Детерминированный хаос

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 3, 2013 УДК 517.9

ВЛИЯНИЕ СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИИ НА СТРУКТУРЫ ТИПА «СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПАУТИНА»

Е. В. Фельк

Исследовано влияние слабой нелинейной диссипации на устройство фазового пространства отображения-генератора стохастической паутины. Выявлен бифуркационный сценарий трансформаций аттракторов при увеличении диссипации.

Ключевые слова: Стохастическая паутина, слабодиссипативные системы, консервативный хаос.

Введение

Хорошо известно, что свойства консервативных и диссипативных динамических систем существенно различаются. В частности, хаос в неинтегрируемых консервативных системах наблюдается при любых значениях параметров, но, как правило, в ограниченной области фазового пространства. В диссипативных системах хаос возникает только в определенном диапазоне параметров, а бассейн притяжения хаотического режима занимает значительную часть фазового пространства [1–3]. Если ввести в консервативную систему малую диссипацию, то система перейдет в пограничное состояние, в котором можно наблюдать характерные черты как консервативной, так и диссипативной динамики. Исследованию систем со слабой диссипацией посвящен ряд работ [4–11], в частности, обнаружено, что для таких систем характерно сосуществование очень большого числа регулярных аттракторов.

Однако почти во всех работах исследовалась динамика систем общего вида или невырожденных в смысле КАМ-теоремы. Хорошо известно, что устройство фазового пространства вырожденных систем, в которых собственные частоты не зависят от переменных действия, существенно отличается от фазового пространства невырожденных систем [1,2]. В частности, в неавтономной системе с одной степенью свободы, частота которой не зависит от переменной действия, резонанс наблюдается во всем фазовом пространстве одновременно. При этом возникший при разрушении сепаратрис стохастический слой покрывает фазовое пространство в виде некоторой сети, в ячейках которой движение финитно. В результате образуется *стохастическая паутина* – связанная сеть каналов конечной ширины, по которой может происходить неограниченный перенос частиц в радиальном направлении при любой, сколь угодно малой амплитуде воздействия. Обзор примеров и свойств таких структур можно найти, например, в [2]. Интересным является вопрос об изменении наблюдаемой картины при введении малого возмущения, переводящего систему в класс диссипативных. Ранее были проведены некоторые исследования, касающиеся влияния постоянной (линейной) диссипации [12].

Целью настоящей работы является исследование влияния нелинейной диссипации на структуры стохастической паутины, в частности, изучение закономерностей эволюции сосуществующих аттракторов при изменении уровня диссипации. Возмущение выбирается по типу классической модели теории нелинейных колебаний – осциллятора ван дер Поля, а варьируемым является параметр, отвечающий за уровень нелинейной диссипации.

1. Неавтономный линейный осциллятор с малым диссипативным возмущением «автоколебательного» типа

Классическим примером динамической системы, демонстрирующей стохастическую паутину, является линейный осциллятор с внешним импульсным воздействием, амплитуда которого нелинейным образом зависит от координаты осциллятора [1],

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0 K}{T} \cos x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \qquad (1)$$

Стохастическая паутина образуется, если наблюдается резонанс внешнего воздействия и собственной частоты осциллятора, то есть параметр $q = 2\pi/(\omega_0 T)$ является целым. Фактически он определяет порядок поворотной симметрии, наблюдаемой на фазовом портрете. Если его значение принадлежит множеству $3, 4, 6$, то поворотная симметрия сочетается с трансляционной, в результате образуется единая сепаратриса. Такой тип симметрии Г.М. Заславский называет симметрией кристаллического типа [1,2]. При других целых q точная трансляционная симметрия невозможна, однако сепаратрисы различных точек проходят близко друг от друга, в результате при их разрушении также образуется стохастическая паутина. Такие структуры принято называть квазикристаллическими. Фазовые портреты системы (1) (в стробоскопическом сечении на плоскости (x, y), где $y = \dot{x}$), а также устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических (седловых) неподвижных точек для обоих случаев представлены на рис. 1 при различных порядках резонанса q.

