
УДК 517.9

Н.В. Станкевич, А.А. Дворак, В.В. Астахов

**КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ПЕРЕХОД К ГИПЕРХАОСУ
В ДВУХ ПРОТИВОФАЗНО ВОЗБУЖДАЕМЫХ ОСЦИЛЛЯТОРАХ ТОДЫ**

Для системы двух связанных противофазно возбуждаемых осцилляторов Тоды исследованы условия возбуждения квазипериодических колебаний, исследованы бифуркационные структуры языков синхронизации в области квазипериодических движений. Изучены переходы к хаосу и гиперхаосу через разрушение двумерного тора.

Связанные осцилляторы, квазипериодические колебания, синхронизация, бифуркации, хаос, гиперхаос

**QUASIPERIODIC OSCILLATIONS AND TRANSITIONS TO HYPERCHAOS IN TWO
TODA OSCILLATORS WITH ANTIHARMONIC FORCE**

For the system of two coupled Toda oscillators with antiphase harmonic force conditions of occurrence are researched, bifurcational structure of synchronization tongues in the area of quasiperiodic motions are researched. The transitions to the chaos and hyperchaos through destruction of two-dimensional tori are studied.

Coupled oscillators, quasiperiodic oscillations, synchronization, bifurcations, chaos, hyperchaos

Введение. Связанные осцилляторы играют важную роль в различных областях науки, таких как химия, биология, электроника, радиофизика и т. д. [1-4]. Одним из фундаментальных нелинейных явлений, возникающих при взаимодействии автоколебательных осцилляторов является синхронизация. В этом случае на плоскости параметров «частотная расстройка осцилляторов – сила связи» возможны захват частот и квазипериодические колебания внутри и снаружи языка Арнольда, соответственно. Однако можно отойти от классической постановки задачи о синхронизации двух автоколебательных систем и рассмотреть динамику взаимодействующих нелинейных диссипативных осцилляторов с внешним воздействием, у которых в автономном состоянии не возникает устойчивого предельного цикла. На первый взгляд, такие взаимодействующие неавтономные осцилляторы не подходят для изучения явления взаимной синхронизации, при которой происходит подстройка собственных частот, поскольку временные масштабы вынужденных колебаний одиночного осциллятора жестко связаны с периодом внешнего воздействия. Однако, в ряде работ [4-9] было выявлено, что в ансамблях таких осцилляторов возможно возбуждение квазипериодических колебаний, возникновение синхронизации движений на торе с характерными языками Арнольда в пространстве управляющих параметров. Причем данное явление было обнаружено для различных связанных подсистем: в двух диссипативно связанных нелинейных контурах (RL-диод цепь) [4], в цепочках осцилляторов Тоды [5-7], в

связанных осцилляторах Дуффинга [8]. Здесь же следует отметить и более нетривиальную ситуацию, когда внешнее импульсное воздействие индуцирует квазипериодические колебания в системе двух диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля в режиме гашения колебаний (в таком режиме система демонстрирует затухающие колебания к устойчивой неподвижной точке) [9].

Для взаимодействующих нелинейных систем еще одним типичным феноменом является переход к режиму гиперхаоса. Применительно к рассматриваемому классу осцилляторов возможность возникновения гиперхаоса была выявлена в работе [10] для ансамбля связанных неавтономных осцилляторов Дуффинга.

В данной работе впервые для системы двух связанных противофазно возбуждаемых осцилляторов Тоды исследованы условия возбуждения квазипериодических колебаний, исследованы бифуркационные структуры языков синхронизации в области квазипериодических движений. Проведен анализ полного спектра показателей Ляпунова, изучены переходы к хаосу и гиперхаосу. Показано, что разрушение тора через бифуркации Неймарка-Саккера резонансных циклов на торе приводит к возникновению гиперхаоса.

Исследуемая система, общая картина динамических режимов. Систему связанных осцилляторов Тоды с внешним противофазным гармоническим воздействием запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \exp(x) - 1 &= f \sin(\omega t) + \gamma(\dot{y} - \dot{x}), \\ \ddot{y} + \alpha \dot{y} + \exp(y) - 1 &= -f \sin(\omega t) + \gamma(\dot{x} - \dot{y}), \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y, \dot{x}, \dot{y} – динамические переменные осцилляторов, α – коэффициент диссипации в каждом осцилляторе, γ – параметр связи, f и ω – амплитуда и частота внешнего воздействия. Во всех экспериментах параметр диссипации и частоту воздействия зафиксируем следующим образом: $\alpha = 0.1, \omega = 1$.

