



ВЗАИМНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В. В. Емельянов, Ю. П. Емельянова

Исследуются эффекты синхронизации в системе двух связанных генераторов с запаздыванием. Проводится детальное исследование картины возможных режимов генерации в случае идентичных и неидентичных генераторов. Демонстрируется возможность полной синхронизации как в режиме стационарной одночастотной генерации, так и в автомодуляционных и хаотических режимах. Обнаружен режим «широкополосной синхронизации». В отличие от связанных систем без запаздывания границы области широкополосной синхронизации имеют волнистую форму, что обусловлено резонансами между различными модами систем с запаздыванием.

Ключевые слова: Генератор с запаздыванием, полная синхронизация, широкополосная синхронизация.

Введение

Исследование эффектов синхронизации связанных автогенераторов является актуальной проблемой современной радиофизики [1–3]. Большой интерес представляет синхронизация систем с запаздыванием, имеющих широкое распространение не только в радиофизике, но и в нелинейной оптике, биофизике, экономике, экологии и даже в социальных науках [3–8]. Такие системы могут демонстрировать богатый набор динамических режимов, включая хаотические. В работах [9,10] была изучена вынужденная синхронизация генератора с запаздыванием, показано, что в подобных системах возникает ряд особенностей картины синхронизации по сравнению со случаем систем без запаздывания. Эти особенности, очевидно, обусловлены распределенной природой систем с запаздыванием, то есть наличием большого числа собственных мод. В то же время, задача о взаимной синхронизации генераторов с запаздыванием, которой посвящена настоящая работа, является мало изученной. Данная задача является актуальной, например, с точки зрения обеспечения сложения мощностей генераторов, работающих на общую нагрузку.

1. Основные уравнения

Принципиальная схема двух связанных генераторов с запаздывающей обратной связью (ЗОС) приведена на рис. 1. Каждый автогенератор представляет собой кольцевую систему типа «нелинейный усилитель – полосовой фильтр – линия задержки». Введем связь таким образом, чтобы часть мощности из цепи ЗОС одного генератора ответвлялась в цепь другого. Синхронизация связанных подобным образом генераторов на основе многорезонаторных клистронов исследовалась экспериментально в [11].

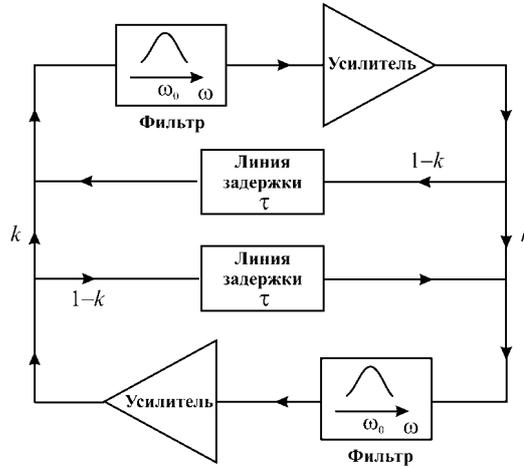


Рис. 1. Принципиальная схема двух диссипативно связанных генераторов с запаздыванием

Будем считать, что нелинейная характеристика усилителя описывается полиномом с кубической нелинейностью.

Режимы нелинейной динамики одиночного генератора были подробно изучены в [12]. В случае двух связанных генераторов можно по аналогии с [12] записать укороченные уравнения для медленно меняющихся амплитуд колебаний $A_{1,2}$

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + \frac{i\Delta}{2} A_1 + \gamma A_1 &= \alpha_1 e^{i\theta} [(1-k)(1-|A_1(t-1)|^2)A_1(t-1) + k(1-|A_2(t-1)|^2)A_2(t-1)], \\ \dot{A}_2 - \frac{i\Delta}{2} A_2 + \gamma A_2 &= \alpha_2 e^{i\theta} [(1-k)(1-|A_2(t-1)|^2)A_2(t-1) + k(1-|A_1(t-1)|^2)A_1(t-1)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\alpha_{1,2}$ – параметры возбуждения первого и второго генераторов соответственно, γ – параметр диссипации, θ – набег фазы в цепи обратной связи, k – параметр связи, который характеризует отношение мощностей в цепях ЗОС ($0 < k < 1$), Δ – частотная расстройка генераторов. Правые части системы уравнений (1) зависят от значений амплитуд в запаздывающий момент времени $t-1$ (всегда можно выбрать такую нормировку переменных, в которой время запаздывания равно единице), что связано с конечным временем прохождения сигнала по цепи ЗОС. Наличие диссипации позволяет ожидать в системе двух связанных генераторов наличие таких режимов как «гибель колебаний» [1,13] и «широкополосная синхронизация» [14,15].