Введем в систему (1) нелинейную диссипацию, аналогично используемую в автоколебательной системе – генераторе ван дер Поля [13],

$$\ddot{x} + (\gamma - \mu x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0 K}{T} \cos x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \qquad (2)$$

Здесь параметры γ и μ определяют соответственно уровень линейной (то есть не зависящей от значений переменных) и нелинейной диссипации. С физической точки зрения, наиболее интересным представляется исследование системы в области, отвечающей автоколебательному режиму в автономной системе, чему соответствуют

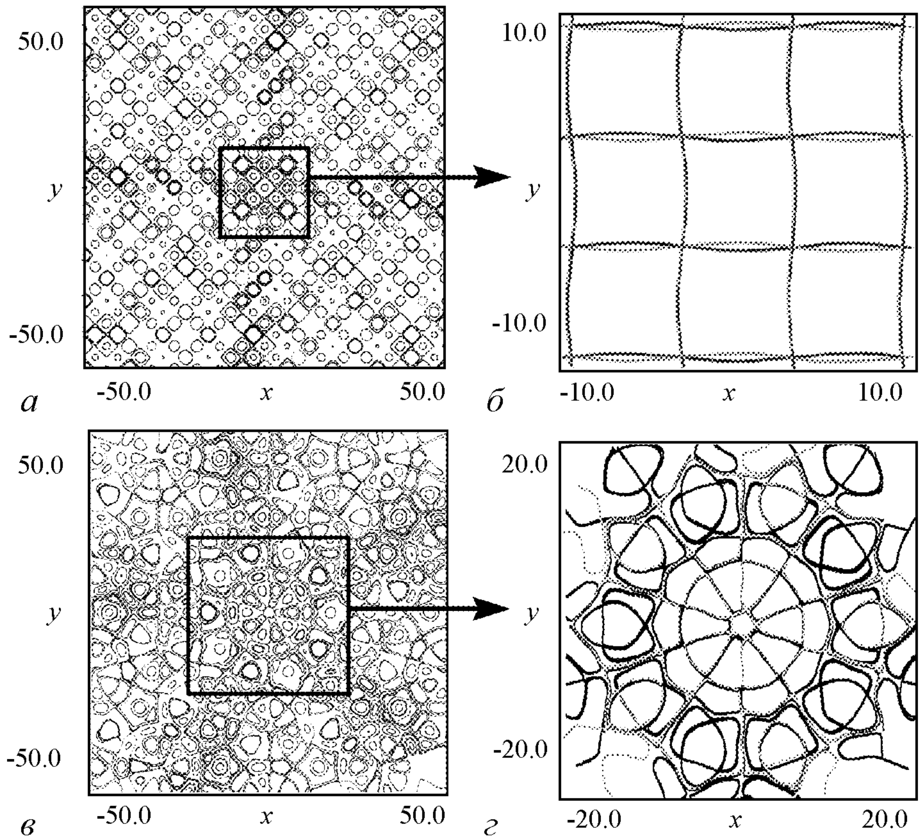

Рис. 1. Фазовые портреты системы (1) и соответствующие им устойчивые (черный цвет) и неустойчивые (серый цвет) многообразия при различных значениях параметра q: 4 (*а, б*), 5 (*в, г*). Амплитуда воздействия $K = 0.1$

отрицательные значения этих параметров. В настоящей работе возмущение предполагалось малым, поэтому использовались малые (порядка 10^{-3}–10^{-5}) значения параметров γ и μ.

Далее будем исследовать устройство фазового пространства стробоскопического отображения, соответствующего системе (2), в котором в качестве переменных выбираются координата и скорость осциллятора перед очередным импульсом. Для исходной системы (1) такое отображение может быть получено аналитически. Для системы (2) точное аналитическое построение стробоскопического отображения невозможно, поэтому в настоящей работе оно вычислялось прямым численным интегрированием системы (2) в промежутке между импульсами.

На рис. 2 приведены фазовые портреты стробоскопического отображения при значении порядка резонанса $q = 5$ и постоянном значении параметра линейной диссипации. Видно, что при малых уровнях нелинейной диссипации (рис. 2, *а*) наблюдается довольно большое число аттракторов, являющихся неподвижными точками типа «фокус». При увеличении нелинейной диссипации устойчивые фокусы превращаются узлы, а их количество уменьшается, поскольку они попарно сливаются с седловыми точками (рис. 2, *б*), а образовавшиеся в результате узлы исчезают через седло-узловую бифуркацию (рис. 2, *в*). Процесс эволюции аттракторов завершается образованием устойчивой инвариантной кривой вблизи начала координат (рис. 2, *г*).

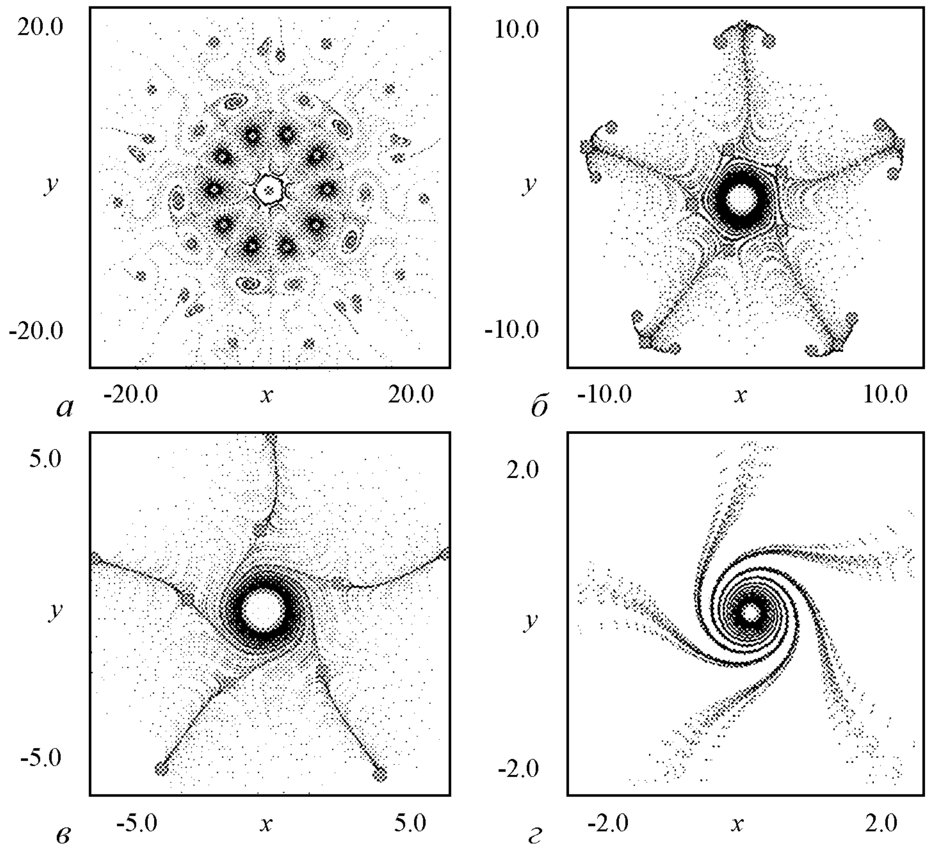

Рис. 2. Фазовые портреты системы (2) при $q = 5$, $K = 0.1$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-4}$ и различных значениях параметра μ: $-5 \cdot 10^{-5}$ (*а*), $-5 \cdot 10^{-4}$ (*б*), $-2 \cdot 10^{-3}$ (*в*), $-5 \cdot 10^{-2}$ (*г*). Серыми кружками обозначены устойчивые неподвижные точки, квадратами – неустойчивые

При существенном значении нелинейной диссипации она остается единственным аттрактором в системе, что соответствует квазипериодической динамике.

Рождение инвариантной кривой иллюстрирует рис. 3, на котором представлены устойчивые и неустойчивые многообразия ближайших к началу координат седловых точек. Видно, что с увеличением параметра μ происходит нелокальная бифуркация: в некоторый момент устойчивые и неустойчивые многообразия седловых точек замыкаются, образуя гетероклинический цикл, после чего от него отделяется инвариантная кривая, на которую теперь и приходят неустойчивые многообразия седловых точек (рис. 3, *б*).

Для системы с симметрией кристаллического типа ($q = 3$) сценарий эволюции в целом совпадает с описанным выше (рис. 4), однако завершается процесс образованием не инвариантной кривой, а устойчивого фокуса в начале координат (рис. 4, *г*).

Предполагая, что наблюдаемое отличие является следствием некоторого вырождения системы, введем дополнительный параметр φ, характеризующий направление действия импульса,

$$\ddot{x} + (\gamma - \mu x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0 K}{T} \cos(x + \varphi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \qquad (3)$$

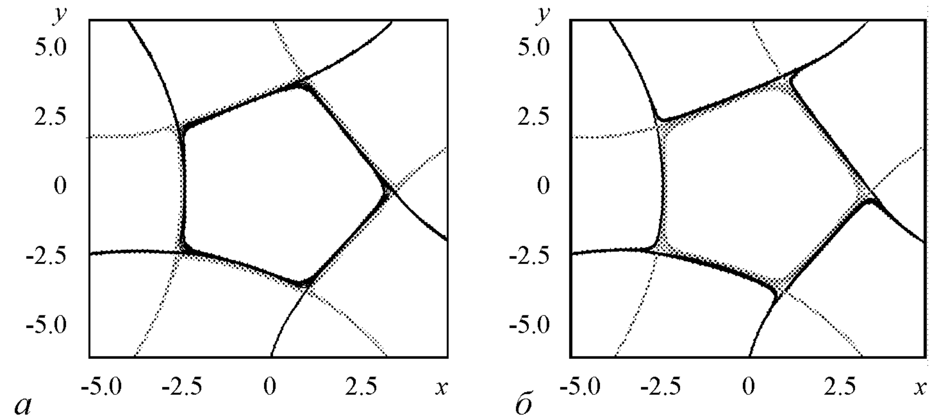

Рис. 3. Устойчивые (черный цвет) и неустойчивые (серый цвет) многообразия при $q = 5$, $K = 0.1$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-4}$ и различных значениях параметра μ: $-1 \cdot 10^{-4}$ (*а*), $-2 \cdot 10^{-4}$ (*б*)

