

ДИНАМИКА СВЯЗАННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ РЕССЛЕРА

А. Б. Адилова, А. П. Кузнецов, А. В. Савин

Рассматривается дискретное отображение, демонстрирующее квазипериодическую динамику в широкой области пространства параметров. На примере системы двух связанных отображений исследовано устройство пространства параметров связанных систем с квазипериодическим поведением. Обнаружены удвоения трехмерных торов, системы языков двухчастотных режимов и точных резонансов, резонансная паутина и аттракторы нетривиальной структуры с близкими к нулю старшими показателями Ляпунова.

Ключевые слова: Квазипериодическая динамика, ляпуновские показатели.

Введение

Исследование сложной динамики связанных автоколебательных систем относится к числу основных направлений развития нелинейной динамики. Результаты, касающиеся динамики двух связанных генераторов периодических колебаний, к настоящему моменту стали классическими [1–3]. Существует весьма обширная и разноплановая литература (см., например, работы [3–5] и литературу в них), посвященная исследованию динамики двух связанных генераторов хаотических колебаний. В то же время исследованию проблемы синхронизации квазипериодических колебаний посвящено значительно меньшее число работ (например, [6–10]), причем большинство исследований выполнено сравнительно недавно. При этом, как правило, в качестве систем с квазипериодической динамикой используются неавтономные системы. Более привлекательным, однако, представляется исследование динамики связанных систем без внешнего воздействия, в которых подсистемы демонстрируют квазипериодические колебания в автономном режиме. Сравнительно недавно были даны примеры физически реализуемых генераторов квазипериодических колебаний [11–13], которые применимы для этих целей. Однако для анализа данной проблемы

целесообразно использовать дискретные модели, как, например, в [10], поскольку детальное исследование пространства параметров потоковых систем требует значительного времени даже на современных компьютерах. Кроме того, при исследовании картины взаимодействия квазипериодических колебаний в пространстве параметров необходимо варьировать параметры, при этом, как правило, выбранная «траектория» последовательно пересекает в пространстве параметров языки синхронизации, которые типичны для таких систем [10], что существенно усложняет наблюдаемую картину. Поэтому важно иметь систему, в которой эти языки будут очень узкими, чтобы в подсистемах наблюдалась квазипериодическая динамика. Если, кроме того, размерность автономной дискретной модели не меньше трех, то для нее будет характерным еще один важный феномен – удвоение инвариантной кривой (тора). В настоящей работе представлена такая модель и проведено исследование связанных отображений такого типа.

1. Дискретный осциллятор Ресслера

Одним из часто применяемых в нелинейной динамике методов построения модельных систем является метод искусственной дискретизации (см., например, [6, 14–16]), заключающийся в модификации исходной потоковой системы путем замены производных на конечные разности.

Например, для трехмерной системы общего вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, z), \\ \dot{y} &= g(x, y, z), \\ \dot{z} &= u(x, y, z),\end{aligned}\tag{1}$$

выполняя аппроксимацию производных

$$\begin{aligned}\dot{x} &\rightarrow (x_{n+1} - x_n)/\varepsilon, \\ \dot{y} &\rightarrow (y_{n+1} - y_n)/\varepsilon, \\ \dot{z} &\rightarrow (z_{n+1} - z_n)/\varepsilon\end{aligned}\tag{2}$$

(здесь ε – параметр, который можно назвать параметром дискретизации), можно получить отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon f(x_n, y_n, z_n), \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon g(x_n, y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= z_n + \varepsilon u(x_n, y_n, z_n).\end{aligned}\tag{3}$$

Его можно рассматривать как самостоятельную динамическую систему. При этом, как правило, ее динамика более сложна и разнообразна, чем динамика потоковой системы-прототипа. Для дальнейшего важно, что предельному циклу в системе-прототипе соответствует инвариантная кривая, то есть квазипериодический режим,

в дискретной модели, по крайней мере, при малых значениях параметра дискретизации ε . При этом ширина языков синхронизации стремится к нулю при уменьшении ε [16]. Таким образом, при небольших значениях параметра дискретизации данная система удовлетворяет всем сформулированным во введении требованиям.

Применим описанный способ к системе Ресслера [17] – одной из основных моделей нелинейной динамики

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + (x - r)z.\end{aligned}\tag{4}$$

В результате получим следующее отображение, которое далее будем называть дискретным осциллятором Ресслера:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \varepsilon(y_n - z_n), \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon(x_n + ay_n), \\ z_{n+1} &= z_n + \varepsilon b + \varepsilon(x_n - r)z_n.\end{aligned}\tag{5}$$

Устройство плоскости параметров полученного отображения приведено на рис. 1 (идентификация режимов проводилась по определенному в численном эксперименте значению старшего ляпуновского показателя).

