



СИНХРОНИЗАЦИЯ И МНОГОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НИЗКОРАЗМЕРНЫХ АНСАМБЛЯХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ*

А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина, И.Р. Сатаев, Н.Ю. Чернышов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Обсуждается динамика ансамблей осцилляторов, содержащих небольшое количество элементов. Анализируются возможные типы режимов, особенности бифуркаций регулярных и квазипериодических аттракторов. С помощью метода карт ляпуновских показателей выявлена картина вложения квазипериодических режимов разной размерности в пространство параметров. Сравняется динамика ансамблей осцилляторов ван дер Поля и фазовых осцилляторов.

Ключевые слова: синхронизация, квазипериодические колебания, инвариантные торы, бифуркации.

Введение

Задача о динамике связанных автоколебательных осцилляторов является фундаментальной в теории колебаний и нелинейной динамике [1–5]. Описание различных систем в терминах взаимодействующих осцилляторов используется в радиофизике, микроволновой электронике, лазерной физике, биофизике, химии. В настоящей лекции сделан обзор современных результатов, касающихся динамики низкоразмерных ансамблей, содержащих три-пять элементов. При этом обсуждаются такие вопросы, как эволюция картины при увеличении числа осцилляторов, особенности фазовой модели и ее сопоставление с исходной системой, влияние типа связи (диссипативная, активная, реактивная), влияние геометрии связи и т.д. Отметим, что данный круг вопросов в более широком плане можно мыслить, как элементы теории *синхронизации квазипериодических колебаний*. Подобные задачи привлекают внимание, начиная с 1980-х годов [6–17]. Однако сравнительно недавно получен ряд новых результатов, которые позволили понять, что речь идет о весьма обширной и многоплановой программе исследований [18–40]. Прогресс связан как с возросшими мощностями компьютеров, так и с определенным продвижением в теории.

*Статья написана по материалам доклада на X Международной школе «Хаотические автоколебания и образования структур», 7–12 октября 2013, Саратов, Россия.

Некоторое «запаздывание» (по сравнению с задачами синхронизацией регулярных и хаотических колебаний) имеет свои причины. Прежде всего, это достаточно тонкие и непростые моменты теории и численных методов анализа *квазипериодических бифуркаций*¹, которые все еще не получили необходимого развития. Далее, это увеличение числа фундаментальных моделей², а также многообразие возможных типов колебательных режимов, разновидностей резонансов и т.д. Следует отметить и известное обсуждение сценария Рюэля–Такенса, которое, как теперь ясно, не вполне обоснованно охладило мотивацию исследования задач многочастотной квазипериодичности. Однако теперь становится понятно, что это обширная область, требующая своей математики, физики и «техники» исследования. Некоторые моменты такой картины и представлены в настоящей лекции³. В то же время, материал излагается так, чтобы он мог быть полезен для обучения студентов и аспирантов.

1. Ансамбль из трех связанных осцилляторов

1.1. Фазовая модель для трех осцилляторов. Обратимся сначала к системе трех диссипативно связанных в цепочку осцилляторов ван дер Поля

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь λ – параметр возбуждения автономных осцилляторов, Δ_1 и Δ_2 – частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого, μ – коэффициент связи. Частота первого осциллятора принята за единицу.

Если параметр возбуждения λ мал, а также малы частотные расстройки и величина связи, то можно следить только за динамикой фаз, считая, что осцилляторы движутся по своим стационарным орбитам. Действуя стандартным образом [1, 2], можно получить соответствующую (1) фазовую модель

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь θ , φ – относительные фазы первого-второго и второго-третьего осцилляторов, а параметры нормированы на величину λ , так что могут считаться уже немалыми. (Детали см. в [33, 37].) Уравнение (2) можно рассматривать как обобщение классического уравнения Адлера на случай трех осцилляторов.

¹То есть бифуркаций инвариантных торov разной размерности.

²Для двух осцилляторов в фазовом приближении основная модель – это уравнение Адлера. При увеличении числа осцилляторов могут возникать различные варианты его обобщения, зависящие от геометрии системы и типа связи.

³Некоторые изложенные здесь результаты более подробно обсуждаются в работах [33–40], ряд результатов является новыми. При этом мы не будем касаться круга вопросов, связанного с вынужденной синхронизацией квазипериодических колебаний [18–22, 28–32], а также с динамикой квазипериодических генераторов [22, 23].

Классификация режимов. Система (2) может демонстрировать разнообразные режимы, которые допускают физически мотивированную классификацию (рис. 1):

а. В системе есть одно устойчивое равновесие 1, одно неустойчивое равновесие 4 и два седла 2 и 3. Устойчивое равновесие отвечает режиму *полной синхронизации всех трех осцилляторов*. В исходной системе (1) ему соответствует движение по устойчивому предельному циклу.

б. Аттрактором на фазовой плоскости является устойчивая *инвариантная кривая I*, для которой относительная фаза первого и второго осцилляторов θ колеблется около некоторого среднего значения, а относительная фаза φ второго и третьего меняется во всем возможном диапазоне. Это режим *частичного захвата первого и второго осцилляторов*. Прилагательное «частичная» подчеркивает, что захват фаз неточный. В исходной системе (1) в этом случае реализуется *двухчастотная квазипериодичность*, а аттрактор имеет вид *инвариантного тора*.

в. Относительная фаза второго и третьего осцилляторов φ колеблется около некоторого среднего значения, а относительная фаза θ меняется во всем возможном диапазоне. Это режим *частичного захвата первого и второго осцилляторов*.

г. На фазовой плоскости реализуется «поток» траекторий, всюду плотно ее покрывающий. В исходной системе наблюдается режим *трехчастотной квазипериодичности* и, соответственно, инвариантный тор более высокой размерности.

д. Аттрактором является инвариантная кривая, имеющее некоторое число пересечений со сторонами фазового квадрата. В исходной системе возникает *резонансный двухчастотный тор*, лежащий на поверхности трехчастотного тора. Такие

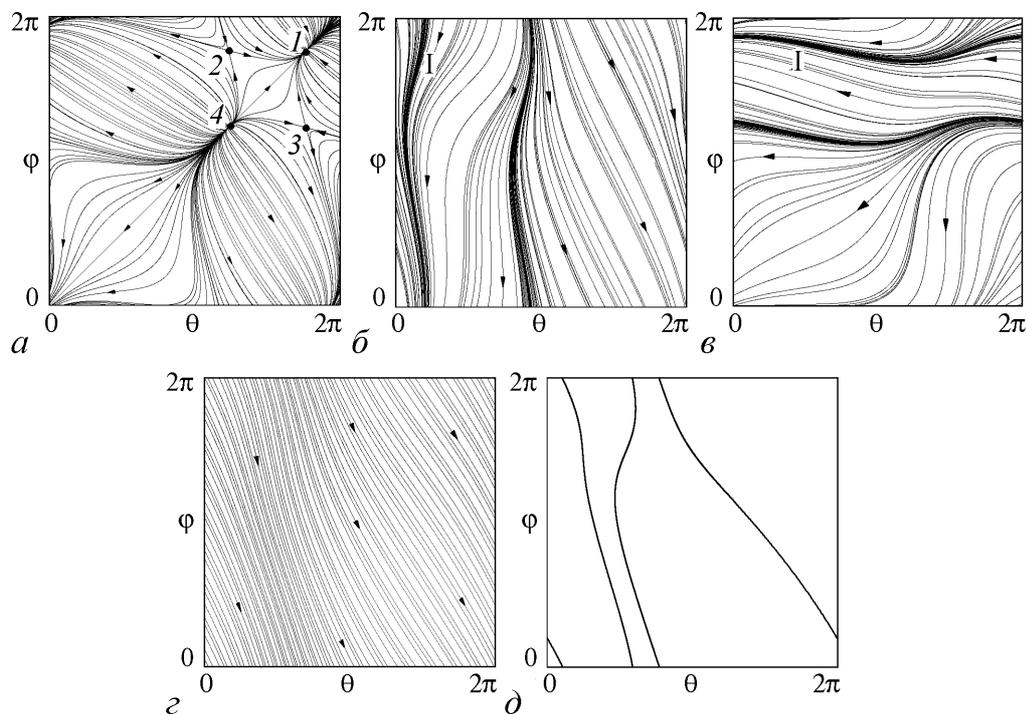


Рис. 1. Характерные фазовые портреты системы трех фазовых осцилляторов (2)

траектории удобно классифицировать с помощью, своего рода, числа вращения $w = p:q$, которое определяется по числу существенных пересечений фазовой траектории с вертикальной и горизонтальной границами фазового квадрата⁴. Так, для рис. 1, д число вращения $w=1:3$ ⁵. Число вращения можно ввести и для режимов частичного захвата, так что на рис. 1, б $w=0:1$, а на рис. 1, в – $w=1:0$.

Плоскость параметров. Обсудим, как те или иные режимы вложены в пространство параметров. При анализе двух связанных осцилляторов традиционным является представление результатов на плоскости частотная расстройка–величина связи. В случае трех осцилляторов можно зафиксировать частотную расстройку Δ_2 (то есть частоту третьего осциллятора) и построить плоскость параметров (Δ_1, μ) . Далее необходимо выбрать метод визуализации режимов. Для систем с многочастотной динамикой это может быть *метод карт ляпуновских показателей*⁶ [29–40]. Он использует то обстоятельство, что наличие нулевых ляпуновских показателей и их число позволяют выявлять и классифицировать квазипериодические режимы.

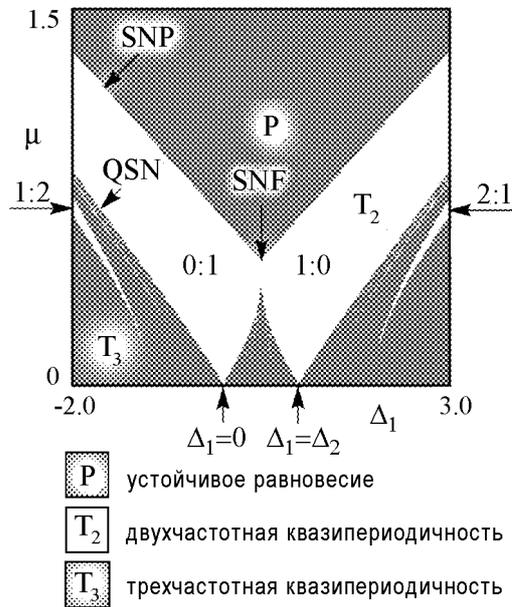


Рис. 2. Карта ляпуновских показателей трех фазовых осцилляторов (2) на плоскости (Δ_1, μ) , $\Delta_2=1$. SNP – линия вырожденной седло-узловой бифуркации состояний равновесия, QSN – линия седло-узловой бифуркации инвариантных кривых, SNF – точка коразмерности два

С этой целью будем вычислять оба ляпуновских показателя системы (2) Λ_1, Λ_2 в каждой точке плоскости параметров (Δ_1, μ) . Затем эту плоскость окрасим в разные цвета так, чтобы визуализировать следующие режимы:

$\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0$ – наличие устойчивого состояния равновесия P (точный захват фаз);

$\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$ – двухчастотный квазипериодический режим T_2 ;

$\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$ – трехчастотный квазипериодический режим T_3 .

(Здесь размерность квазипериодических режимов дана в терминах исходной системы.) Полученная карта показана на рис. 2.

Прежде всего, отмечаем наличие области точного захвата всех трех осцилляторов P, для которой характерен порог полной синхронизации по величине связи. Область полной синхронизации граничит с двумя обширными областями двухчастотных режимов T_2 .

⁴С учетом 2π -периодичности фаз при замыкании этого квадрата в тор инвариантные кривые превращаются в предельные циклы на поверхности тора, а фактор w служит числом вращения на этом торе.

⁵Для наглядности на рис. 1, д показан только аттрактор системы.

⁶Его преимущества в данном случае следующие. Во-первых, «автоматически» визуализируются тонкие детали устройства пространства параметров, в частности, разнообразные области резонансных торов. Во-вторых, реализуется единый «инструментарий» для анализа как фазовой модели, так и исходной системы. Эти обстоятельства являются существенными, поскольку пока отсутствуют простые алгоритмы численного анализа бифуркаций инвариантных торов.

Они отвечают режимам частичного захвата первого-второго $w=0:1$ и второго-третьего $w=1:0$ осцилляторов. Эти области имеют вид языков, по виду напоминающие классические языки Арнольда. Однако они погружены в область трехчастотной квазипериодичности T_3 . Острия языков лежат на оси частотной расстройки, причем отвечают точным резонансам в системе, когда совпадают собственные частоты пар осцилляторов: $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_2 = \omega_3$. В соответствии с (2) это дает значения $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2$, которые отмечены на рис. 2 стрелочками.

Внутри трехчастотной области, в свою очередь, имеются узкие языки *резонансных двухчастотных режимов* высшего порядка. Они имеют вид дополнительных языков, как, например, языки 1:2 и 2:1 на рис. 2. Также имеется система очень узких веерных языков с общей вершиной в точке SNF.

Бифуркационные сценарии разрушения режима полной синхронизации и квазипериодических режимов. Границы области полной синхронизации на рис. 2 легко найти аналитически. Полагая $\dot{\theta} = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$, из (2) можно выразить синус каждой относительной фазы через параметры системы

$$\sin \theta = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3\mu}, \quad \sin \varphi = \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3\mu}. \quad (3)$$

При вариации параметров решения (3) появляются парами: (θ_1, θ_2) для первого уравнения и (φ_1, φ_2) – для второго. Поэтому четыре состояния равновесия на рис. 1, а располагаются в вершинах прямоугольника. При пересечении границ области Р они попарно сближаются ($\theta_1 \rightarrow \theta_2$ или $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$). В результате все четыре равновесия попарно *одновременно* сливаются и исчезают. При этом негрубое состояние содержит два равновесия. Таким образом, за разрушение полной синхронизации в этом случае отвечает *вырожденная седло-узловая бифуркация* SNP, когда одновременно сливаются устойчивый узел и седло, а также неустойчивый узел и второе седло. Условие обращения синусов по модулю в единицу может быть записано аналитически

$$\frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3\mu} = \pm 1, \quad \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3\mu} = \pm 1. \quad (4)$$

Отрезки линий (4) на рис. 2 и образуют границу области полной синхронизации. В свою очередь, они пересекаются в характерной точке *кормозмерности два* SNF $\mu = \Delta_2/2$, $\Delta_1 = \Delta_2/2$, в которой на фазовой плоскости одновременно стягиваются в одну точку *сразу все четыре равновесия*.

В результате вырожденной седло-узловой бифуркации SNP из *инвариантных многообразий* состояний равновесия возникают устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые. При приближении к границе языка двухчастотного режима они сближаются. Затем в результате *седло-узловой бифуркации инвариантных кривых* QSN возникает трехчастотный режим⁷. Отметим, что в фазовой модели границы всех двухчастотных языков образованы линиями бифуркаций такого типа, меняется лишь число вращения w .

Плоскость собственных частот осцилляторов. Увеличение числа осцилляторов более двух дает, однако, другой важный случай параметрического портрета

⁷ Аналогичный механизм для задач вынужденной синхронизации двух осцилляторов внешним сигналом описан в работах [18, 19].

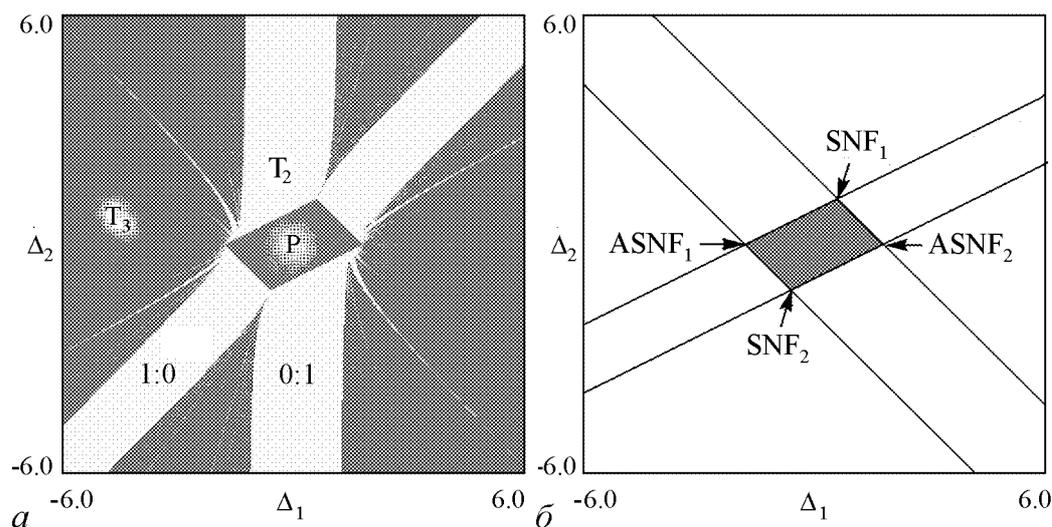


Рис. 3. Ляпуновская карта трех диссипативно связанных фазовых осцилляторов (2) на плоскости частотных параметров (а) и конфигурация области полной синхронизации в рамках аналитического рассмотрения (б); $\mu = 0.6$

системы. Это пространство собственных частот осцилляторов. В случае трех осцилляторов следует обратиться к плоскости частотных расстройок (Δ_1, Δ_2). На рис. 3, а показана ляпуновская карта в этом случае. Рядом, для удобства восприятия, даны линии (4) и показана образованная ими область полной синхронизации (рис. 3, б).

Из сравнения рис. 3, а и б можно видеть, что область полной синхронизации Р на карте отвечает аналитическому рассмотрению и имеет вид параллелограмма⁸. Пересечение линий (4) отвечает четырем точкам коразмерности два:

$$\begin{aligned} \text{SNF}_{1,2} : \Delta_1 = \mu, \Delta_2 = 2\mu; \Delta_1 = -\mu, \Delta_2 = -2\mu; \\ \text{ASN}_{1,2} : \Delta_1 = 3\mu, \Delta_2 = 0; \Delta_1 = -3\mu, \Delta_2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В их окрестности наблюдается множество резонансных двухчастотных режимов разного порядка. Их сосуществование иллюстрируют карты торов на рис. 4. На этих картах цвет области двухчастотных режимов выбран в соответствии с введенным выше числом вращения w . Для первой пары точек характерным является система веерообразно расходящихся от точки SNF областей резонансных двухчастотных режимов разного порядка (рис. 4, а). Окрестность второй пары – точек ASN – устроена сложнее. В этом случае языки двухчастотных режимов не уменьшаются в размере при приближении к области полной синхронизации, а наоборот – расширяются так, что имеют с ней протяженный контакт (рис. 4, б). При этом точки смены типа двухчастотного режима накапливаются к точке ASN вдоль границы области полной синхронизации⁹.

Область полной синхронизации на рис. 3, а лежит на пересечении двух широких полос двухчастотных режимов, отвечающих частичной синхронизации двух пар

⁸На это факт было указано в [1], так что его можно назвать «параллелограммом Ланды». Отметим, что позднее в работе [51], посвященной динамике лазеров, этот факт был заново переоткрыт в 1993 году.

⁹В [11, 13] аналогичные точки называют *saddle node fan* (седло-узловой веер) и *accumulation of saddle node fans*, что и определяет использованные аббревиатуры.

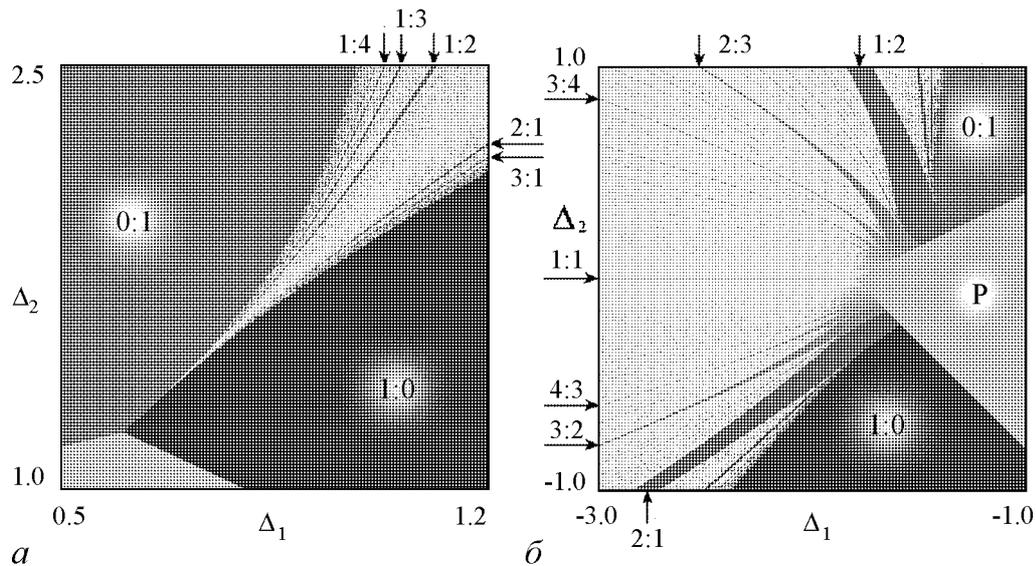


Рис. 4. «Карты торов» в окрестности точек SNF (а) и ASNF (б). В виде дробей показаны числа вращения, характеризующие инвариантные кривые

осцилляторов $w=0:1$ и $w=1:0$. Им отвечают резонансные условия совпадения частот первого-второго и второго-третьего осцилляторов $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2$.

1.2. Три осциллятора ван дер Поля. Обратимся теперь к исходной системе (1). В этом случае бифуркации, отвечающие за область полной синхронизации, модифицируются, и «параллелограмм Ланды» разрушается (рис. 5)¹⁰. Выберем значение управляющего параметра $\lambda = 0.1$, которое является удобным значением, чтобы продемонстрировать как отличия от фазовой модели, так и некоторые наследуемые черты¹¹. Форма области полной синхронизации на рис. 5 близка к параллелограмму. Имеются, однако, и существенные отличия.