2. Результаты численного моделирования

Как известно (см., например, [12]), для одиночного генератора с запаздыванием область самовозбуждения на плоскости «параметр возбуждения – набег фазы в цепи обратной связи» имеет вид периодически расположенных зон генерации. В центрах зон ($\theta = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$) порог самовозбуждения принимает минимальное значение $\alpha = \gamma$. При этом частота генерации совпадает с центральной частотой полосы пропускания системы. На границах зон генерации ($\theta = (2m+1)\pi$) порог самовозбуждения максимален, при этом частоты двух соседних мод равноудалены от центра полосы пропускания. Далее рассмотрим случай $\theta = 0.1\pi$, то есть одиночный генератор находится вблизи центра зоны генерации.

Проведем исследование динамики системы уравнений (1) на плоскости управляющих параметров «величина связи – параметр возбуждения». Начнем со случая, когда генераторы идентичны по параметру возбуждения ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$) и между ними отсутствует частотная расстройка ($\Delta = 0$). Численное интегрирование системы уравнений (1) осуществлялось методом Рунге–Кутты 4-го порядка, адаптированным для систем с запаздыванием [16]. На рис. 2, *а* представлена соответствующая карта динамических режимов. На ней разными цветами (оттенками серого) показаны различные режимы генерации. В случае, когда параметр возбуждения меньше порога генерации в одиночной системе ($\alpha < \gamma = 1$), колебания в связанных генераторах затухают (область AG и рис. 2, *б*). С увеличением параметра возбуждения устанавливается режим стационарной одночастотной генерации с одинаковыми значениями амплитуд колебаний генераторов (область SR и рис. 2, *в*). В области больших значений параметра связи k происходит бифуркация разрушения симметрии, в результате которой устанавливается стационарный режим с разными значениями амплитуд