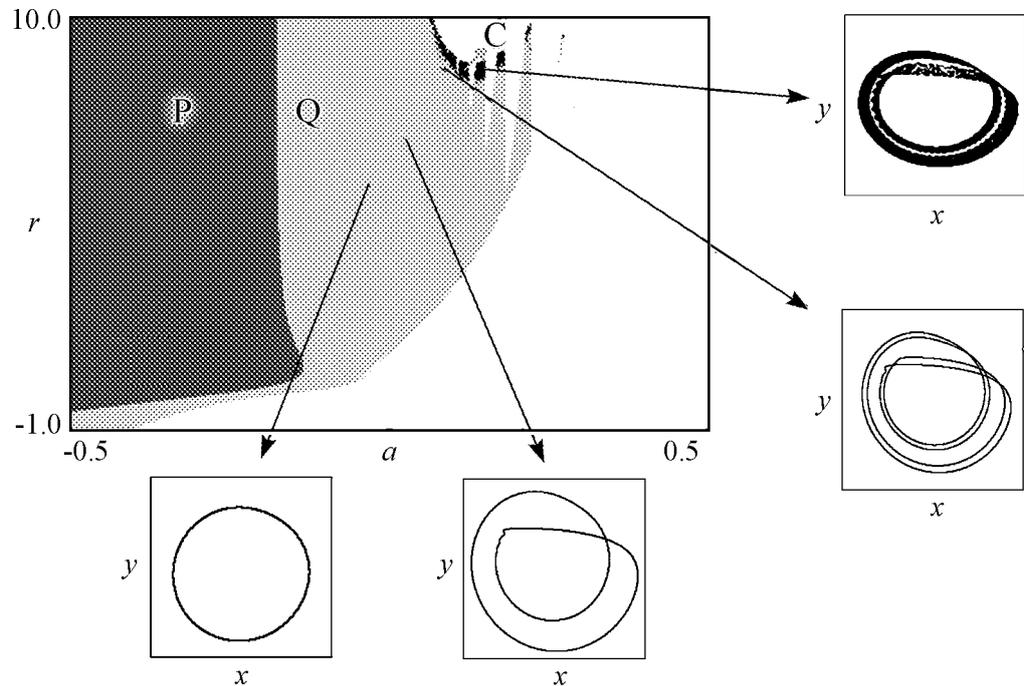


Рис. 1. Карта ляпуновских показателей системы (5) при $\varepsilon = 0.1$; $b = 0.1$ и фазовые портреты в отмеченных на карте точках. Различные режимы обозначены оттенками серого: P – периодические, Q – квазипериодические, C – хаотические

Хорошо видно, что область квазипериодических режимов занимает значительную часть плоскости параметров, причем «вкрапления» областей периодических режимов, типичные для, например, отображения окружности, в полученной системе отсутствуют. Помимо этого, поскольку в системе Ресслера (4) при увеличении параметра r наблюдаются удвоения периода и переход к хаосу по Фейгенбауму, то в дискретной модели (5) при малых значениях параметра дискретизации ε наблюдаются удвоения инвариантных кривых (торов). Однако, в отличие от каскада удвоений циклов в исходной системе, каскад удвоений торов не является бесконечным и обрывается вследствие разрушения тора (см. рис. 1).

2. Связанные дискретные осцилляторы Ресслера

Рассмотрим систему двух связанных дискретных осцилляторов Ресслера

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - \varepsilon(y_n + z_n), \\
 y_{n+1} &= y_n + \varepsilon(x_n + a_1 y_n) + \varepsilon \mu (v_n - y_n), \\
 z_{n+1} &= z_n + \varepsilon b + \varepsilon(x_n - r)z_n, \\
 u_{n+1} &= u_n - \varepsilon(v_n + w_n), \\
 v_{n+1} &= v_n + \varepsilon(u_n + a_2 v_n) + \varepsilon \mu (y_n - v_n), \\
 w_{n+1} &= w_n + \varepsilon b + \varepsilon(u_n - r)w_n.
 \end{aligned} \tag{6}$$

В форме записи (6) амплитуда связи пропорциональна параметру дискретизации. Это обеспечивает соответствие системы (6) «традиционной» системе двух связанных осцилляторов Ресслера (см., например, [18]) по вышеописанной процедуре. Для дальнейшего исследования динамики именно такой выбор амплитуды связи несущественен, и в дальнейшем мы будем считать амплитудой связи параметр μ .

Далее будем исследовать динамику этой системы при фиксированном наборе параметров ($r = 8.5$; $b = 0.1$; $\varepsilon = 0.1$). Исследуем устройство плоскости управляющих параметров (a_1, a_2) при различных значениях амплитуды связи μ . При этом управляющие параметры a будем изменять в диапазоне $0 < a_{1,2} < 0.2$. В автономной системе (5) при таком изменении параметра наблюдается удвоение тора и переход к хаосу через его разрушение (см. рис. 1)¹.

При дальнейшем численном исследовании идентификацию динамических режимов будем осуществлять по сигнатурам спектра ляпуновских показателей.

¹Заметим, что в «обычной» системе Ресслера параметр a фактически определяет период предельного цикла или частоту колебаний.

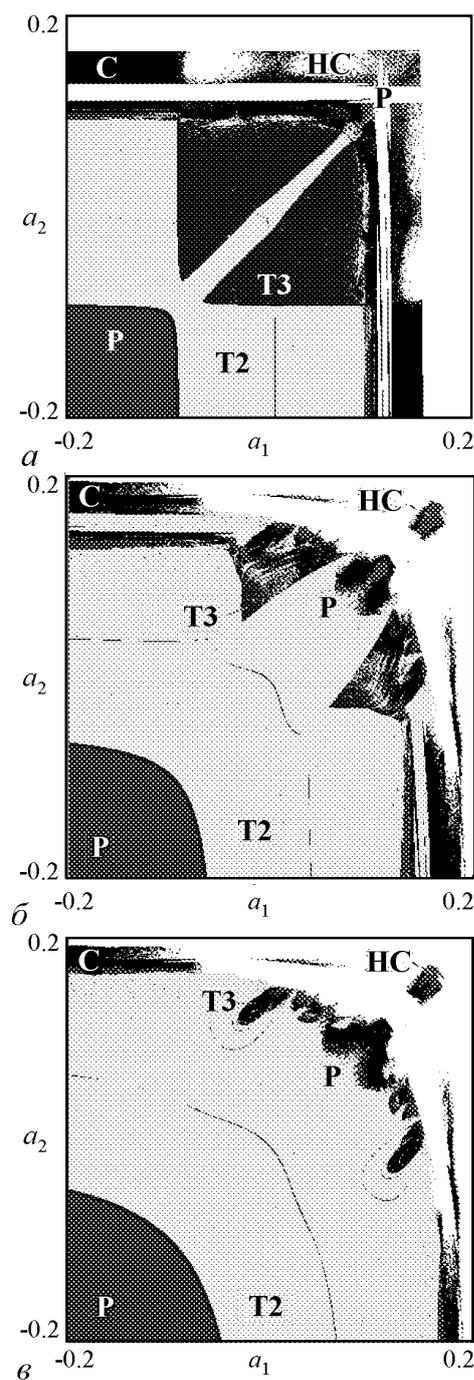


Рис. 2. Карта ляпуновских показателей при значении амплитуды связи μ : 0.01 (а), 0.05 (б), 0.1 (в)

1. Периодические режимы (P) – все ляпуновские показатели отрицательны.

2. Двухчастотные квазипериодические (аттрактор – двумерный тор) (T2) – один (старший) ляпуновский показатель равен нулю, остальные отрицательны.

3. Трехчастотные квазипериодические (аттрактор – трехмерный тор) (T3) – два старших ляпуновских показателя равны нулю, остальные отрицательны².

4. Хаотические (C) – один положительный ляпуновский показатель.

5. Гиперхаотические (HC) – два положительных ляпуновских показателя.

Устройство плоскости управляющих параметров подсистем при различных значениях величины связи приведено на рис. 2. Можно видеть, что введение связи малой амплитуды приводит к появлению режимов с тремя несоизмеримыми частотами (трехчастотных торов). При малой связи такие режимы наблюдаются при значительной неидентичности управляющих параметров подсистем. Отметим, что такие режимы становятся возможными лишь при достаточно большой расстройке управляющих параметров подсистем, в случае же малой расстройки (при близких к идентичным подсистемах) преобладают двухчастотные режимы³. При увеличении амплитуды связи области

²Здесь и далее мы будем говорить о количестве независимых частот, имея в виду интерпретацию в виде системы двух связанных квазипериодических генераторов.

³Отметим, что при малой связи плоскость параметров устроена аналогично плоскости параметров связанных систем Ресслера [16], причем «вместо» периодических режимов наблюдаются двухчастотные торы, а «вместо» квазипериодических – трехчастотные.

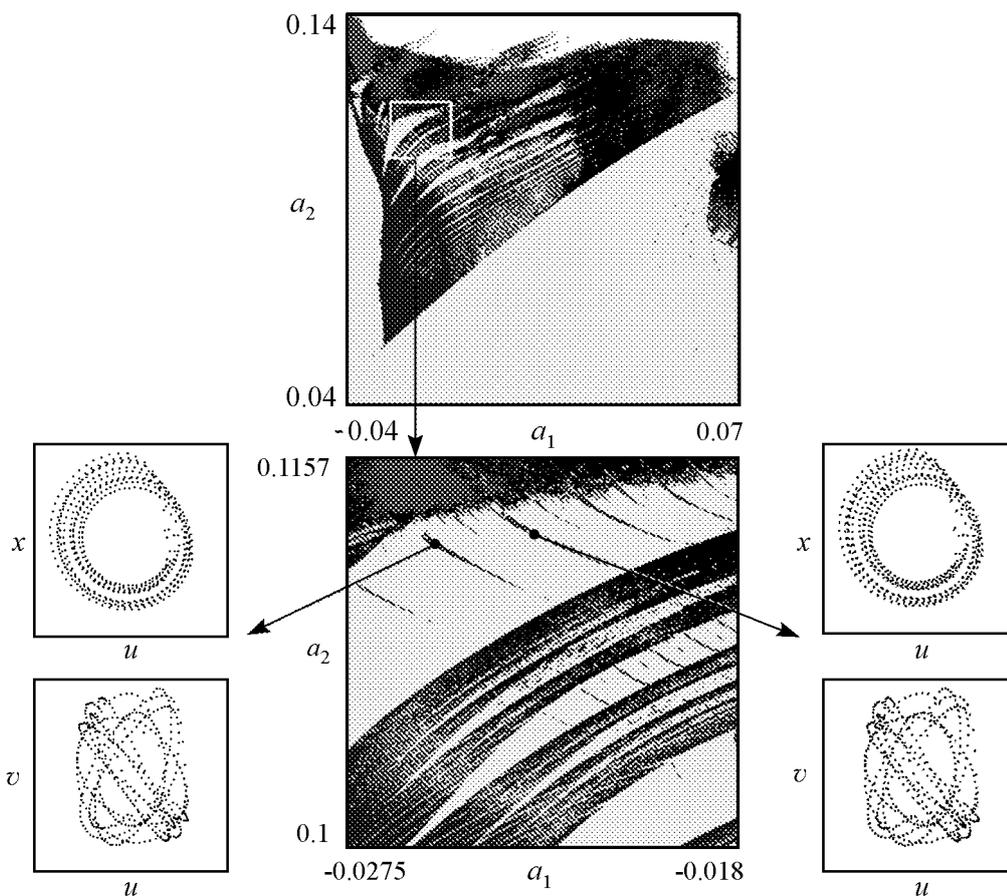


Рис. 3. Увеличенный фрагмент карты ляпуновских показателей системы (5) при $\mu = 0.05$ (вверху), дополнительно увеличенный фрагмент и фазовые портреты в указанных точках (внизу)

трехчастотных торов резко уменьшаются и уже при амплитуде связи 0.1 практически исчезают.

Представляет интерес устройство плоскости параметров вблизи границы между областями квазипериодической и хаотической динамики. Оно различно при различных значениях амплитуды связи. Так, при $\mu = 0.05$ (рис. 3) на границе области хаотических и трехчастотных квазипериодических режимов хорошо заметна система областей двухчастотных торов, имеющая вид «классической» системы языков синхронизации. В свою очередь, внутри этих «языков» оказывается встроенной система языков синхронизации, представляющих точные резонансы, то есть периодические колебания. Они опираются остриями, по-видимому, на нижнюю границу области двухчастотных торов. Анализ фазовых портретов показывает, что периодические режимы внутри этих языков имеют весьма высокий период.

Однако при очень малой амплитуде связи ($\mu = 0.01$, рис. 4, а, б) области двухчастотных торов образуют не систему языков синхронизации, а структуру резонансной паутины, возникающую, например, в связанных отображениях поворота [6, 19–21]. Рис. 4, в, по-видимому, представляет собой переходную от резонансной сети к системе языков синхронизации ситуацию.