Первая особенность состоит в том, что теперь седло-узловые бифуркации устойчивого и неустойчивых режимов происходят не одновременно, а на разных линиях SN_1 и SN_2 , показанных на рис. 5 сплошной линией и пунктиром. Соответственно, «угол» параллелограмма SNF меняется на плавную линию. При этом вблизи локализации точки SNF теперь располагаются три сборки линии неустойчивых режимов в форме катастрофы «бабочка». Таким образом, вырождение, характерное для фазовой модели, снимается.

В окрестности точки ASNF появляются также линии бифуркации

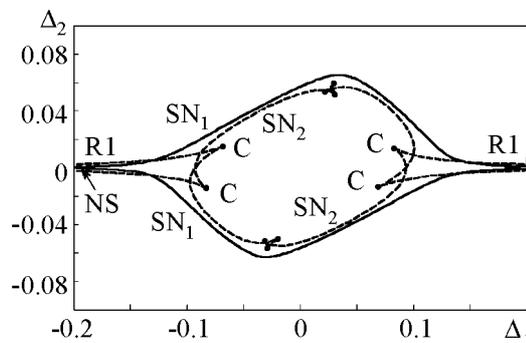


Рис. 5. Бифуркационные линии системы трех связанных осцилляторов ван дер Поля (1), $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.04$. SN_1 – седло-узловая бифуркация устойчивого предельного цикла, SN_2 – неустойчивого, C – точка сборки, NS – линия Неймарка–Сакера, R1 – резонанс 1:1

¹⁰Отметим, что теперь полной синхронизации отвечает предельный цикл. Его исчезновение отвечает бифуркациям неподвижной точки в сечении Пуанкаре.

¹¹В соответствии с условием нормировки на λ , значения параметров по сравнению с рис. 2 изменены в 10 раз.

Неймарка–Сакера NS, которые имеют общие точки R1 с линиями седловых бифуркаций – точки резонанса 1:1. Таким образом, сильно вытянутые узкие области полной синхронизации, возникающие на месте точек ASNF, ограничены как линиями седло-узловых бифуркаций, так и продолжающимися их линиями бифуркации Неймарка–Сакера.

Если говорить о более общей картине, то возникают резонансные области периодических режимов более высокого порядка, которых нет в фазовой модели. Они отвечают различным периодам в сечении Пуанкаре (детали см. в [40]).

1.3. Влияние геометрии системы. Для двух осцилляторов возможен единственный тип геометрии связи. Для трех осцилляторов, однако, возможно их объединение как в цепочку, так и в кольцо (или сеть, что для трех осцилляторов одно и то же). Фазовая модель для сети может быть получена аналогичным образом и имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi - \frac{\mu}{2} \sin(\theta + \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \frac{\mu}{2} \sin(\theta + \varphi).\end{aligned}\tag{6}$$

По сравнению со случаем цепочки (2) появляются дополнительные члены, содержащие сумму относительных фаз. Поэтому строгое аналитическое рассмотрение полной синхронизации в этом случае выполнить не удастся и необходим численный анализ.

Карта ляпуновских показателей системы (6) на плоскости частотных расстройк показана на рис. 6, а для значения параметра связи $\mu = 0.6$. Сравним ее со случаем цепочки на рис. 3, а. Прежде всего, отмечаем изменение вида области полной синхронизации. Характерный для цепочки «параллелограмм Ланды» теперь меняет-

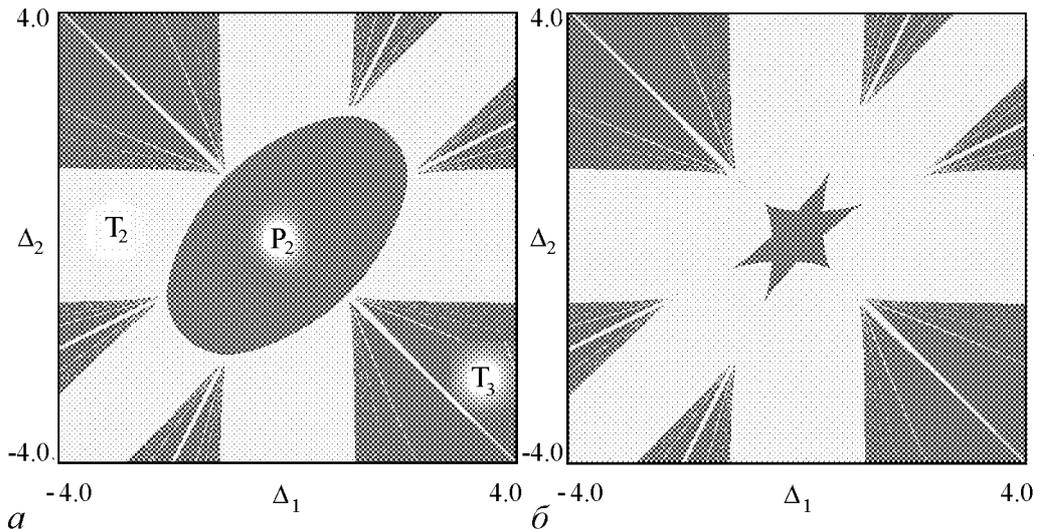


Рис. 6. Карта ляпуновских показателей для сети из трех фазовых осцилляторов (6) на плоскости частотных расстройк, $\Delta_2=1$; случай диссипативной связи $\mu=0.6$ (а) и активной связи $\mu = -0.6$ (б)

ся на овал. Можно показать, что при этом снимается вырождение: граница эллипса образована типичной седло-узловой бифуркацией устойчивого узла.

Другая особенность системы – увеличение числа основных полос двухчастотных режимов, на пересечении которых лежит область полной синхронизации. Причина состоит в геометрии системы, которая определяет число возможных резонансов. Действительно, для сети возможны три варианта основных резонансов: совпадают частота первого и второго осцилляторов ($\Delta_1 = 0$), совпадают частоты второго и третьего осцилляторов ($\Delta_2 = 0$), совпадают частоты первого и третьего осциллятора ($\Delta_1 = \Delta_2$). Эти три ситуации и определяют три широкие полосы двухчастотных режимов на рис. 6, а.

1.4. Случай активной связи. Для задач лазерной физики достаточно типичен случай *активной* связи, когда синхронизация элементов описывается уравнением Адлера, но с отрицательной константой связи [53–55]. В этом случае говорят об *отталкивающем взаимодействии*, поскольку теперь устойчивым оказывается режим противофазной синхронизации [65].

Для цепочки из трех фазовых осцилляторов изменение знака связи оказывается не принципиальным: устройство карты режимов не меняется. Причина состоит в том, что замена переменных $\theta \rightarrow \theta + \pi$, $\psi \rightarrow \psi + \pi$ в уравнениях (2) эквивалента изменению знака константы связи μ . Поэтому картина режимов в цепочке для диссипативной и активной связи полностью эквивалентна, хотя при этом синфазные режимы превращаются в противофазные и наоборот.

Иная ситуация имеет место для сети. В этом случае такая замена переменных меняет вид уравнений (6), а это означает, что при активной связи наблюдается другое устройство области полной синхронизации. Этот факт иллюстрирует рис. 6, б, на котором показана карта ляпуновских показателей сети для отрицательного параметра связи $\mu = -0.6$. Можно видеть изменение области полной синхронизации, которая представляет собой теперь шестиконечную «звезду». Отметим, что для сети с активной связью точки *saddle node fan* не лежат на границе области полной синхронизации, а располагаются вне ее.

Бифуркационные линии для системы с активной связью показаны на рис. 7. Можно видеть, что «звезда» образована линиями седло-узловых бифуркаций устойчивых равновесий SN_1 , которые сходятся в шести точках сборки C . Вся эта система окружена овалом, представляющим собой показанную пунктиром линию седло-узловой бифуркации неустойчивых равновесий SN_2 .

С другой стороны, изменение знака связи в уравнениях (6) эквивалентно обращению времени. Поэтому картины бифуркаций для случаев диссипативной и активной связи превращаются друг в друга при замене устойчивых режимов на неустойчивые. (То есть сплошные и пунктирные линии на рис. 7 нужно по-

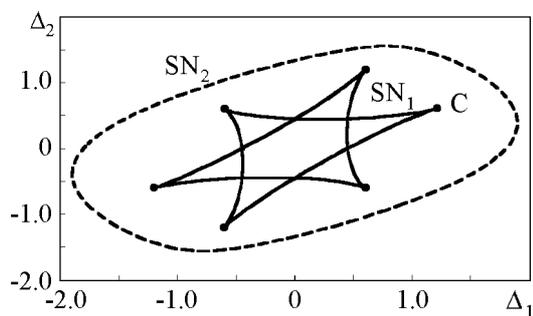


Рис. 7. Бифуркационные линии системы (6), $\mu = -0.6$; $\Delta_2=1$

менять местами.) При этом картина двухчастотных и трехчастотных режимов вне овала одинакова. Причина в том, что момент слияния устойчивой и неустойчивой инвариантных кривых инвариантен относительно обращения времени¹².

1.5. Случай реактивной связи. Рассмотрим теперь случай, когда в уравнениях (1) осцилляторы связаны не через скорости изменения переменных, а через сами переменные. Это *реактивная* связь, которая при традиционной радиотехнической реализации отвечает связи не через резистор, а через реактивный элемент (емкость) [1].

Реактивная связь – явление существенно более тонкое, чем диссипативная. Случай двух осцилляторов обсуждался в [41–43]. Получена необходимая фазовая модель и показано, что эффект синхронизации возникает только *при учете эффектов второго порядка* по величине связи. При формальном выводе фазовых уравнений это проявляется в том, что необходимо учитывать отклонение орбит осцилляторов от невозмущенных стационарных орбит – иначе реактивная связь не проявляется. Учитывая эти особенности, можно получить необходимое фазовое уравнение для трех осцилляторов [35]

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + \varepsilon \cos \varphi - \varepsilon^2 \sin 2\theta + \varepsilon^2 \left(\sin \varphi \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right), \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 - \varepsilon \cos \theta - \varepsilon^2 \sin 2\varphi + \varepsilon^2 \left(\sin \theta \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Интересно, что в отличие от случая двух осцилляторов [41–43], фазовые уравнения (7) содержат и члены первого порядка по параметру реактивной связи ε . Однако для правильного описания эффектов синхронизации одних линейных членов все же недостаточно. Действительно, если отбросить квадратичные члены, матрица возмущений состояний равновесия примет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0, & -\varepsilon \sin \varphi \\ \varepsilon \sin \theta, & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

След этой матрицы $S = 0$. В этом случае вместо узлов возникают своего рода «нейтральные» состояния на границе между устойчивым и неустойчивым решениями. Таким образом, в этом приближении в системе вообще нет основного резонанса. Поэтому для описания возможности синхронизации в системе трех реактивно связанных осцилляторов обязательно необходимо учитывать эффекты второго порядка по величине связи¹³.

¹²Отметим также, что если для сети выполнить замену $\theta \rightarrow \theta + \pi$, $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$, то получим, что сеть из трех элементов со всеми активными связями эквивалентна сети с двумя диссипативными и одной активной связью.

