

**ВЕСТНИК
САРАТОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

2014

№ 3 (76)

Научно-технический журнал

Издается с 2003 г.

Выходит один раз в квартал

Сентябрь 2014 года

*Журнал включен в перечень ведущих
рецензируемых журналов и научных изданий,
утвержденный президиумом ВАК
Министерства образования и науки РФ,
в которых публикуются основные научные
результаты диссертаций на соискание
ученых степеней доктора и кандидата наук*

**Главный редактор
Заместитель главного редактора
Ответственный секретарь**

д.и.н., профессор И.Р. Плеве
д.т.н., профессор А.А. Сытник
д.ф.-м.н., профессор В.В. Астахов

Редакционный совет: д.т.н. В.И. Волчихин, д.т.н. В.А. Голенков, д.и.н. В.А. Динес,
д.х.н. В. Зеленский (Польша), д.т.н. В.А. Игнатъев, д.т.н. В.В. Калашников, д.т.н. И.А. Новаков,
д.и.н. И.Р. Плеве (председатель), д.т.н. А.Ф. Резчиков, д. социол. н. С.Б. Суоров,
д.т.н. А.А. Сытник (заместитель председателя), д.ф.-м.н. Я. Аврейцевич (Польша),
д.э.н. У. Арнольд (Германия), д.ф.-м.н. Э. Мерсер (Великобритания), д.э.н. Э. де Соузе Феррейра
(Португалия), д.т.н. Т. Чермак (Чехия), д.э.н. Ю.В. Шленов

Редакционная коллегия: д.т.н. В.А. Крысько, д.ф.-м.н. В.В. Астахов,
д.х.н. А.В. Гороховский, д.т.н. В.Н. Лясников, д.ф.-м.н. Л.А. Мельников, д.т.н. Р.З. Аминов,
д.т.н. Ю.Г. Иващенко, д.т.н. А.С. Денисов, д.т.н. А.А. Сытник, д.т.н. А.А. Большаков, д.филос.н.
Д.В. Михель, д.биол.н. Е.И. Тихомирова, д.э.н. А.Н. Плотников, д.и.н. Г.В. Лобачева

Редактор Л.А. Скворцова
Компьютерная верстка Н.В. Лукашовой
Перевод на английский язык А.Х. Аскаровой

Адрес редакции:
Саратов, 410054, ул. Политехническая, 77
Телефон: (845 2) 99-87-39
E-mail: vestnik@sstu.ru
<http://dni.sstu.ru/vestnik.nsf>
Факс: (845 2) 52-53-02

Подписано в печать 25.09.14
Формат 60×84 1/8 Бум. офсет.
Усл. печ. л. 63,5 Уч.-изд. л. 17,4
Тираж 500 экз. Заказ 215
Отпечатано в Издательстве СГТУ,
410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77

Полная электронная версия журнала размещена в системе РИНЦ
в открытом доступе на платформе eLIBRARY.RU

Подписной индекс 18378
(каталог «Газеты. Журналы» на 1-е полугодие 2015 г.)

УДК 621.373.7

С.П. Кузнецов

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР ГРУБОГО ХАОСА: СХЕМОТЕХНИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОГРАММНОЙ СРЕДЕ MULTISIM

Предложена схема параметрического генератора хаотических колебаний с аттрактором типа соленоида Смейла-Вильямса, функционирование которой обеспечивается периодической последовательностью импульсов накачки на двух разных частотах. Проведено моделирование хаотической динамики в программной среде Multisim.

Хаос, аттрактор, соленоид Смейла-Вильямса, параметрический генератор, варакторный диод

S.P. Kuznetsov

A PARAMETRIC OSCILLATOR OF ROBUST CHAOS: A CIRCUIT IMPLEMENTATION AND SIMULATION USING THE MULTISIM PROGRAM

The suggested scheme refers to the parametric generator of chaotic oscillations with the Smale-Williams solenoid attractor. The scheme operates under a periodic sequence of pump pulses at two different frequencies. Simulation of the chaotic dynamics is conducted using the Multisim software product.

Chaos, attractor, Smale-Williams solenoid, parametric oscillator, varactor diode

Введение

Параметрические колебания известны в механике, электронике, акустике, нелинейной оптике [1-7]. Один из популярных примеров – раскачивание на качелях, когда человек постепенно увеличивает амплитуду колебаний, изменяя положение тела, что соответствует периодической вариации эффективной длины эквивалентного маятника. В электрическом колебательном контуре амплитуду колебаний можно повышать шаг за шагом, периодически изменяя емкость конденсатора – раздвигать пластины в моменты времени, отвечающие максимальному заряду, и сдвигать до прежнего положения в моменты максимального тока в индуктивности, когда заряд конденсатора близок к нулю.

Представляется, что принцип параметрического возбуждения колебаний перспективен с точки зрения интересной проблемы, заключающейся в конструировании физических устройств с хаотической динамикой, обусловленной так называемыми равномерно гиперболическими аттракторами [8-11]. Эти аттракторы представляют собой притягивающие объекты в фазовом пространстве динамических систем, составленные исключительно из траекторий седлового типа, сочетающие неустойчивость в смысле разбегания соседних траекторий на аттракторе и устойчивость в смысле приближения траекторий к аттрактору. Как абстрактные математические объекты, такие аттракторы – соленоид Смейла – Вильямса, аттрактор Плыкина, DA-аттрактор Смейла были введены в математической теории динамических систем примерно полвека назад, но до последнего времени не рассматривались в контексте естественно-научных и технических приложений. Такая ситуация неприемлема хотя бы потому, что для однородно гиперболических аттракторов математически доказано свойство грубости, или структурной устойчивости, гарантирующее нечувствительность динамики к вариациям функций и параметров в определяющих уравнениях. Как постулируется в теории колебаний, грубость служит принципиальным основанием для выделения значимых для практики и подлежащих первоочередному теоретическому анализу колебательных систем [12]. Для любых возможных практических приложений (коммуникация [13], шумовая локация [14], генерация случайных чисел [15]) естественно отдать предпочтение именно генераторам грубого хаоса.

Рассмотрим геометрическое построение разновидности аттрактора Смейла-Вильямса, существенной для дальнейшего изложения. Для наглядности обратимся пока к системе с трехмерным пространством состояний и с дискретным временем. Пусть один шаг эволюции состоит в том, что область в виде тора претерпевает трехкратное растяжение вдоль и сжатие поперек, складывается тройной петлей и оказывается расположенной внутри исходного тора (рис. 1а). Чтобы она там поместилась, поперечное сжатие должно быть сильнее, чем в три раза. На каждом шаге преобразования полный объем объекта уменьшается (система диссипативная), а число витков утраивается. В пределе бесконечного числа шагов количество витков стремится к бесконечности, и возникает образование, называемое *соленоидом*, который в поперечном направлении имеет структуру типа канторова множества (рис. 1б).

