



АНАЛОГИЯ В ЗАДАЧАХ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОННЫХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ С ПОЛЯМИ РЕЗОНАТОРОВ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Часть 1

А. П. Кузнецов^{1,2}, С. П. Кузнецов^{2,3}, Д. И. Трубецков^{1,4}

¹Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

²Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

³Удмуртский государственный университет, Ижевск

⁴НИЯУ МИФИ, Москва

Уравнения гидродинамики невязкой сжимаемой жидкости преобразованы к виду, удобному для построения самосогласованной теории взаимодействия гидродинамических потоков с полями резонаторов и периодических структур по аналогии с теорией устройств СВЧ электроники со скрещенными электрическим и магнитным статическими полями. В качестве возбуждаемого акустического поля рассматривается поле скоростей, а в качестве источников – завихренность в потоке. Для двумерных задач в пренебрежении нелинейностью собственных акустических колебаний и сжимаемостью жидкости в области движения вихрей получены уравнения возбуждения акустических резонаторов в форме, полностью аналогичной уравнениям возбуждения электродинамических резонаторов. Для трехмерных резонаторов проведено рассмотрение, повторяющее электродинамическую теорию по своей общей структуре, хотя полной аналогии в этом случае не получается. Для иллюстрации решения самосогласованных уравнений рассматривается динамика плоской ленты вихрей, взаимодействующих с периодической структурой типа «ребенки». Решается самосогласованная задача для случая взаимодействия вихревого потока с произвольной периодической структурой. Получено дисперсионное уравнение задачи и на основе его анализа указаны конструкции гидродинамических устройств, являющихся полными аналогами электронных лучевых приборов со скрещенными полями.

Ключевые слова: Электронный поток, гидродинамический поток, вихри, периодические структуры, теория возбуждения.

Введение

Задачи о взаимодействии волн с полями периодических структур распространены весьма широко. Большое число примеров можно найти в радиофизике и гидродинамике. В гидродинамике это распространение волн на поверхности воды в

случае периодически неровного дна [1], звуковые колебания в струях, движущихся в трубах с гофрированными стенками [1], некоторые типы аэродинамических генераторов звука [2, 3]. В радиофизике взаимодействие волн в электронных потоках с полями периодических структур широко используется для усиления и генерации электромагнитных колебаний СВЧ-диапазона [4–8]. И в радиофизических, и в гидродинамических устройствах протекают во многом похожие волновые процессы.

Аналогия гидродинамики и электродинамики вызывала интерес с самого момента возникновения электродинамики. Именно с нее началось формирование общей теории колебаний и волн: в своей «Теории звука» Рэлей наряду с вопросами акустики включил и главу, посвященную электрическим колебаниям [9]. Сейчас аналогия достаточно хорошо развита и применяется для решения задач гидро- и электростатики [10], для анализа распространения свободных волн в различных структурах [11, 12]. В работах [13, 14] обращено внимание на аналогию между двумерным движением электронного потока в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и течением несжимаемой вихревой жидкости, в частности, на аналогию между диокотронной неустойчивостью электронного потока в статических скрещенных электрическом и магнитном полях и неустойчивостью Гельмгольца. Такую аналогию привлекают для объяснения аномально высоких шумов в СВЧ электронных приборах магнетронного типа, которые пытаются связать с турбулентной природой электронного облака [15, 16]. Приходится, однако, констатировать, что аналогия в задачах о взаимодействии в системах типа поток – поле, когда возможно не только возбуждение волновых полей источниками, но и обратное воздействие этих полей на источники, в достаточной мере не разработана. Можно отметить работу [2], в которой обсуждается аналогия между «антизатуханием» Ландау в электронных приборах и механизмами самовозбуждения аэродинамического устройства с периодической структурой, рассмотрен «гидродинамический монотрон», однако, по словам самих авторов, развитая аналогия носит эвристический характер и не затрагивает формализм теории. В то же время кажется естественным, что такие элементы теории электронных устройств, как уравнения возбуждения периодической структуры заданными источниками, уравнения движения источников в поле излучения, методы совместного решения этих уравнений, задача о выделении квазистатической части поля и др. должны обладать большой степенью общности, независимо от физической природы анализируемой системы.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы обосновать возможность и наметить пути использования развитых в электронике сверхвысоких частот методов теоретического исследования, а иногда и конкретных результатов анализа взаимодействия электронных потоков с колебаниями и волнами в резонаторах и волноводах, применительно к задачам о взаимодействии гидродинамических потоков с акустическими колебаниями и волнами.

Общепринятой основой для решения задач о возбуждении акустических колебаний при движении жидкости или газа является подход, предложенный в свое время Лайтхиллом [17, 18]. Его содержание состоит в том, что в уравнениях гидродинамики сжимаемой жидкости выделяется комбинация членов, отвечающая волновому уравнению акустических колебаний для переменной составляющей плотности среды, а все остальные члены рассматриваются как источники возбуждения этих колебаний. Чтобы сделать желаемое применение развитых в электродинамике методов

и подходов наглядным и продуктивным, мы предлагаем такую постановку задачи, чтобы уравнения, описывающие акустические колебания и волны, записывались не для скалярного поля, как в теории Лайтхилла, а соответствовали по виду уравнениям Максвелла. Вполне успешной такая формулировка оказывается для двумерных задач, но даже с этим ограничением она открывает очевидные перспективы для развития и применения аналогии между электроникой СВЧ, в рамках которой многие проблемы проработаны весьма глубоко, и задачами взаимодействия акустических колебаний с гидродинамическими потоками. Для трехмерных задач прямая аналогия не проходит, но остается возможным использовать общую структуру теоретических схем, развитых в электронике и электродинамике, адаптируя их к задачам гидродинамики и акустики.

Следует отметить, что наиболее удобным для описания с единых позиций взаимодействия волн в системах различной природы является метод связанных волн, опирающийся на представление о синхронных волнах [19]. В случае синхронного взаимодействия эффективно обмениваются энергией лишь те волны в потоке и в периодической структуре, у которых примерно равны фазовые скорости и волновые числа. На диаграмме частота ω – волновое число k таким волнам отвечает точка пересечения дисперсионных характеристик потока и периодической структуры. В случае слабого взаимодействия волны связываются лишь в малой окрестности точки пересечения, размеры которой по частоте $\Delta\omega$ и волновому числу Δk определяют характерные масштабы времени $\tau \sim 1/\Delta\omega$ и длины $l \sim 1/\Delta k$ взаимодействия. По этой причине все многообразие волновых взаимодействий можно свести к нескольким универсальным ситуациям. Так, если точка пересечения лежит на прямой ветви дисперсионной характеристики структуры (групповая скорость положительна), то в активной системе реализуется конвективная неустойчивость, когда пространственно локализованное возмущение, нарастая по амплитуде, с течением времени уходит из области первоначальной локализации. Если точка пересечения лежит на обратной ветви характеристики структуры (групповая скорость отрицательна), то в активной системе реализуется абсолютная неустойчивость, когда возмущения, нарастая, с течением времени охватывают все пространство. Весьма интересная ситуация возникает у границы полосы пропускания периодической структуры, где происходит смена характера неустойчивости с конвективной на абсолютную и наоборот [20–22]. Может, однако, иметь место и такая ситуация, когда одна из волн в потоке характеризуется сильной собственной неустойчивостью. Она реализуется в электронных устройствах со скрещенными полями в режиме больших токов пучка [6], а также в гидродинамических системах, в которых тангенциальный разрыв взаимодействует с акустическим полем в периодической структуре [2, 3, 23, 24]. Экспериментальные исследования гидродинамических систем такого типа указывают на возможность самовозбуждения в них звука [24]. Однако в теоретических работах ни усиление, ни подавление, ни самовозбуждение колебаний не найдено [2, 3]. Задача теоретического обоснования принципиальной возможности усиления, подавления и самовозбуждения в гидродинамических системах представляется важной. В перспективе ее решение позволило бы добиться той же степени управления гидродинамическим течением, какая возможна в электронике при работе с электронным потоком.

Настоящая работа (часть 1) направлена на выяснение физического смысла акустических источников поля, выступающих в качестве аналогов зарядов и токов в

электродинамике, и получение самосогласованных уравнений взаимодействия источников с периодической структурой. Важным элементом самосогласованной задачи являются уравнения возбуждения периодической структуры. Соответствующая теория для акустических систем будет построена на основе электродинамической теории [25], опирающейся на уравнения возбуждения резонаторов. Отметим, что это одна из возможных разновидностей электродинамической теории, которая оказывается наиболее удачной для достижения поставленных целей. По причине «резонаторного» типа уравнений возбуждения периодических структур [25] довольно значительное внимание уделим аналогии в задаче о возбуждении акустических и электродинамических резонаторов. При рассмотрении аналогии для уравнений движения будем следовать работам [13, 14].

1. Аналогия между уравнениями гидродинамики невязкой сжимаемой жидкости и уравнениями Максвелла (двумерный случай)

Исходные уравнения динамики невязкой сжимаемой жидкости имеют следующий вид [26]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\text{grad } p/\rho, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2)$$

$$p = p(\rho). \quad (3)$$

Здесь $\vec{v}$ – поле скоростей, p – давление, ρ – плотность. Для газов давление p и плотность ρ связаны уравнением адиабаты

$$p(\rho) = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (4)$$

где $\gamma = C_p/C_V$. Аналогичное соотношение справедливо и для конденсированных сред, величина γ подбирается в этом случае эмпирически. Если возмущения давления и плотности не очень велики, то

$$\rho = \rho_0 (1 + \tilde{\rho}), \quad p = p_0 (1 + \tilde{p}), \quad (5)$$

и из (4) следует, что возмущения этих величин пропорциональны друг другу

$$\tilde{p} = \gamma \tilde{\rho}. \quad (6)$$

Перепишем систему уравнений (1)–(3), исключив давление p

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -c^2 \text{grad } \tilde{\rho}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{div } \vec{v} + \text{div} (\tilde{\rho} \vec{v}) = 0. \quad (8)$$

Здесь $c^2 = p_0 \gamma / \rho_0$ – квадрат скорости звука. Ограничим пока наше рассмотрение двумерными течениями. В этом случае следует положить

$$\vec{v} = (v_x, v_y, 0), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

1.1. Безвихревые колебания жидкости, линейное приближение. Уравнения Максвелла без источников. Пусть возмущения плотности и скорости малы, а жидкость не участвует в движении как целое. Отбросив в уравнениях (7), (8) члены второго порядка малости, получим:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c^2 \text{grad } \tilde{\rho}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{v} = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим безвихревые колебания жидкости. Условием отсутствия завихренности является обращение в нуль ротора скорости:

$$\text{rot } \vec{v} = 0. \quad (13)$$

Покажем, что уравнения (11)–(13) эквивалентны уравнениям Максвелла в отсутствие источников поля – токов и зарядов.

