

**ЭФФЕКТ «ГИБЕЛИ КОЛЕБАНИЙ»  
И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ  
В НИЗКОРАЗМЕРНОМ АНСАМБЛЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ**

*А. П. Кузнецов, Л. В. Тюрюкина*

Рассматривается динамика четырех диссипативно связанных осциллятора ван дер Поля. Представлена ляпуновская карта на плоскости параметров и обсуждается ее устройство. Обнаружен эффект повышения порога режима «гибели колебаний» и возможность полной и частичной широкополосной синхронизации. Обсуждаются бифуркации торов в системе при большой частотной расстройке осцилляторов, в частности, седло-узловая квазипериодическая бифуркация и квазипериодическая бифуркация Хопфа.

*Ключевые слова:* Синхронизация, эффект гибели колебаний, квазипериодические бифуркации.

### Введение

Синхронизация ансамблей осцилляторов является важной проблемой, представляющей как общетеоретический интерес, так и интерес с точки зрения приложений в радиофизике, лазерной физике, биофизики и т.д. [1–6]. Картина возможных типов режимов взаимодействующих осцилляторов достаточно хорошо изучена для малого их числа, или, наоборот, для больших массивов осцилляторов. Здесь мы обратимся к случаю ансамбля, содержащего четыре осциллятора ван дер Поля, и обсудим основные характерные типы режимов. Оказывается, что увеличение числа осцилляторов до четырех приводит к ряду новых моментов, которые и являются предметом настоящей работы. Будем рассматривать случай диссипативной связи, величина которой определяется относительной скоростью осцилляторов. Будем обсуждать традиционную для таких задач плоскость параметров частотная расстройка – величина связи осцилляторов. Как известно, для случая двух осцилляторов на этой плоскости выделяются следующие характерные области [1–6]. Во-первых, это основная область синхронизации с соотношением захваченных частот 1 : 1. Далее, область квазипериодических режимов со встроенной системой языков синхронизации с другими рациональными соотношениями частот. Еще одна характерная область – об-

ласть «гибели колебаний» (*oscillator death*). Она располагается при достаточно больших частотных расстройках при выполнении условия на величину связи  $\mu$  и параметр отрицательного трения  $\lambda < \mu$  [1]. Интересный режим наблюдается для неидентичных по параметрам отрицательного трения осцилляторов, когда  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  [7–9]. В этом случае между областями гибели колебаний и квазипериодических режимов возникает область периодических режимов  $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$ , простирающаяся в сторону больших частотных расстроек. Причина ее появления состоит в том, что при выполнении условий  $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$  первый осциллятор доминирует над вторым, который подавлен диссипативной связью. Такие режимы в [8,9] названы *широкополосной синхронизацией*.

Для трех идентичных осцилляторов в дополнение к указанной картине возникает возможность двух типов квазипериодических колебаний, отвечающих двум и трем несоизмеримым частотам [1,2,10]. На плоскости параметров они очень просто разделены при большом рассинхронизме осцилляторов: трехчастотной квазипериодичности отвечают меньшие значения связи. При малом рассинхронизме наблюдаются резонансы, и возникает картина языков двухчастотных торов, погруженных в область трехмерных торов [10,11]. Полная широкополосная синхронизация для идентичных по параметру возбуждения таких осцилляторов не наблюдается, она возможна только, если есть отличия в параметрах отрицательного трения. Однако в области  $\lambda/2 < \mu < \lambda$  возникает широкополосный квазипериодический двухчастотный режим (подробности см. в [11] и ниже).

В настоящей работе, как отмечалось, обсуждается случай четырех осцилляторов. Будем использовать метод ляпуновских карт [10,11], в рамках которого выбирается точка на плоскости параметров и вычисляется спектр ляпуновских показателей системы  $L_i$ . В зависимости от знаков и числа нулевых старших показателей<sup>1</sup>, определяется тип режима (аттрактора) в системе.

- $P$  – предельный цикл,  $L_1 = 0, L_2 < 0, L_3 < 0, L_4 < 0, L_5 < 0$ ,
- $T_2$  – двухчастотный тор,  $L_1 = L_2 = 0, L_3 < 0, L_4 < 0, L_5 < 0$ ,
- $T_3$  – трехчастотный тор,  $L_1 = L_2 = L_3 = 0, L_4 < 0, L_5 < 0$ ,
- $T_4$  – четырехчастотный тор,  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0, L_5 < 0$ ,
- $C$  – хаос,  $L_1 > 0, L_2 < 0, L_3 < 0, L_4 < 0, L_5 < 0$ .

Выбранная точка на плоскости параметров окрашивается в определенный цвет, в соответствии с типом режима. Затем выполняется сканирование всей плоскости. В результате получается двухпараметрический «портрет» различных колебательных режимов.

Следует отметить, что наличие торов разной размерности приводит к возможности *квазипериодических бифуркаций*. Мы обсудим основные типы таких бифуркаций в анализируемой системе. К сожалению, численные алгоритмы поиска квазипериодических бифуркаций очень трудоемки и находятся, во многом, в стадии разработки [12]. Однако поведение ляпуновских показателей в ряде случаев позволяет идентифицировать тип бифуркации, что мы и используем.

<sup>1</sup>Заметим, что остальные показатели всегда остаются отрицательными и не сказываются на картине наблюдаемых режимов. Пятый показатель тоже всегда отрицательный, но он необходим для идентификации типа квазипериодической бифуркации, см. далее рис. 4 и его обсуждение.

## 1. Случай трех осцилляторов

Для дальнейшего понадобятся более детальные сведения о случае трех диссипативно связанных осцилляторов [11]. Цепочка таких осцилляторов описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\lambda$  – параметр возбуждения автономных осцилляторов, характеризующий отрицательное трение;  $\Delta_1$  – частотная расстройка второго осциллятора относительно первого;  $\Delta_2$  – третьего относительно первого;  $\mu$  – коэффициент диссипативной связи.

Карта ляпуновских показателей системы (1) на плоскости  $(\Delta_1, \mu)$  для  $\lambda = 0.1$  и  $\Delta_2 = 0.05$  показана на рис. 1. На ней располагается область полной синхронизации трех осцилляторов  $P$ , а также области двухчастотных торов  $T_2$  и трехчастотных торов  $T_3$ . Хаотические режимы при данном наборе параметров не выявляются. Еще одна характерная область показана серым цветом и обозначена OD. Она отвечает режиму «гибели колебаний». Такой эффект имеет место при условии  $\mu > \lambda$ , когда трение между осцилляторами превышает отрицательное трение, свойственное автоколебательным элементам. Для удобства восприятия значение  $\mu = \lambda$  отмечено стрелкой на правой границе карты. Можно видеть, что оно является асимптотической границей области гибели колебаний при возрастании частотной расстройки  $\Delta_1$ .

При уменьшении параметра связи в области  $\lambda/2 < \mu < \lambda$  появляется широкая по частоте полоса области двухчастотной квазипериодичности, обозначенная на рис. 1 PBS. Этот режим в [11] назван *частичной широкополосной синхронизацией*. Его природа состоит в том, что связь по-разному возмущает осцилляторы в цепочке, даже если их параметры возбуждения одинаковы. Действительно, центральный осциллятор испытывает трение со стороны двух соседей, и эффективный коэффициент трения для него повышается в два раза. Поэтому при условии  $\lambda > \mu > \lambda/2$  второй осциллятор подавлен соседями, которые все еще достаточно возбуждены [11].

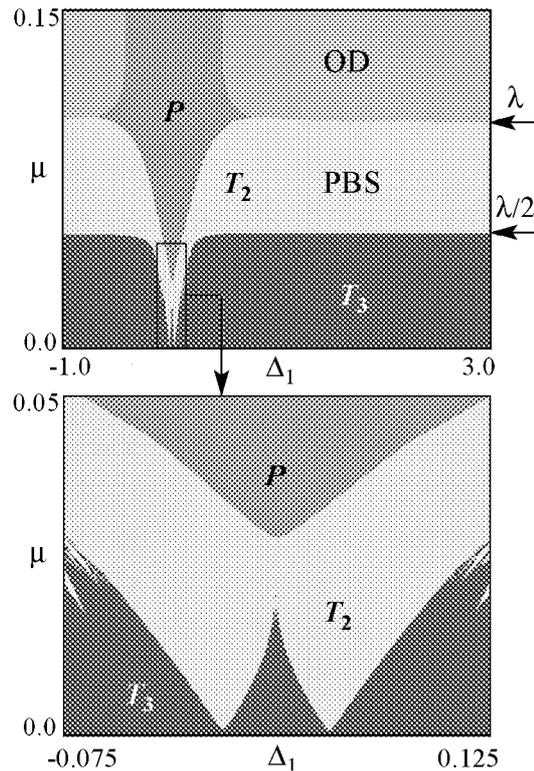


Рис. 1. Ляпуновская карта системы трех связанных осцилляторов ван дер Поля (1), OD – область гибели колебаний, PBS – область частичной широкополосной синхронизации. Значения параметров  $\lambda = 0.1$ ,  $\Delta_2 = 0.05$

## 2. Случай четырех осцилляторов. Эффект повышения порога области гибели колебаний

Перейдем теперь к системе из четырех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\
 \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\
 \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) + \mu(\dot{z} - \dot{w}) &= 0, \\
 \ddot{w} - (\lambda - w^2)\dot{w} + (1 + \Delta_3)w + \mu(\dot{w} - \dot{z}) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Карта ляпуновских показателей для  $\lambda = 0.1$  на плоскости  $(\Delta_1, \mu)$  в разных масштабах показана на рис. 2. Остальные параметры выбраны так, чтобы частоты первого, третьего и четвертого осцилляторов были достаточно близки:  $\Delta_2 = 0.03$ ,  $\Delta_3 = 0.1$ . Частота же второго осциллятора  $\Delta_1$  является варьируемым параметром.

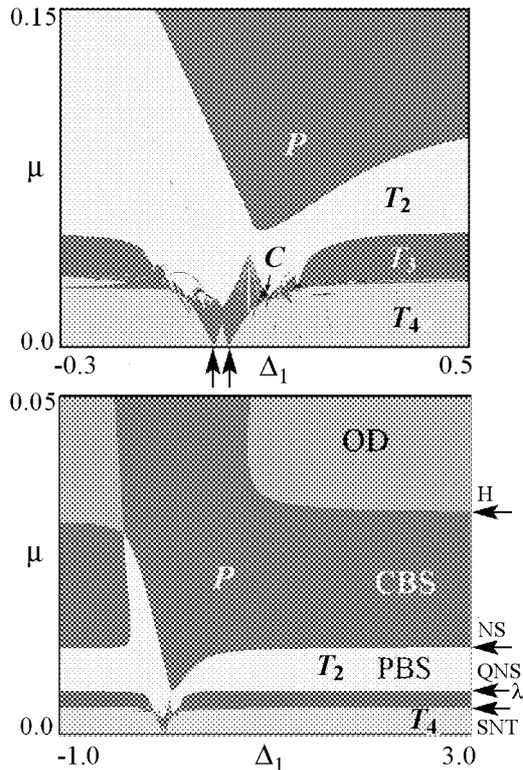


Рис. 2. Карта динамических режимов четырех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля (2) в разных масштабах,  $\lambda = 0.1$ ,  $\Delta_2 = 0.03$ ,  $\Delta_3 = 0.1$ . Вертикальными стрелками на рис. а обозначены значения резонансных условий  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_1 = \Delta_2$ . Горизонтальные стрелки на рис. б отвечают различным бифуркациям (см. пояснения в тексте)

При небольших уровнях связи на рис. 2, а в окрестности нулевой расстройки  $\Delta_1$  можно видеть проявление резонансных эффектов для торов разной размерности. Так, наблюдаются два характерных языка трехмерных торов, погруженных в область четырехмерных. Эти языки имеют основания на оси абсцисс, которые отвечают двум резонансным условиям  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_1 = \Delta_2$ . Физически, согласно (1), они соответствуют резонансам, когда частота второго осциллятора совпадает с частотой первого ( $\Delta_1 = 0$ ) или с частотой третьего ( $\Delta_1 = \Delta_2$ ). Резонансные значения отмечены стрелочками на рис. 2, а. В свою очередь, области двухчастотных торов также имеют вид языков, однако, все они имеют порог по величине связи. Основания некоторых языков разрушены с возникновением областей хаоса  $C$ . Отметим, что в целом картина на рис. 2, а при небольшой связи качественно близка к результатам фазового приближения [10].

Обратимся теперь к рис. 2, б, отвечающему более широкому диапазонам изменения параметров. Теперь в «поле

зрения» попадает область «гибели колебаний» OD. Однако нижняя граница этой области при большой частотной расстройке  $\Delta_1$  не стремится к значению  $\mu = \lambda$ , как это было в случае двух и трех осцилляторов, а довольно значительно превышает этот порог. Таким образом, для четырех осцилляторов наблюдается *эффект повышения порога гибели колебаний*. Из рис. 2, б можно видеть, что это превышение значительное: граница области гибели колебаний (точка H на рисунке) отвечает примерно  $\mu \approx 2.6\lambda = 0.26$ .

Обсудим этот эффект подробнее и выясним, почему он проявляется именно в системе из четырех осцилляторов. Причина состоит в том, что в случае трех осцилляторов увеличение частоты центрального  $\Delta_1$  приводит к существенной рассинхронизации, как пары первый–второй, так и пары второй–третий осцилляторы. В результате граница области гибели колебаний в асимптотике  $\Delta_1 \rightarrow \infty$  определяется очень просто, как условие компенсации отрицательного трения диссипацией, то есть  $\mu = \lambda$ . В случае четырех осцилляторов ситуация усложняется. Действительно, третий и четвертый осциллятор при фиксированных собственных частотах могут эффективно взаимодействовать в режимах, близких к синхронным. В результате пара этих осцилляторов образует, в определенном смысле, более существенно возбужденную автоколебательную подсистему. А значит пороговое значение уровня связи, обеспечивающие эффект гибели колебаний в цепочке в целом, может повышаться.

Проиллюстрируем сказанное некоторыми оценками. Запишем укороченные уравнения (уравнения Ландау–Стюарта)<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_1 b - \mu(2b - a - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_2 c - \mu(2c - b - d). \\ 2\dot{d} &= \lambda d - |d|^2 d + i\Delta_3 d - \mu(d - c). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $a, b, c, d$  – медленные комплексные амплитуды. Для определения области гибели колебаний, как известно, достаточно линейного приближения. Кроме того, полагаем  $\Delta_1 \rightarrow \infty$ , а собственные частоты первого, третьего и четвертого осцилляторов малыми (по сравнению с  $\Delta_1$ ). Для оценок положим, что они просто совпадают, и  $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b + i\Delta_1 b - \mu(2b - a - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - \mu(2c - b - d). \\ 2\dot{d} &= \lambda d - \mu(d - c). \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>2</sup>Их вывод является стандартным для метода медленно меняющихся амплитуд [1,2] и поэтому здесь не приводится.

Ищем решение этой линейной системы в виде экспоненциальной подстановки  $\exp(at/2)$ . Тогда получаем

$$\begin{aligned}(\alpha - \lambda + \mu)a &= \mu b, \\(\alpha - \lambda + 2\mu - i\Delta_1)b &= \mu(a + c), \\(\alpha - \lambda + 2\mu)c &= \mu(b + d), \\(\alpha - \lambda + \mu)d &= \mu c.\end{aligned}\tag{5}$$

Условие рассинхронизма второго осциллятора  $\Delta_1 \rightarrow \infty$  в соответствии со вторым уравнением (5) требует, чтобы  $a/b \rightarrow \infty$ , либо  $c/b \rightarrow \infty$ . Физически это отвечает тому, что либо первый, либо третий осциллятор доминируют над вторым. (Напомним, что переменные  $a$ ,  $b$ ,  $c$  отвечают комплексным амплитудам соответствующих осцилляторов.)

Оценим первое отношение. Из первого уравнения (5) получаем

$$a/b = \frac{\mu}{\alpha - \lambda + \mu}.\tag{6}$$

Отсюда видим, что  $a/b \rightarrow \infty$ , если  $\alpha = \lambda - \mu$ . Условие гашения колебаний определяется отрицательным декрементом затухания  $\alpha < 0$ , так что получаем  $\mu > \lambda$ , то есть точно такое условие, как для двух или трех осцилляторов.

Оценим теперь второе отношение, связанное с доминированием третьего осциллятора. Из второго и третьего уравнений (5) получаем

$$c/b = \frac{\mu}{\alpha - \lambda + 2\mu - \frac{\mu^2}{\alpha - \lambda + \mu}}.\tag{7}$$

Условие  $c/b \rightarrow \infty$  выполняется при обращении в нуль знаменателя, что приводит к квадратному уравнению относительно декремента затухания  $\alpha$ , которое легко решается

$$\alpha = \lambda - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\mu.\tag{8}$$

Для возникновения режима гашения колебаний должно быть  $\alpha < 0$  для обеих корней, что приводит к условию

$$\mu > \frac{2}{3 - \sqrt{5}}\lambda \approx 2.618 \cdot \lambda.\tag{9}$$

Таким образом, ситуация доминирования третьего осциллятора при условии его эффективного взаимодействия с четвертым значительно повышает порог эффекта гибели колебаний – более чем в два раза.

Заметим, что если  $\Delta_2 \neq 0$ ,  $\Delta_3 \neq 0$  можно провести аналогичное рассмотрение, только получаются громоздкие выражения. При этом оценка (9) довольно эффективна и для случая, представленного на рис. 2, б. Действительно, при  $\lambda = 0.1$  она дает  $\mu \approx 0.26$ , что очень близко к асимптотической границе области гибели колебаний на рис. 2, б. Это не удивительно, так как соответствующие частотные параметры малы:  $\Delta_2 = 0.03$ ,  $\Delta_3 = 0.1$ .

На рис. 3 показаны фазовые портреты всех четырех осцилляторов для разного уровня связи при достаточно большой частотной расстройке второго осциллятора  $\Delta_1 = 2.0$ . (Обращаем внимание на разные масштабы по осям координат на фазовых портретах различных фрагментов.) Рис. 3, *a* отвечает случаю, когда  $\mu < \lambda$ , но близко к этому значению. На карте это соответствует области частичной широкополосной синхронизации PBS. Видно, что второй осциллятор, выведенный из условий синхронизации, достаточно сильно подавлен связью. При этом его траектория сильно возмущена квазипериодическим образом по сравнению с автономным случаем. Все остальные осцилляторы возбуждены примерно равноценно. Причем это относится и к третьему осциллятору, испытывающему двойное трение со стороны соседей и для которого порог  $\mu = \lambda/2$  для выбранного значения параметра связи превышен.

Рис. 3, *b* относится к области периодических режимов. При этом выбрано значение  $\mu = 0.2$ , когда заметно превышен соответствующий порог  $\mu = \lambda$ , отвечающий компенсации диссипативной связью отрицательного трения отдельного осциллятора. Можно видеть, что квазипериодический режим сменился периодическим. Теперь сильно подавлены связью как второй, так и первый осцилляторы. Несмотря на сильную диссипацию  $\mu > \lambda$ , третий и четвертый осциллятор достаточно сильно возбуждены. Их орбиты примерно одинакового (по порядку) радиуса и не отличаются существенно от случая, приведенного на рис. 3, *a*. Таким образом, действительно возникла заметная синхронизация третьего и четвертого осцилляторов, которая и «затягивает» возникновение режима гибели колебаний.

Описанный механизм приводит также еще к одному эффекту, а именно к возможности *полной широкополосной синхронизации* CBS четырех осцилляторов для случая *идентичных* управляющих параметров  $\lambda$ . Действительно, на рис. 2, *a* можно видеть характерную полосу CBS в диапазоне уровня связи  $0.1 < \mu < 0.27$  (между точками *H* и *NS* на карте). В случае трех идентичных осцилляторов такой режим не возникает (ср. рис. 2, *b* и рис. 1). Для его реализации для трех (как и для двух) осцилляторов необходима неидентичность по управляющим параметрам [11].

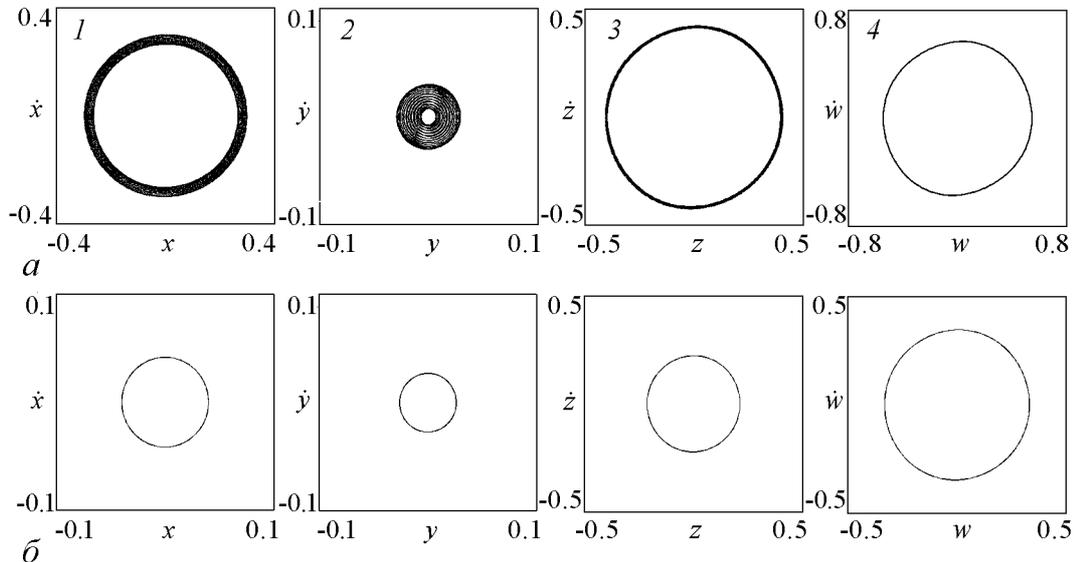


Рис. 3. Фазовые портреты четырех осцилляторов: *a* – режим частичной широкополосной синхронизации,  $\mu = 0.08$ ; *b* – режим полной широкополосной синхронизации,  $\mu = 0.2$ . Цифры отвечают номеру осциллятора. Значения параметров  $\lambda = 0.1$ ,  $\Delta_1 = 2.0$ ,  $\Delta_2 = 0.03$ ,  $\Delta_3 = 0.1$

### 3. Квазипериодические бифуркации в системе четырех осцилляторов

Продолжим обсуждение рис. 2, б. При больших частотных расстройках  $\Delta_1$  с уменьшением параметра связи наблюдается каскад бифуркаций рождения инвариантных торов все более высокой размерности. Обсудим картину бифуркаций, сопровождающих наблюдаемый эффект. Для этого обратимся к графику зависимости пяти старших ляпуновских показателей  $\Lambda_i$  от величины связи (рис. 4). Параметр частоты второго осциллятора выберем достаточно большим ( $\Delta_1 = 2.0$ ), чтобы наблюдалась существенная рассинхронизация этого осциллятора с остальными.

При большой связи реализуется эффект гибели колебаний, и все показатели на рис. 4 отрицательны. В точке  $\mu \approx 0.27$  первый показатель обращается в ноль, и происходит *бифуркация Андронова–Хопфа* H рождения устойчивого (многомерного) предельного цикла.

При дальнейшем уменьшении связи в точке NS происходит *бифуркация Неймарка–Сакера*, и рождается устойчивый двухчастотный тор. При этом в ноль обращаются уже два показателя: первый и второй.

Затем в точке QNS в ноль обращается и третий показатель  $\Lambda_3$ . При этом наблюдается характерное поведение: до точки бифуркации третий и четвертый показатели равны друг другу ( $\Lambda_3 = \Lambda_4$ ). За точкой бифуркации показатель  $\Lambda_3$  обращается в ноль, а четвертый показатель  $\Lambda_4$ , коснувшись горизонтальной оси, снова уходит в отрицательную область. Это характерная картина *квазипериодической бифуркации*, приводящей к мягкому возникновению трехчастотного тора из двухчастотного [12]. В [12] такую бифуркацию называют *квазипериодической бифуркацией Хопфа* (*quasi-periodic Hopf bifurcation*), хотя более логичным было бы говорить о *квазипериодической бифуркации Неймарка–Сакера QNS*<sup>3</sup>.

В точке SNT размерность тора вновь повышается. Однако это бифуркация другого типа – теперь четвертый показатель просто обращается в ноль, а пятый показатель все время остается отрицательным. Это означает, что имеет место *седло-узловая бифуркация торов* [12]: устойчивый трехмерный тор сливается с седловым, исчезает, и возникает четырехмерный устойчивый тор. Отметим, что аналогичная бифуркация реализуется и в фазовом приближении [10]. Остальные бифуркации в фазовой модели невозможны.

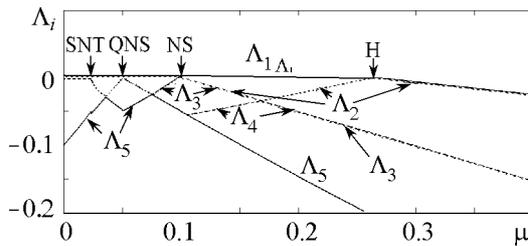


Рис. 4. Графики пяти старших ляпуновских показателей системы четырех связанных осцилляторов ван дер Поля,  $\lambda = 0.1$ ,  $\Delta_1 = 2$ ,  $\Delta_2 = 0.03$ ,  $\Delta_3 = 0.1$ . Здесь H – точка бифуркации Андронова–Хопфа, NS – точка бифуркации Неймарка–Сакера, QNS – точка квазипериодической бифуркации Неймарка–Сакера двухчастотного тора, SNT – точка седло-узловой бифуркации трехчастотного тора

узловая бифуркация торов [12]: устойчивый трехмерный тор сливается с седловым, исчезает, и возникает четырехмерный устойчивый тор. Отметим, что аналогичная бифуркация реализуется и в фазовом приближении [10]. Остальные бифуркации в фазовой модели невозможны.

Для удобства восприятия тип бифуркаций указан по правому обрезу карты на рис. 2, б. Можно видеть, что описанные бифуркации приводят, фактически, к картине режимов широкополосной синхронизации на базе квазипериодичности разной размерности.

<sup>3</sup>Поскольку именно бифуркация Неймарка–Сакера отвечает за рождение тора.

## Заключение

В системе четырех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля наблюдаются определенные особенности в устройстве характерных областей на плоскости параметров. Так, режим «гибели колебаний» возникает при значительном превышении величины связи значения параметра отрицательного трения, что объясняется взаимодействием подсистемы из двух осцилляторов. При большой частотной расстройке наблюдаются последовательно бифуркация Андронова–Хопфа, Неймарка–Сакера, мягкая квазипериодическая бифуркация Неймарка–Сакера и жесткая седлоузловая квазипериодическая бифуркация. При этом их линии являются асимптотическими границами областей широкополосной синхронизации (полной и частичной) для квазипериодических режимов разной размерности.

Авторы выражают благодарность И.Р. Сатаеву за полезное обсуждение.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 12-02-00541-а.*

## Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
3. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций: Учебник-монография. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2009. 312 с.
4. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
5. Glass L. and Mackey M.C. From Clocks to Chaos. Princeton University Press, 1988. 272 p.
6. Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O. Synchronization: From simple to complex. Springer, 2009. 426 p.
7. Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189. № 1–2. P. 8.
8. Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П. Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
9. Kuznetsov A.P., Roman Ju.P. Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // *Physica D*. 2009. Vol. 238, № 16. P. 1499.
10. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2010. Т. 6, № 4. С. 693.
11. Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связанных осцилляторов ван дер Поля // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19, № 5. С. 76.

12. Broer H., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2011. Vol. 16, № 1–2. P. 154.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 21.09.2012  
После доработки 19.12.2012*

## «OSCILLATOR DEATH» AND QUASIPERIODIC BIFURCATIONS IN LOW-DIMENSIONAL ENSEMBLE OF VAN DER POL OSCILLATORS

*A. P. Kuznetsov, L. V. Turukina*

The dynamics of the four dissipatively coupled van der Pol oscillator is considered. Lyapunov chart is presented in the parameter plane and its arrangement is discussed. The effect of increase of the threshold for the «oscillator death» regime and the possibility of complete and partial broadband synchronization are revealed. We discuss the bifurcations of tori in the system at large frequency detuning of the oscillators, in particular, quasi-periodic saddle-node and Hopf bifurcations.

*Keyword:* Synchronization, oscillator death, quasi-periodic bifurcations.

*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: apkuz@rambler.ru

*Тюрюкина Людмила Владимировна* – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском государственном университете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). В настоящее время старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособий.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
Саратовский филиал Института радиотехники  
и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
E-mail: lvtur@rambler.ru