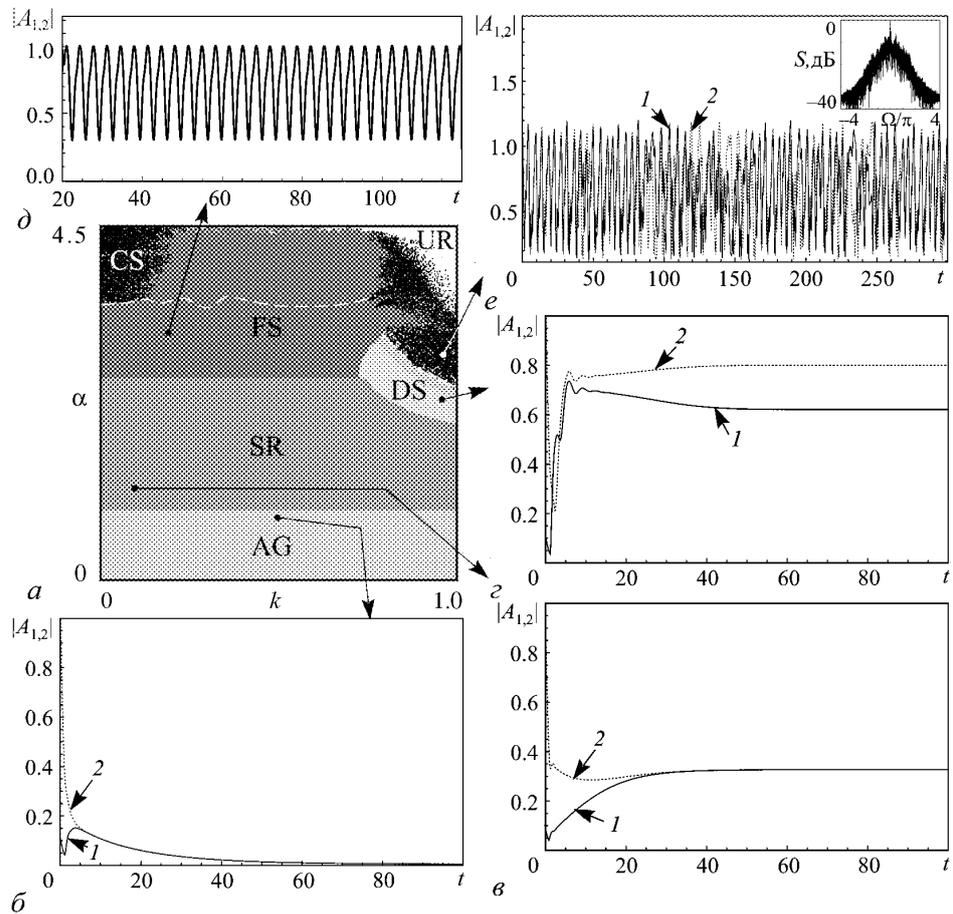


Рис. 2. Карта динамических режимов системы (1) при $\gamma = 1$, $\theta = 0.1\pi$, $\Delta = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ (*а*): AG – область отсутствия генерации, SR – область одночастотной генерации с одинаковыми амплитудами колебаний, DS – область одночастотной генерации с разными амплитудами колебаний, FS – область полной синхронизации, CS – область несинхронной хаотической генерации, UR – область неустойчивости (разбегания решения). Временные зависимости амплитуд колебаний генераторов, построенные внутри областей AG (*б*), SR (*в*), DS (*г*), FS (*д*) и CS (*е*). На вставке рис. *е* представлен спектр выходного сигнала первого генератора

колебаний генераторов (область DS и рис. 2, *з*). При дальнейшем увеличении параметра возбуждения реализуется полная синхронизация (область FS и рис. 2, *д*) в режиме периодической автомодуляции, а затем (выше штриховой линии $\alpha \approx 3.5$ на рис. 2, *а*) в режиме хаотической автомодуляции. При этом переход к хаосу осуществляется в узком интервале значений параметра связи через каскад бифуркаций удвоения периода автомодуляции.

При больших значениях параметра возбуждения α появляется режим хаотической несинхронной генерации (область CS и рис. 2, *е*), причем он присутствует как в области малых, так и в области больших параметров связи. Переход от синхронной генерации к несинхронной происходит через перемежаемость типа «*bubbling*», рис. 3. Этот тип перемежаемости был описан в работах [17–19]. Видно, что по мере приближения к области хаотической несинхронной генерации (переход от рис. 3, *а*