Введем новые векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ следующим образом:

$$\vec{E} = (-v_y, v_x, 0), \quad (14)$$

$$\vec{B} = (0, 0, \tilde{\rho}). \quad (15)$$

(Вектор $\vec{E}$ дуален к вектору скорости $\vec{v}$.)

Перейдем в соотношениях (11)–(13) к представлению движения жидкости в терминах векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Для этого распишем соотношения (11)–(13) по компонентам.

Из уравнения Эйлера (11) получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} = c^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} \end{cases} \rightarrow c^2 \text{rot } \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (16)$$

Из уравнения непрерывности (12):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (17)$$

Из условия отсутствия завихренности (13):

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{E} = 0. \quad (18)$$

Наконец, используем первое из соотношений (10):

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (19)$$

Полученные уравнения (16)–(19) полностью совпадают с уравнениями Максвелла в вакууме ($\varepsilon_0 = 1$) в отсутствие электрических зарядов и токов. Электродинамические аналоги соответствующих гидродинамических величин приведены в таблице¹.

Таблица

Гидродинамические величины
и их электродинамические аналоги

Гидродинамическая величина		Электродинамическая величина	
Переменная составляющая плотности	$\tilde{\rho}$	Магнитное поле	B
Вектор скорости	v_x	Электрическое поле; вектор, дуальный к вектору скорости	E_y
	v_y		$-E_x$
Завихренность	Ω	Плотность заряда	ρ_e
Плотность тока завихренности	$\vec{j} = \Omega \vec{v}$	Плотность тока электрических зарядов	$\vec{j} = \rho_e \vec{v}$

1.2. Безвихревые колебания жидкости, нелинейный случай. Соленоидальные токи. Оставим теперь в уравнениях (7), (8) все члены, включая также и квадратичные. Движение жидкости по-прежнему полагаем двумерным и безвихревым. В этом случае уравнения (18) и (19) остаются без изменения:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (20)$$

Таким образом, первая пара уравнений Максвелла сохраняет свою форму, причем и электрические, и магнитные заряды отсутствуют.

Проводя преобразования так же, как это сделано выше, из уравнений (7), (8) можно получить следующие соотношения:

$$c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_E, \quad (21)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \vec{J}_B. \quad (22)$$

¹Отметим альтернативный подход к построению аналогии между гидродинамикой и электродинамикой в работе [34], где приняты несколько иные правила соответствия между электродинамическими и гидродинамическими полями, нежели в нашей работе. В частности, в качестве аналога магнитного поля выступает поле завихренности, а в качестве аналога электрического поля – локальное ускорение жидкой частицы в данной точке в данный момент. Для рассмотрения задач взаимодействия с полями резонаторных и волноводных структур наш вариант аналогии, проработанный с использованием идей и методов электродинамики и электроники приборов со скрещенными полями, представляется более подходящим.

Здесь введены обозначения

$$\vec{J}_E = \left(-v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}, v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}, 0 \right), \quad (23)$$

$$\vec{J}_B = c^2 \left(0, 0, -\frac{\partial \tilde{\rho} v_y}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{\rho} v_x}{\partial x} \right). \quad (24)$$

Уравнения (21), (22) представляют собой вторую пару уравнений Максвелла с возбуждающими токами – электрическим $\vec{J}_E$ и магнитным $\vec{J}_B$. Своим появлением эти токи обязаны нелинейным членам в уравнениях динамики жидкости, следовательно, нелинейность является «источником» звуковых волн в жидкости. Заметим, что в исходных уравнениях Максвелла магнитные токи отсутствуют, однако, их иногда вводят искусственно, например, в ситуации, когда необходимо описать возбуждение электродинамической структуры (объемного резонатора, волновода и др.) петлей с током, размер которой много меньше длины волны [27]. Покажем, что введенные нами гидродинамические аналоги электрического и магнитного токов $\vec{J}_E$ и $\vec{J}_B$ являются чисто соленоидальными. Действительно, используя условие отсутствия завихренности (18) $\partial v_y / \partial x = \partial v_x / \partial y$ и переходя в соотношениях (23) и (24) к полям $\vec{E}$ и $\vec{B}$ по формулам (14) и (15), получим следующие выражения для $\vec{J}_E$ и $\vec{J}_B$:

$$\vec{J}_E = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial v^2}{\partial y}, \frac{\partial v^2}{\partial x}, 0 \right) = -\frac{1}{2} \text{rot} (v^2 \vec{e}_z) = -\frac{1}{2} \text{rot} (E^2 \vec{e}_z), \quad (25)$$

$$\vec{J}_B = c^2 \left(0, 0, \frac{\partial (BE_y)}{\partial x} - \frac{\partial (BE_x)}{\partial y} \right) = -\text{rot} (B\vec{E}). \quad (26)$$

Таким образом, величины $\vec{J}_E$ и $\vec{J}_B$ представляют собой роторы, и дивергенция от них равна нулю:

$$\text{div } \vec{J}_E = 0, \quad \text{div } \vec{J}_B = 0. \quad (27)$$

Итак, нелинейность в покоящейся в целом жидкости в отсутствие вихрей порождает «источники» поля – токи, но не порождает заряды.

1.3. Вихревые течения, плотность тока завихренности и гидродинамические заряды. Пусть теперь жидкость может участвовать в движении как единое целое, то есть в жидкости возможны потоки. Если эти потоки безвихревые, то справедливы все соотношения и выводы предыдущего параграфа за тем исключением, что величины соленоидальных токов $\vec{J}_E$ и $\vec{J}_B$, определяемые скоростью жидкости $\vec{v} = \vec{v}_0 + \tilde{\vec{v}}$, отличны от нуля уже в линейном приближении по малым добавкам $\tilde{\vec{v}}$ к скорости потока $\vec{v}_0$.

Рассмотрим общий случай, когда в жидкости имеются потоки и существует завихренность, то есть присутствует векторное поле $\vec{\Omega}$

$$\text{rot } \vec{v} = -\vec{\Omega}. \quad (28)$$

(Знак минус введен здесь для удобства.) В двумерном случае вектор $\vec{\Omega}$ имеет не равную нулю только z -компоненту: $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Расписывая ротор скорости по компонентам и используя соотношения (9) и (14), из (28) находим

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\Omega \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \Omega \rightarrow \text{div } \vec{E} = \Omega. \quad (29)$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением Максвелла, если величине Ω придать смысл плотности электрического заряда $\rho_e(x, y)$. Таким образом, уединенному электрическому заряду, для которого $\rho_e = q\delta(x)\delta(y)$, необходимо сопоставить элементарный вихрь вида $\Omega = q\delta(x)\delta(y)$.

В электродинамике движение зарядов порождает электрический ток, причем справедливо соотношение $\vec{j} = \rho_e \vec{v}$, где $\vec{v}$ – скорость зарядов, $\vec{j}$ – плотность тока. Следовательно, если развиваемая аналогия полная, то должно существовать соотношение $\vec{J} = \Omega \vec{v}$, где $\vec{J}$ – плотность гидродинамического «тока». Однако из соотношения (7) после несложных преобразований получаем

$$c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (30)$$

$$\vec{J} = \Omega \vec{v} + \vec{J}_E, \quad (31)$$

где $\vec{J}_E$ – введенный ранее соотношением (25) соленоидальный ток. Таким образом, только часть полного тока строго аналогична электродинамическому току. Эту часть $\vec{j} = \Omega \vec{v}$ будем называть плотностью тока завихренности. Как и в электродинамике, плотность тока завихренности $\vec{j}$ удовлетворяет уравнению непрерывности, которое можно получить, взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (30):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (32)$$

Заметим, что уравнение непрерывности справедливо и для полного тока

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{j} + \vec{J}_E) = 0, \quad (33)$$

поскольку ток $\vec{J}_E$ является чисто соленоидальным.

Приведем гидродинамические «уравнения Максвелла» в виде полной системы:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \Omega, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \vec{J}_B, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \quad c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \vec{J}_E. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, уравнения динамики невязкой сжимаемой жидкости в двумерном случае эквивалентны уравнениям Максвелла с магнитными токами. Отличие от электродинамики проявляется в наличии дополнительного соленоидального «тока» $\vec{J}_E$, что, однако, не нарушает структуры уравнений.

2. Аналогия уравнений возбуждения акустических и электродинамических резонаторов и периодических структур внешними источниками

2.1. Уравнения возбуждения резонаторов. Рассмотрим двумерную полость с непроницаемыми для жидкости стенками. На поверхности такой стенки должно выполняться граничное условие:

$$\vec{v}_\perp|_S = 0. \quad (35)$$

Введенный выше вектор $\vec{E} = (-v_y, v_x, 0)$ перпендикулярен вектору скорости $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ и, следовательно, должен быть перпендикулярен стенке резонатора. Таким образом, в терминах вектора $\vec{E}$ граничное условие (35) принимает такой же вид, как и в электродинамике для электрического поля:

$$\vec{E}_{\parallel} \Big|_S = 0. \quad (36)$$

Второе граничное условие, используемое в теории электромагнитного поля,

$$\vec{B}_{\perp} \Big|_S = 0, \quad (37)$$

в нашей двумерной задаче выполняется автоматически: вектор $\vec{B} = (0, 0, \tilde{\rho})$ имеет единственную компоненту, параллельную боковой стенке резонатора.

Таким образом, в объеме акустического резонатора векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ подчиняются гидродинамическим «уравнениям Максвелла» (34), а граничные условия для этих векторов (36), (37) такие же, как и в электродинамике. Установленная аналогия позволяет воспользоваться готовыми уравнениями возбуждения объемных резонаторов, полученными в электродинамике [5,27]:

$$\vec{E} = \sum_s C_s \vec{E}_s - \text{grad } \Phi, \quad \vec{B} = \sum_s C_s \vec{B}_s, \quad (38)$$

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s = -\frac{1}{N_s} \int_V \left(\vec{j} \vec{E}_{-s} + \vec{J}_E \vec{E}_{-s} - \vec{J}_B \vec{B}_{-s} \right) dV. \quad (39)$$

Здесь $\vec{E}_s$ и $\vec{B}_s$ – собственные функции s -го акустического типа колебаний, удовлетворяющие «уравнениям Максвелла» без источников

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}_s &= 0, \quad \text{rot } \vec{E}_s = -i\omega_s \vec{B}_s, \\ \text{div } \vec{B}_s &= 0, \quad c^2 \text{rot } \vec{B}_s = i\omega_s \vec{E}_s \end{aligned} \quad (40)$$

с соответствующими граничными условиями; ω_s – собственные частоты дискретного спектра линейных акустических колебаний; Φ – квазистатический потенциал вихревого потока (как говорят в электронике, потенциал поля «пространственного заряда»), определяемый из уравнения

$$\text{div grad } \Phi = -\Omega; \quad (41)$$

N_s – норма s -го типа колебаний

$$N_s = \int_V \left(|\vec{E}_s|^2 + c^2 |\vec{B}_s|^2 \right) dV. \quad (42)$$

Рассмотрим далее колебания в резонаторах типа резонатора Гельмгольца (рис. 1, а). В таком резонаторе сжимаемость жидкости (газа) существенна только

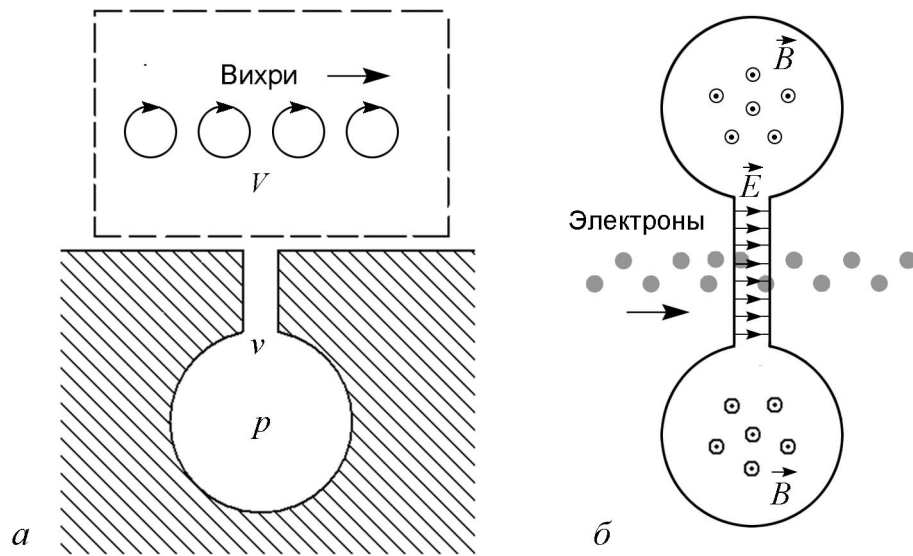


Рис. 1. Примеры объемных резонаторов: *а* – акустический резонатор Гельмгольца, возбуждаемый потоком вихрей, *б* – электродинамический тороидальный резонатор

внутри резервуара, а поле скоростей отлично от нуля в горловине [28]. Длина волны λ основного типа колебаний в резонаторе Гельмгольца много больше его характерного размера l . Нетрудно усмотреть аналогию с широко используемыми в электронике резонаторами тороидального типа, в которых электрическое поле сосредоточено в узком зазоре, а в резервуаре «хранится» магнитное поле (рис. 1, б). На языке электродинамики условие $\lambda \gg l$ является условием квазистационарности колебаний. В квазистационарном случае электрическое поле основной моды резонатора можно считать квазистатическим

$$\text{rot } \vec{E}_s = 0 \quad \text{и} \quad \vec{E}_s = -\text{grad } \Phi_s, \quad (43)$$

а магнитными полями (сжимаемостью жидкости) вне резервуара пренебречь:

$$\vec{B}_s = 0. \quad (44)$$

Пусть резонатор Гельмгольца возбуждается вихревым потоком, например, сдвиговым течением, так, что элементарные вихри движутся в области, где поле квазистатическое (см. рис. 1, а). В этом случае не все члены в правой части уравнения (39) вносят вклад в возбуждение звукового поля. В соответствии с (39), вклад источников описывается интегралом

$$I_{VP} = \int_{V_P} \left(\vec{j} \vec{E}_{-s} + \vec{J}_E \vec{E}_{-s} - \vec{J}_B \vec{B}_{-s} \right) dV, \quad (45)$$

вычисленным по всему объему резонатора. Разобьем интеграл (45) на две части – интеграл по объему резервуара и горловины v и по внешнему по отношению к ним объему V (см. рис. 1, а):

$$I_{VP} = I_v + I_V. \quad (46)$$

Поскольку элементарные вихри не проникают внутрь резервуара и горловины, то в объеме v следует положить равной нулю плотность тока завихренности $\vec{j}$:

$$I_v = \int_v \left(\vec{J}_E \vec{E}_{-s} - \vec{J}_B \vec{B}_{-s} \right) dV. \quad (47)$$

В п. 1.2 было указано, что, если жидкость не участвует в движении как единое целое, то соленоидальные токи $\vec{J}_E$ и $\vec{J}_B$ описывают генерацию звуковых волн нелинейностью, а значит, интеграл (47) характеризует отклонение собственных колебаний резонатора от линейного описания. Этими эффектами будем пренебрегать, и, следовательно, можно положить $I_v = 0$.

Вычислим теперь интеграл по внешнему объему V . В квазистатическом приближении сжимаемость жидкости можно не учитывать (условие (44)), следовательно

$$I_V = \int_V \vec{j} \vec{E}_{-s} dV + \int_V \vec{J}_E \vec{E}_{-s} dV. \quad (48)$$

Преобразуем второй член в соотношении (48). Используя условие соленоидальности тока $\vec{J}_E$ (25) $\vec{J}_E = -(1/2)\text{rot} (v^2 \vec{e}_z)$, тождество векторного анализа $\text{div} [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}$ и теорему Остроградского–Гаусса, получаем

$$\begin{aligned} \int_V \vec{J}_E \vec{E}_{-s} dV &= -\frac{1}{2} \int_V \vec{E}_{-s} \text{rot} (v^2 \vec{e}_z) dV = \\ &= -\frac{1}{2} \int_S \left\{ v^2 [\vec{e}_z \times \vec{E}_{-s}]_{\perp} \right\} dS - \frac{1}{2} \int_V v^2 \vec{e}_z \text{rot} \vec{E}_{-s} dV. \end{aligned} \quad (49)$$

Но для двумерных задач, в соответствии с граничным условием (36), $[\vec{e}_z \times \vec{E}_{-s}]_{\perp S} = 0$, а внутри объема V выполняется условие квазистатичности (43) $\text{rot} \vec{E}_{-s} = 0$. Следовательно, $\int_V \vec{J}_E \vec{E}_{-s} dV = 0$. Это значит, что соленоидальный ток не вносит вклад в возбуждение звукового поля.

Таким образом, для квазистационарных резонаторов, возбуждаемых вихревым потоком, движущимся в области, где собственное поле резонатора квазистатическое, в пренебрежении нелинейностью собственных акустических колебаний можно записать

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s = -\frac{1}{N_s} \int_V \vec{j} \vec{E}_{-s} dV, \quad (50)$$

где $\vec{j} = \Omega \vec{v}$ – плотность тока завихренности. В этом случае аналогия с электродинамикой полная.

В заключение приведем уравнения возбуждения резонаторов в гидродинамических обозначениях:

$$\vec{v} = \sum_s C_s \vec{v}_s - \text{rot} (\Phi \vec{e}_z), \quad \tilde{\rho} = \sum_s C_s \rho_s, \quad (51)$$

где собственные функции $\vec{v}_s$ и ρ_s определяются из уравнений

$$\operatorname{div} \vec{v}_s = -i\omega_s \rho_s, \quad c^2 \operatorname{grad} \rho_s = -i\omega_s \vec{v}_s, \quad (52)$$

а потенциал квазистатического поля вихревого потока – из уравнения

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = -\Omega. \quad (53)$$

Для коэффициентов C_s справедливо следующее соотношение:

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s = -\frac{1}{N_s} \int_V [\vec{v}_{-s} \times \vec{j}] \vec{e}_z dV, \quad (54)$$

где N_s – норма, причем

$$N_s = \int_V (|\vec{v}_s|^2 + c^2 |\rho_s|^2) dV. \quad (55)$$

2.2. Обобщение теорий возбуждения резонаторов на трехмерный случай.

Если задача о взаимодействии гидродинамического течения и акустического поля резонатора трехмерная, то непосредственной аналогии между уравнениями электродинамики и гидродинамики нет. Это видно хотя бы из того, что плотность гидродинамического заряда $\vec{\Omega} = -\operatorname{rot} \vec{v}$ является векторной величиной, а заряды в электродинамике скалярны. Однако и в этом случае для построения соответствующей акустической теории можно ориентироваться на структуру электродинамической теории.

Итак, пусть необходимо найти возбуждаемые гидродинамическим течением акустические поля объемного трехмерного резонатора $\vec{v}$ и $\tilde{\rho}$, которые подчиняются уравнениям (7), (8) и граничным условиям (35) на поверхности резонатора S^2 :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + c^2 \operatorname{grad} \tilde{\rho} = \vec{J}_v, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = J_\rho, \quad (\vec{v} \cdot \vec{n})_S = 0. \quad (56)$$

Здесь введены обозначения

$$\vec{J}_v = [\vec{\Omega} \times \vec{v}] - \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2, \quad J_\rho = -\operatorname{div} (\tilde{\rho} \vec{v}), \quad \vec{\Omega} = -\operatorname{rot} \vec{v}. \quad (57)$$

Величины J_v , J_ρ и $\vec{\Omega}$ будем рассматривать как источники акустического поля.

