:

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}e^{-it} = 0, \quad \dot{c}e^{it} + \dot{c}e^{-it} = 0. \tag{П.3}$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i(ae^{it} - ae^{-it}), \quad \dot{y} = i(be^{it} - be^{-it}), \quad \dot{z} = i(ce^{it} - ce^{-it}). \tag{П.4}$$

Подставим соотношения (П.2)–(П.4) в уравнения (П.1) и отбросим члены, являющиеся быстро осциллирующими на фоне колебаний по закону e^{it}. Тогда приходим к укороченным уравнениям

$$\begin{aligned}
&2\dot{a} = \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b),\\
&2\dot{b} = \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_{21} b - \mu(b - a) - \mu(b - c),\\
&2\dot{c} = \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_{31} c - \mu(c - b).
\end{aligned} \tag{П.5}$$

Теперь параметр λ может быть убран перенормировкой переменных и параметров. Переходя к действительным амплитудам и фазам, получаем

$$\begin{aligned}
&2\dot{R} = R - R^3 - \varepsilon r \sin\theta, && 2\dot{\psi}_1 = \varepsilon - \frac{r}{R}\cos\theta,\\
&2\dot{r} = r - r^3 + \varepsilon R \sin\theta - \varepsilon v \sin\varphi, && 2\dot{\psi}_2 = 2\varepsilon + \Delta_{21} - \varepsilon\frac{R}{r}\cos\theta - \varepsilon\frac{v}{r}\cos\varphi,\\
&2\dot{v} = v - v^3 + \varepsilon r \sin\varphi, && 2\dot{\psi}_3 = \varepsilon + \Delta_{31} - \frac{r}{v}\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{П.6}$$

Вычитая фазовые уравнения друг из друга, получаем уравнение для относительных фаз:

$$\begin{aligned}
&2\dot{\theta} = -\varepsilon - \Delta_{21} + \varepsilon\left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R}\right)\cos\theta + \varepsilon\frac{v}{r}\cos\varphi,\\
&2\dot{\varphi} = \varepsilon + \Delta_{21} - \Delta_{31} + \varepsilon\left(\frac{r}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\varphi - \varepsilon\frac{R}{r}\cos\theta,
\end{aligned} \tag{П.7}$$

Отличие этих уравнений от случая диссипативной связи состоит в том, что эффективность действия связи, благодаря множителям типа $(R/r - r/R)$, пропорциональна разностям орбит осцилляторов. Поэтому эффект синхронизации в случае реактивной связи возникает только во втором порядке по возмущениям.

Чтобы провести рассмотрение с необходимой точностью, положим $R = 1 + \tilde{R}$, $r = 1 + \tilde{r}$ и $v = 1 + \tilde{v}$, где знаком «тильда» отмечены возмущения стационарных орбит. Из амплитудных уравнений тогда получаем для возмущений

$$\begin{aligned} 2\tilde{R} &= -\varepsilon \sin\theta, \\ 2\tilde{r} &= \varepsilon \sin\theta - \varepsilon \sin\varphi, \\ 2\tilde{v} &= \varepsilon \sin\varphi. \end{aligned} \tag{П.8}$$

Соответственно из фазовых уравнений получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + 2\varepsilon(\tilde{R} - \tilde{r})\cos\theta + \varepsilon(1 + \tilde{v} - \tilde{r})\cos\varphi, \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 + 2\varepsilon(\tilde{r} - \tilde{v})\cos\varphi - \varepsilon(1 + \tilde{R} - \tilde{r})\cos\theta. \end{aligned} \tag{П.9}$$

Подставляя в (П.9) выражения для возмущений (П.8), получаем:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_{21} + \varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2\left(\sin\varphi\cos\theta - 1/2\sin\theta\cos\varphi + 1/2\sin 2\varphi - \sin 2\theta\right), \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon - \Delta_{32} - \varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2\left(\sin\theta\cos\varphi - 1/2\sin\varphi\cos\theta + 1/2\sin 2\theta - \sin 2\varphi\right), \end{aligned} \tag{П.10}$$

где $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$. Это и есть искомые уравнения.

Отметим, что если отбросить в первом уравнении члены, содержащие фазу φ, то есть «отключить» третий осциллятор, то получаем уравнение двух реактивно связанных осцилляторов (15)

$$\dot{\theta} = -\Delta_{21} - \varepsilon^2 \sin 2\theta. \tag{П.11}$$

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
2. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 359 с.
3. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 352 с.
4. *Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O.* Synchronization: From simple to complex. Springer, 2009. 437 p.
5. *Гукенхеймер Дж., Холмс П.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва–Ижевск: РХД, 2002. 508 с.
6. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves, and turbulence. (Springer Ser. Synergetics, vol.19.) Berlin: Springer, 1984. 156 p.
7. *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с. [Glass L., MacKey M.C. From clocks to chaos: The rhythms of life. Princeton, NY: Princeton Univ. Press, 1988. 248 p.
8. *Winfree A.* The geometry of biological time. 2nd ed. New York: Springer, 2001. 777 p.

9. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е, Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 136 с.
10. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2-е изд., 2005. 292 с.
11. *Репин Б.Г., Дубинов А.Е.* Исследование режимов фазировки трех виркаторов в рамках модели связанных осцилляторов ван дер Поля // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 76, Вып. 4. С. 99.
12. *Kawahara T.* Coupled Van der Pol oscillators – A model of excitatory and inhibitory neural interactions // Biological Cybernetics. 1980. Vol. 39, № 1. P. 37.
13. *Crowley M.F, Epstein I.R.* Experimental and theoretical studies of a coupled chemical oscillator: phase death, multistability and in-phase and out-of-phase entrainment // J. Phys. Chem. 1989. Vol. 93, № 6. P. 2496.
14. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. 460 p.
15. *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos – Models and Experiments. Appearance Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems // World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A. 1995. Vol. 8. 384 p.
16. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
17. *Madan R.* Chua's circuit: A paradigm for chaos. World Scientific, 1993. 1042 p.
18. *Volkov E.I., Romanov V.A.* Bifurcations in the system of two identical diffusively coupled Brusselators // Physica Scripta. 1995. Vol. 51, № 1. P. 19.
19. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 253 с.
20. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
21. *Kim S., MacKay R.S., Guckenheimer J.* Resonance regions for families of torus maps // Nonlinearity. 1989. Vol. 2, № 3. P. 391.
22. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S.* Simple resonance regions of torus diffeomorphisms // Patterns and dynamics in reactive media, Springer. 1991. P. 1.
23. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // Physica D. 1991. Vol. 49. P. 387.
24. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhys. Lett. 2009. Vol. 86. 30003.
25. *Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
26. *Кузнецов А.П, Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // Нелинейная динамика. 2010, Т. 6, № 4. С.693.
27. *Заславский Г.М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва–Ижевск: РХД, 2004. 288 с.
28. *Морозов А.Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.
29. *Vasylenko A., Maistrenko Yu., Hasler M.* Modeling phase synchronization in systems of two and three coupled oscillators // Nonlinear Oscillations. 2004. Vol. 7, № 3. P. 301.

30. *Maistrenko V., Vasylenko A., Maistrenko Y., Mosekilde E.* Phase chaos and multistability in the discrete Kuramoto model // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2010. Vol. 20, № 6. P. 1811.
31. *Rand R.H., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics, 1980. Vol. 15. P. 387.
32. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189, № 1–2. p.8.
33. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга: Фазовая динамика и компьютерное моделирование // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 101.
34. *Lee E., Cross. M.C.* Pattern formation with trapped ions // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. 143001.
35. *Khibnik A.I., Braimanc Y., Kennedyd T.A.B., Wiesenfeldd K.* Phase model analysis of two lasers with injected field // Physica D, 1998. Vol. 111, № 1–4. P. 295.
36. *Maistrenko Y., Popovych O., Burylko O.* Mechanism of Desynchronization in the Finite-Dimensional Kuramoto Model // Phys. Rev. Lett., 2004. Vol. 93, 084102.
37. *Broer H., Simo C., Vitolo R.* The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web // Reprint from the Belgian Mathematical Society, 2008, p. 769–787.
38. *Галкин О.Г.* Фазовый захват для отображений тора типа Матье // Функциональный анализ и его приложения, 1993. Т. 27, Вып. 1. С. 1.
39. *Froeschle C., Lega E., Guzzo M.* Analysis of the chaotic behavior of orbits diusing along the Arnold web // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2006. Vol. 95, № 1–4. P. 141.
40. *Guzzo M., Lega E., Froeschle C.* First numerical evidence of global Arnold diffusion in quasi–integrable systems // arXiv:nlin/0407059.

Саратовский госуниверситет	*Поступила в редакцию*	*31.01.2012*
СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН	*После доработки*	*5.03.2012*

ON MODELLING THE DYNAMICS OF COUPLED SELF-OSCILLATORS USING THE SIMPLEST PHASE MAPS

A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, Yu.V. Sedova, L.V. Turukina

The problem of describing the dynamics of coupled self-oscillators using discrete time systems on the torus is considered. We discuss the methodology for constructing such maps as a simple formal models, as well as physically motivated systems. We discuss the differences between the cases of the dissipative and inertial coupling. Using the method of Lyapunov exponents charts we identify the areas of two- and three-frequency quasiperiodicity and chaos. Arrangement of the Arnold resonance web is investigated and compared for different model systems.

Keywords: Synchronization, quasi-periodical oscillations, phase maps.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: apkuz@rambler.ru

Сатаев Игорь Рустамович – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – критические явления в нелинейной динамике, моделирование динамики на пороге хаоса, применение численных методов для решения ренормгрупповых уравнений. Автор более 30 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: sataevir@rambler.ru

Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 10 статей в отечественной и зарубежной печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: sedovayv@rambler.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском госуниверситете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). Старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособий.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru