

**ВЕСТНИК
САРАТОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
2013**

№ 4 (73)

Научно-технический журнал

Издается с 2003 г.

Выходит один раз в квартал

Декабрь 2013 года

*Журнал включен в перечень ведущих
рецензируемых журналов и научных изданий,
утвержденный президиумом ВАК
Министерства образования и науки РФ,
в которых публикуются основные научные
результаты диссертаций на соискание
ученых степеней доктора и кандидата наук*

**Главный редактор
Зам. главного редактора
Ответственный секретарь**

д.и.н., профессор И.Р. Плеве
д.т.н., профессор А.А. Сытник
д.ф.-м.н., профессор В.В. Астахов

Редакционный совет: д.т.н. В.И. Волчихин, д.т.н. В.А. Голенков, д.и.н. В.А. Динес, д.х.н. В. Зеленский (Польша), д.т.н. В.А. Игнатъев, д.т.н. В.В. Калашников, д.т.н. И.А. Новаков, д.и.н. И.Р. Плеве (председатель), д.т.н. А.Ф. Резчиков, д. социол. н. С.Б. Суровов, д.т.н. А.А. Сытник (заместитель председателя), д.ф.-м.н. Я. Аврейцевич (Польша), д.э.н. У. Арнольд (Германия), д.ф.-м.н. Э. Мерсер (Великобритания), д.э.н. Э. де Соузе Феррейра (Португалия), д.т.н. Т. Чермак (Чехия), д.э.н. Ю.В. Шленов

Редакционная коллегия: д.т.н. В.А. Крысько, д.ф.-м.н. В.В. Астахов, д.х.н. А.В. Гороховский, д.т.н. В.Н. Лясников, д.ф.-м.н. Л.А. Мельников, д.т.н. Р.З. Аминов, д.т.н. Ю.Г. Иващенко, д.т.н. А.С. Денисов, д.т.н. А.А. Сытник, д.т.н. А.А. Большаков, д.филос.н. Д.В. Михель, д.биол.н. Е.И. Тихомирова, д.э.н. А.Н. Плотников, д.и.н. Г.В. Лобачева

Редактор Л.А. Скворцова
Компьютерная верстка Н.В. Лукашовой
Перевод на английский язык А.Х. Аскаровой

Адрес редакции:
Саратов, 410054, ул. Политехническая, 77
Телефон: (845 2) 99-87-39
E-mail: vestnik@sstu.ru
<http://dni.sstu.ru/vestnik.nsf>
Факс: (845 2) 52-53-02

Подписано в печать 15.12.13
Формат 60×84 1/8 Бум. офсет.
Усл. печ. л. 43,0 Уч.-изд. л. 22,3
Тираж 500 экз. Заказ 237
Отпечатано в Издательстве СГТУ,
410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77

Полная электронная версия журнала размещена в системе РИНЦ
в открытом доступе на платформе eLIBRARY.RU

Подписной индекс 18378
(каталог «Газеты. Журналы» на 1-е полугодие 2014 г.)

УДК 517.9

А.П. Кузнецов, Н.А. Мигунова, Ю.В.Седова, Л.В. Тюрюкина

О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ В СВЯЗАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРАХ

Рассматривается динамика двух и трех связанных хаотических систем Ресслера. Показана возможность возникновения двух- и трехчастотной квазипериодичности при увеличении связи. Даны иллюстрации в виде графиков ляпуновских показателей, портретов аттракторов в сечении Пуанкаре и бифуркационного дерева. Обсуждается тип квазипериодической бифуркации в системе.

Хаотические колебания, квазипериодические колебания, инвариантные торы, бифуркации

A.P. Kuznetsov, N.A. Migunova, J.V. Sedova, L.V. Turukina

QUASI-PERIODIC OSCILLATIONS IN COUPLED CHAOTIC OSCILLATORS

We consider the dynamics of two and three coupled chaotic Rössler systems and outline two- and three-frequency quasi-periodic oscillations arising with the increase of the coupling intensity. Illustrations are provided in the form of charts with the Lyapunov exponents, attractor portraits of the Poincaré section, and bifurcation trees. We discuss a type of quasi-periodic bifurcation occurring in the system.

Chaotic oscillations, quasi-periodic oscillations, invariant tori, bifurcation

Введение. Задача о колебаниях связанных осцилляторов различной природы остается в центре внимания исследователей в разных областях физики, химии, биологии. Это такие примеры, как оптические и механические системы, контакты Джозефсона, ионные ловушки, радиоэлектронные осцилляторы и др. [1-8]. Одним из интересных аспектов является проблема синхронизации хаотических систем. Традиционный подход в этом случае состоит в изучении режимов, для которых динамика в целом является хаотической, хотя может быть как синхронной, так и асинхронной [9-11,15-17]. В [9,11] дан соответствующий «набросок» устройства плоскости параметров (частотная расстройка – величина связи) для двух связанных осцилляторов Ресслера и указано также на существование различных окон периодических режимов¹. Рассмотрим еще одну ситуацию, когда динамика связанных хаотических систем становится квазипериодической. Этот факт объясняется стабилизирующим действием диссипативной связи. Мы обсудим эту проблему на примере двух и трех хаотических осцилляторов Ресслера. При этом обнаруживаются режимы не только двухчастотной, но и трехчастотной квазипериодичности.

Два связанных хаотических осциллятора. Рассмотрим сначала систему двух связанных осцилляторов Ресслера, являющуюся «эталонной» моделью нелинейной динамики при изучении хаотической синхронизации [9-11, 17]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1-\Delta)y_1 - z_1, & \dot{x}_2 &= -(1+\Delta)y_2 - z_1, \\ \dot{y}_1 &= (1-\Delta)x_1 + py_1 + \mu(y_2 - y_1), & \dot{y}_2 &= (1+\Delta)x_2 + py_2 + \mu(y_1 - y_2), \\ \dot{z}_1 &= q + (x_1 - r)z_1, & \dot{z}_2 &= q + (x_2 - r)z_2, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y, z – динамические переменные соответствующей подсистемы, 2Δ – частотная расстройка осцилляторов. Фиксируем далее значения параметров $p=0.15, q=0.4, r=8.5$, отвечающие хаотическому режиму в индивидуальных подсистемах.

¹ Внешнее воздействие на хаотическую систему также может приводить к появлению картины периодических режимов, которая может быть весьма сложной [9, 18, 19].

При малой связи система (1) демонстрирует гиперхаос с двумя положительными показателями Ляпунова Λ_1 и Λ_2 , что достаточно естественно, поскольку индивидуальные подсистемы являются хаотическими. Обратимся к показанной на рис. 1 зависимости трех старших показателей Ляпунова от параметра связи для достаточно большой частотной расстройке осцилляторов. Можно видеть, что при увеличении связи несинхронный гиперхаотический режим сменяется хаотическим с одним положительным показателем, а затем становится возможным квазипериодический режим с двумя нулевыми показателями.

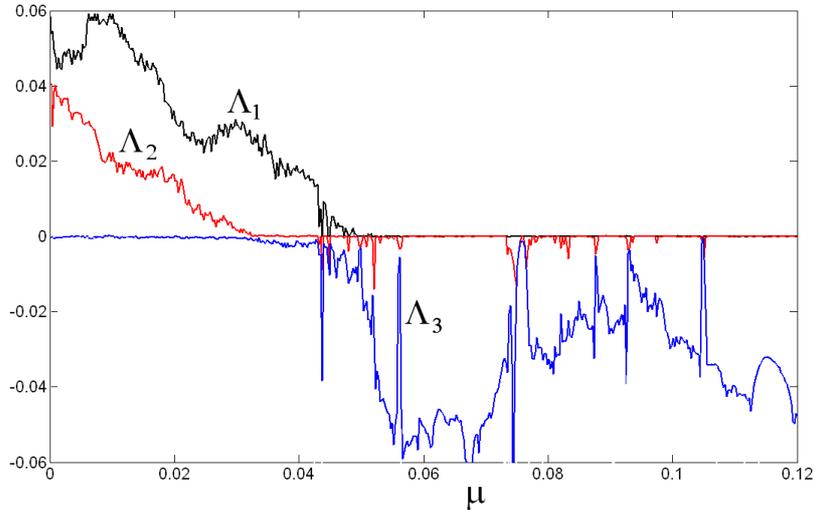


Рис. 1. Зависимость старших показателей Ляпунова двух связанных хаотических осцилляторов (1) от параметра связи, $\Delta=0.085$

Рис. 2 дает портреты аттракторов в сечении Пуанкаре при увеличении связи. (Здесь и далее сечение Пуанкаре отвечает пересечению фазовыми траекториями поверхности $y_1 = 0, x_1 < 0$.) Наблюдается переход от гиперхаоса НС к хаосу С с последующим возникновением инвариантной кривой, отвечающей двухчастотной квазипериодичности Т2. На пороге хаоса инвариантная кривая разрушена, и, вероятно, фрактализуется. Возникающая с ростом связи инвариантная кривая выглядит достаточно «запутанной», но все же является линией. При увеличении связи она приобретает вид, приближающийся к окружности.

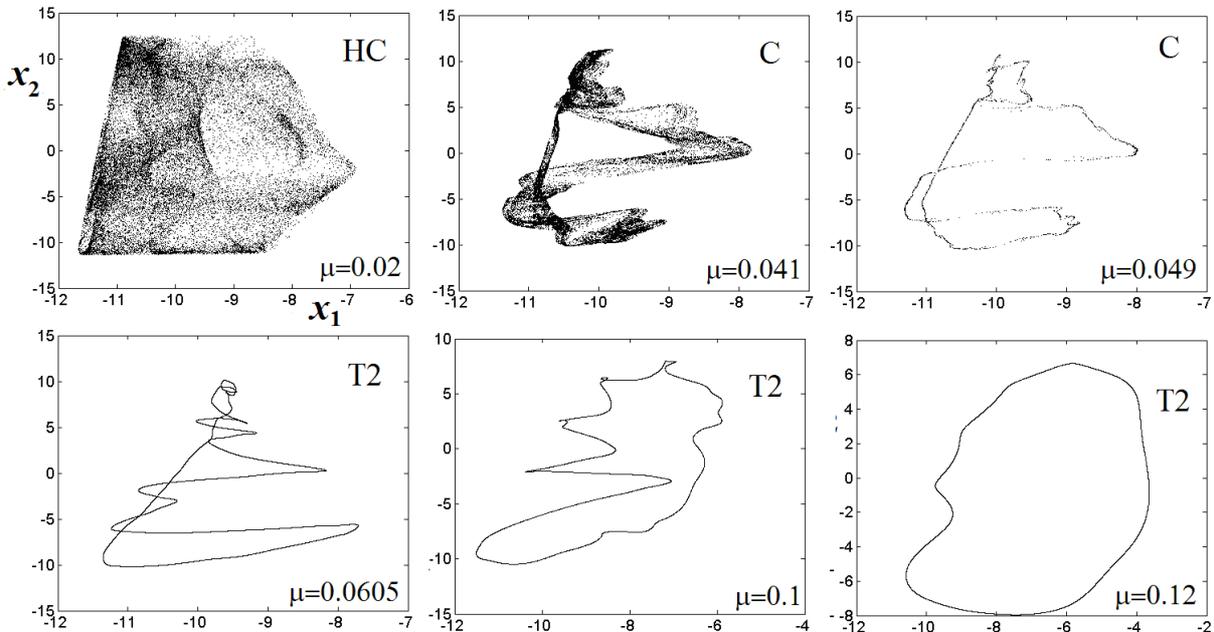


Рис. 2. Эволюция аттрактора системы (1) в сечении Пуанкаре при увеличении связи, $\Delta=0.085$. Буквами НС, С и Т2 обозначены режимы гиперхаоса, хаоса и двухчастотной квазипериодичности

Таким образом, в динамике хаотических осцилляторов присутствует некоторая «автоколебательная компонента», которая может проявиться при введении диссипативной связи и инициировать квазипериоди-

ческие колебания. Можно ожидать, что эта компонента проявится и при увеличении числа осцилляторов. Чтобы показать это, обратимся к системе трех связанных в цепочку хаотических осцилляторов.

Три хаотических осциллятора. Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - z_1, & \dot{x}_2 &= -(1 - \Delta_1)y_2 - z_2, \\ \dot{y}_1 &= x_1 + py_1 + \mu(y_2 - y_1), & \dot{y}_2 &= (1 - \Delta_1)x_2 + py_2 + \mu(y_1 + y_3 - 2y_2), \\ \dot{z}_1 &= q + (x_1 - r)z_1, & \dot{z}_2 &= q + (x_2 - r)z_2, \\ & & \dot{x}_3 &= -(1 - \Delta_2)y_3 - z_3, \\ & & \dot{y}_3 &= (1 - \Delta_2)x_3 + py_3 + \mu(y_2 - y_3), \\ & & \dot{z}_3 &= q + (x_3 - r)z_3, \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь Δ_1 и Δ_2 – частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого.