Построим систему собственных функций $\vec{v}_s$, ρ_s , определяемых следующей краевой задачей:

$$\begin{aligned} i\omega_s \vec{v}_s + c^2 \operatorname{grad} \rho_s &= 0, \quad \operatorname{rot} \vec{v}_s = 0, \\ i\omega_s \rho_s + \operatorname{div} \vec{v}_s &= 0, \quad (\vec{v}_s \cdot \vec{n})_S = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

²В акустике имеется значительное число публикаций, посвященных возбуждению объемного резонатора потоком (см., например [35–38]). Здесь они подробно не обсуждаются, поскольку данная задача интересует нас лишь с точки зрения аналогии с электродинамикой и как шаг к теории возбуждения периодических структур.

Физический смысл этой краевой задачи состоит в том, что она описывает собственные линейные колебания резонатора в отсутствие потоков жидкости и вихрей, причем величины ω_s являются собственными частотами этих колебаний. Нетрудно показать, что собственные функции $\vec{v}_s(x, y, z)$ и $\rho_s(x, y, z)$ удовлетворяют условию ортогональности и могут быть нормированы так, что

$$\int_{V_0} \vec{v}_s \vec{v}_m^* dV = c^2 \int_{V_0} \rho_s \rho_m^* dV = \frac{1}{2} \delta_{sm}, \quad (59)$$

где V_0 – объем резонатора.

Будем искать решение задачи (56) в следующей форме:

$$\vec{v} = \sum_s C_s(t) \vec{v}_s + \vec{v}_{\text{кк}}, \quad (60)$$

$$\tilde{\rho} = \sum_s C_s(t) \rho_s, \quad (61)$$

где $C_s(t)$ – некоторые, пока неопределенные коэффициенты, а $\vec{v}_{\text{кк}}$ – квазистатическое поле. Квазистатическое поле удовлетворяет условию несжимаемости

$$\text{div } \vec{v}_{\text{кк}} = 0. \quad (62)$$

(В электродинамике – условию потенциальности $\text{rot } \vec{E}_{\text{кк}} = 0$ или $\vec{E}_{\text{кк}} = -\text{grad } \Phi$.) Равенство нулю дивергенции квазистатического поля позволяет ввести векторный потенциал $\vec{A}$:

$$\vec{v}_{\text{кк}} = -\text{rot } \vec{A}. \quad (63)$$

Калибровку потенциала выберем так, чтобы его дивергенция равнялась нулю: $\text{div } \vec{A} = 0$. Возьмем ротор от обеих частей соотношения (60). Учитывая, что $\text{rot } \vec{v}_s = 0$, используя тождество векторного анализа $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$, условие калибровки потенциала $\text{div } \vec{A} = 0$, и принимая во внимание последнее из соотношений (57), находим уравнение для определения векторного потенциала квазистатического поля:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{\Omega}. \quad (64)$$

Получим теперь уравнения для коэффициентов C_s . Подставим разложения (61) и (60) в исходные уравнения (56) и используем (58):

$$\sum_s \left[\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s \right] \vec{v}_s + \frac{\partial \vec{v}_{\text{кк}}}{\partial t} = \vec{J}_v, \quad (65)$$

$$\sum_s \left[\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s \right] \rho_s = J_\rho. \quad (66)$$

Умножим уравнение (65) на $\vec{v}_m^*$, а уравнение (66) на ρ_m^* , проинтегрируем по объему резонатора и сложим, учитывая условие ортогональности собственных функций:

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s + \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \vec{v}_{\text{кк}} \vec{v}_s^* dV = \int_{V_0} \vec{J}_v \vec{v}_s^* dV + c^2 \int_{V_0} J_\rho \rho_s^* dV. \quad (67)$$

Покажем, что интеграл, стоящий в левой части соотношения (67), равен нулю. Имеем:

$$\int_{V_0} \vec{v}_{\text{кв}} \vec{v}_s dV = \frac{1}{i\omega_s} \int_{V_0} \vec{v}_{\text{кв}} \text{grad } \rho_s^* dV = \frac{1}{i\omega_s} \left[\int_S (\vec{v}_{\text{кв}} \vec{n}) \rho_s^* dS - \int_{V_0} \rho_s^* \text{div } \vec{v}_{\text{кв}} dV \right]. \quad (68)$$

Здесь использована теорема Остроградского–Гаусса, тождество векторного анализа $\text{div}(\rho \vec{v}) = \vec{v} \text{grad } \rho + \rho \text{div } \vec{v}$, а также свойство собственных функций $i\omega_s \vec{v}_s^* = \text{grad } \rho_s^*$. Поверхностный интеграл в (68) равен нулю в силу граничного условия $(\vec{v}_{\text{кв}} \cdot \vec{n})_S = 0$ на стенке резонатора, а объемный интеграл равен нулю в силу условия (62).

Преобразуем теперь интегралы, стоящие в правой части соотношения (67). Используя определение величин $\vec{J}_v$ и J_ρ (57), соотношения (58) и теорему Остроградского–Гаусса, находим

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \vec{J}_v \vec{v}_s^* dV &= \int_{V_0} [\vec{\Omega} \times \vec{v}] \vec{v}_s^* dV - \frac{1}{2} \int_{V_0} \vec{v}_s^* \text{grad } v^2 dV = \\ &= \int_{V_0} \vec{\Omega} [\vec{v} \times \vec{v}_s^*] dV + \frac{1}{2} \int_{V_0} v^2 \text{div } \vec{v}_s^* dV, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\int_{V_0} J_\rho \rho_s^* dV = - \int_{V_0} \text{div}(\tilde{\rho} \vec{v}) \rho_s^* dV = \frac{1}{i\omega_s c^2} \int_{V_0} \text{div}(\tilde{\rho} \vec{v}) \text{div } \vec{v}_s^* dV. \quad (70)$$

Окончательно

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s = \int_{V_0} \vec{\Omega} [\vec{v} \times \vec{v}_s] dV + \int_{V_0} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{\text{div}(\tilde{\rho} \vec{v})}{i\omega_s} \right) \text{div } \vec{v}_s^* dV. \quad (71)$$

Считаем, что в области движения вихрей жидкость несжимаема, а вне этой области акустические колебания линейны. Тогда в области движения потока $\text{div } \vec{v}_s^* = 0$, а вне ее v^2 и $\text{div}(\tilde{\rho} \vec{v})$ – члены второго порядка малости. Поэтому величина $[v^2/2 + 1/(i\omega_s) \text{div}(\tilde{\rho} \vec{v})] \text{div } \vec{v}_s^*$ мала по всему объему резонатора, и вторым интегралом в (71) можно пренебречь:

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s = \int_{V_0} \vec{\Omega} [\vec{v} \times \vec{v}_s^*] dV. \quad (72)$$

Соотношения (60)–(64), (72) дают решение задачи о возбуждении акустических колебаний в трехмерном резонаторе «гидродинамическими зарядами» $\vec{\Omega}$.

2.3. Уравнения возбуждения периодических структур. Рассмотрим теперь возбуждение гидродинамическим течением акустических волн в периодических структурах с неподатливыми стенками (рис. 2). Ось x системы координат направим вдоль оси трансляционной симметрии структуры, а ее геометрический период обозначим d . Найдем акустические поля, возбуждаемые вихревыми источниками в такой

системе. Эти поля подчиняются краевой задаче (56), причем граничные условия на стенках являются периодическими с периодом d . Задачу полагаем трехмерной.

Для развития аналогии нужно выбрать электродинамическую теорию, логике которой будем следовать. Существует несколько вариантов решения задачи о возбуждении электромагнитных полей в периодических структурах. Будем основываться на теории возбуждения [25], которая удобна в том отношении, что опирается на рассмотренную выше теорию возбуждения резонаторов.

Вслед за [25] будем использовать преобразование Гельфанда, которое ставит в соответствие функции $U(x)$ функцию $U_\beta(x)$ двух переменных β и x по следующему правилу [29, 30]:

$$U_\beta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(x + nd) e^{i\beta nd}. \quad (73)$$

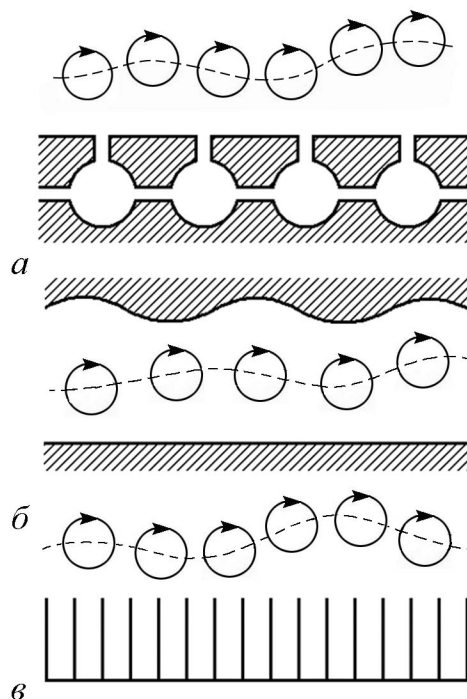


Рис. 2. Примеры акустических периодических структур, возбуждаемых потоком вихрей: *а* – цепочка связанных резонаторов Гельмгольца, *б* – волновод с гофрированной стенкой, *в* – периодическая структура «гребенка»

Гельфандовские образы $U_\beta(x)$ удовлетворяют очевидным свойствам

$$U_\beta(x + d) = U_\beta(x) e^{-i\beta d}, \quad U_{\beta + \frac{2\pi}{d}}(x) = U_\beta(x), \quad (74)$$

а формула обратного преобразования имеет следующий вид:

$$U(x) = \frac{d}{2\pi} \int_0^{2\pi/d} U_\beta(x) d\beta. \quad (75)$$

Применим преобразование Гельфанда к соотношениям (56), (57)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_\beta}{\partial t} + c^2 \text{grad } \tilde{\rho}_\beta &= \vec{J}_{v\beta}, \\ \frac{\partial \tilde{\rho}_\beta}{\partial t} + \text{div } \vec{v}_\beta &= J_{\rho\beta}, \quad \text{rot } \vec{v}_\beta = \vec{\Omega}_\beta. \end{aligned} \quad (76)$$

Граничные условия остаются без изменения в силу их периодичности.