Наиболее существенный момент заключается в том, что отображение для отсчитываемой вдоль витков соленоида угловой координаты порождает хаотическую динамику изображающих точек. В нашем примере это трехкратно растягивающее отображение окружности $\varphi_{n+1} = -3\varphi_n + \text{const}$ (константа определяется выбором начала отсчета переменной φ), диаграмма итераций которого показана на рис. 1в. Характерное свойство хаоса – неустойчивость по отношению к возмущению начальных условий. В данном случае малое возмущение переменной φ за один шаг увеличивается втрое, чему соответствует положительный показатель Ляпунова $\ln 3 = 1.0986\dots$

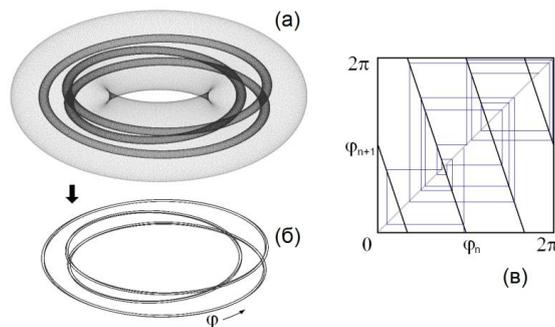


Рис. 1. Преобразование области в форме тора за один шаг эволюции в дискретном времени (а) и предельный объект – аттрактор в виде соленоида (б) в пределе большого числа шагов отображения утроения угловой координаты, хаотическое поведение которого иллюстрируется диаграммой (в)

Приведенный пример – характерный образец конструкций, предлагаемых математиками, которые апеллируют в своей работе к геометрическим, топологическим, алгебраическим отображениям. Очевидно, физик для построения моделей со структурно устойчивым хаосом должен привлекать свой инструментарий – осцилляторы, нелинейные элементы, цепи обратной связи.

Общий принцип конструирования физических систем с гиперболическими аттракторами, предложенный и продемонстрированный в [16-21], состоит в манипуляции фазами колебаний при передаче возбуждения между попеременно активными парциальными осцилляторами с тем, чтобы отображение для фаз характеризовалось хаотической динамикой.

Параметрический генератор хаоса на этом принципе, описанный в [22], содержит две одинаковые подсистемы, каждая из которых представлена схемой двухконтурного параметрического генератора. При этом частоты осцилляторов, образующих каждую подсистему, различаются вдвое, и осциллятор частоты ω одной подсистемы связан через квадратичный нелинейный элемент с осциллятором частоты 2ω другой подсистемы. Накачка подсистем на частоте 3ω осуществляется попеременно. В [23] предложена другая схема, использующая единственный двухконтурный генератор с модулированной накачкой, дополненный цепью запаздывающей обратной связи с квадратичным нелинейным элементом. Еще одна схема [24] базируется на двухконтурном генераторе, где частоты контуров отличаются вдвое, а возбуждение производится импульсами накачки на тройной частоте и сопровождается модуляцией добротности одного и другого контура с периодом, равным периоду следования импульсов накачки. Во всех этих системах аттрактор Смейла – Вильямса реализуется благодаря тому, что обеспечивается преобразование угловой переменной – фазы заполнения выдаваемых системой цугов колебаний посредством двукратно растягивающего отображения окружности.

Все упомянутые схемы характеризуются фиксированным соотношением частот осцилляторов и накачки 1:2:3 и, очевидно, не в полной мере используют возможности манипуляции частотами и фазами, открываемые принципом параметрического возбуждения. Добавим, что если говорить о создании генераторов гиперболического хаоса на уровне радиотехнических устройств, то задача нуждается в конкретной проработке. Надо иметь в виду, что основной нелинейный элемент, применяемый при построении электронных параметрических генераторов – варикап, или варакторный диод, обладает характеристикой зависимости емкости от напряжения, не сводящейся к простой квадратичной или кубической функции, и требует заданного подходящим образом напряжения смещения.

В настоящей статье предлагается параметрический генератор гиперболического хаоса с аттрактором типа соленоида Смейла – Вильямса, в котором соотношение частот осцилляторов можно задать с большой степенью произвола, накачка осуществляется последовательностью импульсов на двух частотах, определяемых как сумма и разность частот осцилляторов, а модуляция добротности вообще не используется. Принцип действия будет сначала проиллюстрирован для модельной системы уравнений, а затем реализован в радиотехнической схеме на варакторных диодах, функционирование которой продемонстрировано посредством моделирования динамики в программной среде Multisim.

Отметим, что примеры схем с равномерно гиперболическими аттракторами Смейла – Вильямса, Плыкина и DA-аттрактором уже публиковались [25-28], но эти примеры, во-первых, не относились к классу параметрических генераторов, а, во-вторых, требовали более сложной элементной базы (операционные усилители, мультипликаторы и др.).

1. Модельные уравнения и принцип действия системы

Начнем с вводных пояснений относительно активной и пассивной параметрической связи пары осцилляторов.

Рассмотрим два осциллятора с частотами ω_1 и ω_2 (пока без диссипации) и введем между ними пропорциональную коэффициенту ϵ реактивную связь, изменяющуюся во времени колебательным образом, что соответствует накачке на частоте Ω :

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \epsilon x_2 \sin \Omega t, \quad \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \epsilon x_1 \sin \Omega t. \quad (1)$$

Если частота Ω взята равной сумме частот парциальных осцилляторов, то реализуется параметрическая неустойчивость – одновременное нарастание колебаний обеих подсистем, при этом энергия черпается из источника накачки. Если же принять величину Ω равной разности частот осцилляторов, то имеет место пассивное параметрическое взаимодействие, проявляющееся в биениях – попеременной раскачке то одного, то другого осциллятора, передающих энергию друг другу.

Для приближенного аналитического описания этих эффектов удобен метод медленно меняющихся амплитуд. Вместо координат и скоростей, задающих состояния осцилляторов, введем комплексные величины $a_k(t)$, полагая

$$x_k = a_k(t)e^{i\omega_k t} + a_k^*(t)e^{-i\omega_k t}, \quad \dot{x}_k = i\omega_k a_k(t)e^{i\omega_k t} - i\omega_k a_k^*(t)e^{-i\omega_k t}, \quad (2)$$

где $k=1, 2$. Как очевидно из (2), они должны подчиняться соотношениям

$$\dot{a}_k(t)e^{i\omega_k t} + \dot{a}_k^*(t)e^{-i\omega_k t} = 0. \quad (3)$$

Перепишем уравнения (1) в новых переменных $a_{1,2}$, сделав подстановку (2), и произведем с помощью (3) исключение сопряженных производных $\dot{a}_{1,2}^*$. Далее выполним усреднение на периоде быстрых колебаний, на протяжении которого комплексные амплитуды $a_{1,2}$ можно приближенно считать постоянными величинами.

В случае $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ в результате имеем

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{4}\varepsilon\omega_1^{-1}a_2, \quad \dot{a}_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon\omega_2^{-1}a_1, \quad (4)$$

что приводит к колебательным решениям вида $a_1 \sim \sin[\frac{1}{4}\varepsilon(\omega_1\omega_2)^{-1/2}t]$, $a_2 \sim \cos[\frac{1}{4}\varepsilon(\omega_1\omega_2)^{-1/2}t]$ и отвечает биениям с частотой $\frac{1}{4}\varepsilon(\omega_1\omega_2)^{-1/2}$.