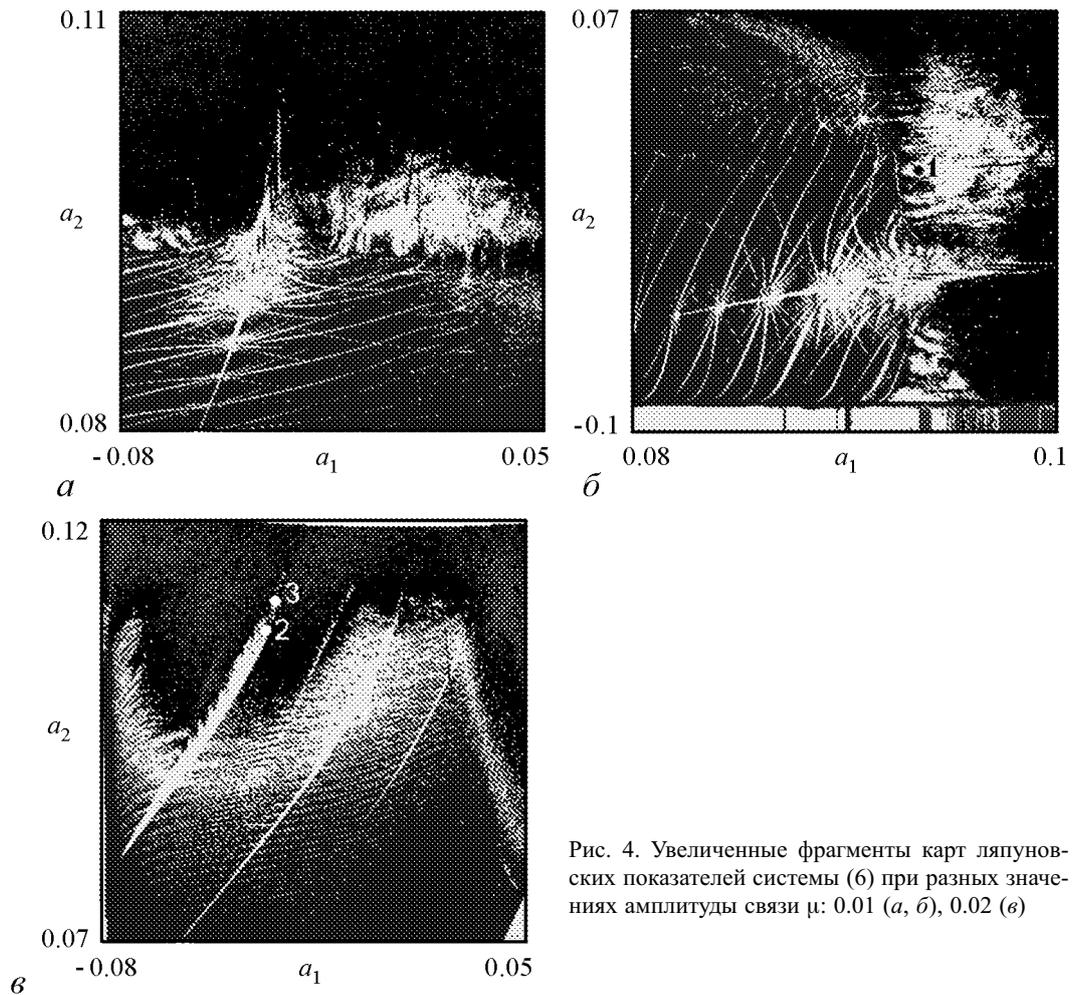


Рис. 4. Увеличенные фрагменты карт ляпуновских показателей системы (6) при разных значениях амплитуды связи μ : 0.01 (*a*, *b*), 0.02 (*v*)

3. Особенности аттракторов в связанных системах

В исследуемой системе можно наблюдать ряд интересных типов аттракторов и их взаимную трансформацию. Как уже было отмечено ранее, в дискретном осцилляторе Ресслера при изменении параметра a наблюдается удвоение торов. В системе связанных дискретных осцилляторов Ресслера при изменении параметра одной из подсистем возможно удвоение трехчастотных торов. Этому соответствуют моменты обращения в нуль третьего ляпуновского показателя системы (рис. 5).

При определенном выборе параметров удастся наблюдать и следующее удвоение, приводящее к образованию учетверенного трехчастотного тора (рис. 6). Удвоения более высокого порядка пронаблюдать не удастся вследствие фрактализации тора, которая довольно хорошо заметна уже на рис. 6.

Кроме того, в области «резонансной сети» двухчастотных торов возможна реализация аттракторов довольно сложного типа. Три примера такого рода аттракторов, реализующихся в точках, отмеченных на рис. 4, приведены на рис. 7.

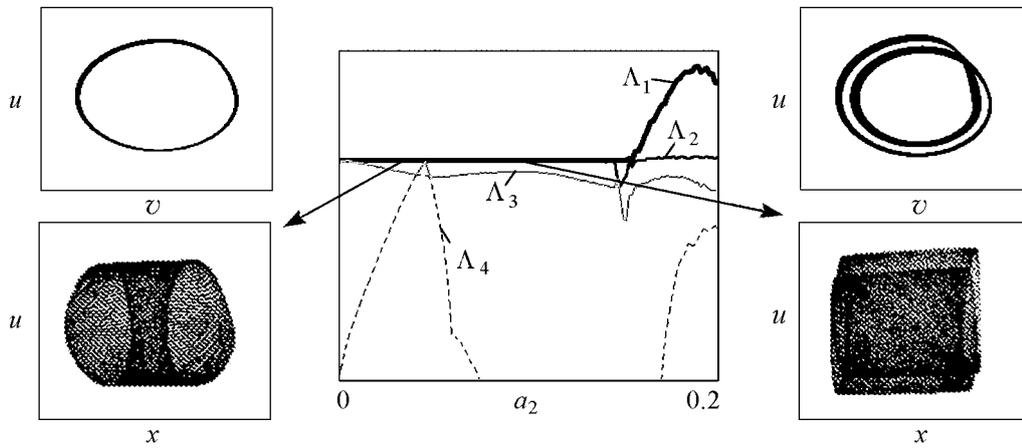


Рис. 5. График ляпуновских показателей при $r = 8.5$, $\varepsilon = 0.1$, $b = 0.1$, $a_1 = -0.06$, значении амплитуды связи $\mu = 0.03$ и фазовые портреты в отмеченных на графике точках