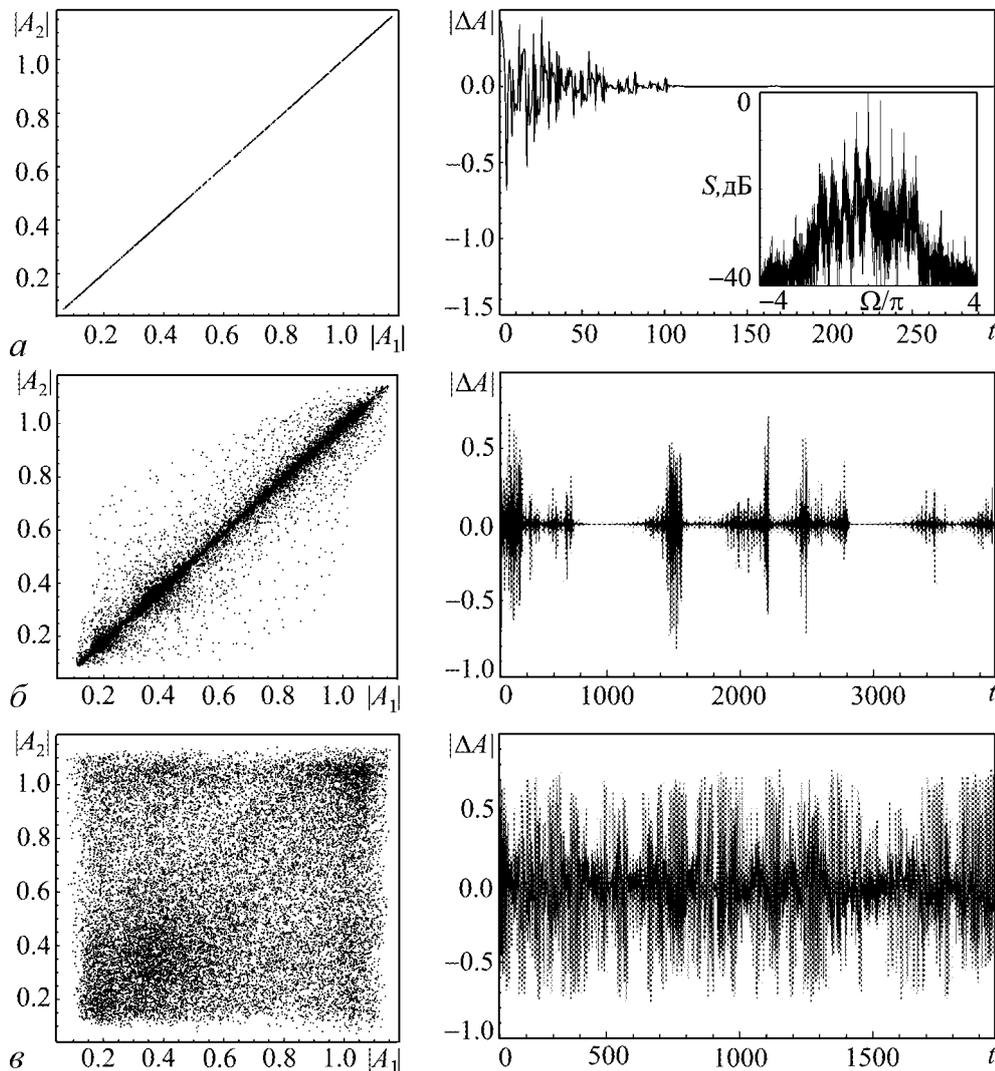


Рис. 3. Проекция фазового портрета системы (1) на плоскость амплитуд колебаний генераторов (слева) и временные зависимости разности амплитуд колебаний генераторов (справа), демонстрирующие переход от синхронной к несинхронной генерации через перемежаемость типа «*bubbling*». Значения параметров: $\gamma = 1$, $\theta = 0.1\pi$, $\Delta = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 4.1$, $k = 0.2$ (*а*), $k = 0.16$ (*б*), $k = 0.1$ (*в*)

к рис. 3, в) происходит уменьшение длительности ламинарной фазы на графике зависимости разности амплитуд колебаний генераторов от времени, при этом наблюдается учащение всплесков и увеличение их длительности. Удобно также анализировать перемежаемость типа «*bubbling*» с помощью проекций фазовых портретов на плоскость, по осям координат которой отложены амплитуды колебаний первого и второго генераторов. При наличии синхронной генерации эта проекция представляет собой прямую линию $|A_1| = |A_2|$ (см. рис. 3, а). Переход к несинхронной генерации сопровождается «возмущением» этой прямой линии (см. рис. 3, б), которая в результате «размывается» настолько, что проекция фазового портрета системы (1) на плоскость амплитуд колебаний генераторов представляет собой полностью закрашенный квадрат (см. рис. 3, в).

Теперь перейдем к рассмотрению случая ненулевой частотной расстройки генераторов, то есть $\Delta \neq 0$. Как видно из рис. 4, а, б, на которых приведены карты динамических режимов на плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи», при введении частотной расстройки генераторов появляется область гибели колебаний OD, когда большая связь приводит к затуханию колебаний обоих генераторов. Эффект гибели колебаний типичен для систем с диссипативной связью [13–15,20]. Однако в случае систем с запаздыванием граница области гибели коле-