С другой стороны, если взять $\Omega = \omega_2 + \omega_1$, то уравнения принимают вид

$$\dot{a}_1 = -\frac{1}{4}\varepsilon\omega_1^{-1}a_2^*, \quad \dot{a}_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon\omega_2^{-1}a_1^*, \quad (5)$$

откуда $\ddot{a}_{1,2} = \frac{1}{16}\varepsilon^2(\omega_1\omega_2)^{-1}a_{1,2}$, так что получаем экспоненциально нарастающее решение $a_{1,2} \sim \exp[\frac{1}{4}\varepsilon(\omega_1\omega_2)^{-1/2}t]$. Чтобы иметь физически оправданную модель с ограничением амплитуды колебаний, требуется дополнить исходные уравнения членами, отвечающими за нелинейную диссипацию или нелинейное смещение частоты колебаний.

Обратимся теперь к системе трех осцилляторов с собственными частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Пусть частоты первого и третьего осцилляторов связаны условием $\omega_3 = 3\omega_1$, а частота второго осциллятора существенно больше, причем первый и третий осцилляторы взаимодействуют через бездиссипативный элемент с кубической нелинейностью. Накачка производится последовательно подаваемыми импульсами, так что функционирование системы заключается в повторении трех стадий протяженности T_1, T_2 и T_3 , с периодом $T = T_1 + T_2 + T_3$. Чтобы в системе мог реализоваться аттрактор, будем полагать, что присутствует диссипация.

Модельные уравнения запишем в виде¹

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= -\alpha_1 \dot{x}_1 + 3\varepsilon_{13} x_1^2 x_3 + \varepsilon_{12} x_2 f(t) \sin(\omega_1 + \omega_2)t, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= -\alpha_2 \dot{x}_2 - \beta \dot{x}_2^3 + \varepsilon_{12} x_1 f(t) \sin(\omega_1 + \omega_2)t + \varepsilon_{23} x_3 g(t) \sin(\omega_2 - 3\omega_1)t, \\ \ddot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 &= -\alpha_3 \dot{x}_3 + \varepsilon_{13} x_1^3 + \varepsilon_{23} x_2 g(t) \sin(\omega_2 - 3\omega_1)t, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T_1, \\ 0, & T_1 \leq t < T, \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T - T_3, \\ 1, & T - T_3 \leq t < T, \end{cases} \quad f(t+T) = f(t), \quad g(t+T) = g(t).$$

Для упрощения математического описания задачи будем считать, что времена продолжительности стадий составляют целое число периодов колебаний сигналов накачки, в частности, $(\omega_1 + \omega_2)T_1/2\pi$ и $(\omega_2 - 3\omega_1)T_3/2\pi$ целые числа, так что уравнения (6) характеризуются периодическими во времени коэффициентами. Для этой неавтономной системы можно привлечь описание динамики в терминах дискретного времени, посредством отображения Пуанкаре, рассматривая состояния в моменты времени, следующие друг за другом с интервалом T . Отображение Пуанкаре определено как преобразование шестимерного вектора состояния $\mathbf{x} = \{x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}\}$ за период модуляции накачки: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$. Практически отображение Пуанкаре осуществляется компьютерной программой, выполняющей численное решение уравнений (6) на периоде T .

¹Модель предназначена только для демонстрации принципа функционирования предлагаемой схемы и возможности получить хаотическую динамику, ассоциирующуюся с аттрактором Смейла – Вильямса, но не ставит целью достижение количественного соответствия с радиотехническим устройством, обсуждаемым в разделе 3. Говорить о качественном соответствии, тем не менее, методически правомерно в силу структурной устойчивости феномена (гиперболического аттрактора), который мы намерены рассмотреть.

На первой стадии функционирования системы в течение времени T_1 накачка на частоте $\Omega_1 = \omega_1 + \omega_2$, интенсивность которой задана коэффициентом ε_{12} , обеспечивает параметрическое возбуждение первого и второго осцилляторов. При этом колебания характеризуются некоторой фазовой постоянной φ , определяемой условиями в начале стадии: $x_1 \sim \sin(\omega_1 t + \varphi)$, $x_2 \sim \sin(\omega_2 t - \varphi)$. Ограничение амплитуды колебаний достигается благодаря тому, что во втором осцилляторе присутствует нелинейная диссипация, характеризующаяся параметром β .

На второй стадии протяженности T_2 , накачка выключена, и происходит затухание колебаний вследствие диссипации (параметры $\alpha_{1,2}$). Благодаря связи через кубическую нелинейность, определяемую параметром ε_{13} , и резонансу частот 1:3 между первым и третьим осциллятором, третий осциллятор, который характеризуется относительно малым параметром затухания α_3 , претерпевает раскачку до некоторой амплитуды с фазой, отвечающей фазе третьей гармоники первого осциллятора: $x_3 \sim \sin(3\omega_1 t + 3\varphi + \text{const}) = \sin(\omega_3 t + 3\varphi + \text{const})$.

На третьей стадии накачка обеспечивается изменением во времени параметра связи второго и третьего осцилляторов и производится на частоте $\Omega_2 = \omega_2 - \omega_3$ с амплитудой ε_{23} . При подобранной надлежащим образом продолжительности этой стадии T_3 за счет механизма биений осуществляется практически полная передача энергии от третьего осциллятора ко второму, который в итоге наследует фазу от третьего осциллятора: $x_2 \sim \sin(\omega_2 t + 3\varphi + \text{const})$. Таким образом, к началу следующей стадии параметрического возбуждения, когда опять включается накачка на частоте Ω_1 , новое значение фазовой постоянной дается утроенной исходной величиной с обратным знаком: $\varphi_{\text{new}} = -3\varphi + \text{const}$. Далее весь процесс повторяется.

Благодаря наличию угловой переменной φ , претерпевающей действие трехкратно растягивающего отображения окружности, и сжатия фазового объема из-за диссипации по другим направлениям, реализуется ситуация, отвечающая аттрактору Смейла – Вильямса типа обсуждавшегося во введении (рис. 1).

К уравнениям (6) можно применить метод медленных амплитуд, используя соотношения (2), (3), в которых индекс k принимает значения от 1 до 3. По аналогии с преобразованиями в начале раздела, можно вывести уравнения для комплексных амплитуд, которые ниже выписаны отдельно для каждой стадии.