¹³Отметим, что эта особенность реактивной связи осталась незамеченной в [1], где утверждается на основе уравнений первого порядка по связи, что область полной синхронизации имеет вид параллелограмма, как и в диссипативном случае. Отметим также, что основная модель фундаментальной математической работы [11] отвечает дискретизации по схеме Эйлера системы (7) с отброшенными квадратичными членами и поэтому также не описывает основные синхронные режимы, характерные для связанных «физических» осцилляторов.

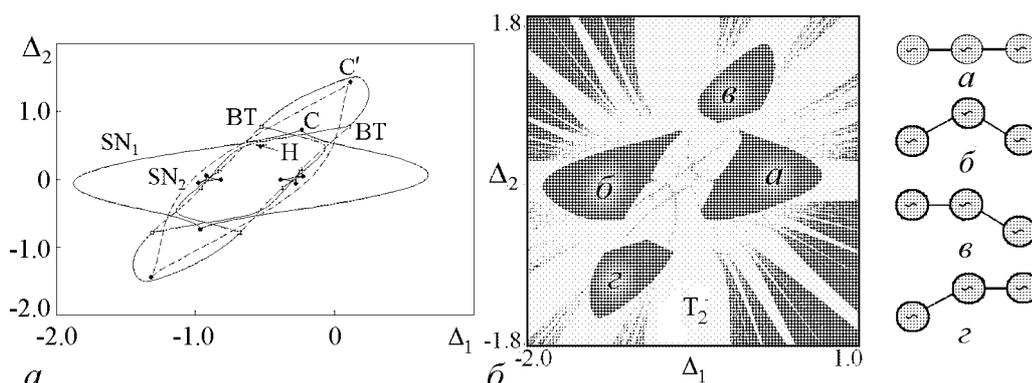


Рис. 8. *a* – бифуркационные линии и точки системы (6), $\varepsilon=0.6$; SN_1 – седло-узловая бифуркация устойчивого равновесия; SN_2 – неустойчивого; H – бифуркация Андронова–Хопфа; C и C' – точки сборки устойчивых и неустойчивых режимов; BT – точка Богданова–Тakensа. *б* – карта ляпуновских показателей. Буквами обозначены точки, соответствующие определенным модам колебаний

На рис. 8 показана картина бифуркаций состояний равновесия системы (7) и соответствующая ляпуновская карта. Для реактивной связи линии седло-узловых бифуркаций SN_1 , отвечающие слиянию устойчивого узла и седла (сплошная линия) и неустойчивого узла и седла SN_2 (пунктирная линия) не совпадают. Существенно новый момент – возможность в фазовых уравнениях бифуркации Андронова–Хопфа H , когда положение равновесия теряет устойчивость, и от него отделяется устойчивый предельный цикл. Поэтому область полной синхронизации в случае реактивной связи фазовых осцилляторов ограничена, как линиями седло-узловой бифуркации, так и линией бифуркации Андронова–Хопфа. На рис. 8, *a* указаны также точки ко-размерности два: точки сборки C и точки Богданова–Тakensа BT .

Область полной синхронизации на рис. 8 состоит из четырех «островов». Внутри каждого из них наблюдается свой тип полной синхронизации. В точке «*a*» относительные фазы близки к нулю: $\theta \approx 0$, $\varphi \approx 0$, и наблюдается режим синхронизации *синфазного* типа. В точке «*б*» относительные фазы $\theta \approx \pi$, $\varphi \approx \pi$, так что первый и третий осциллятор колеблются примерно в фазе, а центральный осциллятор – в противофазе к ним. Это *противофазная* синхронизация. Внутри двух оставшихся «островов» наблюдается режим полной синхронизации *смешанного* типа. В этом случае одна из пар осцилляторов (первый-второй или второй-третий) колеблются в фазе, а оставшийся осциллятор – в противофазе к ним. Соответствующие конфигурации цепочки качественно показаны справа на рис. 8¹⁴.

В случае реактивной связи в результате бифуркации Андронова–Хопфа может возникнуть устойчивый предельный цикл C , как показано на рис. 9. Ему

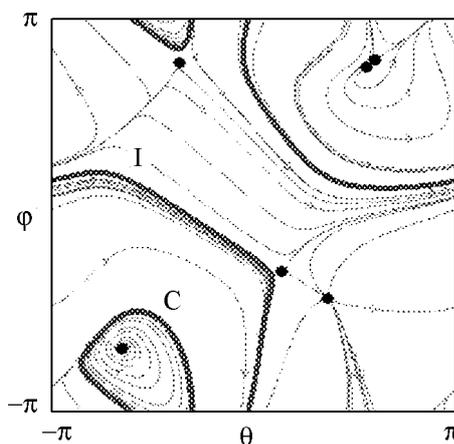


Рис. 9. Фазовый портрет трех реактивно связанных осцилляторов (7), $\Delta_1 = -0.985$, $\Delta_2 = -0.2$, $\varepsilon=0.6$. C – устойчивый предельный цикл, I – «вращательная» инвариантная кривая

¹⁴ Аналогичные режимы для осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля наблюдались в [44].

отвечает режим двухчастотной квазипериодичности, но отличающийся от описанных выше случаев захвата пар осцилляторов на рис. 1, б, в. Теперь обе относительные фазы не постоянны и колеблются около некоторого среднего значения. Таким образом, этот режим можно охарактеризовать, как *частичный захват всех трех осцилляторов*. В этом случае частотный спектр системы (1) будет содержать не только базовую частоту, но и набор составляющих, связанных с новым характерным масштабом времени – периодом обращения изображающей точки по предельному циклу фазовой модели. Соответствующая инвариантная кривая C отличается топологическими свойствами. Ее называют *стягиваемой (contractible)* в отличие от *вращательных (rotational)* кривых на рис. 1, б, в [11]. На рис. 9 сосуществуют устойчивые кривые обоих типов.

В системе с реактивной связью возможно несколько типов мультистабильности. Например, могут сосуществовать устойчивые состояния равновесия разных типов, устойчивые равновесия и инвариантная кривая, инвариантные кривые разных типов, отвечающие как частичной синхронизации пар осцилляторов, так и всех трех осцилляторов.

2. Ансамбль из четырех связанных осцилляторов

2.1. Фазовая модель для четырех осцилляторов. Обратимся теперь к цепочке четырех диссипативно связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) + \mu(\dot{z} - \dot{w}) &= 0, \\ \ddot{w} - (\lambda - w^2)\dot{w} + (1 + \Delta_3)w + \mu(\dot{w} - \dot{z}) &= 0.\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь Δ_i – соответствующие частотные расстройки. Действуя стандартным образом, получаем уравнения в фазовом приближении для относительных фаз осцилляторов

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi - \mu \sin \phi.\end{aligned}\tag{10}$$

На рис. 10 представлена карта ляпуновских показателей системы (10) на плоскости (Δ_1, μ) . Эта система имеет третий порядок и характеризуется уже тремя ляпуновскими показателями, так что дополнительно появляется возможность режимов четырехчастотной квазипериодичности T_4 и хаоса C .

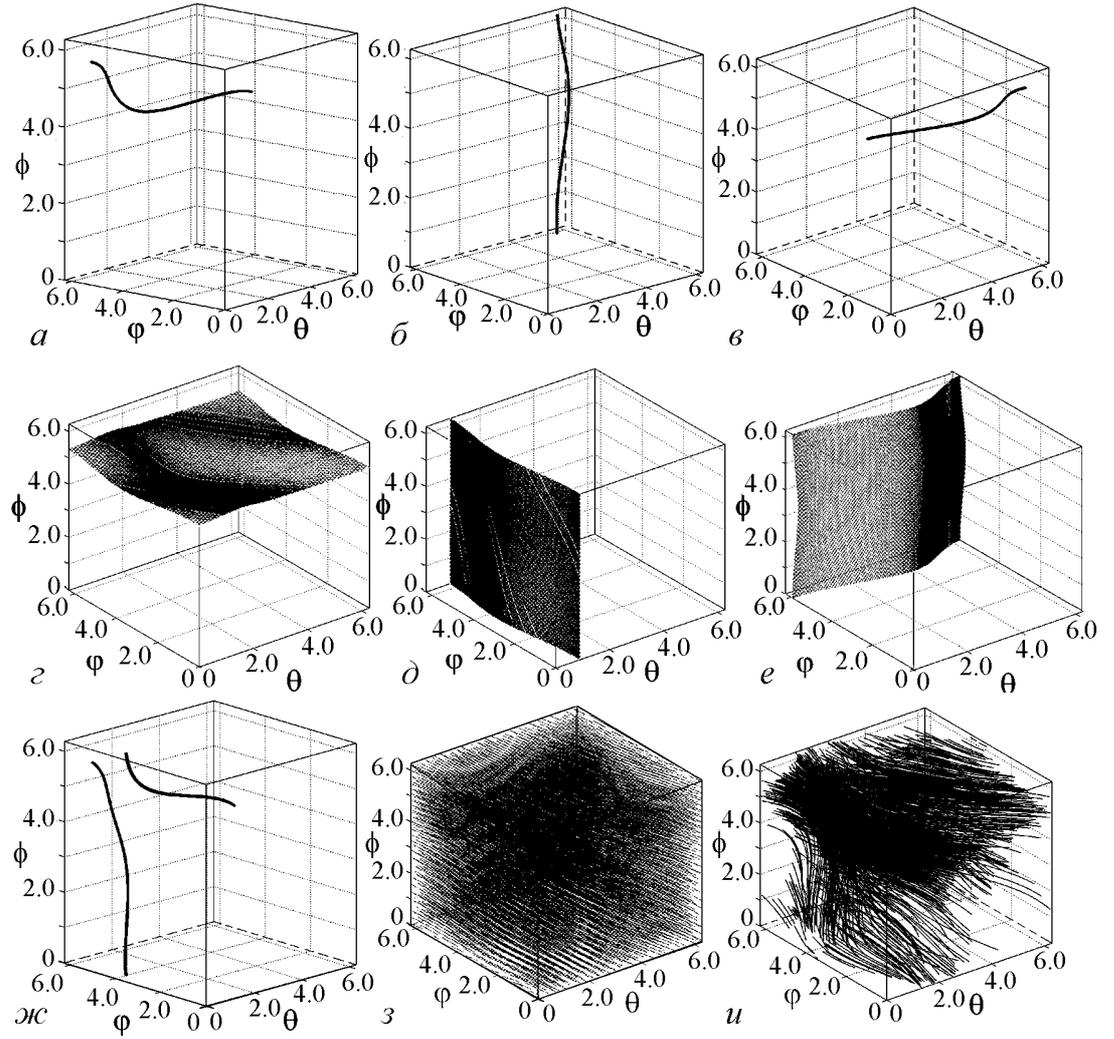


Рис. 11. Аттракторы четырех фазовых осцилляторов (10) в некоторых характерных точках