На рис. 3 показан график зависимости четырех старших ляпуновских показателей системы (2) от параметра связи для $\Delta_1 = 0.56$, $\Delta_2 = 0.05$. Можно видеть, что теперь наряду с двухчастотными T2 становятся возможными трехчастотные режимы T3 уже с тремя нулевыми показателями Ляпунова. Трехчастотные торы возникают при уменьшении величины связи в результате квазипериодической бифуркации Хопфа QH [12-14], отмеченной стрелкой на графике.

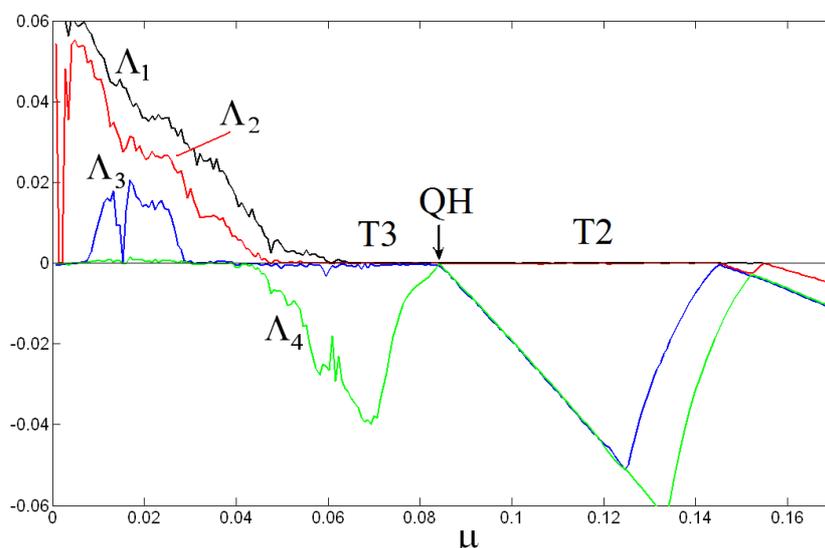


Рис. 3. Зависимость старших показателей Ляпунова трех связанных хаотических осцилляторов (2) от параметра связи, $\Delta_1 = 0.56$, $\Delta_2 = 0.05$

Примеры портретов аттракторов системы (2) в сечении Пуанкаре для $\Delta_1 = 0.19$, $\Delta_2 = 0.05$ приведены на рис. 4. При большой связи существует двухчастотный тор T2, сечение Пуанкаре которого дает инвариантную кривую, близкую по форме к окружности. При уменьшении связи из этой инвариантной кривой мягким образом возникает трехчастотный тор T3. При дальнейшем уменьшении связи можно наблюдать инвариантную кривую очень сложной формы, которая отвечает одному из возможных резонансных двухчастотных торов T_{R2} . Отметим, что при этих значениях частотных расстроек число резонансных окон достаточно велико. При малой связи торы разрушаются с возникновением хаоса и гиперхаоса.

Рис. 5 демонстрирует зависимость от параметра связи множества значений, которые принимает переменная x_1 на аттракторе в выбранном сечении Пуанкаре. Наблюдаемая картина иллюстрирует бифуркации, отвечающие за возникновение инвариантных торов разной размерности. В точке NS происходит бифуркация Неймарка-Сакера рождения двухчастотного тора. В этой точке единственная «ветка», отвечающая предельному циклу, расширяется так, что множество точек занимает при данной связи конечный интервал значений переменной. В области меньших величин связи хорошо видны также окна резонансных предельных циклов. В точке QH дерево вновь резко расширяется. Это точка бифуркации другого типа – квазипериодической бифуркации Хопфа [12-14], когда из двухчастотного тора мягким образом возникает трехчастотный тор. Таким образом, верхняя граница области трехчастотных торов по величине связи отвечает квазипериодической бифуркации Хопфа.