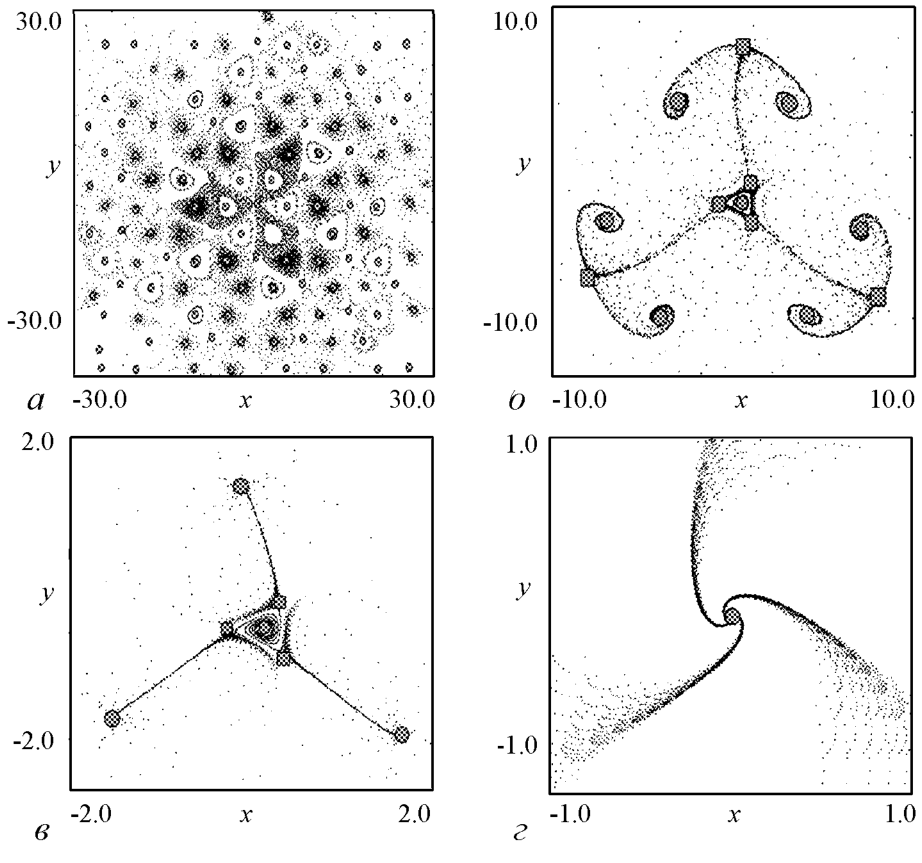

Рис. 4. Фазовые портреты системы (2) при $q = 3$, $K = 0.3$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-3}$ и различных значениях параметра μ: $-1 \cdot 10^{-5}$ (*а*), $-5 \cdot 10^{-4}$ (*б*), $-5 \cdot 10^{-2}$ (*в*), $-5 \cdot 10^{-1}$ (*г*). Серыми кружками обозначены устойчивые неподвижные точки, квадратами – неустойчивые

Эволюцию аттракторов системы (3) в случае кристаллической симметрии ($q = 3$) и при значении параметра $\varphi = \pi/2$ иллюстрирует рис. 5. Видно, что в этом случае процесс эволюции аттракторов, как и на рис. 2, завершается образованием инвариантной кривой (рис. 5, *в*). Сценарий ее рождения (рис. 6) также аналогичен проиллюстрированному на рис. 3. Единственное отличие заключается в том, что в случае квазикристаллической симметрии все седловые точки являлись элементами одного цикла периода 5, здесь же они принадлежат к двум разным циклам периода 3.

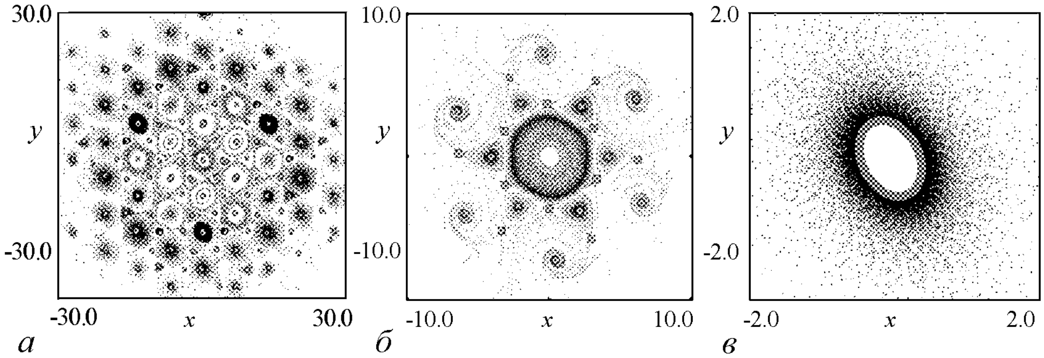

Рис. 5. Фазовые портреты системы (3) при $\varphi = \pi/2$, $q = 3$, $K = 0.3$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-3}$ и различных значениях параметра μ: $-1 \cdot 10^{-5}$ (*а*), $-5 \cdot 10^{-2}$ (*б*), $-5 \cdot 10^{-1}$ (*в*). Серыми кружками обозначены устойчивые неподвижные точки, квадратами – неустойчивые