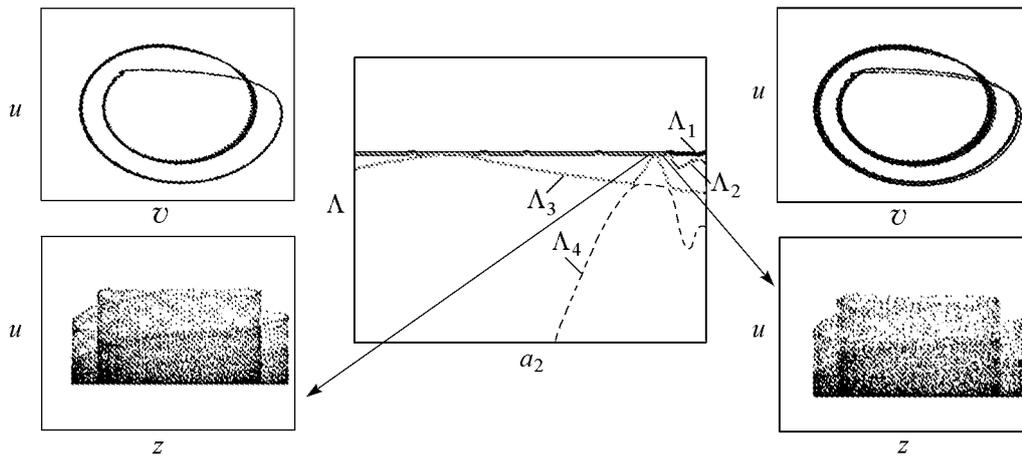


Рис. 6. График ляпуновских показателей при $r = 8.5$, $\varepsilon = 0.1$, $b = 0.1$, $a_1 = 0.015$, значении амплитуды связи $\mu = 0.01$ и фазовые портреты в отмеченных на графике точках

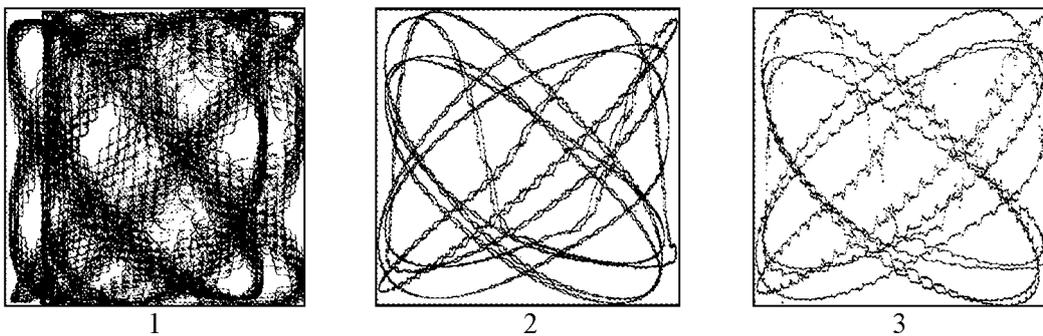


Рис. 7. Проекция аттракторов отображения (6) на плоскость (x, u) : 1 - $\mu = 0.01$, $a_1 = 0.09351$, $a_2 = 0.00675$; 2 - $\mu = 0.02$, $a_1 = -0.02581$, $a_2 = 0.10714$; 3 - $\mu = 0.02$, $a_1 = -0.0229$, $a_2 = 0.11$