Стадия I, $nT \leq t < nT + T_1$:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + \frac{1}{2}\alpha_1 a_1 + \frac{3}{2}i\varepsilon_{13}\omega_1^{-1} a_1^{*2} a_3 &= -\frac{1}{4}\varepsilon_{12}\omega_1^{-1} a_2^*, \\ \dot{a}_2 + \frac{1}{2}\alpha_2 a_2 + \frac{3}{2}\omega_2^2 \beta a_2 a_2^{*2} &= -\frac{1}{4}\varepsilon_{12}\omega_2^{-1} a_1^*, \\ \dot{a}_3 + \frac{1}{2}\alpha_3 a_3 + \frac{1}{2}i\varepsilon_{13}\omega_3^{-1} a_1^3 &= 0. \end{aligned} \quad (7a)$$

Стадия II, $nT + T_1 \leq t < nT + T_2$:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + \frac{1}{2}\alpha_1 a_1 + \frac{3}{2}i\varepsilon_{13}\omega_1^{-1} a_1^{*2} a_3 &= 0, \\ \dot{a}_2 + \frac{1}{2}\alpha_2 a_2 + \frac{3}{2}\omega_2^2 \beta a_2 a_2^{*2} &= 0, \\ \dot{a}_3 + \frac{1}{2}\alpha_3 a_3 + \frac{1}{2}i\varepsilon_{13}\omega_3^{-1} a_1^3 &= 0. \end{aligned} \quad (7б)$$

Стадия III, $nT + T_2 \leq t < (n+1)T$:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + \frac{1}{2}\alpha_1 a_1 + \frac{3}{2}i\varepsilon_{13}\omega_1^{-1} a_1^{*2} a_3 &= 0, \\ \dot{a}_2 + \frac{1}{2}\alpha_2 a_2 + \frac{3}{2}\omega_2^2 \beta a_2 a_2^{*2} &= -\frac{1}{4}\varepsilon_{23}\omega_2^{-1} a_3, \\ \dot{a}_3 + \frac{1}{2}\alpha_3 a_3 + \frac{1}{2}i\varepsilon_{13}\omega_3^{-1} a_1^3 &= \frac{1}{4}\varepsilon_{23}\omega_3^{-1} a_2. \end{aligned} \quad (7в)$$

Для этих уравнений также можно использовать описание динамики в терминах отображения Пуанкаре, определяющего изменение состояния за период модуляции накачки $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$, где шестимерный вектор состояния определяется набором действительных и мнимых частей комплексных величин a_k : $\mathbf{x} = \{\text{Re } a_1, \text{Im } a_1, \text{Re } a_2, \text{Im } a_2, \text{Re } a_3, \text{Im } a_3\}$. Упомянутое выше условие целочисленной продолжительности каждой стадии в единицах периода быстрых колебаний в рамках подхода, основанного на методе медленных амплитуд, не принципиально, и его можно игнорировать.

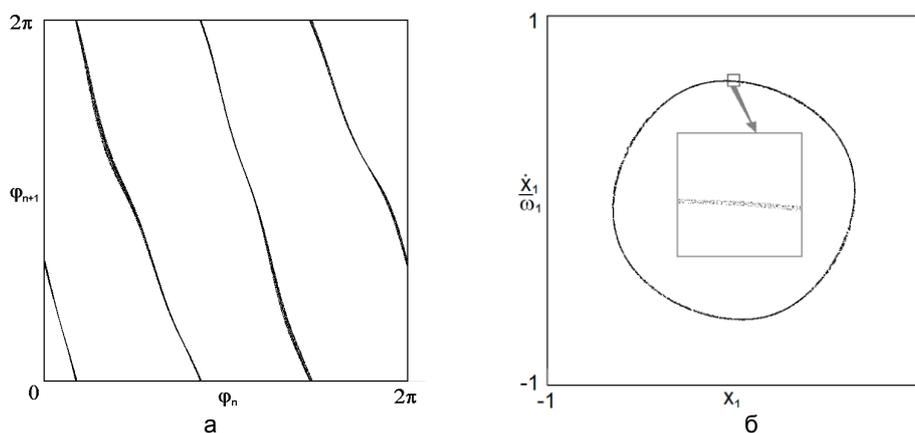


Рис. 3. Итерационная диаграмма фаз колебаний первого осциллятора (а) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (б) по результатам численного решения уравнений (6) при указанных в тексте значениях параметров. Вставка на панели (б) иллюстрирует в увеличенном виде тонкую поперечную структуру волокон аттрактора

Аналогичные результаты получаются при использовании уравнений для медленных амплитуд. На рис. 4 показана диаграмма для фаз, определяемых как аргумент комплексной амплитуды a_1 в моменты времени $t_n = nT + T/2$, а также портрет аттрактора в стробоскопическом сечении. Незначительные количественные отклонения в сравнении с рис. 3, очевидно, обусловлены приближенным характером описания в терминах медленных амплитуд.

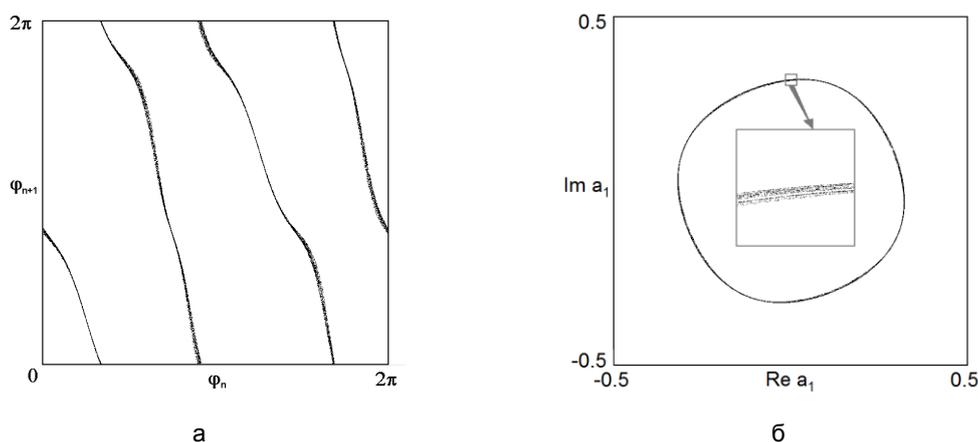


Рис. 4. Итерационная диаграмма фаз колебаний первого осциллятора (а) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (б) по результатам численного решения уравнений для комплексных амплитуд (7) при указанных в тексте значениях параметров. Вставка на панели (б) иллюстрирует в увеличенном виде тонкую поперечную структуру волокон аттрактора

Чтобы найти спектр показателей Ляпунова, следуя хорошо известной методике [29], проводим численное решение уравнений (6) или (7) совместно с набором из шести комплектов уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_k &= \mathbf{F}'(\mathbf{x}, t)\tilde{\mathbf{x}}_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь векторная функция $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ задается компонентами, фигурирующими в правых частях уравнений (6) или (7), а $\mathbf{F}'(\mathbf{x}, t)$ – ее матричная производная, т.е. матрица размера 6×6 , элементы которой представляют собой частные производные компонент \mathbf{F} по компонентам вектора \mathbf{x} . Тильдой обозначен вектор возмущения, отслеживаемый в процессе решения вдоль опорной траектории. Процедура дополняется нормализацией и ортогонализацией шести векторов возмущения на каждом периоде модуляции накачки T . Показатели Ляпунова получаются как средние скорости роста или убывания накапливающихся сумм логарифмов норм для векторов возмущения перед нормализацией и естественным образом получают расположенными в порядке убывания. Согласно результатам вычислений, показатели Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре при указанных параметрах составляют для исходных уравнений (6)

$$\Lambda_1 \approx 1.093, \Lambda_2 \approx -1.338, \Lambda_3 \approx -5.64, \Lambda_4 \approx -7.78, \Lambda_5 \approx -30.6, \Lambda_6 \approx -32.3, \quad (9)$$