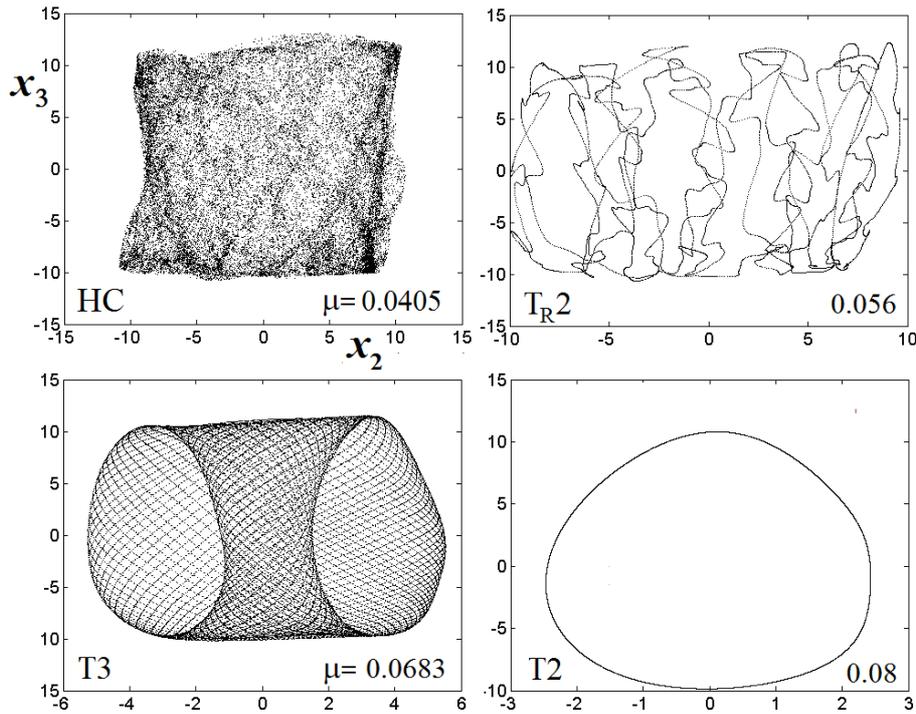


Рис. 4. Портреты аттракторов в сечении Пуанкаре для трех связанных хаотических осцилляторов Ресслера, $\Delta_1 = 0.19$, $\Delta_2 = 0.05$.

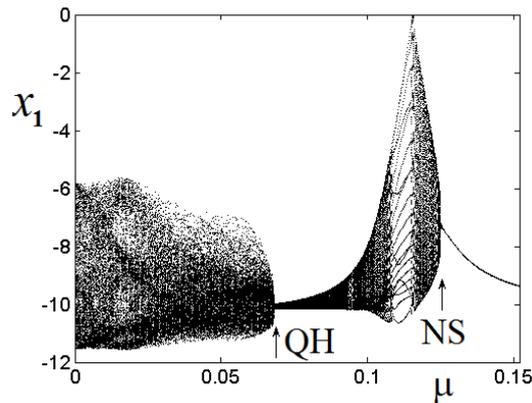


Рис. 5. Бифуркационное дерево для трех связанных хаотических осциллятора Ресслера (2), $\Delta_1 = 0.19$, $\Delta_2 = 0.05$

Заключение. Влияние диссипативной связи на хаотические осцилляторы может приводить не только к хаотической синхронизации и возникновению периодических движений, но и к появлению двух- и трехчастотных квазипериодических колебаний, причем за возникновение последних отвечает квазипериодическая бифуркация Хопфа. Можно ожидать, что увеличение числа хаотических осцилляторов будет приводить к возникновению инвариантных торов еще более высокой размерности.

Работа поддержана РФФИ проект 12-02-00342.

ЛИТЕРАТУРА

1. Heinrich G. Collective Dynamics in Optomechanical Arrays / G. Heinrich, M. Ludwig, J. Qian, B. Kubala, F. Marquardt. // Phys. Rev. Lett. Vol. 107. 2011. P. 043603.
2. Zhang M. Synchronization of Micromechanical Oscillators Using Light / M. Zhang, G.S. Wiederhecker, S. Manipatruni, A. Barnard, P. McEuen, M. Lipson // Phys. Rev. Lett. Vol. 109. 2012. P. 233906.
3. Temirbayev A. Autonomous and forced dynamics of oscillator ensembles with global nonlinear coupling: An experimental study / A. Temirbayev A, Yu.D. Nalibayev, Z.Z. Zhanabaev, V.I. Ponomarenko, M. Rosenblum // Phys. Rev. E. Vol. 87. 2013. P. 062917.
4. Martens E. A. Chimera states in mechanical oscillator networks / E.A. Martens, S. Thutupalli, A. Fourriere, O. Hallatschek // arXiv:1301.7608. 2013.