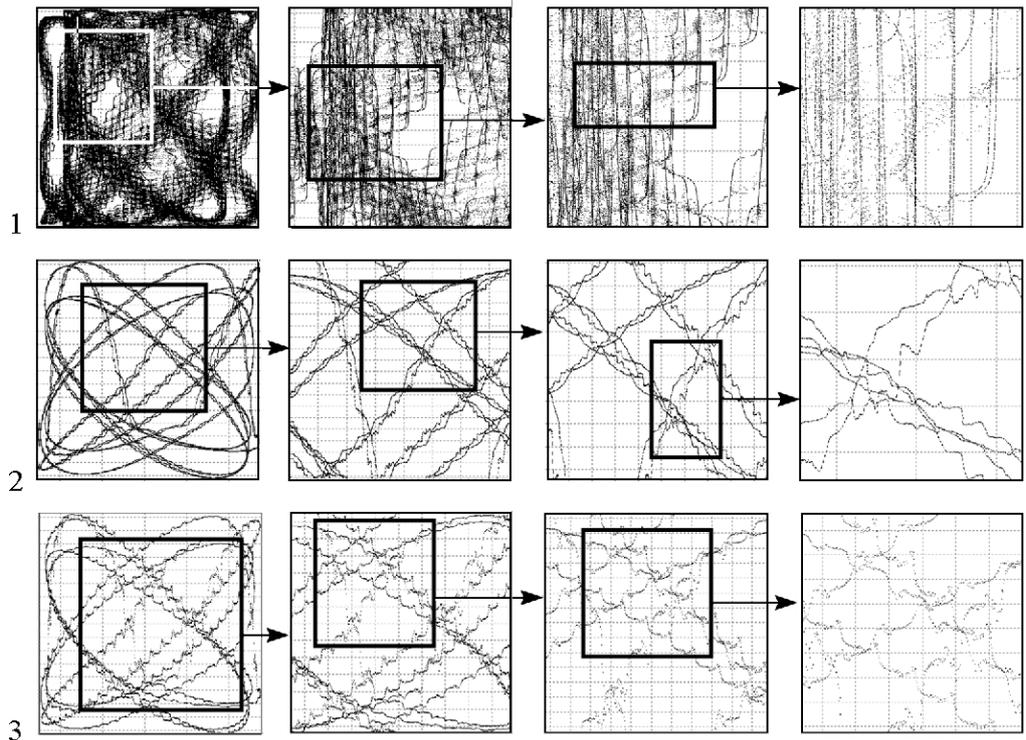


Рис. 8. Увеличенные фрагменты аттракторов, изображенных на рис. 7

Хотя соответствующие точки и расположены в области с нулевым старшим ляпуновским показателем, структура этих аттракторов визуально существенно отличается от инвариантной кривой. Для более подробного исследования были построены увеличенные фрагменты аттракторов с целью визуальной оценки сложности их структуры (рис. 8), а также проведен расчет их спектра ляпуновских показателей по реализациям различной длины, причем проводилось усреднение по 100 случайно выбранным траекториям на аттракторе. Полученные средние значения двух старших ляпуновских показателей и их среднеквадратичные отклонения приведены в таблицах 1–3 (для аттракторов 1–3, соответственно).

Таблица 1

N	$\langle \Lambda_1 \rangle \cdot 10^5$	$\langle \Lambda_2 \rangle \cdot 10^5$	$\sigma_1 \cdot 10^5$	$\sigma_2 \cdot 10^5$
500000	6.08688	-35.8600	1.64604	3.93699
1000000	6.84712	-35.8565	1.04759	2.36888
1500000	6.99555	-35.6485	0.84252	1.90912
2000000	7.18051	-35.5758	0.73639	1.65369
2500000	7.23964	-35.5289	0.58686	1.49153
3000000	7.28874	-35.5002	0.58586	1.32094
3500000	7.32812	-35.5229	0.52247	1.16953
4000000	7.33846	-35.5288	0.47103	1.11700
4500000	7.35031	-35.5274	0.46344	1.05697
5000000	7.38181	-35.5035	0.43410	1.00029

Видно, что старший ляпуновский показатель аттрактора 1 сходится к малому положительному значению, следовательно, этот аттрактор является слабохаотическим, что подтверждается видом его увеличенных фрагментов.

Старший ляпуновский показатель аттрактора 2 демонстрирует сходимость к нулю. Увеличенные фрагменты свидетель-

ствуют, что аттрактор 2 представляет собой сильно изрезанную, но, по-видимому, непрерывную инвариантную кривую.

Вместе с тем, хорошо заметно, что среднее значение старшего ляпуновского показателя аттрактора 3 сходится к отрицательному числу, а его среднеквадратичное отклонение с ростом длины реализации убывает по степенному закону с показателем, близким к -1 (рис. 9). Однако анализ его увеличенных фрагментов заставляет предположить, что по геометрической структуре этот аттрактор является странным. В то же время необходимо, безусловно, более достоверное подтверждение этого факта.

Отметим, что аттракторы сложной структуры с близкими к нулю показателями Ляпунова наблюдались ранее (см. [22], а также гл. 10 в [3]), однако в указанных работах близки к нулю вторые показатели Ляпунова, в то время как старшие показатели являются существенно положительными и система демонстрирует хаотическое поведение. В исследуемой же системе к нулю близки старшие показатели Ляпунова при визуальной сложной структуре аттрактора.

Таблица 2

N	$\langle \Lambda_1 \rangle \cdot 10^5$	$\langle \Lambda_2 \rangle \cdot 10^5$	$\sigma_1 \cdot 10^5$	$\sigma_2 \cdot 10^5$
500000	0.55375	-23.7701	0.75827	3.74474
1000000	0.26167	-24.1060	0.40786	2.02966
1500000	0.20161	-24.1106	0.25554	0.82173
2000000	0.16099	-23.9673	0.19147	0.64617
2500000	0.11862	-23.9473	0.14653	0.83419
3000000	0.10525	-24.0144	0.12050	0.57394
3500000	0.08173	-23.9866	0.11073	0.26087
4000000	0.06675	-23.9653	0.09967	0.48504
4500000	0.06165	-24.0121	0.08798	0.45086
5000000	0.06462	-24.0080	0.07454	0.20955

Таблица 3

N	$\langle \Lambda_1 \rangle \cdot 10^5$	$\langle \Lambda_2 \rangle \cdot 10^5$	$\sigma_1 \cdot 10^5$	$\sigma_2 \cdot 10^5$
500000	2.19114	-21.049	3.58224	21.8030
1000000	0.78152	-20.817	1.78898	21.5096
1500000	0.31804	-20.728	1.18899	21.4198
2000000	0.08145	-20.682	0.88677	21.3798
2500000	-0.07307	-20.656	0.71536	21.3567
3000000	-0.17064	-20.635	0.59575	21.3423
3500000	-0.24037	-20.625	0.50939	21.3316
4000000	-0.28923	-20.616	0.44959	21.3232
4500000	-0.32959	-20.611	0.40035	21.3174
5000000	-0.36391	-20.606	0.36303	21.3126