Свойства преобразования Гельфанда (74) позволяют рассматривать функции $v_\beta(x, y, z, t)$ и $\tilde{\rho}_\beta(x, y, z, t)$ не во всем объеме периодической структуры, а лишь внутри элементарной ячейки, ограниченной боковыми поверхностями структуры и двумя сечениями $x = \text{const}$, расположенными на расстоянии d друг от друга. При этом на

всей поверхности элементарной ячейки заданы некоторые граничные условия: на боковых поверхностях $(\vec{v}_{s\beta} \cdot \vec{n}) = 0$, а на сечениях $x = \text{const}$ – условие

$$\vec{v}_{\beta}(x+d) = \vec{v}_{\beta}(x) e^{-i\beta d}, \quad \tilde{\rho}_{\beta}(x+d) = \tilde{\rho}_{\beta}(x) e^{-i\beta d}. \quad (77)$$

Элементарную ячейку в β -представлении можно интерпретировать как ансамбль объемных резонаторов, каждый из которых снабжен индексом β . Построим системы собственных функций таких резонаторов:

$$i\omega_s(\beta) \vec{v}_{s\beta} + c^2 \text{grad } \rho_{s\beta} = 0, \quad i\omega_s(\beta) \rho_{s\beta} + \text{div } \vec{v}_{s\beta} = 0. \quad (78)$$

Функции $\omega = \omega_s(\beta)$, очевидно, определяют закон дисперсии s -го типа колебаний в акустической периодической структуре. Собственные функции $\vec{v}_{s\beta}$ и $\rho_{s\beta}$ удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{V_0} (\vec{v}_{s\beta} \vec{v}_{m\beta}^* + c^2 \rho_{s\beta} \rho_{m\beta}^*) dV = \delta_{sm}, \quad (79)$$

где V_0 – объем элементарной ячейки.

Будем искать решение задачи (76) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\beta} &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s \vec{v}_{s\beta} - \text{rot } \vec{A}_{\beta}, \\ \tilde{\rho}_{\beta} &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s \rho_{s\beta}, \end{aligned} \quad (80)$$

подчиняя потенциал квазистатического поля $\vec{A}_{\beta}$ уравнению

$$\nabla^2 \vec{A}_{\beta} = -\vec{\Omega}_{\beta}. \quad (81)$$

Повторяя выкладки теории возбуждения резонаторов, находим

$$\frac{\partial C_{s\beta}}{\partial t} - i\omega_s(\beta) C_{s\beta} = \int_{V_0} [\vec{\Omega}_{\beta} \times \vec{v}_{\beta}] \vec{v}_{s\beta}^* dV = \int_V [\vec{\Omega} \times \vec{v}] \vec{v}_{s\beta}^* dV. \quad (82)$$

В левой части уравнения (82) интеграл по объему элементарной ячейки V_0 преобразован к интегралу по полному объему структуры V с использованием соотношений (73), (74).

Все функции в (82) имеют по параметру β период $2\pi/d$. Разложим их в ряд Фурье, что дает

$$\frac{\partial C_{sn}}{\partial t} - i \sum_m \omega_{sm} C_{s,n-m} = \int_V \vec{\Omega} [\vec{v} \times \vec{v}_{sn}^*] dV, \quad (83)$$

где

$$C_{sn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{s\beta} e^{-i\beta nd} d(\beta d), \quad \vec{v}_{sn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{v}_{s\beta} e^{-i\beta nd} d(\beta d) = \vec{v}_{s0}(x - nd, y, z), \quad (84)$$

$$\omega_{sn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_s(\beta) e^{-i\beta nd} d(\beta d). \quad (85)$$

Выполним в соотношениях (80), (81) обратное преобразование Гельфанда. В результате получим

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, y, z, t) &= \sum_s \sum_n C_{sn}(t) \vec{v}_{s0}(x - nd, y, z) - \text{rot} \vec{A}, \\ \tilde{\rho}(x, y, z, t) &= \sum_s \sum_n C_{sn}(t) \rho_{s0}(x - nd, y, z), \\ \nabla^2 \vec{A} &= -\vec{\Omega}. \end{aligned} \quad (86)$$

Соотношения (83), (86) дают решение задачи о нахождении акустического поля в периодической структуре по заданной плотности вихревых частиц $\vec{\Omega}$.

В двумерном случае $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, $\vec{A} = (0, 0, A)$. При этом соотношения (83), (86) заменой $v_x = E_y$, $v_y = -E_x$, $\Omega = \rho$, $A = \Phi$ переводятся тождественным образом в аналогичные соотношения теории возбуждения периодических электродинамических структур [25].

3. Уравнения движения вихрей и электрических зарядов

Получим уравнения движения элементарного вихря (гидродинамического «заряда») во внешнем поле, что позволит замкнуть задачу и получить самосогласованную систему уравнений.

Согласно теореме Гельмгольца [31], вихри движутся вместе с жидкостью, следовательно, скорость движения в данной точке – это также и скорость элементарного вихря, находящегося в этой точке. Если обозначить компоненты скорости вихревой частицы через U и V , то в двумерном случае можно написать следующие уравнения движения этой частицы:

$$U = v_x, \quad V = v_y. \quad (87)$$

Заметим, что скорость в такой трактовке играет двойную роль. С одной стороны – это скорость вихревых частиц, и с этой точки зрения она является переменной уравнений движения. С другой стороны, скорость – это поле излучения совокупности вихрей в объеме периодической структуры, воздействующее на вихри. С этой точки зрения скорость является объектом теории возбуждения. Именно поэтому мы построили теорию возбуждения периодических структур, избрав в качестве возбуждаемого поля скорость, а, например, не давление, как это кажется на первый взгляд более естественным и как это часто принято в акустике [32].

Воспользовавшись Таблицей, из (87) получаем

$$U = E_y, \quad V = -E_x. \quad (88)$$

Эти соотношения известны как уравнения движения заряженных частиц в адиабатическом приближении в статических перпендикулярных друг другу полях – электрическом и магнитном [6]. (В нашей нормировке статическое магнитное поле $B_0 = 1$.)

4. Решение некоторых задач гидродинамики в рамках «электронного» подхода

Чтобы продемонстрировать работоспособность развитой аналогии, решим с ее помощью несколько известных гидродинамических задач.

4.1. Плоская лента вихрей. Рассмотрим два потока жидкости, движущихся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями u (рис. 3, а). Пусть граница раздела жидкостей лежит в плоскости $y = 0$, тогда

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_1 = (u, 0), & y > 0, \\ \vec{v}_2 = (-u, 0), & y < 0. \end{cases} \quad (89)$$

В соответствии с таблицей, в качестве эквивалентной электростатической задачи следует рассмотреть ситуацию, когда в пространстве создано распределение электрического поля

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_1 = (0, u), & y > 0, \\ \vec{E}_2 = (0, -u), & y < 0. \end{cases} \quad (90)$$

Такая конфигурация поля реализуется, если в плоскости $y = 0$ располагается лист, заряженный с некоторой поверхностной плотностью σ_0 (рис. 3, б). Этот лист создает однородное электрическое поле $E_{1,2} = \pm\sigma_0/2$ ($\varepsilon_0 = 1$), что с учетом соотношений (90) приводит к равенству $\sigma_0 = 2U$, или в терминах плотности электрического заряда

$$\rho_e = 2u\delta(y), \quad (91)$$

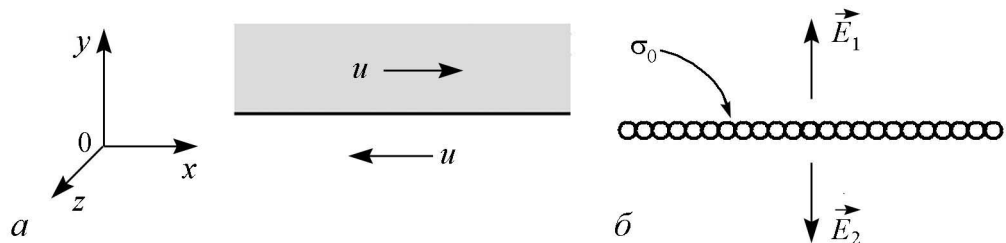


Рис. 3. Два разнонаправленных течения эквивалентны неподвижному тонкому заряженному листу

где ρ_e – плотность заряда на единицу длины оси z , $\delta(y)$ – δ -функция Дирака. Плотность электрического заряда ρ_e в соответствии с таблицей эквивалентна завихренности Ω , так что

$$\Omega = 2u\delta(y). \quad (92)$$

Таким образом, изображенное на рис. 3, а гидродинамическое течение на «электронном» языке может быть охарактеризовано как плоская лента неподвижных вихревых зарядов. Рис. 4 иллюстрирует, как поля отдельных элементарных вихрей, расположенных в плоскости $y = 0$, в своей суперпозиции формируют поле ленты.

Пусть теперь вся картина течения, изображенного на рис. 3, а, целиком движется со скоростью V направо. В этом случае

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_1 = (V + u, 0), & y > 0, \\ \vec{v}_2 = (V - u, 0), & y < 0. \end{cases} \quad (93)$$

и мы имеем задачу о движении двух потоков жидкости, скользящих друг по другу со скоростями $v_{10} = V + u$ и $v_{20} = V - u$ (рис. 5, а). Чему такая ситуация будет соответствовать в электродинамике? Снос картины течения со скоростью $\vec{V} = (V, 0)$ эквивалентен наложению постоянного внешнего электрического поля $\vec{E}_0 = (0, V)$. Наличие поперечного магнитного поля $\vec{B}_0$ в этом случае приведет к движению листа как единого целого со скоростью $E_0/B_0 = V$ ($B_0 = 1$, рис. 5, б). Итак, гидродинамическая задача о движении двух потоков жидкости со скоростями v_{10} и v_{20} на «электронном» языке – это движение плоской ленты вихрей, несущей заряд $\Omega = (v_{10} - v_{20}) \delta(y)$. Скорость вихревой ленты вычисляется по вытекающей из соотношения (93) формуле

$$V = \frac{1}{2} (v_{10} + v_{20}). \quad (94)$$

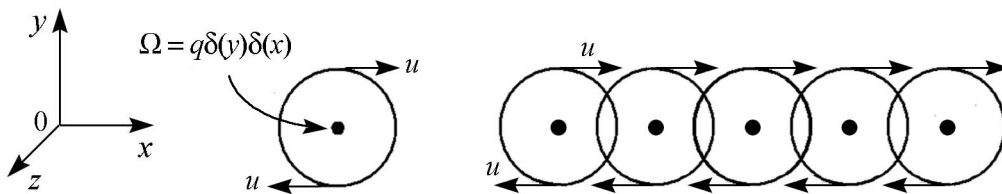


Рис. 4. Из полей отдельных вихрей формируется поле ленты

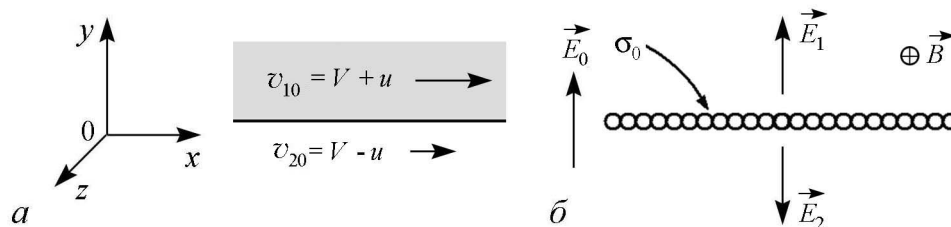


Рис. 5. Два течения, скользящих друг по другу, эквивалентны тонкому заряженному листу, движущемуся в скрещенных полях

Заметим, что правило вычисления скорости вихрей (94) эквивалентно известному в электронике правилу вычисления поля, действующего на ленточный пучок [6]:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2). \quad (95)$$

Здесь $\vec{E}_1$ – электрическое поле над лентой, $\vec{E}_2$ – электрическое поле под лентой.