5. Tinsley M.R. Chimera and Phase Cluster States in Populations of Coupled Chemical Oscillators / M.R. Tinsley, S. Nkomo, K. Showalter // *Nature Phys.* Vol. 8. 2012. P. 662-665.
6. Vlasov V. Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables / V. Vlasov, A. Pikovsky // *Phys. Rev. E.* Vol. 88. 2012. P. 022908.
7. Lee T.E. Pattern formation with trapped ions / T.E. Lee, M.C. Cross // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 106. 2011. P. 143001.
8. Lee T.E. Quantum Synchronization of Quantum van der Pol Oscillators with Trapped Ions / T.E. Lee, H.R. Sadeghpour // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 111. 2013. P. 234101.
9. Пиковский А. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / А. Пиковский, М. Розенблум, Ю. Куртс. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
10. Rosenblum M.G. Phase Synchronization of Chaotic Oscillators / M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 76. 1996. P. 1804–1807.
11. Osipov G.V. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rossler oscillators / G.V. Osipov, A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, J Kurths // *Phys. Rev. E.* Vol. 55. 1997. P. 2353–2361.
12. Broer H. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems / H. Broer, C. Simó, R. Vitolo // *Regular and Chaotic Dynamics.* Vol. 16. 2011. Issue 1-2. P. 154-184.
13. Banerjee S. Local Bifurcations of a Quasiperiodic Orbit / S. Banerjee, D. Giaouris, P. Missailidis // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* Vol. 22. 2012. Issue 12. P. 1250289.
14. Emelianova Yu.P. Quasi-periodic bifurcations and “amplitude death” in low-dimensional ensemble of van der Pol oscillators / Yu.P. Emelianova, A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina // *Physics Letters A.* Vol. 378. 2014. P. 153–157.
15. Анищенко В.С. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций / В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова. Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2009. 312 с.
16. Anishchenko V.S. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. 2nd Edition. / V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. 460 p.
17. Vadivasova T.E. Phase multistability of synchronous chaotic oscillations / T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtseva, A.G. Balanov, V.V. Astakhov // *Discrete Dynamics in Nature and Society.* Vol. 4. 2000. P. 231-243.
18. Broer H. Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing / H. Broer, C. Simó, R. Vitolo // *Nonlinearity.* Vol. 15. 2002. P. 1205-1267.
19. Кузнецов А.П. Стабилизация хаоса в системе Ресслера импульсным и гармоническим сигналом / А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Н.Ю. Чернышов // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* Т. 18. 2010. № 4. С. 3-16.

Кузнецов Александр Петрович –
доктор физико-математических наук,
профессор, ведущий научный сотрудник
Саратовского филиала Института радиотехники
и электроники имени В.А. Котельникова РАН

Мигунова Наталья Александровна –
студентка Факультета нелинейных процессов
Саратовского государственного
университета имени Н.Г. Чернышевского

Седова Юлия Викторовна –
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Саратовского
филиала Института радиотехники
и электроники имени В.А. Котельникова РАН

Тюрюкина Людмила Владимировна –
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Саратовского
филиала Института радиотехники
и электроники имени В.А. Котельникова РАН

Alexander P. Kuznetsov –
Dr. Sc., Professor, Leading Research Fellow
Kotelnikov Institute of Radio Engineering
and Electronics,
Russian Academy of Sciences (Saratov Branch)

Natalia A. Migunova –
Undergraduate
Faculty of Nonlinear Processes,
Saratov State University

Julia V. Sedova –
Ph.D., Senior Research Fellow
Kotelnikov Institute of Radio Engineering
and Electronics,
Russian Academy of Sciences (Saratov Branch)

Ludmila V. Turukina –
Ph. D., Senior Research Fellow
Kotelnikov Institute of Radio Engineering
and Electronics,
Russian Academy of Sciences (Saratov Branch)

Статья поступила в редакцию 12.09.13, принята к опубликованию 15.12.13