Для системы (1) был проведен анализ показателей Ляпунова и численный бифуркационный анализ. На рис. 1 а представлена карта показателей Ляпунова на плоскости параметров амплитуда внешнего воздействия f — коэффициент связи γ . Данная карта была построена следующим образом: в каждой точке плоскости параметров с помощью алгоритма Бенеттина [11] рассчитывался полный спектр показателей Ляпунова, и в зависимости от значений показателей точка на плоскости параметров окрашивалась в тот или иной цвет (палитра соответствующих цветов представлена на рисунке). Система (1) имеет пятимерное фазовое пространство, таким образом, она характеризуется пятью показателями Ляпунова, в зависимости от их значений в системе возможны следующие режимы:

- 1) периодические режимы, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5 < 0$ (*P*);
- 2) квазипериодические режимы, $\Lambda_1, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5 < 0$ (*QP*);
- 3) режим хаоса, $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5 < 0$ (*C*);
- 4) режим гиперхаоса, $\Lambda_1, \Lambda_2 > 0, \Lambda_3 = 0, \Lambda_4, \Lambda_5 < 0$ (*HC*).

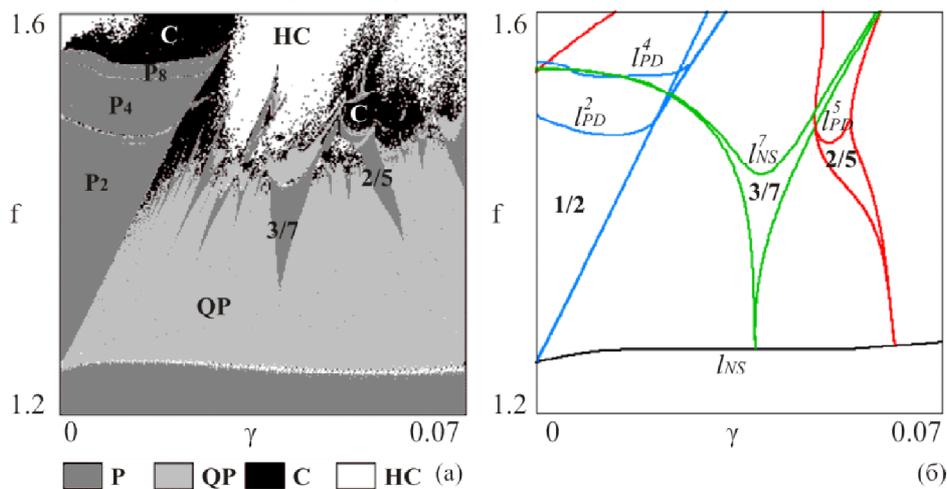


Рис. 1. (а) Карта показателей Ляпунова для системы (1) при $\alpha = 0.1, \omega = 1$. *P* – периодические колебания, *QP* – квазипериодические колебания, *C* – хаос, *HC* – гиперхаос; (б) линии бифуркаций для системы (1) при $\alpha = 0.1, \omega = 1$. I_{NS} – линия рождения тора, I_{PD}^2 и I_{PD}^5 – линии бифуркаций удвоения периода для резонансных циклов 1:2 и 2:5, I_{NS}^7 – линия вторичной бифуркации Неймарка-Саккера в языке синхронизации 3:7

На рис. 1 б представлена аналогичная плоскость параметров, на которой обозначены некоторые характерные линии бифуркаций, полученные с помощью пакета для численного бифуркационного анализа XPPAUT.

Как видно из рисунков при малых амплитудах воздействия в системе наблюдается автоколебательный режим периода-1. С увеличением амплитуды внешнего воздействия при связи, стремящейся к нулю, наблюдается переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, на рисунке 1а подписаны области режимов периода 2, 4, 8 (P2, P4, P8). На бифуркационной диаграмме отмечены соответствующие линия бифуркации удвоения периода l_{PD}^2 и l_{PD}^4 . Данная картина ожидаема для системы (1), одиночный осциллятор Тоды с внешним воздействием демонстрирует переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, соответственно при малой связи проявляется динамика отдельного осциллятора. При увеличении связи в системе возникает возможность реализации квазипериодических режимов. На рисунке 1б построена линия рождения тора l_{NS} (бифуркация Неймарка-Саккера) и опирающиеся на нее линии седло-узловых бифуркаций для двух наиболее выраженных языков синхронизации. Вблизи линии рождения тора картина синхронизации является типичной для систем с квазипериодической динамикой, число вращения будет пробегать множество рациональных значений, отвечающих резонансам на торе. С увеличением амплитуды воздействия в системе возникают хаотические колебания. Причем для данной системы наблюдаются два сценария перехода к хаосу, которые рассмотрим более подробно.

Переход к хаосу и гиперхаосу. Как видно на карте показателей Ляпунова (рис. 1а), в системе (1) возможны хаотические колебания двух типов: с одним положительным показателем Ляпунова (черный цвет на карте) и двумя положительными показателями Ляпунова, так называемый гиперхаос (белый цвет). Это связано с тем, что каждая из связанных подсистем может демонстрировать собственную хаотическую динамику, соответственно в спектре каждого осциллятора может быть по одной положительной экспоненте. Именно этим объясняется возникновение гиперхаоса в случае отсутствия связи в системе после каскада удвоений периода.