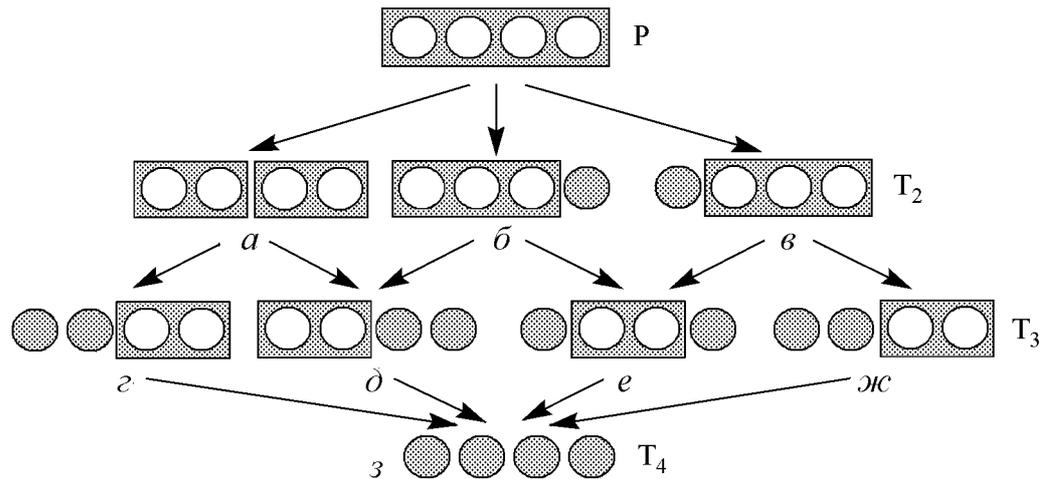


Рис. 12. Схематическое «дерево кластеризации» четырех фазовых осцилляторов. Иллюстрирует возникновение кластеров при уменьшении связи. Буквы отвечают точкам на карте режимов на рис. 10

кластеризации, которое является полезным «путеводителем» при изучении режимов четырех взаимодействующих осцилляторов.

Перейдем теперь в область трехчастотной квазипериодичности: точки «г», «д», и «е». Теперь аттракторы представляют собой *инвариантные поверхности*, которые фазовые траектории покрывают всюду плотным образом. В случае «г» слабо осциллирует фаза ϕ , так что частично захвачены третий и четвертый осцилляторы. Два других основных возможных типа частичного захвата пар осцилляторов рис. 11, д, е демонстрируют фазовые портреты в виде различным образом ориентированных инвариантных поверхностей. На дереве кластеризации качественная конфигурация возникающих кластеров показана на рис. 12, $z-e^{15}$.

Более сложный вариант иллюстрирует рис. 11, ж. В этом случае наблюдается инвариантная кривая с числом вращения $w = 0 : 1 : 1$, возникшая на поверхности типа рис. 11, д из «сгущения траекторий». Это пример резонансного двухчастотного режима, возникающего на поверхности трехчастотного. На самом деле реализуется множество языков двухчастотных режимов с разными числами вращения, так что в системе существует большое число различных резонансных двухчастотных режимов.

При уменьшении связи кластеры, отвечающие трехчастотным режимам, будут разрушаться с возникновением режима четырехчастотной квазипериодичности. В этом случае фазовые траектории заполняют уже весь объем фазового куба, как показано на рис. 11, з. Отметим, что в некоторых областях параметров могут наблюдаться хаотические режимы. Пример представлен на рис. 11, и. Визуально четырехчастотный режим и хаос различить достаточно трудно, но для квазипериодического режима фазовые траектории более равномерно заполняют фазовый куб.

Бифуркационные сценарии разрушения области полной синхронизации.

Обсудим бифуркации, отвечающие за разрушение режима полной синхронизации. Полагая $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \dot{\phi} = 0$, из (10) можно получить уравнения для синусов каждой из относительных фаз

$$\sin \theta = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{4\mu}, \quad \sin \varphi = \frac{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{2\mu}, \quad \sin \phi = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 - 3\Delta_3}{4\mu}. \quad (11)$$

Решения каждого уравнения (11) появляются парами: (θ_1, θ_2) , (φ_1, φ_2) и (ϕ_1, ϕ_2) . Поэтому система (10) имеет восемь состояний равновесия, расположенных в фазовом пространстве (θ, φ, ϕ) в вершинах параллелепипеда. Одно из них всегда устойчиво, а остальные являются седлами и неустойчивым узлом. При этом все восемь равновесий соединяются общими многообразиями, что и определяет эволюцию аттракторов.

При вариации любой из трех комбинаций параметров в правых частях (11), две грани параллелепипеда будут сближаться и могут слиться. При этом, как только синус одной из фазовых переменных обращается в единицу, все восемь равновесий попарно сливаются и одновременно исчезают через негрубое состояние из четырех равновесий. При этом полная синхронизация разрушается. Из приведенных

¹⁵Четвертый рисунок в этом ряду качественно аналогичен случаю «г»

рассуждений сразу следуют выражения, определяющие седло-узловые бифуркации указанного типа

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{4}, \mu = \pm \frac{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{2}, \mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 - 3\Delta_3}{4}. \quad (12)$$

Таким образом, возникает три варианта такой бифуркации SNP_{1-3} , соответствующие слиянию боковых граней параллелепипеда по одной из трех фазовых осей. Отрезки линий (12) и ограничивают область полной синхронизации на рис. 10. Их пересечение определяет точки коразмерности два, имеющие вид характерных «углов» на карте, причем одна из них определяет порог области полной синхронизации.

В результате описанной бифуркации из инвариантных многообразий состояний равновесия возникают четыре инвариантные кривые, как показано на рис. 13. При этом одна из них будет устойчива St , одна неустойчива N , а еще две будут седловыми Sd . Устойчивая инвариантная кривая будет отвечать за двухчастотный квазипериодический режим. Обсудим теперь бифуркации, отвечающие разрушению двухчастотной квазипериодичности.

Окрестность пороговой точки возникновения двухчастотной квазипериодичности в увеличенном виде показана на рис. 10, б. Можно видеть, что наблюдаемая картина в значительной мере аналогична точке SNF на рис. 2. Отличия состоят в повышении на единицу размерности квазипериодических режимов, то есть вместо области полной синхронизации имеет место область двухчастотной квазипериодичности, вместо области двухчастотной квазипериодичности – режим трехчастотной квазипериодичности, а вместо системы веерообразных языков трехчастотных режимов – аналогичная система языков четырехчастотных режимов. Поэтому мы будем называть такую точку *квазипериодическая точка (saddle node fan)* и обозначать QSNF.

Отметим и определенное отличие, состоящее в том, что внутри областей T_3 на рис. 10, б имеется новая система узких языков двухчастотных режимов. Эти резонансные режимы отвечают ситуации, когда инвариантные кривые разных типов возникают на соответствующей инвариантной поверхности.

При выходе за пределы соответствующего языка двухчастотная квазипериодичность разрушается. Рис.13 иллюстрирует бифуркационный сценарий, отвечающий выходу из области T_2 на рис. 10, б через ее правую границу. В этом случае

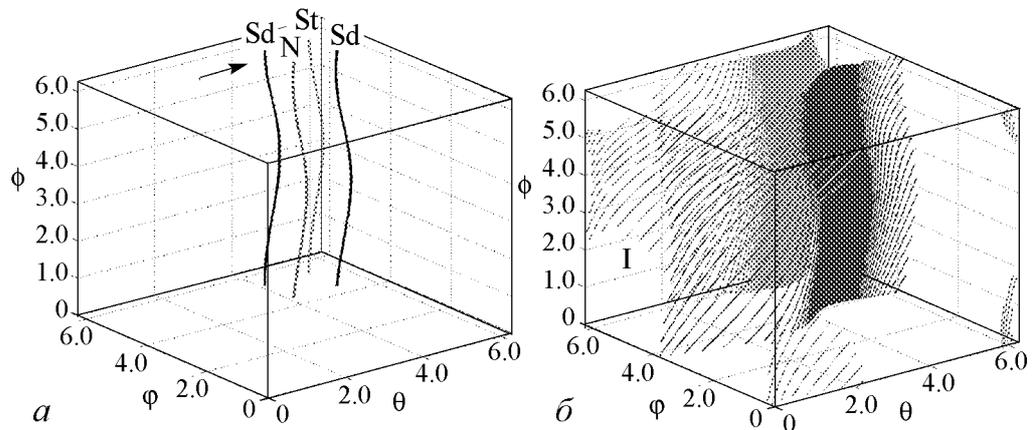


Рис. 13. Седло-узловая бифуркация инвариантных кривых, отвечающая за возникновение трехчастотной квазипериодичности при $\mu = 0.2$ и различных Δ_1 : а – 0.16, б – 0.26

при увеличении параметра Δ_1 устойчивая, неустойчивая и две седловые инвариантные кривые сближаются навстречу друг другу (показано стрелкой на рис. 13, *a*). В результате они *одновременно и попарно* сливаются и исчезают. В результате из их общих многообразий возникают устойчивая I и неустойчивая инвариантные поверхности, показанные на рис. 13, *б*.

Если же выйти из области T_2 на рис. 10, *б* через ее левую границу, то меняется порядок седловых кривых. Теперь отмеченная стрелкой на рис. 13, *a* седловая кривая сливается уже с неустойчивой инвариантной кривой. В результате возникают инвариантные поверхности, ориентированные другим образом.

Непосредственно в точке QSNF (см. рис. 10, *б*) *все четыре* инвариантные кривые на рис. 13 одновременно стягиваются в одну кривую. Это некоторое вырожденное (негрубое) состояние¹⁶.

Рис.14 иллюстрирует дальнейшую эволюцию квазипериодического режима. Теперь наблюдается *разрушение трехчастотной квазипериодичности*. Это происходит в результате слияния устойчивой и неустойчивой инвариантных поверхностей. Такой сценарий наблюдается при выходе на плоскости параметров на рис. 10, *б* через левую границу языка трехчастотных режимов T_3 .

На рис. 14 можно видеть, что при переходе через точку бифуркации и от рис. *б* к *в* при очень незначительном изменении частотной расстройки Δ_1 (всего 0.02) происходит скачкообразное исчезновение инвариантных поверхностей с возникновением картины траекторий, заполняющих весь фазовый куб. Это характерная особенность обсуждаемой бифуркации.

Отметим, что два характерных языка трехчастотных режимов на рис. 10, *б* имеют острия в точках, определяемых резонансными условиями: совпадением собственных частот второго и первого осцилляторов ($\Delta_1 = 0$) и второго и третьего ($\Delta_1 = \Delta_2$)¹⁷.

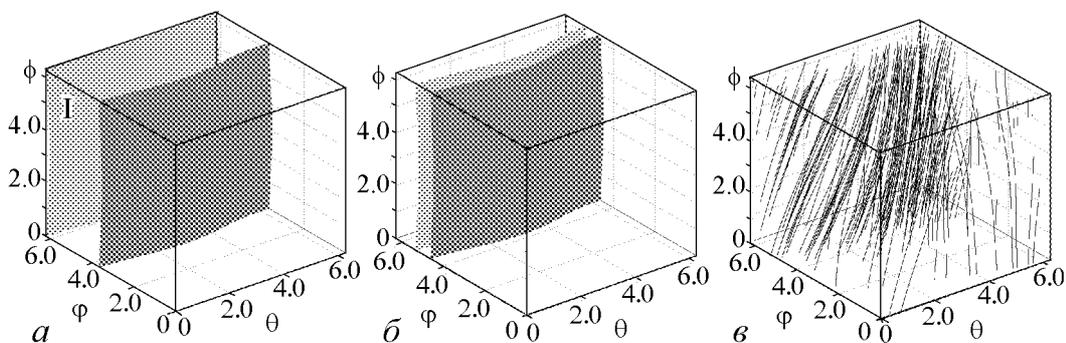


Рис. 14. Седло-узловая бифуркация инвариантных поверхностей, отвечающая за возникновение четырехчастотной квазипериодичности, I – устойчивая инвариантная поверхность для $\mu=0.05$ и различных Δ_1 : *a* – 0.28, *б* – 0.22, *в* – 0.2

¹⁶Отметим, что обсуждение в этом разделе ведется с «физических» позиций, в стиле компьютерного эксперимента. В этом плане остается необходимость более строгого обоснования результатов, в частности, возможности квазипериодических точек QSNF, сценариев разрушения квазипериодических режимов и т.д.

¹⁷Поскольку мы варьируем частоту одного осциллятора (второго), то число таких резонансов равно числу его ближайших соседей, то есть двум. Для сети оно уже будет зависеть от числа элементов, например, для четырех элементов оно равно трем.

Пространство собственных частот. Обсудим устройство пространства собственных частот четырех фазовых осцилляторов ($\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$). Область полной синхронизации дается уравнениями (12), которые задают три пары плоскостей, пересечение которых образует *многогранник* в форме *наклонного параллелепипеда* (рис. 15). Его грани являются поверхностями бифуркаций коразмерности один (SNP) трех указанных выше типов, ребра – линиями бифуркаций коразмерности два, а вершины – точками бифуркаций коразмерности три.

Удобно представить сечения многогранника плоскостями $\Delta_2 = const$ и рассмотреть соответствующие плоскости (Δ_1, Δ_3). Пример ляпуновской карты для $\Delta_2 = 0.2$ показан на рис. 16, *а*. На рис. 16, *б* показаны три пары линий, заданных уравнениями (12). Их пересечение образует *шестиугольник*, который отвечает области полной синхронизации и выявляется также и на ляпуновской карте.

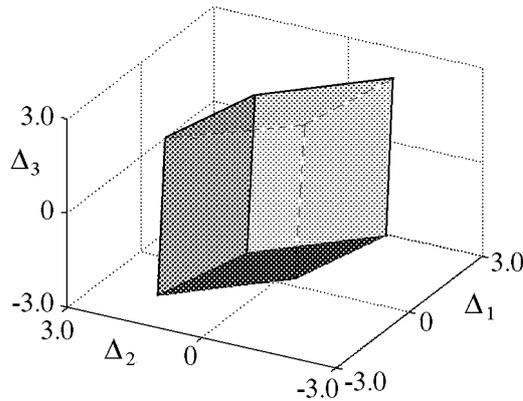


Рис. 15. Область полной синхронизации четырех фазовых осцилляторов в пространстве частотных расстройк ($\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$)

При увеличении частотного параметра Δ_2 образующие область полной синхронизации прямые линии будут смещаться в соответствии с (12): две пары вниз и одна – вверх. Нетрудно показать, что при значении $\Delta_2 = \mu$ вершины шестиугольника одновременно попарно сливаются, и область полной синхронизации превращается в треугольник. При $\Delta_2 = 2\mu$ наступает следующее качественное изменение: нижняя сторона треугольника достигает его вершины, и область полной синхронизации исчезает вообще.

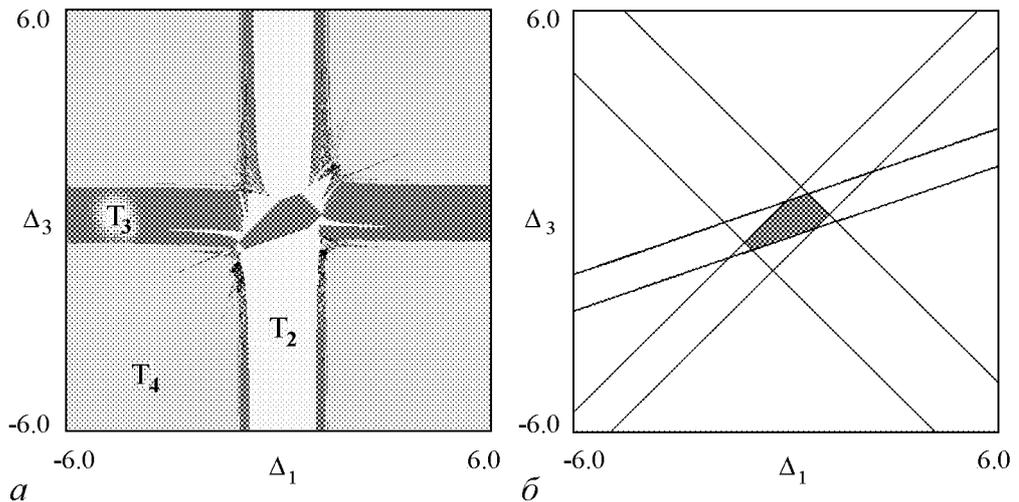


Рис. 16. Ляпуновская карта четырех диссипативно связанных фазовых осцилляторов на плоскости двух частотных параметров (Δ_1, Δ_3) (*а*) и конфигурация области полной синхронизации в рамках аналитического рассмотрения (*б*); $\mu = 0.4$

2.2. Четыре связанных осциллятора ван дер Поля. Вернемся теперь к системе из четырех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля (9). Выберем $\lambda = 0.1$, а остальные параметры так, чтобы они соответствовали карте для фазового приближения на рис. 10 с учетом правила нормировки. Соответствующая карта ляпуновских показателей показана на рис. 17. Начнем обсуждение со случая больших масштабов (рис. 17, а).

Квазипериодические бифуркации. На рис. 17, а при уменьшении параметра связи μ наблюдается каскад бифуркаций рождения инвариантных торов все более высокой размерности. Обсудим картину бифуркаций, сопровождающих наблюдаемый эффект. Для этого обратимся к графику зависимости пяти старших ляпуновских показателей от величины связи на рис. 18 для случая достаточно большого значения $\Delta_1 = 2$.

При большой связи реализуется эффект гибели колебаний ОД, и все показатели на рис. 18 отрицательны. В точке $\mu \approx 0.27$ первый показатель Λ_1 обращается в ноль, и происходит бифуркация Андронова-Хопфа Н рождения устойчивого (много-

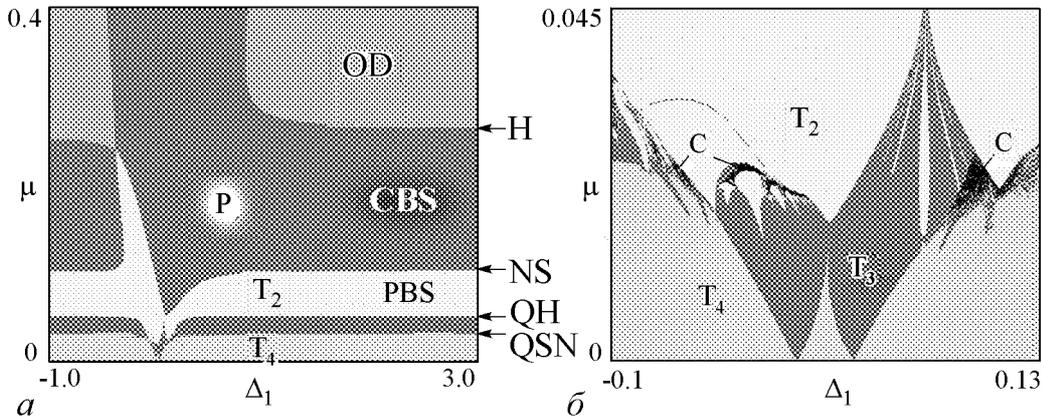


Рис. 17. Карта динамических режимов системы четырех осцилляторов ван дер Поля (10) и ее увеличенный фрагмент, $\lambda = 0.1$, $\Delta_2 = 0.03$, $\Delta_3 = 0.1$

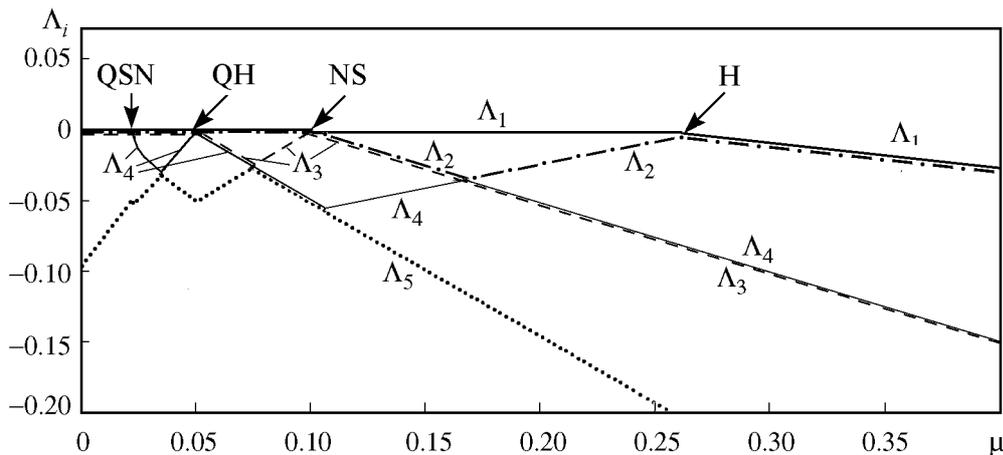


Рис. 18. Графики пяти старших ляпуновских показателей и точки бифуркации системы (10), $\lambda = 0.1$, $\Delta_1 = 2.0$, $\Delta_2 = 0.03$, $\Delta_3 = 0.1$

мерного) предельного цикла. При дальнейшем уменьшении связи в точке NS происходит *бифуркация Неймарка–Сакера*, и рождается устойчивый двухчастотный тор. При этом в ноль обращаются уже два показателя: первый и второй.

Затем в точке QH в ноль обращается третий показатель Λ_3 . При этом наблюдается характерное поведение: до точки бифуркации два показателя равны друг другу, так что $\Lambda_3 = \Lambda_4$; за точкой бифуркации показатель Λ_3 обращается в ноль, а четвертый показатель Λ_4 , коснувшись горизонтальной оси, снова уходит в отрицательную область. Это характерная картина *квазипериодической бифуркации Хопфа* QH¹⁸ [26], приводящей к мягкому возникновению трехчастотного тора из двухчастотного.

В точке QSN размерность тора вновь повышается. Однако это бифуркация другого типа – теперь четвертый показатель просто обращается в ноль, а пятый показатель все время остается отрицательным. Это означает, что имеет место *седло-узловая бифуркация торов*: устойчивый трехмерный тор сливается с *седловым тором*, и возникает четырехмерный устойчивый тор. Отметим, что такая бифуркация описывается и фазовой моделью (см. на рис. 10, *a* характерную границу между трех- и четырехчастотными режимами по правому краю карты).