4.2. Неустойчивость Гельмгольца. Рассмотрим собственные колебания в системе двух гидродинамических потоков, скользящих друг по другу со скоростями v_{10} и v_{20} . Эта задача эквивалентна исследованию собственных колебаний ленточного потока вихрей, движущегося со скоростью $v_0 = 1/2(v_{10} + v_{20})$ и несущего заряд с невозмущенной поверхностной плотностью $\sigma_0 = v_{10} - v_{20}$. Пусть лента слегка изогнулась. Как это принято в электронике, будем характеризовать ее состояние высокочастотными смещениями, $\tilde{x}(x, t)$ и $\tilde{y}(y, t)$. Запишем уравнения движения ленточного электронного пучка в скрещенных полях в адиабатическом приближении

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} &= E_y, \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} &= -E_x. \end{aligned} \quad (96)$$

Согласно развитой аналогии $\vec{E} = (-v_y, v_x)$, так что можно получить уравнения движения элементов ленты вихрей

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} &= v_x, \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} &= v_y. \end{aligned} \quad (97)$$

Здесь величины v_x и v_y имеют смысл составляющих высокочастотного поля скорости, действующего на вихри. Перепишем соотношение (97) в представлении Фурье по времени и координате x

$$\begin{aligned} i(\omega - kv_0) \tilde{x}_{\omega k} &= v_{x\omega k}, \\ i(\omega - kv_0) \tilde{y}_{\omega k} &= v_{y\omega k}. \end{aligned} \quad (98)$$

Индексы ω и k далее опускаем.

Вычислим поле $\vec{v} = (v_x, v_y)$, действующее на вихри. В анализируемой системе поле скоростей является чисто квазистатическим полем «пространственного заряда»

$$\vec{v} = -\text{rot} (\Phi \vec{e}_z), \quad (99)$$

или в электродинамических обозначениях

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi. \quad (100)$$

Для потенциала квазистатического поля Φ справедливо уравнение Пуассона (53), которое в представлении Фурье выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - k^2 \Phi = \tilde{\Omega}, \quad (101)$$

где $\tilde{\Omega}$ – возмущение плотности вихревого заряда. Для заряженной ленты $\Omega = \sigma\delta(y - \tilde{y})$, следовательно, в линейном приближении

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\sigma}\delta(y) - \sigma_0\tilde{y}\delta'(y), \quad (102)$$

где σ_0 – невозмущенная поверхностная плотность вихрей на ленте, $\tilde{\sigma}$ – ее высокочастотное возмущение, $\delta'(y)$ – производная от δ -функции. Используем закон сохранения «заряда» вихрей на ленте $\tilde{\sigma} = -\sigma_0(\partial\tilde{x})/(\partial x)$, что в представлении Фурье дает $\tilde{\sigma} = ik\sigma_0\tilde{x}$. Окончательно

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} - k^2\Phi = -ik\sigma_0\tilde{x}\delta(y) + \sigma_0\tilde{y}\delta'(y). \quad (103)$$

Для решения уравнения (103) заметим, что δ -источник в правой части этого уравнения приводит к скачку производной потенциала на ленте, а δ' -источник – к скачку самого потенциала. Используя это обстоятельство, легко найти, что

$$\Phi(y) = \begin{cases} \Phi_1(y) = Ae^{-ky}, & y > 0, \\ \Phi_2(y) = Be^{ky}, & y < 0, \end{cases} \quad (104)$$

где

$$A = \frac{\sigma_0}{2}(i\tilde{x} + \tilde{y}), \quad B = \frac{\sigma_0}{2}(i\tilde{x} - \tilde{y}). \quad (105)$$

Потенциал квазистатического поля ленты найден. Соотношение (100) и Таблица позволяют найти и само квазистатическое поле

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = ik\Phi, & v_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ E_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, & v_y &= -ik\Phi. \end{aligned} \quad (106)$$

В качестве поля, действующего на вихри, в соответствии с (94) и (95) возьмем величину

$$\vec{E} = \left[\frac{\vec{E}_1 + \vec{E}_2}{2} \right]_{y=0}, \quad \vec{v} = \left[\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} \right]_{y=0}. \quad (107)$$

где индексы 1 и 2 относятся к полям под и над лентой. Подставим в (107) соотношения (106)

$$\begin{aligned} E_x &= ik \left[\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} \right]_{y=0}, & v_x &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial y} \right]_{y=0}, \\ E_y &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial y} \right]_{y=0}, & v_y &= -ik \left[\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} \right]_{y=0}. \end{aligned} \quad (108)$$

Используя (104), (105) и (108), получаем выражение для поля, действующего на вихри, через высокочастотные смещения участков ленты

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\sigma_0 k \tilde{x}}{2}, & v_x &= \frac{\sigma_0 k \tilde{y}}{2}, \\ E_y &= \frac{\sigma_0 k \tilde{y}}{2}, & v_x &= \frac{\sigma_0 k \tilde{x}}{2}. \end{aligned} \quad (109)$$

Подставим полученные выражения в уравнения движения вихрей (98). Тогда

$$i(\omega - kv_0)\tilde{x} = \frac{1}{2}\sigma_0 k\tilde{y}, \quad i(\omega - kv_0)\tilde{y} = \frac{1}{2}\sigma_0 k\tilde{x}. \quad (110)$$

Из соотношений (110) вытекает дисперсионное уравнение

$$(\omega - kv_0)^2 + \left(\frac{\sigma_0 k}{2}\right)^2 = 0. \quad (111)$$

Вспоминая, что $v_0 = 1/2(v_{10} + v_{20})$ и $\sigma_0 = v_{10} - v_{20}$, преобразуем это уравнение к виду

$$(\omega - kv_{10})^2 + (\omega - kv_{20})^2 = 0. \quad (112)$$

Мы получили хорошо известное уравнение, описывающее неустойчивость Гельмгольца [33].

4.3. Взаимодействие гидродинамического течения с периодической структурой типа гребенки. Рассмотрим теперь разрывное гидродинамическое течение над периодической структурой типа гребенки (рис. 6). В области вне гребенки справедливы все полученные выше соотношения (96)–(104), лишь в выражении для потенциала Φ появляется дополнительное слагаемое

$$\Phi(y) = \begin{cases} \Phi_1(y) = Ae^{-ky}, & y > 0, \\ \Phi_2(y) = Be^{ky} + Ce^{-ky}, & y < 0. \end{cases} \quad (113)$$

Согласно (103), производная потенциала на ленте испытывает скачок на величину $(-ik\sigma_0\tilde{x})$, а потенциал – на $\sigma_0\tilde{y}$. Совместно с (113) это условие приводит к двум уравнениям, связывающим коэффициенты A , B и C

$$A + B - C = i\sigma_0\tilde{x}, \quad A - B - C = \sigma_0\tilde{y}. \quad (114)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$B = \sigma_0(i\tilde{x} - \tilde{y})/2. \quad (115)$$

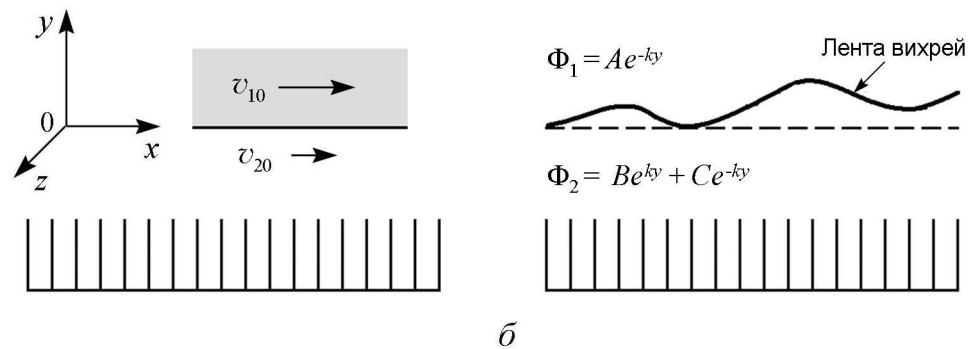


Рис. 6. Взаимодействие гидродинамического течения с периодической структурой типа «гребенка»: a – исходное невозмущенное течение; b – «группировка» вихревой ленты в поле гребенки

С помощью соотношений (108) и (113) можно найти поля, действующие на вихри

$$\begin{aligned} E_x &= ik(A + B + C)/2, \quad v_x = k(A - B + C)/2, \\ E_y &= k(A - B + C)/2, \quad v_y = -ik(A + B + C)/2. \end{aligned} \quad (116)$$

Используя (114) и уравнения движения (98), получаем

$$\begin{aligned} i(\omega - kv_0) \tilde{x} &= \sigma_0 k \tilde{y}/2 + kC, \\ i(\omega - kv_0) \tilde{y} &= \sigma_0 k \tilde{x}/2 - ikC. \end{aligned} \quad (117)$$

Таким образом, поля, действующие на вихри, складываются из полей пространственного заряда (109) и составляющей поля, обусловленной присутствием гребенки.