а для уравнений в медленных амплитудах (7)

$$\Lambda_1 \approx 1.095, \Lambda_2 \approx -1.432, \Lambda_3 \approx -5.29, \Lambda_4 \approx -7.59, \Lambda_5 \approx -32.8, \Lambda_6 \approx -34.9, \quad (10)$$

Наличие положительного показателя Λ_1 указывает на хаотическую природу динамики. Его величина близка к константе $\ln 3 = 1.0986\dots$, что хорошо согласуется с приближенным описанием эволюции фазовой переменной троекратно растягивающим отображением окружности. Остальные показатели отрицательные и отвечают за приближение фазовых траекторий к аттрактору.

Интересно выполнить прямую численную проверку свойства гиперболичности аттрактора хотя бы применительно к системе уравнений для медленных амплитуд (7), что требует существенно меньших вычислительных ресурсов.

Идея тестирования на основе «критерия углов» была предложена в [30, 31], а в наиболее простой удобной для проведения вычислений форме методика представлена в [32]. При наличии одного неустойчивого направления (один положительный показатель Ляпунова) она состоит в следующем.

Начнем с вычисления опорной орбиты $\mathbf{x}(t)$ на аттракторе, проводя решение уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ за достаточно большой временной интервал. Затем берем линеаризованное уравнение для вектора возмущения $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)\tilde{\mathbf{x}}$ и интегрируем его вдоль найденной траектории $\mathbf{x}(t)$ с нормировкой вектора $\tilde{\mathbf{x}}$ на каждом шаге отображения Пуанкаре n на единицу, чтобы исключить расходимость. В результате получаем набор единичных векторов $\{\mathbf{x}_n\}$. Далее в соответствии с идеей [32] проводим интегрирование в обратном времени вдоль той же самой опорной траектории линейного уравнения

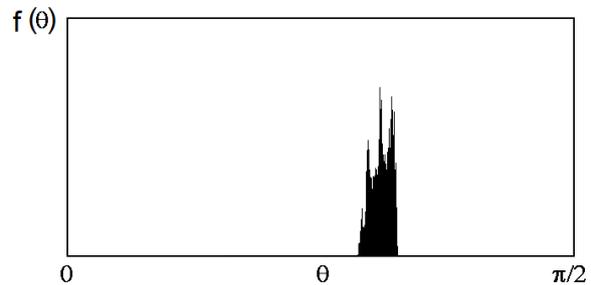
$$\dot{\mathbf{u}} = -[\mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)]^T \mathbf{u}, \quad (11)$$

где верхний индекс T означает матричное сопряжение. Это дает набор векторов $\{\mathbf{u}_n\}$, определяющих ортогональное дополнение к устойчивому подпространству векторов возмущения. Их также удобно нормировать на единицу. Теперь для оценки угла α между одномерным неустойчивым подпространством и пятимерным в нашем случае устойчивым подпространством при n -м прохождении сечения Пуанкаре вычисляем угол $\beta_n \in [0, \pi/2]$ между векторами $\tilde{\mathbf{x}}_n$ и \mathbf{u}_n : $\cos \beta_n = |\mathbf{u}_n(t) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_n(t)|$, и полагаем $\theta_n = \pi/2 - \beta_n$.

Для достаточно длинной траектории на основе обработки полученных данных можно рассмотреть статистическое распределение углов θ . Если оно отделено от нуля, то тест подтверждает гиперболичность. Если же распределение показывает ненулевую вероятность для нулевых углов, то это говорит о нарушении гиперболичности из-за присутствия касаний устойчивых и неустойчивых многообразий принадлежащих аттрактору траекторий.

На рис. 5 показана гистограмма распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами, полученная численно для упомянутого набора значений параметров системы для уравнений в комплексных амплитудах (7). Как можно видеть, распределение с очевидностью располагается вдали от нулевых значений углов θ , т.е. тест подтверждает гиперболичность аттрактора.

Рис. 5. Гистограмма распределения углов пересечения локальных устойчивых и неустойчивых многообразий на аттракторе, полученная обработкой данных численного решения применительно к отображению Пуанкаре системы уравнений для амплитуд (7) по методике, описанной в тексте. Отсутствие углов, близких к нулю, подтверждает гиперболичность аттрактора



3. Схема параметрического генератора

Для разработки параметрического генератора хаоса как реального электронного устройства естественно обратиться к удобному и популярному современному средству схемотехнического моделирования – программному продукту Multisim [33, 34]. Его первоначальная версия была выпущена канадской компанией Interactive Image Technologies в 1995 г. под названием Electronics Workbench, а усовершенствованные версии, начиная с 2005 г., разрабатываются компанией National Instruments.

Представленные ниже результаты получены с использованием имеющейся в СФ ИРЭ РАН лицензионной версии продукта NI Multisim 10.1.1.

На рис. 6 показана схема, составленная из трех осцилляторов на основе колебательных контуров, один из которых образован катушкой индуктивности L1 и емкостью C1, а второй и третий, соответственно, элементами L2 и C2, L3 и C3. Потери в первом и втором контуре вносятся резисторами R1 и R2. Как и в модельной системе из предыдущего раздела, функционирование устройства осуществляется как периодическое повторение трех стадий, с модуляцией накачки посредством переключателей J1 и J2, которые управляются прямоугольными импульсами от источников V4 и V6. На первой стадии (продолжительность $T_1=400$ мкс) открыт только ключ J1, на второй стадии ($T_2=550$ мкс) оба ключа закрыты, а на третьей стадии ($T_3=50$ мкс) открыт только ключ J2.