Для удобства восприятия тип бифуркаций указан по правому обрезу карты на рис. 17, *a*. Можно видеть также, что описанные бифуркации приводят к картине режимов *широкополосной синхронизации*¹⁹ на базе квазипериодичности разной размерности. Одна такая область CBS отвечает полной синхронизации всех осцилляторов, а PBS – частичной.

Сравнение с фазовой моделью. Перейдем теперь к рис. 17, *b*. Картина в этих масштабах отчасти близка к случаю фазовой модели рис. 10. Так, можно видеть два характерных языка трехчастотных торов и систему встроенных в них веерных языков двухчастотных режимов. Однако имеют место и существенные отличия. Для системы осцилляторов ван дер Поля на рис. 17, *b* в левой области двухчастотные языки заметно расширяются с ростом связи и начинают *перекрываться*. При этом они имеют характерные округлые вершины. В области перекрытия двухчастотных языков возникает хаос. Такой картины нет в фазовой модели. Также возникают небольшие области хаоса.

3. Сценарий Ландау–Хопфа в ансамбле из пяти осцилляторов

В описанной выше системе наблюдаются три первых «шага» в *сценарии Ландау–Хопфа* [46]. Может ли продолжиться этот каскад? Или, иначе говоря, возможен ли сценарий Ландау–Хопфа мягкого рождения все более высокоразмерных торов с выходом за порог все новых колебательных мод?

¹⁸Так ее называют в [26] – квазипериодическая бифуркация Хопфа (quasiperiodic Hopf bifurcation). Ее можно также назвать квазипериодической бифуркацией Неймарка–Сакера, или же квазипериодической бифуркацией Хопфа–Неймарка–Сакера, поскольку речь идет все же о бифуркации тора. Трудно отдать предпочтение тому или иному варианту названия.

¹⁹Так в [45] для случая двух осцилляторов названы режимы, когда область синхронизации образует характерную полосу, простирающуюся в сторону больших частотных расстроек. Причина этого эффекта в неидентичности осцилляторов по управляющим параметрам. В случае трех осцилляторов играет роль неэквивалентность осцилляторов в цепочке – центральный осциллятор испытывает трение со стороны двух соседей [34]. Для четырех осцилляторов возникает еще ряд тонких особенностей этого эффекта [39].

Такой сценарий возможен, однако, требуется выполнение некоторых дополнительных условий. Во-первых, сама концепция сценария Ландау–Хопфа требует *неидентичности* по управляющим параметрам λ . Действительно, разные моды должны иметь разную степень возбуждения. Именно тогда, варьируя параметр, отвечающий за диссипацию в системе (аналог числа Рейнольдса), можно наблюдать последовательный выход за порог новых мод. Во-вторых, все моды должны быть достаточно разнесены по частоте. В противном случае возникают эффекты синхронизации, которые приводят к различным резонансам ²⁰ и, как следствие, к изменению бифуркационных сценариев. В-третьих, желательно устранить эффекты, связанные с наличием разного числа соседей у каждого осциллятора в цепочке.

Построим модель, которая удовлетворяет перечисленным требованиям. Это сеть из пяти осцилляторов с эквидистантным спектром собственных частот. При этом оставим единственный частотный параметр Δ , который будет управлять рассинхронизмом сразу всех осцилляторов. Все осцилляторы будут неидентичными по управляющим параметрам, что обеспечит поэтапный вывод за порог возмущения соответствующих мод.

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \frac{\mu}{4}(4\dot{x} - \dot{y} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \frac{\Delta}{4})y + \frac{\mu}{4}(4\dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda_3 - z^2)\dot{z} + (1 + \frac{\Delta}{2})z + \frac{\mu}{4}(4\dot{z} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\ \ddot{w} - (\lambda_4 - w^2)\dot{w} + (1 + \frac{3\Delta}{4})w + \frac{\mu}{4}(4\dot{w} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{v}) &= 0, \\ \ddot{v} - (\lambda_5 - v^2)\dot{v} + (1 + \Delta)v + \frac{\mu}{4}(4\dot{v} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w}) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь λ_i – параметры возбуждения автономных осцилляторов, Δ – определяет частотную отстройку осцилляторов, частота первого осциллятора принята за единицу.

Положим далее $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.3$, $\lambda_4 = 0.4$, $\lambda_5 = 0.5$. Карта ляпуновских показателей системы (13) в этом случае на плоскости (Δ, μ) показана на рис. 19.

Можно видеть, что в системе действительно устранены основные резонансные эффекты, за исключением небольшой области при малой частотной расстройке. Там же локализованы и небольшие области хаоса. А вот в области большого рассинхронизма осцилляторов $\Delta \geq 1.0$ наблюдается система торов все более высокой размерности.

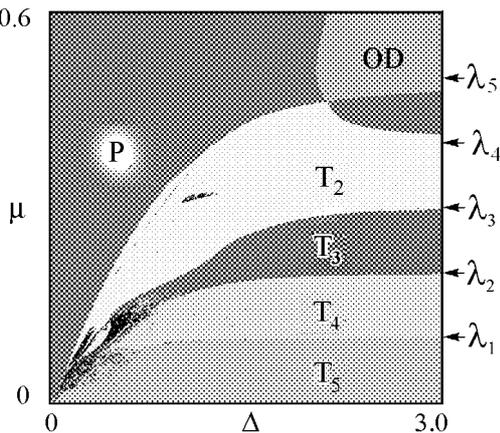


Рис. 19. Карта ляпуновских показателей системы (13)

²⁰Включая и инвариантные торы разной размерности.

Границы этих областей в асимптотике $\Delta \rightarrow \infty$ отвечают значениям соответствующих управляющих параметров λ_i . Для удобства восприятия эти значения отмечены стрелками по правому обрезу карты.

Убедимся, что здесь имеет место каскад квазипериодических бифуркаций Хопфа QH для торов все более высокой размерности. Для этого обратимся к графикам ляпуновских показателей на рис. 20, построенным вдоль линии $\Delta = 3.0$. Можно видеть, что при больших значениях величины связи все показатели отрицательные, и имеет место режим гибели колебаний. Затем в точке H происходит бифуркация Андронова–Хопфа, и один показатель Λ_1 становится нулевым. Далее в точке NS происходит бифуркация Неймарка–Сакера и еще один показатель Λ_2 становится нулевым. В точке QH₁ становится равным нулю показатель Λ_3 , и рождается трехмерный тор. Для идентификации характера бифуркации заметим, что до бифуркации показатели Λ_3 и Λ_4 совпадали. Это характерно для квазипериодической бифуркации Хопфа [26]. Далее совершенно аналогично ведут себя оставшиеся показатели, так что в точке QH₂ в результате второй квазипериодической бифуркации Хопфа рождается четырехмерный тор, а в точке QH₃ – пятимерный.

На рис. 21 показан спектр Фурье колебаний пятого осциллятора, отвечающий развитию сценария Ландау–Хопфа в системе (13). Можно видеть последовательное обогащение спектра колебаний все новыми линиями, отвечающими квазипериодичности все более высокой размерности.

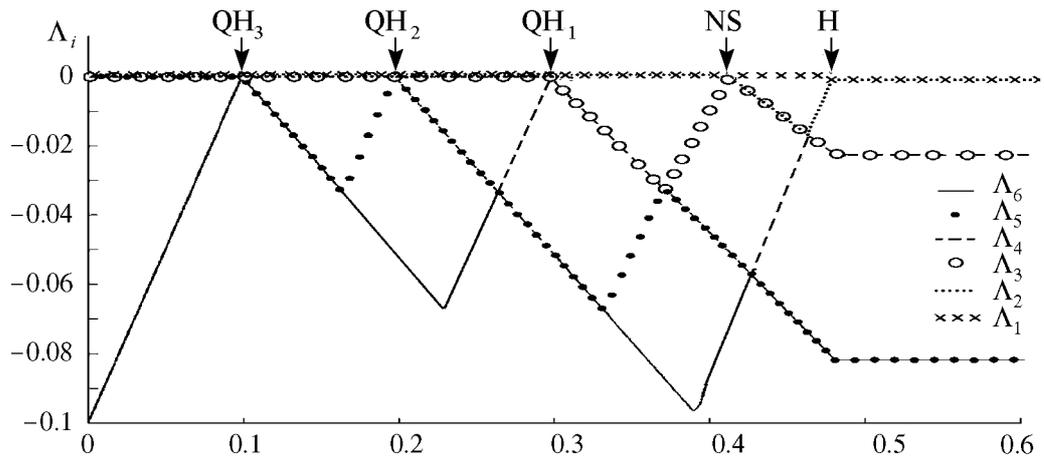


Рис. 20. Графики зависимости шести ляпуновских показателей системы (13) от величины диссипативной связи. QH_i – каскад квазипериодических бифуркаций Хопфа, $\Delta = 3.0$

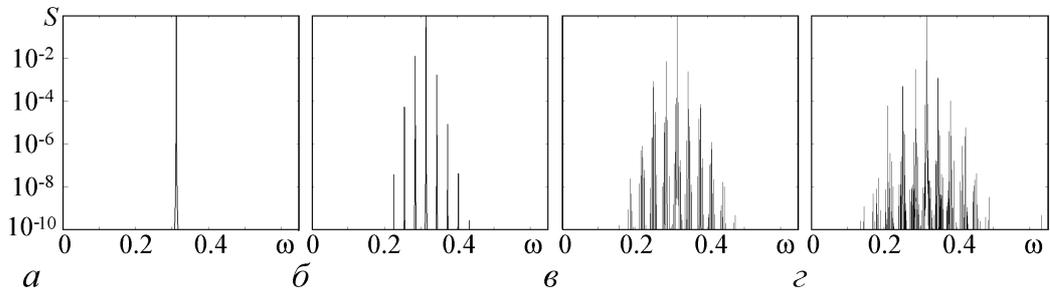


Рис. 21. Спектр колебаний пятого осциллятора системы (13), отвечающий развитию сценария Ландау–Хопфа: а – режим полной синхронизации $\mu = 0.45$; б – двумерный тор $\mu = 0.35$; в – трехмерный тор $\mu = 0.25$; г – четырехмерный тор $\mu = 0.15$

Заключение

Приведенное изложение выполнено в универсальном стиле, характерном для теории колебаний и нелинейной динамики. В тоже время квазипериодические колебания появляются практически во всех областях физики: радиофизике, электронике, лазерной физике, гидродинамике, климатологии, биофизике, астрофизике и т.д. Известны примеры как в виде ансамблей автоколебательных элементов, так и в виде различных фазовых моделей. Например, модели в виде осцилляторов ван дер Поля и фазовые модели могут быть получены для мощных генераторов микроволнового излучения – *виркаторов* [47–50]. Известны примеры оптически связанных *лазеров*, приводящие к связанным уравнениям Адлера: системы с инъекцией лазерного излучения, системы с оптическим пространственным фильтром и т.д. [51–56]. Одним из интересных актуальных примеров систем с реактивной связью являются *ионные ловушки* [57, 58]. Различные типы связанных фазовых уравнений могут быть получены для описания связанных *контактов Джозефсона* [2, 59, 60]. Известны также и современные примеры, относящиеся к задаче *синхронизации нескольких часов* [61–64] и так далее.