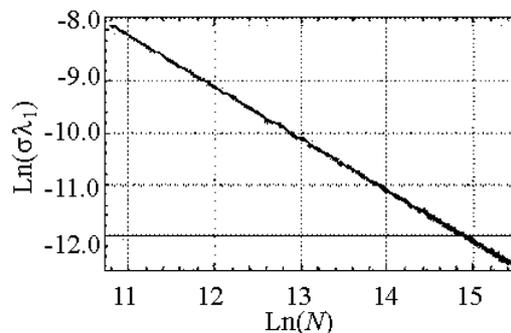


Рис. 9. График зависимости среднеквадратичного отклонения старшего ляпуновского показателя от длины используемой реализации в двойном логарифмическом масштабе

Заключение

В работе предложена модель в виде двух связанных отображений с квазипериодической динамикой, причем для автономных моделей практически не наблюдаются периодические режимы (резонансы). Исследовано устройство пространства параметров, отвечающих за удвоения инвариантных кривых (торов) в подсистемах. Обнаружена возможность удвоения тора более высокой размерности в такой системе. Обнаружены две обширные области трехчастотных режимов, в которые могут

быть встроены языки двухчастотных режимов, которые, в свою очередь, содержат языки точных периодических резонансов. Кроме того, наблюдаются нетривиальные типы и трансформации аттракторов, в частности, обнаружены аттракторы сложной геометрической структуры с близким к нулю старшим показателем Ляпунова.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-02-00541 и 12-02-31089.

Библиографический список

1. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
2. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.; Ижевск: РХД, 2000.
3. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация – фундаментальное нелинейное явления. М.: Техносфера, 2003.
4. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.; Ижевск: ИКИ, 2008.
5. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
6. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Physica D*. 1991. Vol. 47. P. 387.
7. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhysics Letters*. 2009. Vol. 86. P. 30003.
8. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // *Письма в ЖТФ*. 2010. Т. 36, вып. 10. С. 73.
9. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2008. Т. 16, № 2. С. 69.
10. *Кузнецов А.П., Поздняков М.В., Седова Ю.В.* Связанные универсальные отображения с бифуркацией Неймарка-Сакера // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 3. С. 473.
11. *Nishiuchi Y., Ueta T., Kawakami H.* Stable torus and its bifurcation phenomena in a simple three-dimensional autonomous circuit // *Chaos, Solutions & Fractals*. 2006. Vol. 27, № 4. P. 941.
12. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *CHAOS*. 2008. Vol. 18. P. 037123.
13. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Станкевич Н.В.* Автономный генератор квазипериодических колебаний // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 2. С. 51.
14. *Заславский Г.М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах. М.; Ижевск: ИКИ, 2004.
15. *Морозов А.Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.; Ижевск: ИКИ, 2005.
16. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В.* Бифуркация Богданова–Такенса: от непрерывной к дискретной модели // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т. 17, № 6. С. 139.
17. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // *Phys. Lett*. 1976. Vol. A57, № 5. P. 397,398.

18. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. Динамика двух неидентичных связанных автоколебательных систем с удвоениями периода на примере осцилляторов Ресслера // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 3.
19. Froeschlé C., Lega E., Guzzo M. Analysis of the chaotic behaviour of orbits diffusing along the Arnold web // In book «Periodic, Quasi-Periodic and Chaotic Motions in Celestial Mechanics: Theory and Applications» 2006. Part 2. P. 141.
20. Guzzo M., Lega E., Froeschlé C. Diffusion and stability in perturbed non-convex integrable systems // Nonlinearity. 2006. Vol. 19, № 5. P. 1049.
21. Honjo S., Kaneko K. Is Arnold diffusion relevant to global diffusion? <http://arxiv.org/abs/nlin/0307050>.
22. Vitolo R., Broer H., Simy C. Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // Nonlinearity. 2010. Vol. 23. P. 1919.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 6.02.2013

COMPLEX DYNAMICS IN THE SYSTEM OF TWO COUPLED DISCRETE RÖSSLER OSCILLATORS

A. B. Adilova, A. P. Kuznetsov, A. V. Savin

We considered the discrete map with quasi-periodic dynamics in the wide band of the parameters and investigated the structure of the parameter plane of two coupled maps. We revealed the doublings of 3D-tori, the systems of 2D-tori and synchronization tongues and the resonance web. Also we revealed the attractors with complex structure and the largest Lyapunov exponent close to zero.

Keywords: Quasi-periodic behavior, Lyapunov exponents.



Адилова Асель Бауржановна – родилась в Новоузенске (1992). Окончила Лицей-интернат естественных наук в Саратове (2009) с золотой медалью. Окончила бакалавриат факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета с красным дипломом (2013). Участвовала в качестве докладчика в шести всероссийских научных конференциях в Саратове, Твери, Минске, Нижнем Новгороде (2010–2013). Студентка 1 курса магистратуры факультета нелинейных процессов СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: assol775@yandex.ru



Савин Алексей Владимирович – родился в 1980 году в Саратове. Окончил физический факультет СГУ (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ (2005). Кандидат физико-математических наук (2005), доцент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – сложная динамика и переход к хаосу в близких к консервативным динамическим системам. Автор 20 статей в научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: SavinA@info.sgu.ru