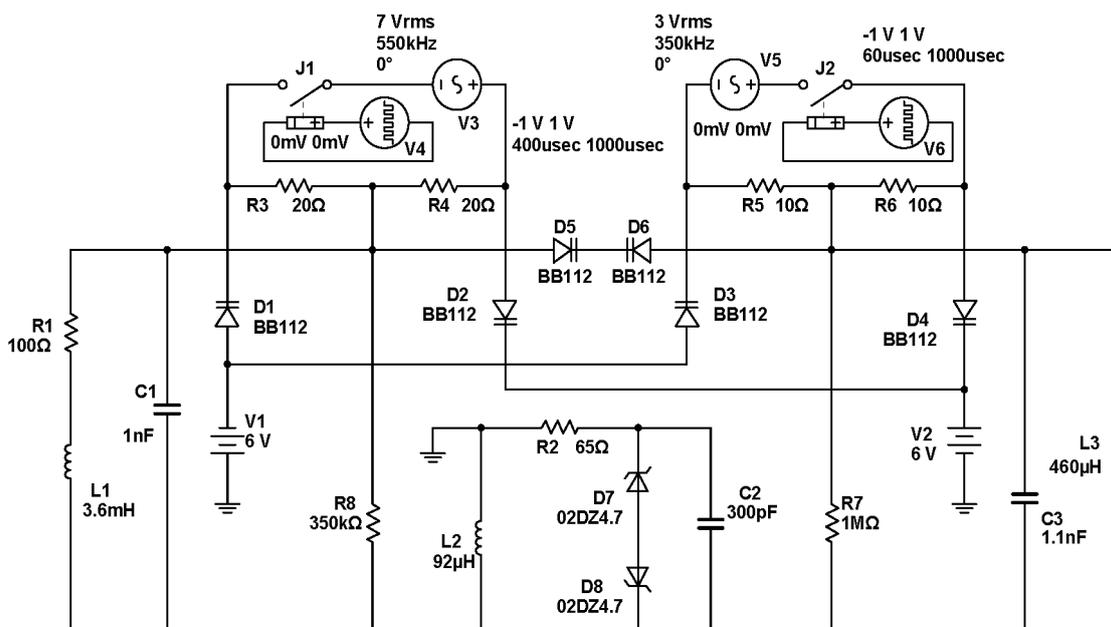


Рис. 6. Схема параметрического генератора хаоса, реализованная в среде Multisim (пояснения в тексте)

Параметрическое возбуждение первого и второго осцилляторов на первой стадии обеспечивается за счет колебаний емкости элемента, составленного из пары варакторных диодов D1 и D2. Они включены с противоположной полярностью в две параллельные ветви с подключением смещения от источников постоянного напряжения V1 и V2 и переменного напряжения накачки с делителя на резисторах R3 и R4 от источника V3. Благодаря такому включению зависимость общей емкости от приложенного к составному элементу напряжения дается симметричной функцией, содержащей только четные члены в разложении в степенной ряд. Аналогичным образом устроен элемент на варакторных диодах D3 и D4, для которых смещение обеспечивается теми же источниками V1 и V2, а переменное напряжение накачки подается с делителя на резисторах R5 и R6 от источника V5, обеспечивающего действие накачки на третьей стадии. Первый и третий осцилляторы связаны посредством элемента с кубической нелинейностью на варакторных диодах D5 и D6, включенных навстречу друг другу. Диоды Зенера (стабилитроны) D7 и D8, включенные в колебательный контур L2, C2, обеспечивают насыщение амплитуды колебаний при параметрической неустойчивости на определенном конечном уровне.

Емкости и индуктивности подобраны так, чтобы частоты колебательных мод, реализуемые в системе при выключенной накачке и ассоциирующиеся с преимущественным возбуждением первого, второго и третьего контуров, составляли $f_1=50$ кГц, $f_2=500$ кГц и $f_3=3f_1=150$ кГц. Соответственно, частота накачки на первой стадии задается равной $f_1 + f_2=550$ кГц, а на третьей стадии $f_2 - f_3=350$ кГц.

4. Результаты моделирования хаотической динамики в среде Multisim

На рис. 7 показаны графики реализаций напряжения на конденсаторах C1, C2 и C3, полученные при моделировании в среде Multisim с использованием предусмотренного программным продуктом виртуального осциллографа с подключением к соответствующим узлам схемы. На линейке в верхней части рисунка римскими цифрами обозначены стадии функционирования схемы. На первой стадии можно видеть параметрическое возбуждение первого и второго контуров, колебания которых затем затухают на второй стадии, в то время как колебания в третьем контуре сохраняются, а затем на

третьей стадии посредством биений передаются второму осциллятору, создавая начальные условия для развития параметрической неустойчивости на следующем периоде модуляции накачки.

Чтобы убедиться, что переход к каждой новой стадии параметрического возбуждения сопровождается отображением трехкратного растяжения переменной, характеризующей фазу колебаний, поступим следующим образом. Подключим осциллограф так, чтобы один луч управлялся напряжением на катушке индуктивности L1, а второй – напряжением на резисторе R1. В среде Multisim с помощью приложения Grapher предусмотрена запись в файл данных, получаемых в процессе моделирования, с возможностью дальнейшей цифровой обработки. Шаг выборки по времени надо установить равным периоду модуляции ($T=1$ мс). Чтобы подобрать моменты выборки, отвечающие присутствию колебаний первого осциллятора, можно использовать параметр задержки источников управляющих импульсов V4 и V6. (В нашем случае они заданы равными 500 и 450 мкс.) Затем записанный файл обрабатывается специально составленной внешней программой. Сначала оба временных ряда – для напряжений на катушке индуктивности U_L и резисторе и U_R нормируются так, чтобы сумма квадратов элементов была для них одинакова. Затем для каждой пары величин U_L^n, U_R^n , относящихся к одному и тому же моменту времени $t_n=nT+T/2$, определяется фаза $\varphi_n = \arg(U_L^n + iU_R^n)$, приведенная к интервалу от 0 до 2π .

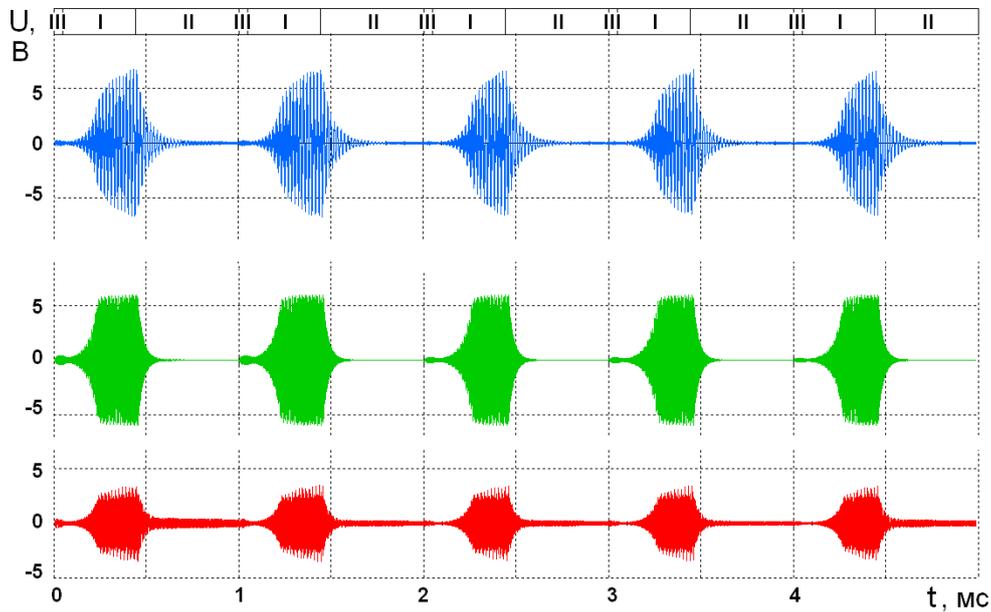


Рис. 7. Реализации напряжения на конденсаторах C1, C2 и C3, скопированные с экрана виртуального осциллографа при моделировании схемы на рис. 2 в среде Multisim

На рис. 8 показан график, на котором представлены обработанные данные в виде зависимости значений φ_{n+1} от величин φ_n . Как можно видеть, график соответствует трехкратно растягивающему отображению окружности, аналогичному диаграмме на рис. 1в. Таким образом, выполнено основное условие, требуемое для присутствия аттрактора типа Смейла – Вильямса.