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2 и проектами РФФИ 12-02-00342-а и 12-02-00541-а.

Библиографический список

1. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
2. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
3. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. Учебник-монография. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2009. 312 с.
4. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2003. 443 с. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва-Ижевск: РХД, 2009. 548 с.
5. *Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O.* Synchronization: From simple to complex. Springer, 2009. 437 p.
6. *Grebogi C., Ott E., James A., Yorke J.* Attractors on an N-torus: Quasiperiodicity versus chaos // *Physica D.* 1985. Vol. 15, № 3. P. 354.
7. *Battelino P.M.* Persistence of three-frequency quasiperiodicity under large perturbations // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol. 38. P. 1495.
8. *Linsay P.S., Cumming A.W.* Three-frequency quasiperiodicity, phase locking, and the onset of chaos // *Physica D.* 1989. Vol. 40. P.196.
9. *Kim S., MacKay R.S., Guckenheimer J.* Resonance regions for families of torus maps // *Nonlinearity.* 1989. Vol. 2, № 3. P. 391.

10. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Simple resonance regions of torus diffeomorphisms // *Patterns and Dynamics in Reactive Media Proc. IMA (Minneapolis, 1989) (IMA Vol. in Maths. and its Applications)*, vol.37, ed. R.Aris et al. Berlin: Springer, p. 1-9.
11. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: Mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Physica D.* 1991. Vol. 49, №3. P. 387.
12. *Galkin O. G.* Phase-locking for maps of a torus: A computer assisted study // *Chaos.* 1993. Vol. 3, № 1. P. 73.
13. *Ashwin P., Guasch J., Phelps J.M.* Rotation sets and phase-locking in an electronic three oscillator system // *Physica D.* 1993. Vol. 66, № 3-4. P. 392.
14. *Khibnik A.I., Braiman Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K.* Phase model analysis of two lasers with injected field // *Physica D.* 1998. Vol. 111, № 1-4. P. 295.
15. *Guckenheimer J., Khibnik A.* Torus maps from weak coupling of strong resonances. In book: *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics* // American Mathematical Society. 2000. P. 205.
16. *Vasylenko A., Maistrenko Yu., Hasler M.* Modeling phase synchronization in systems of two and three coupled oscillators // *Nonlinear Oscillations.* 2004. Vol. 7, № 3. P. 301.
17. *Maistrenko Y., Popovych O., Burylko O.* Mechanism of desynchronization in the finite-dimensional Kuramoto model // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. P. 084102.
18. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhysics Letters.* 2009. Vol. 86. P. 30003.
19. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика.* 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
20. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // *Нелинейная динамика.* 2008. Т. 4, № 1. С. 39.
21. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Chaos.* 2008. Vol. 18. P. 037123.
22. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 056202.
23. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В.* Синхронизация генераторов квазипериодических колебаний // *Нелинейная динамика.* 2013. Т. 9, №3. С. 409.
24. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of three coupled van der Pol oscillators with application to circadian rhythms // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2007. Vol. 12, № 5. P. 794.
25. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web // *Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin.* 2008. Vol. 15, № 5. P. 769.
26. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2011. Vol. 16, № 1-2. P. 154.

27. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // *Nonlinearity*. 2010. Vol. 23. P. 1919.
28. *Astakhov S., Fujiwara N., Gulay A., Tsukamoto N., Kurths J.* Hopf bifurcation and multistability in a system of phase oscillators // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 88. P. 032908.
29. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля // *Нелинейная динамика*. 2011. Т. 7, №3. С. 411.
30. *Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization of forced quasi-periodic coupled oscillators. Preprint nlin. arXiv: 1106.5382
31. *Тюрюкина Л.В., Чернышов Н.Ю.* Синхронизация возбуждаемых реактивно связанных фазовых осцилляторов // *Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20, № 1. С. 81.
32. *Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* On the road towards multidimensional tori // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2011. Vol. 16, №6. P. 2371.
33. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2010. Т.6, № 4. С. 693.
34. *Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связанных осцилляторов ван дер Поля // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 11, №5. С. 76.
35. *Кузнецов А.П., Чернышов Н.Ю., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация и квазипериодические колебания трех реактивно связанных осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 1. С. 11.
36. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Тюрюкина Л.В., Сатаев И.Р.* Сценарий Ландау–Хопфа в ансамбле взаимодействующих осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 5. С. 863.
37. *Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D*. 2013. Vol. 244, №1. 36.
38. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // *Physics Letters A*. 2013. Vol. 377. P. 3291.
39. *Emelianova Y.P., Kuznetsov A.P., Turukina L.V.* Quasi-periodic bifurcations and «amplitude death» in low-dimensional ensemble of van der Pol oscillators // *Physics Letters A*. 2014. Vol. 378. P. 153.
40. *Emelianova Y.P., Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Sataev I.R., Chernyshov N.Yu.* A structure of the oscillation frequencies parameter space for the system of dissipatively coupled oscillators // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2014. Vol. 19, № 4. P. 1203.
41. *Rand R., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1980. Vol. 15. P. 387.
42. *Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
43. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V.* Coupled van der Pol–Duffing oscil-

- lators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // *Physica D*. 2009. Vol. 238, №14. P. 1203.
44. *Kryukov A.K., Osipov G.V., Polovinkin A.V., Kurths J.* Synchronous regimes in ensembles of coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 79. P. 046209.
 45. *Kuznetsov A.P., Roman Ju. P.* Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // *Physica D*. 2009. Vol. 238, № 16. P. 1499.
 46. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // *ДАН СССР*. 1944. Т. 44, № 8. С. 339.
Hopf E. A mathematical example displaying the features of turbulence // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1948. Vol. 1. P. 303.
 47. *Привезенцев А.П., Саблин Н.И., Филиппенко Н.М., Фоменко Г.П.* Нелинейные колебания виртуального катода в триодной системе // *Радиотехника и электроника*. 1992. Т. 37, № 7. С. 1242.
 48. *Магда И.И., Пащенко А.В., Романов С.С.* К теории пучковых обратных связей в генераторах с виртуальным катодом // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения*. 2003. №4. С. 167.
 49. *Sze H., Price D., Harteneck B.* Phase locking of two strongly coupled vircators // *J. Appl. Phys.* 1990. Vol. 67, № 5. P. 2278.
 50. *Репин Б.Г., Дубинов А.Е.* Исследование режимов фазировки трех виркаторов в рамках модели связанных осцилляторов Ван-дер-Поля // *Журнал технической физики*. 2006. Т. 76, вып. 4. С. 99.
 51. *Pampaloni E., Lapucci A.* Locking-range analysis for three coupled lasers // *Opt. Lett.* 1993. Vol. 18. P.1881.
 52. *Braimanc Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K., Khibnik A.I.* Entrainment of solid-state laser arrays // *Phys. Rev. A*. 1995. Vol. 52. P. 1500.
 53. *Khibnik A.I., Braimanc Y., Protopopescu V., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K.* Amplitude dropout in coupled lasers // *Phys. Rev. A*. 2000. Vol. 62. P. 063815.
 54. *Глова А.Ф., Лысиков А.Ю.* Синхронизация трех лазеров с оптической связью на пространственном фильтре // *Квантовая электроника*. 2002. № 4. С. 315.
 55. *Глова А.Ф.* Синхронизация излучения лазеров с оптической связью // *Квантовая электроника*. 2003, № 4. С. 283.
 56. *Владимиров А.Г.* Нелинейная динамика и бифуркации в многомодовых и пространственно распределенных лазерных системах. Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук, 2006.
 57. *Lee T. E., Cross M. C.* Pattern formation with trapped ions // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. 143001.
 58. *Lee T.E., Sadeghpour H.R.* Quantum simulation of quantum van der Pol oscillators with trapped ions. 2013, arXiv preprint arXiv.
 59. *Valkering T.P., Hooijer C.L.A., Kroon M.F.* Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit // *Physica D*. 2000. Vol. 135, № 1. P. 137.
 60. *Saitoh K., Nishino T.* Phase locking in a double junction of Josephson weak links // *Phys. Rev. B*. 1991. Vol. 44. P. 7070.

61. *Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Why two clocks synchronize: Energy balance of the synchronized clocks // *Chaos*. 2011. Vol. 21. P. 023129.
62. *Kapitaniak M., Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Synchronization of clocks // *Physics Reports*. 2012. Vol. 517, № 1–2. P. 1.
63. *Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Clustering of Huygens' clocks // *Prog. Theor. Phys.* 2009. Vol. 122, № 4. P. 1027.
64. *Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Synchronization of the self-excited pendula suspended on the vertically displacing beam// *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2013. Vol. 18, № 2. P. 386.
65. *Hong H., Strogatz S.H.* Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters: An example of conformist and contrarian oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. 054102.

Поступила в редакцию 19.12.2013

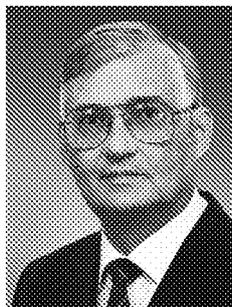
SYNCHRONIZATION AND MULTI-FREQUENCY OSCILLATIONS IN THE LOW-DIMENSIONAL CHAIN OF THE SELF- OSCILLATORS

A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina, I.R. Sataev, N.Yu. Chernyshov

The dynamics of ensembles of oscillators containing a small number of bits is discussed. The possible types of regimes and peculiarities of bifurcations of regular and quasiperiodic attractors are analyzed. By using the method of Lyapunov exponents charts the picture of embedding of quasiperiodic regimes of different dimension in the parameter space is revealed. Dynamics of ensembles of van der Pol and phase oscillators are compared.

Keywords: synchronization, quasi-periodic oscillations, invariant tori, bifurcation.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского государственного университета. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачник по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: От колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны» (сборник задач) и др.



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: apkuz@yandex.ru



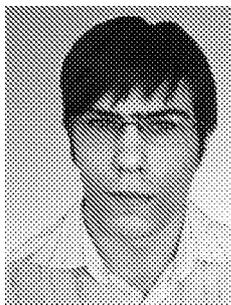
Сатаев Игорь Рустамович – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов: моделирование динамики на пороге хаоса, гиперболический хаос, критические явления и метод ренормгруппы, приложения в механике. Автор более 50 статей в российских и международных журналах. Соавтор монографии «Физика квазипериодических колебаний».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
E-mail:lvtur@rambler.ru



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском госуниверситете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). В настоящее время - старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ. Область научных интересов - новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 30 статей в российских и зарубежных журналах. Соавтор монографии «Физика квазипериодических колебаний» и трех учебных пособий.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:apkuz@yandex.ru



Чернышов Николай Юрьевич – родился в Саратове (1988). Окончил Саратовский государственный университет (2011). Аспирант базовой кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: математическое моделирование, теория синхронизации, нелинейная динамика и ее приложения. Автор 4 статей в российских и международных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:nick.chernyschov@yandex.ru