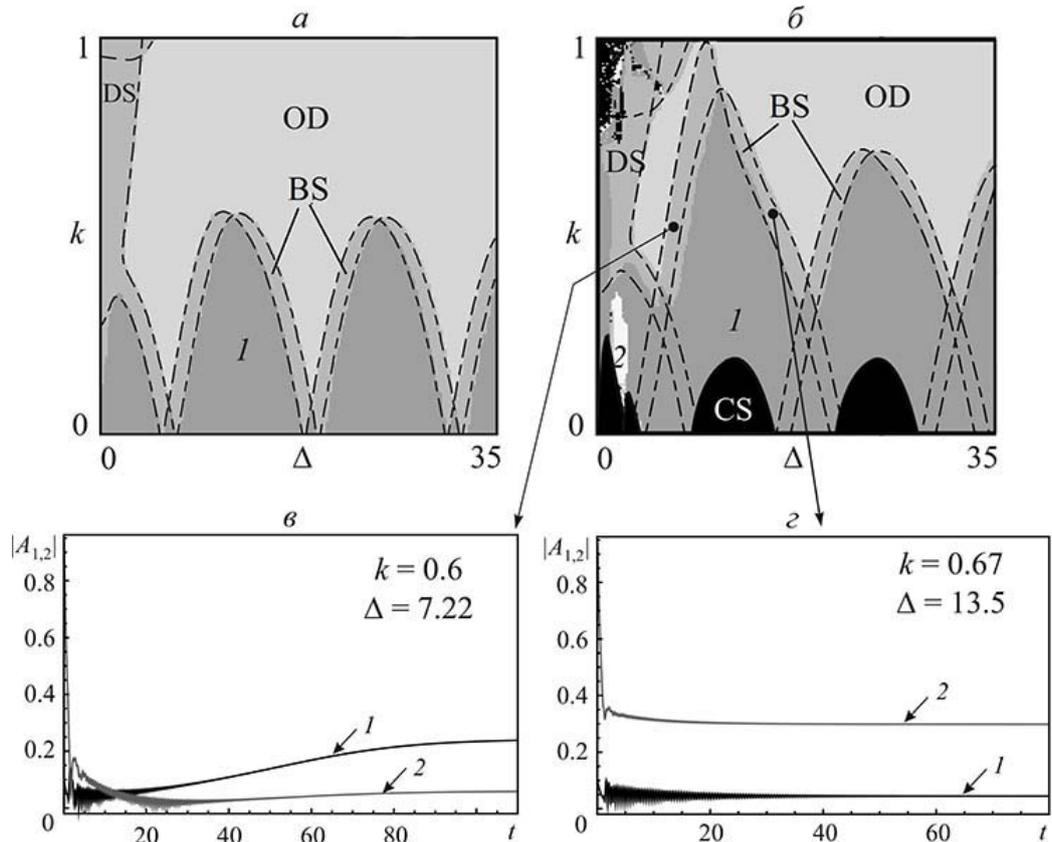


Рис. 4. Карты динамических режимов системы (1) при $\gamma = 1$, $\theta = 0.1\pi$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2.2$ (а), $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.2$ (б), а также временные зависимости амплитуд колебаний генераторов, построенные внутри области одночастотной генерации в двух точках на карте динамических режимов на рис. б (в-д). OD – область гибели колебаний. BS – область широкополосной синхронизации. Цифрами на картах динамических режимов обозначены периоды автомодуляции. Штриховыми линиями показаны аналитически найденные границы устойчивости неподвижной нулевой точки

баний оказывается периодической, то есть на плоскости параметров формируется система зон гибели колебаний. Происхождение этой структуры объясняется теми же причинами, что и система зон генерации на плоскости α - θ : резонансами между различными собственными модами двух генераторов [12].

Интересная особенность состоит в том, что границей между областью гибели колебаний OD и областью биений является полоса режимов одночастотной генерации, имеющая конечную ширину по параметру связи и повторяющая форму извилистой границы области гибели колебаний. Наличие полосы синхронизации конечной ширины по параметру связи при сколь угодно больших значениях частотной расстройки связанных генераторов принято называть «широкополосной синхронизацией» [14,15,21,22]. Внутри области широкополосной синхронизации (область BS, см. рис. 4) один генератор является доминирующим и возбуждает колебания во втором генераторе. Режим широкополосной синхронизации был обнаружен в конечномерных связанных системах с неидентичными параметрами, ответственными за степень возбуждения [14,15,21,22]. В системах с запаздыванием даже при идентичных параметрах возбуждения возникает своего рода разновидность режима широкополосной синхронизации. Это объясняется тем, что при изменении параметра Δ меняются собственные частоты генераторов, что, в свою очередь, приводит к изменению амплитуд колебаний. В центрах зон генерации амплитуда принимает максимальное значение, на краях – минимальное [12]. Таким образом, если, например, расстройка такова, что частота первого генератора соответствует центру зоны генерации, а частота второго находится вблизи границы зоны, то первый генератор будет доминировать, и наоборот.

Выражение для границ областей гибели колебаний и широкополосной синхронизации удастся получить аналитически как условие неустойчивости нулевого решения. Линеаризуя уравнения (1) и отыскивая решение в виде $A_{1,2} \sim \exp(i\omega t)$ с учетом того, что на границе устойчивости частота колебаний ω чисто вещественна, можно получить зависимость $k(\Delta)$ в параметрическом виде. В случае идентичных значений параметров возбуждения генераторов эта зависимость имеет вид

$$k(\omega) = \frac{2\omega\gamma - 2\alpha(\gamma \sin \psi + \omega \cos \psi) + \alpha^2 \sin 2\psi}{2\alpha^2 \sin 2\psi - 2\alpha(\gamma \sin \psi + \omega \cos \psi)}, \quad (2)$$

$$\Delta(\omega) = 2\sqrt{\alpha^2 k^2 \cos 2\psi + [\omega - (1 - k)\alpha \sin \psi]^2 - [\gamma - (1 - k)\alpha \cos \psi]^2},$$

где $\psi = \theta - \omega$. Аналитически найденные границы областей стационарной генерации (2) показаны штриховыми линиями на рис. 4, а и рис. 4, б. Построенная в соответствии с соотношениями (2) граница устойчивости состоит из двух переплетающихся линий, одна из которых соответствует подавлению собственных колебаний первого генератора (для нее $\omega > 0$), другая – подавлению колебаний второго генератора ($\omega < 0$).

Таким образом, имеем следующую картину. Область гибели колебаний расположена выше обеих границ. Ниже обеих границ находится область биений. Между границами располагается полоса широкополосной синхронизации, в которой подавлены собственные колебания только одного из генераторов, в то время как другой генератор возбуждает колебания во всей системе. Доказательством этому служит разный уровень амплитуд колебаний генераторов на рис. 4, в и рис. 4, г, при этом

амплитуда одного из генераторов достаточно мала. При возрастании частотной расстройки происходит поочередная смена доминирующего генератора: внутри области широкополосной синхронизации слева от области биений и справа от области гибели колебаний доминирует первый генератор (см. рис. 4, *в*), справа от области биений и слева от области гибели колебаний – второй (см. рис. 4, *з*). Таким образом, уравнения (2) описывают не только границы области гибели колебаний в системе связанных генераторов, но и границы режима синхронизации, за исключением области малых расстроек, где синхронизация наступает в результате захвата частоты, а не подавления.

Отметим, что теоретические границы хорошо согласуются с результатами численного моделирования. Значения частот, найденные на границах области широкополосной синхронизации в ходе численного исследования, также хорошо согласуются с теоретическими (рис. 5). Штриховыми линиями на рис. 5 показаны собственные частоты колебаний автономных генераторов $\omega = \pm \Delta/2$.

Сравнивая рис. 4, *а* и рис. 4, *б*, видим, что с ростом параметра возбуждения область гибели колебаний поднимается вверх, в сторону больших значений параметра связи. Размер области биений увеличивается, появляются области удвоения периода биений (область 2 на рис. 4, *б*) и область хаотической автомодуляции (области CS на рис. 4, *б*), которые периодически повторяются с ростом значения частотной расстройки Δ .