На карте видно, что области хаоса и гиперхаоса локализованы в окрестности языков синхронизации. Так, например, при движении по плоскости параметров в сторону увеличения амплитуды внешнего воздействия внутри языков синхронизации с числом вращения $1/2$ и $2/5$ в системе наблюдается переход к хаотическому режиму с одним положительным показателем Ляпунова. В то время как если передвигаться внутри языка $3/7$, мы переходим в область гиперхаоса.

С целью детального исследования особенностей формирования хаотических аттракторов двух типов на рисунке 2 представлены графики зависимостей трех старших показателей Ляпунова от амплитуды внешнего сигнала для языков $2/5$ (рис. 2а) и $3/7$ (рис. 2б). Итак, рис. 2а соответствует переходу к хаосу по сценарию Фейгенбаума [12]: через каскад бифуркаций удвоения периода. На рисунке хорошо видно, что цикл периода 5 (P5), являющийся результатом синхронизации на торе, претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода. Аналогичный сценарий наблюдается для языка $1/2$ при ненулевой связи.

На рисунке 2б также представлена зависимость трех старших показателей Ляпунова от амплитуды внешнего сигнала внутри языка $3/7$. Для данного языка сценарий формирования хаотического аттрактора другой. На рисунках 2в-2е приведены стробоскопические сечения Пуанкаре характерных режимов. Как видно из рисунка, из цикла периода 7 (P7, рис. 2в), лежащего на торе, в результате вторичной бифуркации Неймарка-Саккера (на рис. 1б отмечена эта линия бифуркации - l_{NS}^7) в окрестности каждой неподвижной точки в сечении рождается инвариантная кривая (QR_P7, рис. 2г). При этом изображающая точка попеременно посещает каждую инвариантную кривую в соответствии с тем же правилом, которое реализовывалось для обхода неподвижных точек цикла-7 в стробоскопическом сечении. Затем происходит синхронизация на торе, причем на каждой инвариантной кривой возникает резонансный цикл периода 7. С дальнейшим увеличением амплитуды воздействия происходит переход к гиперхаосу через потерю гладкости инвариантной кривой. На рисунке 2е представлен пример фазового портрета в стробоскопическом сечении, соответствующий аттрактору с двумя положительными показателями Ляпунова.