Соотношения (106) и (113) позволяют найти поля непосредственно на поверхности гребенки

$$\begin{aligned} E_x(-L) &= ik(Ce^{kL} + Be^{-kL}), \quad v_x(-L) = k(Ce^{kL} - Be^{-kL}), \\ E_y(-L) &= k(Ce^{kL} - Be^{-kL}), \quad v_y(-L) = -ik(Ce^{kL} + Be^{-kL}). \end{aligned} \quad (118)$$

Введем поверхностный импеданс гребенки. В электродинамике обычно полагают $Z_s = E_x/B_z$, а в акустике $Z_a = P/v_y = c^2 \rho_0 \tilde{\rho}/v_y$. Запишем гидродинамические «уравнения Максвелла» в представлении Фурье по времени

$$i\omega \vec{E} - c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = 0, \quad i\omega \vec{B} + \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (119)$$

Для двумерных задач $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, так что из первого уравнения (119) следует, что $B_z = \omega E_y / kc^2$. Используя соотношения (118) и Таблицу, находим

$$Z_s = \frac{C + Be^{-2kL}}{C - Be^{-2kL}} \frac{ikc^2}{\omega}, \quad Z_a = \frac{C - Be^{-2kL}}{C + Be^{-2kL}} \frac{i\omega \rho_0}{k}. \quad (120)$$

Конфигурация гребенки такова, что электрическое поле внутри гребенки может иметь только поперечную компоненту, а скорость – только продольную $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ и $\vec{v} = (0, v_y, 0)$ (рис. 7). Уравнения (119) совместно с очевидными граничными условиями на дне гребенки

$$E_x(-L-h) = 0, \quad v_y(-L-h) = 0. \quad (121)$$

приводят к следующим выражениям для полей внутри гребенки:

$$\begin{aligned} E_x &= D \sin \left[\frac{\omega}{c} (y + L + h) \right], \quad v_y = -D \sin \left[\frac{\omega}{c} (y + L + h) \right], \\ B_z &= \frac{1}{ic} D \cos \left[\frac{\omega}{c} (y + L + h) \right], \quad \rho = \frac{1}{ic} D \cos \left[\frac{\omega}{c} (y + L + h) \right]. \end{aligned} \quad (122)$$

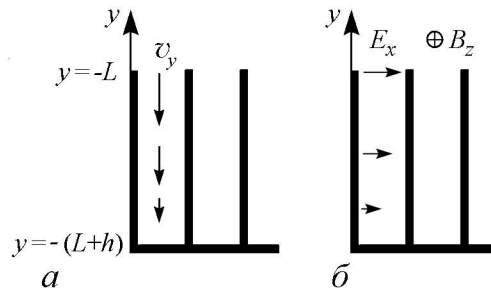


Рис. 7. Конфигурация полей внутри гребенки: а – акустическое поле скоростей, б – электрическое поле

Вычисляя эти поля в сечении $y = -L$, получаем выражения для импедансов

$$Z_a = ic \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}, \quad Z_a = ic \rho_0 \operatorname{ctg} \frac{\omega h}{c}. \quad (123)$$

Записав соотношения (115), (117), (120), (123) совместно, приходим к следующему равенству

$$\left(k - \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}\right) \left[(\omega - kv_0)^2 + \left(\frac{\sigma_0 k}{2}\right)^2\right] + \left(k + \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}\right) (\omega - kv_0) k \sigma_0 e^{-2kL} = 0. \quad (124)$$

Поскольку $v_0 = 1/2(v_{10} + v_{20})$ и $\sigma_0 = (v_{10} - v_{20})$, из (124) получаем

$$\begin{aligned} &\left(\omega - ck \operatorname{ctg} \frac{\omega h}{c}\right) \left[(\omega - kv_{10})^2 + (\omega - kv_{20})^2\right] = \\ &= -e^{-2kL} \left(\omega + ck \operatorname{ctg} \frac{\omega h}{c}\right) \left[(\omega - kv_{10})^2 - (\omega - kv_{20})^2\right]. \end{aligned} \quad (125)$$

Это дисперсионное уравнение и описывает систему, изображенную на рис. 6. В работах [2, 3] оно в случае $v_{20} = 0$ (слой жидкости между верхним потоком и гребенкой покоится) было найдено в рамках обычного гидродинамического подхода. Нами это уравнение получено на основе «электронных» представлений об уравнении движения вихревых зарядов, о полях, воздействующих на вихри, о разбиении поля на поле «пространственного заряда» и поле, созданное периодической системой. Эти представления позволяют осуществить обобщение теории взаимодействия гидродинамических течений с периодическими структурами на случай структур с произвольной геометрией.

5. Взаимодействие гидродинамических течений с полями произвольных периодических структур

Для описания взаимодействия гидродинамического течения с произвольной периодической структурой необходимо построить самосогласованную систему уравнений, состоящую из уравнений возбуждения акустических полей и уравнения движения источников поля. Воспользуемся уравнениями возбуждения периодических структур (83) и (86). Полагаем, что поток эффективно взаимодействует с одним типом поверхностной волны, так что в суммах в (86) можно оставить члены с одним индексом s , отвечающим этому типу волны

$$\vec{v}(x, y, t) = \sum_n C_{sn}(t) \vec{v}_s(x - nd, y) + \vec{v}_{кс}, \quad (126)$$

$$\frac{\partial s_n}{\partial t} - i \sum_m \omega_{sm} C_{s,n} - m(t) = \iint \left[\vec{j}(x, y) \times \vec{v}_s^*(x - nd, y) \right] \vec{e}_z dy dx. \quad (127)$$

В формуле (127) интегрирование по z уже выполнено с учетом того, что задача двумерная.

Перейдем в соотношениях (126), (127) к представлению Фурье по времени и координате x (индексы ω и k опускаем)

$$\vec{v} = \vec{v}_s \sum_n C_{sn} e^{iknd} + \vec{v}_{\text{кс}}, \quad (128)$$

$$i \left(\omega C_n - \sum_m \omega_{sm} C_{s,n} - m \right) = \frac{1}{2\pi} \iint [\vec{j}(k') \times \vec{v}_s^*(k')] \vec{e}_z e^{-ik'nd} dk' dy. \quad (129)$$

Умножим уравнение (129) на e^{iknd} и проведем суммирование по n . Меняя во втором члене порядок суммирования и учитывая, что в соответствии с (85) $\omega_s(k) = \sum_n \omega_{sn} e^{iknd}$, получаем

$$i [\omega - \omega_s(k)] \sum_{p=n} -m C_{sp} e^{ipd} = \frac{1}{2\pi} \iint [\vec{j} \times \vec{v}_s^*] \vec{e}_z e^{i(k-k')nd} dk' dy. \quad (130)$$

Применив формулу $\sum_n e^{i(k-k')nd} = 2\pi \sum_m \delta(k - k' + 2\pi m/d)$ и вводя обозначение $C_s = \sum_n C_{sn} e^{iknd}$, проинтегрируем правую часть соотношения (130)

$$\vec{v} = C_s \vec{v}_s + \vec{v}_{\text{кс}}, \quad (131)$$

$$i [\omega - \omega_s(k)] C_s = \sum_m I(k + 2\pi m/d), \quad (132)$$

где

$$I(k) = \int [\vec{j} \times \vec{v}_s^*] \vec{e}_z dy. \quad (133)$$

Уравнение (132) будем использовать в дальнейшем как уравнение возбуждения в рамках самосогласованной задачи. Как и в электронике приборов с длительным взаимодействием со скрещенными полями (к ним относятся лампы бегущей и обратной волны типа М), в это уравнение в качестве величины, характеризующей источник возбуждения, входит величина $I(k)$, выражающаяся через плотность тока завихренности $\vec{j}$ и собственную функцию системы $\vec{v}_s$. Величину $I(k)$ по аналогии с электроникой будем называть возбуждающим током. В качестве отклика системы на воздействие вихрей будем рассматривать величину амплитуды C_s . Если амплитуда C_s известна, то соотношение (131) позволяет полностью восстановить картину акустического поля в системе.

Запишем теперь уравнения движения вихревой ленты (98), используя выражение для высокочастотного поля скоростей (131):

$$\begin{aligned} i(\omega - kv_0) \tilde{x} &= C_s v_{sx} + v_x, \\ i(\omega - kv_0) \tilde{y} &= C_s v_{sy} + v_y. \end{aligned} \quad (134)$$

Считаем, что квазистатическое поле $\vec{v}_{\text{кс}}$, описывающее собственные поля течения, дается соотношениями (109). Такое приближение заведомо справедливо в случае, когда периодическая структура достаточно удалена от гидродинамического течения. (Как говорят в электронике, используем приближение «бесконечно удаленных

электродов»). Тогда

$$\begin{aligned} i(\omega - kv_0)\tilde{x} &= C_s v_{sx} + \sigma_0 k \tilde{y}/2, \\ i(\omega - kv_0)\tilde{y} &= C_s v_{sy} + \sigma_0 k \tilde{x}/2. \end{aligned} \quad (135)$$

Эти соотношения позволяют выразить смещения участков вихревой ленты через амплитуду C_s , с которой возбужден рассматриваемый тип колебаний периодической структуры

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= -\frac{i(\omega - kv_0)v_{sx} + \sigma_0 k v_{sy}/2}{(\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k/2)^2} C_s, \\ \tilde{y} &= -\frac{i(\omega - kv_0)v_{sy} + \sigma_0 k v_{sx}/2}{(\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k/2)^2} C_s. \end{aligned} \quad (136)$$

Выразим возбуждающий ток I через высокочастотные смещения участков вихревой ленты. Из определения тока завихренности вытекает соотношение

$$\vec{j} = \left(\Omega_0 \tilde{v}_x + \tilde{\Omega} v_0 \right) \vec{e}_x + \vec{v}_y \Omega_0 \vec{e}_y. \quad (137)$$

Здесь $\Omega_0 = \sigma_0 \delta(y)$ – невозмущенная плотность вихрей, $\tilde{\Omega}$ – ее возмущение, v_0 – скорость вихрей.