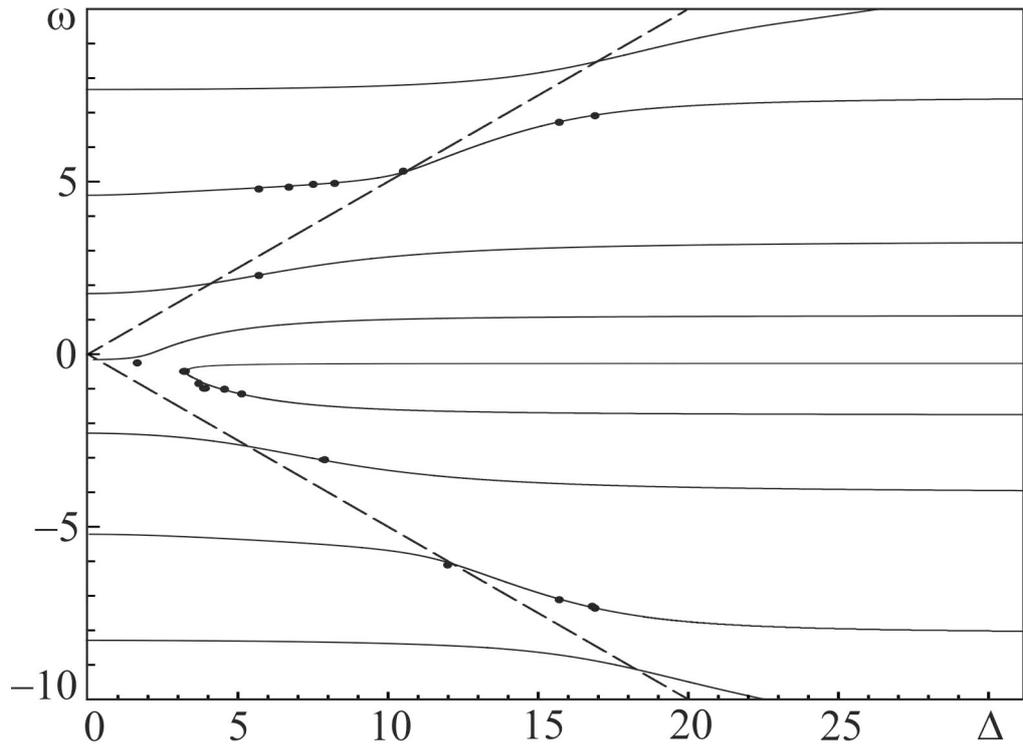


Рис. 5. Сплошные линии соответствуют теоретической зависимости (2) частоты генерации от частотной расстройки генераторов на границе устойчивости нулевого решения. Точками показаны значения частот, найденные на границах области широкополосной синхронизации в ходе численного исследования. Значения параметров: $\gamma = 1$, $\theta = 0.1\pi$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.2$. Штриховые линии соответствуют собственным частотам автономных генераторов $\omega = \pm \Delta/2$

В случае, когда параметры возбуждения генераторов неидентичны ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), наблюдаемая картина синхронизации аналогична случаю идентичных параметров возбуждения, и на плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи» по-прежнему выявляется область широкополосной синхронизации в виде волнистой полосы, отделяющей область гибели колебаний от областей биений и хаотической автомодуляции.

Заключение

В системе двух связанных автогенераторов с запаздыванием обнаружена богатая картина различных автоколебательных режимов. При полностью идентичных параметрах генераторов, на плоскости «величина связи – параметр возбуждения» выявляются области полной синхронизации в режимах стационарной одночастотной генерации, периодической и хаотической автомодуляции, а также области несинхронной хаотической генерации. Переход от синхронных режимов к несинхронным происходит через перемежаемость типа «*bubbling*».

Введение расстройки собственных частот генераторов приводит к тому, что в области больших значений параметра связи возникает эффект гибели колебаний, типичный для диссипативно связанных автоколебательных систем. Однако граница области гибели колебаний имеет более сложную структуру, чем в системах с конечным числом степеней свободы. На плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи» возникают периодически расположенные зоны гибели колебаний. Их появление обусловлено резонансами между различными собственными модами генераторов, то есть фактически – распределенной природой систем с запаздыванием. Область гибели колебаний отделена от области биений узкой полосой синхронных режимов. Таким образом, имеет место эффект широкополосной синхронизации, обнаруженный ранее в связанных конечномерных системах с неидентичными параметрами возбуждения [14,15,21,22].

Авторы выражают глубокую благодарность Н.М. Рыскину за полезные советы и продуктивное обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 12-02-31493-мол_а.

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Либроком, 2010. 360 с.
3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 496 с.
4. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
5. Glass L., MacKey M.C. From Clocks to Chaos. The Rhythms of Life. Princeton University Press, 1988. 248 p.