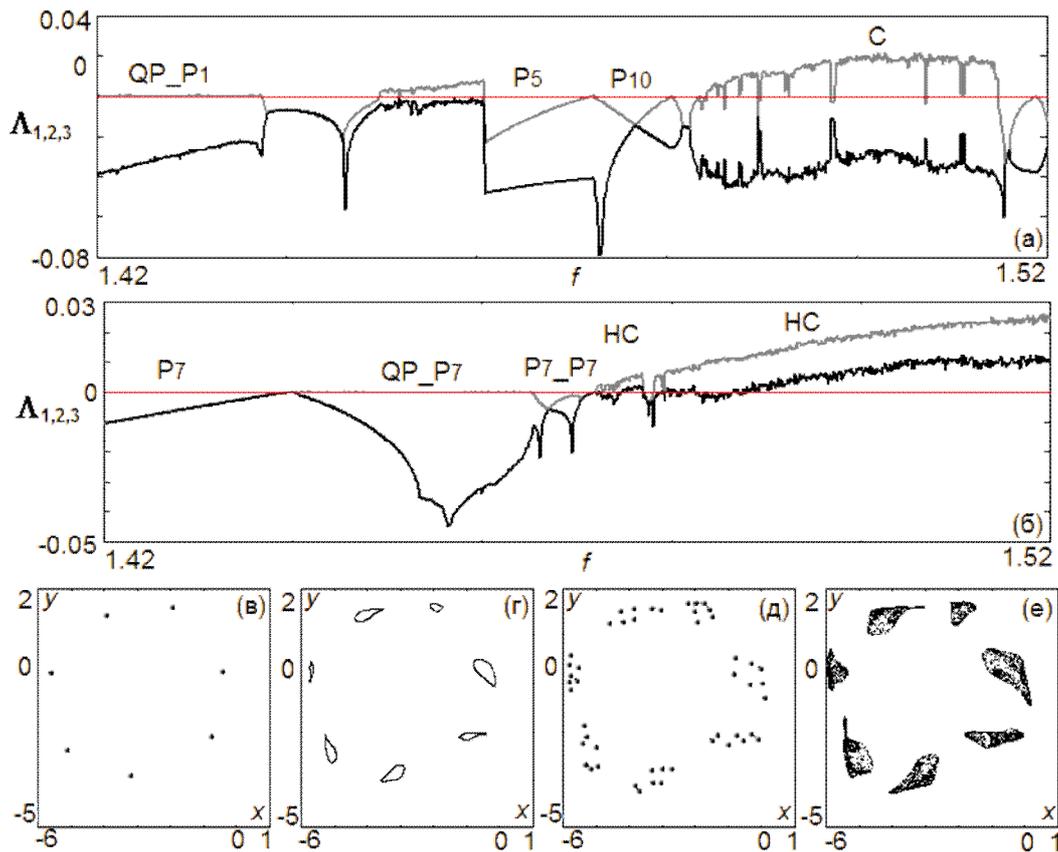


Рис. 2. Зависимость трех старших показателей Ляпунова для (1) от амплитуды внешнего сигнала при $\alpha = 0.1$, $\omega = 1$, (а): $\gamma = 0.0518$, (б): $\gamma = 0.04$; и характерные фазовые портреты в стробоскопическом сечении при $\alpha = 0.1$, $\omega = 1$, $\gamma = 0.04$, (в): $f = 1.437$, (г): $f = 1.45$, (д): $f = 1.467$, (е): $f = 1.477$

3. Заключение

Таким образом, в работе исследована динамика связанных противофазно возбуждаемых осцилляторов Тоды. В данной системе в численном эксперименте обнаружена возможность реализации квазипериодических колебаний. Выявлены два характерных сценария формирования хаотической динамики в системе: 1) сценарий Фейгенбаума - переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода; 2) переход к гиперхаосу после вторичной бифуркации Неймарка-Саккера через разрушение инвариантной кривой.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Н.В.С., А.А.Д. - грант № 12-02- 31465, В.В.А. – грант № 12-02-01298-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пиковский А. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / А. Пиковский, М. Розенблум, Ю. Куртс. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Глас Л. От часов к хаосу. Ритмы жизни / Л. Глас, М. Меки. М.: Мир, 1991. 248 с.
3. Mosekilde E. Chaotic synchronization: applications to living systems / E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, D. Postnov. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2002. 492p.
4. Астахов В.В. Особенности возникновения квазипериодических движений в системе диссипативно связанных нелинейных осцилляторов под внешним периодическим воздействием / В.В. Астахов, Б.П. Безручко, С.П. Кузнецов, Е.П. Селезнев // Письма в ЖТФ. Т. 14. 1988. Вып. 1. С. 37-41.
5. Geist K. The Nonlinear Dynamics of the Damped and Driven Toda Chain : I. Energy bifurcation diagrams / K. Geist, W. Lauterborn // Physica D 31. 1988. P. 103-116.
6. Geist K. The Nonlinear Dynamics of the damped and driven Toda chain: II. Fourier and Lyapunov analysis of tori/ K. Geist, W. Lauterborn // Physica D 41. 1990. P. 1-25.

7. Geist K. The Nonlinear Dynamics of the Damped and Driven Toda Chain : III. Classification of the nonlinear resonances and local bifurcations/ K. Geist, W. Lauterborn // Physica D 52. 1991. P. 551-559.
8. Kozlowski J. Bifurcation analysis of two coupled periodically driven Duffing oscillators/ J. Kozlowski, U. Parlitz, W. Lauterborn // Phys. Rev. E. 51. 1995. P. 1861.
9. Kuznetsov A. Nonautonomous dynamics of coupled van der Pol oscillators in the regime of amplitude death/ A. Kuznetsov, E. Seleznev, N. Stankevich // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol. 17. 2012. № 9. P. 3740-3746.
10. Perlikowski P. Routes to complex dynamics in a ring of unidirectionally coupled systems/ P. Perlikowski, S. Yanchuk, M. Wolfrum, A. Stefanski, P. Mosiolek, T. Kapitaniak // CHAOS. Vol. 20. 2010. P. 03111.
11. Benettin G. Lyapunov exponents for smooth dynamical systems and Hamiltonian systems; a method for computing all of them, Part I: Theory/ G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn // Meccanica. Vol. 15. 1980. P. 9.
12. Кузнецов А.П. Бифуркации отображений / А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Ю.В. Седова, Л.В. Тюрюкина. Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2012. 196 с.

Станкевич Наталия Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Радиотехника» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А.

Natalia V. Stankevich – Ph. D., Associate Professor of the Department Radio engineering Gagarin Saratov State Technical University

Дворак Антон Александрович – аспирант кафедры «Радиотехника» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А.

Anton A. Dvorak – Postgraduate of the Department Radio engineering Gagarin Saratov State Technical University

Астахов Владимир Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Радиотехника» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А.

Vladimir V. Astakhov – Dr Sc, Professor, Head of the Department Radio Engineering Gagarin Saratov State Technical University

Статья поступила в редакцию 12.10.12, принята к опубликованию 06.11.12