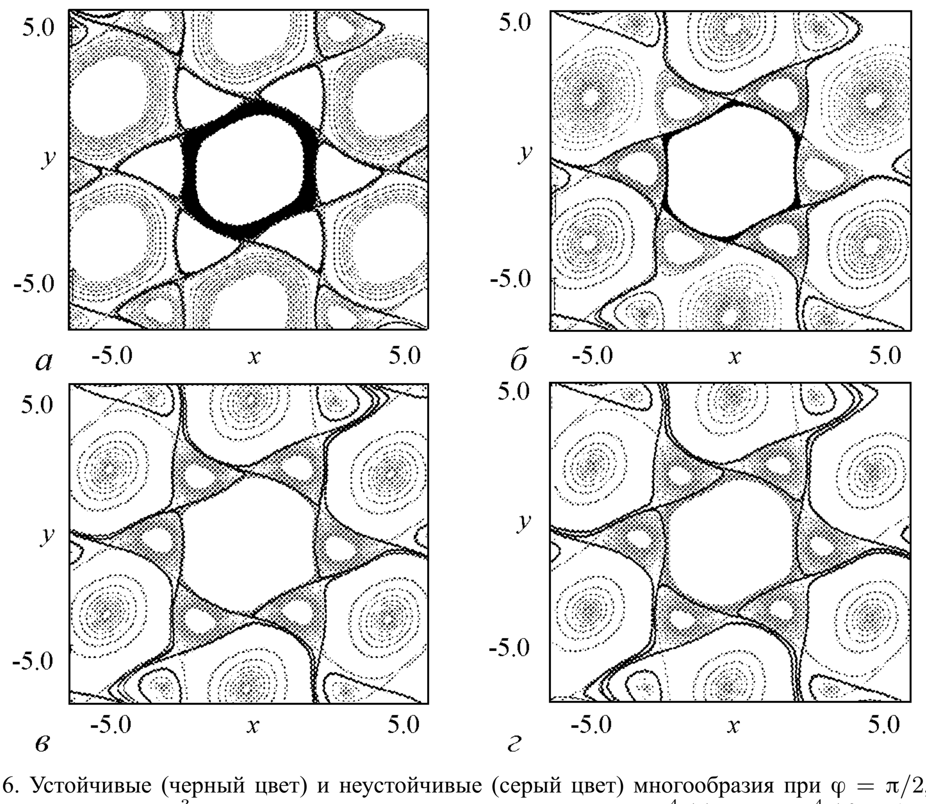

Рис. 6. Устойчивые (черный цвет) и неустойчивые (серый цвет) многообразия при $\varphi = \pi/2$, $q = 3$, $K = 0.3$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-3}$ и различных значениях параметра μ: $-1 \cdot 10^{-4}$ (*а*), $-3 \cdot 10^{-4}$ (*б*), $-4 \cdot 10^{-4}$ (*в*), $-5 \cdot 10^{-4}$ (*г*)

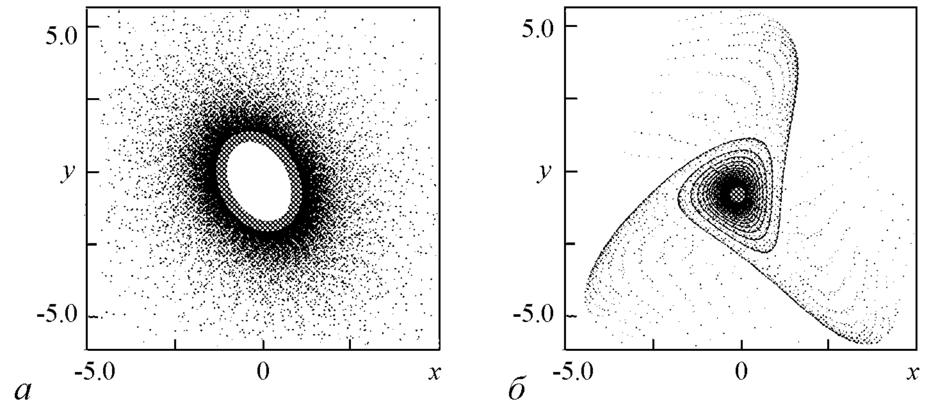

Рис. 7. Фазовые портреты системы (3) при $\mu = -5 \cdot 10^{-2}$, $q = 3$, $K = 0.3$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-3}$ и различных значениях параметра φ: $\pi/2$ (*а*), 0 (*б*)

Интересно, что при плавном изменении параметра φ инвариантная кривая исчезает в результате бифуркации Неймарка–Сакера (рис. 7). Соответствующее значение параметра можно ориентировочно оценить численно, как $\varphi = \pi/1.35$.