6. *Bocharov G.A., Rihan F.A.* Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // *J. Comp. Appl. Math.* 2000. Vol. 125. P. 183.
7. *Mensour B., Longtin A.* Synchronization of delay-differential equations with application to private communication // *Phys. Lett. A.* 1998. Vol. 244. P. 590.
8. *Kolmanovskii V.B., Nosov V.R.* Stability of functional differential equations. London: Academic Press, 1986.
9. *Рыскин Н.М., Усачева С.А.* Синхронизация периодических колебаний автогенератора с запаздыванием внешним гармоническим сигналом // *Изв. вузов. ПНД.* 2009. Т. 17, № 1. С. 3.
10. *Usacheva S.A., Ryskin N.M.* Forced synchronization of a delayed-feedback oscillator// *Physica D.* 2012. Vol. 241, № 4. P. 372.
11. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Скороходов В.Н., Геншафт А.М.* Синхронизация двух связанных клистронных автогенераторов с запаздыванием // *Изв. вузов. ПНД.* 2008. Т. 16, № 2. С. 131.
12. *Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* Сложная динамика простой модели распределенной автоколебательной системы с запаздыванием // *ЖТФ.* 2002. Т. 72, № 7. С. 1.
13. *Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N.* Amplitude response of coupled oscillators// *Physica D.* 1990. Vol. 41. P. 403.
14. *Kuznetsov A.P., Roman Ju.P.* Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // *Physica D.* 2009. Vol. 238, № 16. P. 1499.
15. *Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П.* Синхронизация связанных автогенераторов ван дер Поля и Кислова–Дмитриева // *ЖТФ.* 2011. Т. 81, вып. 4. С. 7.
16. *Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
17. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 193. P. 126.
18. *Venkataramani S.C., Hunt B.R., Ott E., Gauthier D.J., Bienfang J.C.* Transitions to bubbling of chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77, № 27. P. 5361.
19. *Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V.* Effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58, № 5. P. 5620.
20. *Astakhov V., Koblyanskii S., Shabunin A., Kapitaniak T.* Peculiarities of the transitions to synchronization in coupled systems with amplitude death // *Chaos.* 2011. Vol. 21, № 2. P. 023127.
21. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // *Изв. вузов. ПНД.* 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
22. *Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связанных осцилляторов ван дер Поля // *Изв. вузов. ПНД.* 2011. Т. 19, № 5. С. 76.

*Саратовский госуниверситет
им. Н.Г. Чернышевского*

Поступила в редакцию 22.02.2013

MUTUAL SYNCHRONIZATION OF TWO COUPLED GENERATORS WITH DELAY

V. V. Emelyanov, Yu. P. Emelianova

The effects of synchronization in the system of two coupled oscillators with delay are investigated. The picture of possible modes of generation in the case of identical and non-identical excitation parameters is studied in detail. The possibility of full synchronization in the stationary single-frequency, self-modulation and chaotic generation regime is demonstrated. The regime of «broadband synchronization» is found. In contrast with coupled finite dimensional systems, the boundaries of broadband synchronization area have wavy form. This takes place due to the resonances between different modes of the distributed systems with delay.

Keyword: Oscillator with delay, full synchronization, broadband synchronization.



Емельянов Валерий Валерьевич – родился в г. Пугачев Саратовской области (1987). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2009). В настоящее время заместитель начальника отдела метрологии ОАО «НПП “Алмаз”». Научные интересы – численное моделирование нестационарных нелинейных процессов в приборах СВЧ-электроники, исследование нестационарных процессов в распределенных системах с запаздывающей обратной связью. Автор более 15 публикаций, в том числе 4 статей в российских и международных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: emvaleriy@gmail.com



Емельянова Юлия Павловна – родилась в 1987 году в г. Секешфехервар (Венгрия). Окончила с отличием факультет нелинейных процессов СГУ (2009). Защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (2012). В настоящее время ассистент кафедры «Приборостроение» факультета электронной техники и приборостроения Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А. Область научных интересов – исследование особенностей синхронизации связанных автоколебательных систем. Автор более 30 публикаций, в том числе 11 статей в российских и международных журналах и 1 учебно-методического пособия.

410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
E-mail: yuliaem@gmail.com