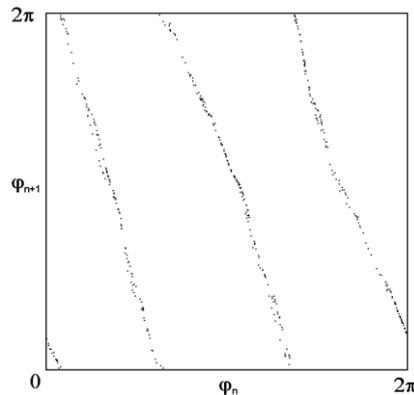


Рис. 8. Итерационная диаграмма для фаз, построенная по данным моделирования схемы, показанной на рис. 2, в среде Multisim

То же подключение осциллографа можно использовать для получения портрета аттрактора в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора, переключив его в режим, в котором развертка по времени не производится, а отклонение луча по горизонтали и вертикали управляется входными напряжениями U_L и U_R . Полученный таким образом портрет аттрактора показан на рис. 9 а. Для построения аттрактора в стробоскопическом сечении можно воспользоваться записанными в файл данными, использованными при построении диаграммы для фаз, представив их графически в координатах U_L , U_R с помощью внешней программы. Полученная диаграмма показана на рис. 9 б. Здесь можно видеть объект, соответствующий по виду соленоиду Смейла – Вильямса, причем различима характерная для него поперечная структура волокон.

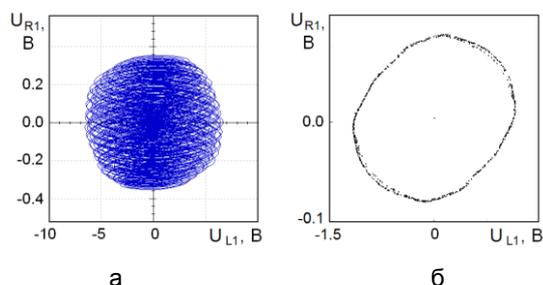


Рис. 9. Портрет аттрактора в проекции из расширенного фазового пространства системы (а) и аттрактор в стробоскопическом сечении (б). По горизонтальной и вертикальной оси отложены, соответственно, напряжение на катушке индуктивности L1 и на резисторе R1

Рис. 10 иллюстрирует спектры сигналов, полученные с помощью имеющегося в среде Multisim анализатора спектра (Stimulate – Instruments – Spectrum Analyzer) и отвечающие напряжениям на конденсаторах C1, C2, C3. Спектры сплошные, как это и должно быть для случайного сигнала, хотя характеризуются довольно сильной изрезанностью. Для сигнала с каждого из трех контуров спектр содержит хорошо выраженный пик в окрестности его собственной частоты, соответственно, 50 кГц для первого, 500 кГц для второго, и 150 кГц для третьего контура. Кроме того, имеются пики в окрестности частот накачки и комбинационных составляющих вследствие наличия в схеме нелинейных элементов.

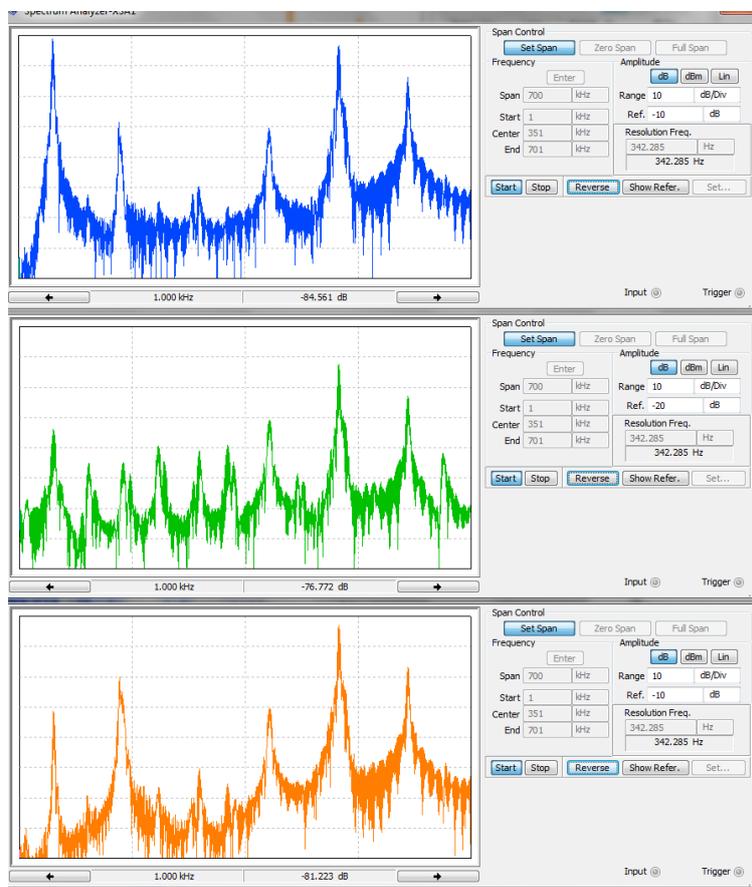


Рис. 10. Спектры колебаний напряжения на конденсаторах C1, C2, C3. Ось частот охватывает интервал от 1 до 700 кГц, по вертикальной оси использован логарифмический масштаб, цена деления 10 дБ

Заключение

В настоящей работе введен в рассмотрение параметрический генератор хаоса на базе трех связанных осцилляторов, в котором накачка осуществляется периодической последовательностью радиоимпульсов, имеющих частоты заполнения, попеременно равные сумме и разности собственных частот парциальных осцилляторов. Система генерирует колебания в виде цугов колебаний, фаза заполнения которых меняется хаотически. В шестимерном отображении, описывающем динамику за период модуляции накачки, имеет место гиперболический странный аттрактор, представляющий собой вариант соленоида Смейла – Вильямса с утроением угловой координаты, отсчитываемой вдоль витков соленоида, на каждом шаге построения. Соответственно, исходная потоковая система, порождающая данное отображение Пуанкаре, по принятой математической терминологии, будет иметь аттрактор, топологически эквивалентный надстройке над соленоидом Смейла – Вильямса. Представлена реализация системы в виде радиотехнического устройства на варакторных диодах и продемонстрировано ее функционирование в программной среде Multisim.