Заключение

В работе рассматривается модель, представляющая собой автоколебательную версию генератора стохастической паутины. Исследовалось влияние диссипативного возмущения на картину стохастической паутины. Был выявлен основной бифуркационный сценарий эволюции аттракторов в стробоскопическом отображении при увеличении нелинейной диссипации. Он заключается в том, что сосуществующие аттракторы попарно сливаются с седловыми точками (бифуркация «вилка»), а образовавшиеся в результате узлы впоследствии исчезают в результате седло-узловой бифуркации. Завершается процесс, как правило, образованием инвариантной кривой через нелокальную бифуркацию. Также обнаружено, что в случае кристаллической симметрии третьего порядка при введении дополнительного параметра, характеризующего фазу нелинейной зависимости амплитуды импульсов от координаты, возможно исчезновение инвариантной кривой в результате бифуркации Неймарка–Сакера.

Выражаю слова благодарности научному руководителю, доценту, к.ф.-м.н. Алексею Владимировичу Савину за полезные консультации и важные комментарии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-02-31089.

Библиографический список

1. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Физматлит, 1983. 235 с.
2. *Заславский Г.М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.
3. *Табор М.* Хаос и неинтегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320 с.

4. *Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A.* Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors //Physical Review E. 1996. Vol. 54, № 1. P. 71.
5. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* О природе явления буферности в слабо диссипативных системах //Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 146, № 3. С. 447.
6. *Martins L.C., Gallas J.A.C.* Multistability, phase diagrams and statistical properties of the kicked rotor: A map with many coexisting attractors. //Int. J. Bif. & Chaos. 2008. Vol. 18, № 6. P. 1705.
7. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems //Int. J. Bif. & Chaos. 2008. 18, № 6. P. 1607.
8. *Blazejczyk-Okolewska B., Kapitaniak T.* Coexisting attractors of impact oscillator //Chaos, Solitons & Fractals. 1998. Vol. 9. P. 1439.
9. *Feudel U., Grebogi C.* Multistability and the control of complexity //Chaos. 1997. Vol. 7, № 4. P. 597.
10. *Feudel U., Grebogi C.* Why are chaotic attractors rare in multistable systems? //Phy. Rev. Lett. 2003. Vol. 91, № 13. 134102.
11. *Rech P., Beims M., Gallas J.* Basin size evolution between dissipative and conservative limits //Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71, № 1. 017202.
12. *Савин А.В., Савин Д.В.* Структура бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов слабо-диссипативного «отображения – паутины» // Нелинейный мир. 2010. Т. 8, № 2. С. 70.
13. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского
Поступила в редакцию 28.02.2013
После доработки 12.04.2013

THE EFFECT OF WEAK NONLINEAR DISSIPATION ON THE STOCHASTIC WEB

E. V. Felk

The effect of a weak nonlinear dissipation on the structure of the system's phase space with stochastic web is invstigated. The bifurcation scenario of attractor transformations with the increase of dissipation is revealed.

Keywords: Stochastic web, weakly dissipative systems, a conservative chaos.

Фельк Екатерина Викторовна – родилась в Саратове (1992). Окончила Медико-биологический лицей Саратова (2009) и поступила на факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета. В настоящее время студентка 4 курса. Научные интересы: сложная динамика слабо диссипативных систем. Принимала участие как докладчик в четырех научных конференциях (2011–2012). Имеет две публикации в сборниках тезисов докладов.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:felkekaterina@ya.ru