Главное преимущество систем с гиперболическими аттракторами с практической точки зрения будет состоять в присущей структурной устойчивости или грубости, что означает нечувствительность свойств генерируемого хаоса по отношению к вариациям параметров и характеристик элементов устройства, техническим флуктуациям и т.п. В частности, такие системы могут представлять интерес, как генераторы хаоса для применения в схемах скрытой коммуникации [13, 35, 36]. Выигрышный момент видится в том, что хаос выражается в случайном изменении фазы заполнения последовательности импульсов, благодаря чему передача сигнала в канале связи будет менее чувствительной к помехам, потерям и искажениям, нежели в предложенных до сих пор вариантах.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-02-00541.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельштам Л.И. Лекции по колебаниям / Л.И. Мандельштам. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 512 с.
2. Крысько В.А. Нелинейная динамика параметрических колебаний двухслойных распределенных систем с учетом зазора между слоями / В.А. Крысько, Е.Ю. Крылова, И.В. Папкина // Вестник СГТУ. 2013. Вып. 1 (69). С. 7-11.
3. Каплан А.Е. Параметрические генераторы и делители частоты / А.Е. Каплан, Ю.А. Кравцов, В.А. Рылов. М.: Сов. радио, 1966. 335 с.
4. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике / У. Люиселл. М.: иностр. лит., 1963. 352 с.
5. Островский Л.А. Параметрический генератор ультразвука / Л.А. Островский, И.А. Папилова, А.М. Сутин // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 15. Вып. 8. С. 456-458.
6. Ахманов С.А. Параметрические усилители и генераторы света / С.А. Ахманов, Р.В. Хохлов // Успехи физических наук. 1966. Т. 88. № 3. С. 439-460.
7. Кузнецов А.П. Нелинейные колебания / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
8. Динамические системы с гиперболическим поведением / Д.В. Аносов, С.Х. Арансон, В.З. Гринес, Р.В. Плыкин, Е.А. Сатаев, А.В. Сафонов, В.В. Солодов, А.Н. Старков, А.М. Степин, С.В. Шлячков // Динамические системы – 9, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991. 247 с.
9. Каток А.Б. Введение в современную теорию динамических систем: пер. с англ. / А.Б. Каток, Б. Хасселблат. М.: Факториал, 1999. 768 с.
10. Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial / L. Shilnikov // Int. J. of Bif. & Chaos. 1997. Vol. 7. № 9. P. 1353.
11. Анищенко В.С. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы / В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.
12. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. М.: Наука, 1981. 586 с.
13. Дмитриев А.С. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи / А.С. Дмитриев, А.И. Панас. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
14. Lukin K.A. Noise radar technology / K.A. Lukin // Telecommunications and Radio-Engineering. 2001. Vol. 16. № 12. P. 8-16.

15. Drutarovsky M. A Robust Chaos-Based True Random Number Generator Embedded in Reconfigurable Switched-Capacitor Hardware / M. Drutarovsky, P. Galajda // *Radioengineering*. 2007. Vol. 16. № 3. P. 120-127.
16. Kuznetsov S.P. Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale-Williams Type / S.P. Kuznetsov // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
17. Kuznetsov S.P. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors / S.P. Kuznetsov, A. Pikovsky // *Physica D*. 2007. Vol. 232. P. 87-102.
18. Кузнецов С.П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса / С.П. Кузнецов, Е. П. Селезнев // *ЖЭТФ*. 2006. Т. 129. Вып. 2. С. 400-412.
19. Емельянов В.В. Генератор гиперболического хаоса на основе связанных пролетных клистронов / В.В. Емельянов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин // *Письма в ЖТФ*. 2009. Т. 35. Вып. 16. С. 71-78.
20. Кузнецов С.П. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла-Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием / С.П. Кузнецов, В.И. Пономаренко // *Письма в ЖТФ*. 2008. Т. 34. Вып. 18. С. 1-8.
21. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике / С.П. Кузнецов // *Успехи физических наук*. 2011. Т. 181. № 2. С. 121-149.
22. Кузнецов С.П. О возможности реализации параметрического генератора гиперболического хаоса / С.П. Кузнецов // *ЖЭТФ*. 2008. Т. 133, № 2. С. 438-446.
23. Kuznetsov A.S. Parametric generation of robust chaos with time-delayed feedback and modulated pump source / A.S. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2013. Vol. 18. P. 728-734.
24. Кузнецов А.С. Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе двух связанных осцилляторов с нелинейной диссипацией / А.С. Кузнецов, С.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев // *ЖТФ*. 2010. Т. 80. Вып. 12. С. 1-9.
25. Кузнецов С.П. Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом и моделирование их динамики в программной среде Multisim / С.П. Кузнецов // *Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19. № 5. С. 98-115.
26. Kuznetsov S.P. Plykin type attractor in electronic device simulated in Multisim / S.P. Kuznetsov // *CHAOS*. 2011. Vol. 21. 043105.
27. Аржанухина Д.С. Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом на основе связанных осцилляторов Ван дер Поля / Д.С. Аржанухина // *Вестник СГТУ*. 2013. Вып. 3 (72). С. 20-30.
28. Кузнецов С.П. Автономная система – генератор гиперболического хаоса. Схемотехническое моделирование и эксперимент / С.П. Кузнецов, В.И. Пономаренко, Е.П. Селезнев // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2013. Т. 21. № 5. С. 17-30.
29. Кузнецов С.П. Динамический хаос: курс лекций / С.П. Кузнецов. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
30. Lai Y.-C. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? / Y.-C. Lai, C. Grebogi, J.A. Yorke, I. Kan // *Nonlinearity*. 1993. Vol. 6. P. 779-798.
31. Anishchenko V.S. Studying hyperbolicity in chaotic systems / V.S. Anishchenko, A.S. Kopeikin, J. Kurths, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova // *Physics Letters A*. 2000. Vol. 270. P. 301-307.
32. Kuptsov P.V. Fast numerical test of hyperbolic chaos / P.V. Kuptsov // *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 85. No 1. 015203.
33. Варзарев Ю.Н. Моделирование электронных схем в системе Multisim / Ю.Н. Варзарев, В.В. Иванцов, Б.Г. Спиридонов. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2008. 81 с.
34. Резников Б.Л. Программный комплекс Multisim 10 в учебном процессе: учеб. пособие / Б.Л. Резников. М.: МГТУ ГА, 2010. 84 с.
35. Короновский А.А. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов // *Успехи физических наук*. 2009. Т. 179. Вып. 12. С. 1281-1310.
36. Yang T. A survey of chaotic secure communication systems / T. Yang // *International Journal of Computational Cognition*. 2004. Vol. 2. № 2. P. 81-130.

Кузнецов Сергей Петрович – доктор физико-математических наук, зав. лабораторией Саратовского филиала ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, профессор факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

Sergey P. Kuznetsov – Dr. Sc., Professor
Department of Nonlinear Processes,
Saratov State University
Head of Laboratory at Saratov branch
of Kotelnikov Institute of Radio-Engineering
and Electronics of the Russian Academy of Sciences

Статья поступила в редакцию 15.07.14, принята к опубликованию 25.09.14