Используя (137), распишем выражение для возбуждающего тока (133) по компонентам

$$I = v_0 \int \tilde{\Omega} v_{sy}^* dy + \tilde{v}_x \int \Omega_0 v_{sy}^* dy - \tilde{v}_y \int \Omega_0 v_{sx}^* dy. \quad (138)$$

В электронике приборов со скрещенными полями с длительным взаимодействием второе и третье слагаемые в соотношениях, аналогичных (138), отбрасывают. Это связано с тем, что взаимодействие электронного потока с электромагнитной волной в периодической структуре предполагается синхронным. Величины высокочастотных скоростей $v_x = E_y/B$ и $v_y = -E_x/B$ не содержат резонансных знаменателей, а величина $\tilde{v}_x \sim \tilde{x}$, $\tilde{v}_y \sim E_x, y/(\omega - kv_0)(\omega - kv_0)$, аналогичная $\tilde{\Omega}$, содержит такой знаменатель. Поэтому в электронике лишь сгруппированный по плотности ток эффективно возбуждает поля. В гидродинамике приходится иметь дело также и с ситуациями, когда синхронизма в области действительных частот и волновых чисел нет (см. ниже, п. 6). В этом случае указанное предположение несправедливо, и необходимо учитывать все три слагаемых в (138).

Вычислим первый интеграл в соотношении (138). Используя выражение (102) для переменной составляющей плотности вихрей $\tilde{\Omega} = ik\sigma_0 \tilde{x} \delta(y) - \sigma_0 \tilde{y} \delta'(y)$ и правила интегрирования δ -функции и ее производной, получаем

$$I_1 = v_0 \int \tilde{\Omega} v_{sy}^* dy = \sigma_0 v_0 \left[ik \tilde{x} v_{sy}^* + \tilde{y} \frac{\partial v_{sy}^*}{\partial y} \right]_{y=0}. \quad (139)$$

Здесь собственная функция и ее производная вычислены в точке $y = 0$, отвечающей положению невозмущенной границы раздела потоков.

Как и раньше, считаем, что жидкость в области движения вихрей несжимаема. Следовательно, в этой области $\text{div } \vec{v}_s = 0$ и $\partial v_{sx}/\partial x + \partial v_{sy}/\partial y = 0$, что в представлении Фурье дает $ikv_{sx} = \partial v_{sy}/\partial y$. Тогда

$$I_1 = ik\sigma_0 v_0 (\tilde{x}v_{sy}^* - \tilde{y}v_{sx}^*). \quad (140)$$

Вычислим второй и третий интегралы в (138). Для компонент возмущения скорости справедливы соотношения (98), подставляя которые в (138) и учитывая, что $\Omega_0 = \sigma_0 \delta(y)$, получаем

$$I_2 + I_3 = \int (\tilde{y}v_{sx}^* - \tilde{x}v_{sy}^*) \Omega_0 dy = i\sigma_0 (\omega - kv_0) [\tilde{x}v_{sy}^* - \tilde{y}v_{sx}^*]_{y=0}. \quad (141)$$

Складывая (141) и (140), получаем выражение для возбуждающего тока через высокочастотные смещения участков вихревой ленты

$$I = i\sigma_0 \omega (\tilde{x}v_{sy}^* - \tilde{y}v_{sx}^*). \quad (142)$$

Если воспользоваться соотношениями (136), то можно выразить возбуждающий ток через амплитуду C_s

$$I = \sigma_0 \omega \frac{(\omega_0 - kv_0) (v_{sx}v_{sy}^* - v_{sy}v_{sx}^*) + i\sigma_0 k (|v_{sy}|^2 - |v_{sx}|^2) / 2}{(\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k / 2)^2} C_s. \quad (143)$$

Если жидкость в области движения вихрей несжимаема, то для собственных функций справедливы соотношения

$$\begin{aligned} v_{sy}(k) &= v_{s0}(k) e^{-kL}, \\ v_{sx}(k) &= i v_{s0}(k) e^{-kL}. \end{aligned} \quad (144)$$

Здесь $v_{s0}(k)$ – некоторая функция k , L – расстояние от поверхности структуры до границы раздела невозмущенных потоков жидкости. Тогда

$$\begin{aligned} v_{sx}v_{sy}^* - v_{sy}v_{sx}^* &= 2i |v_{s0}|^2 e^{-2\text{Re } kL}, \\ |v_{sy}|^2 - |v_{sx}|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (145)$$

Подставим соотношения (145) в (143):

$$\left[(\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k / 2)^2 \right] I = 2i\sigma_0 \omega |v_{s0}(k)|^2 e^{-2\text{Re } kL} (\omega - kv_0) C_s. \quad (146)$$

Это уравнение для тока I в представлении Фурье. Теперь задача замкнулась: имеется уравнение возбуждения амплитуды рабочего типа волны C_s током I (132) и уравнение динамики тока I под воздействием возбужденной с амплитудой C_s волны в периодической структуре (146). Из этих двух соотношений находим дисперсионное уравнение задачи

$$\omega - \omega_s(k) = 2\sigma_0 \omega \sum_m \frac{\left(\omega - kv_0 - \frac{2\pi m v_0}{d} \right) \left| v_{s0} \left(k + \frac{2\pi m v_0}{d} \right) \right|^2 e^{-2\text{Re } kL}}{\left(\omega - kv_0 - \frac{2\pi m v_0}{d} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\sigma_0 k + \frac{2\sigma_0 m \pi}{d} \right)^2} e^{-\frac{4m\pi L}{d}}. \quad (147)$$

Если период структуры d меньше или порядка расстояния от структуры до потока L , то все члены с номерами $m \neq 0$ в соотношении (147) экспоненциально малы, и ими можно пренебречь:

$$[\omega - \omega_s(k)] \left[(\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k/2)^2 \right] = 2e^{-2\text{Re } kL} \sigma_0 \omega (\omega - kv_0) |v_{s0}(k)|^2. \quad (148)$$

Если же $d > L$, то сумму в (147) следует сохранить. Используя, что $v_0 = (v_{10} + v_{20})/2$ и $\sigma_0 = v_{10} - v_{20}$, получаем

$$[\omega - \omega_s(k)] \left[(\omega - kv_{10})^2 + (\omega - kv_{20})^2 \right] = -\omega R_s(k) \left[(\omega - kv_{10})^2 - (\omega - kv_{20})^2 \right], \quad (149)$$

где $R_s(k) = (2/k) |v_{s0}(k)| e^{-2\text{Re } kL}$. Уравнение (149) описывает взаимодействие разрывного гидродинамического течения с определенным типом поверхностной волны в периодической структуре с произвольной геометрией. Функция $\omega_s(k)$ определяет дисперсию этой волны, а величина $R_s(k)$ – эффективность ее возбуждения. $R_s(k)$ играет в задачах гидродинамики такую же роль, как и сопротивление связи [6] в электронике.

6. Для каких гидродинамических устройств применимы результаты теории приборов с длительным взаимодействием М типа?

Из уравнения (148) в пределе $L \rightarrow \infty$ получается дисперсионное уравнение, описывающее колебания свободного потока

$$(\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k/2)^2 = 0, \quad (150)$$

и закон дисперсии свободной поверхностной волны

$$\omega - \omega_s(k) = 0. \quad (151)$$

Нетрудно видеть, что собственные колебания потока неустойчивы. При этом возможны две качественно различные ситуации.

Пусть сначала скорости верхнего и нижнего потоков жидкости, взаимодействующих с периодической структурой, примерно равны друг другу: $v_{10} \approx v_{20}$ (рис. 8, а). Тогда величина $\sigma_0 = v_{10} - v_{20}$, ответственная за собственную неустойчивость тангенциального разрыва, мала, и в системе возможно синхронное взаимодействие потока с волной в структуре. При этом связь потока и поверхностной волны существенна только в области частот и волновых чисел вблизи точки (k_0, ω_0) пересечения дисперсионных характеристик $\omega = kv_0$ и $\omega = \omega_s(k)$:

$$\omega_0 = k_0 v_0, \quad \omega_0 = \omega_s(k_0). \quad (152)$$

В малой окрестности этой точки функцию $\omega_s(k)$ можно разложить в ряд Тейлора. Если взаимодействие происходит вдали от границы полосы пропускания периодической структуры, то групповая скорость в точке пересечения характеристик $v_{\text{кс}} = d\omega_s/dk|_{k=k_0}$ отлична от нуля. Тогда

$$\omega_s(k) = \omega_0 + v_{\text{кс}}(k - k_0). \quad (153)$$

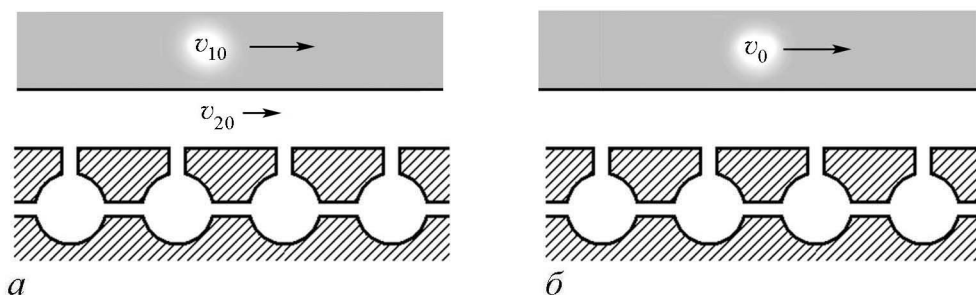


Рис. 8. Два разных случая взаимодействия течения с акустической периодической структурой: $a - v_{10} \approx v_{20}$, система со слабой собственной неустойчивостью, для нее справедлива теория ламп бегущей и обратной волны типа М; $b - v_{20} = 0$, система с сильной собственной неустойчивостью, в электронике она отвечает работе приборов в режиме больших токов

В этой же окрестности все коэффициенты дисперсионного уравнения (148) кроме разностей типа $(\omega - kv_0)$ можно вычислить в точке синхронизма (k_0, ω_0) . Используя (153), получаем

$$[\omega - \omega_0 - v_{\text{к}}(k - k_0)] [(\omega - kv_0)^2 + \omega_p^2] = \mp \varepsilon^2 (\omega - kv_0). \quad (154)$$

Здесь $\omega_p^2 = \sigma_0^2 k_0^2 / 4$; $\varepsilon^2 = |\sigma_0| k_0^2 v_0 R_s(k_0)$; верхний знак берется, если $\sigma_0 < 0$, нижний – если $\sigma_0 > 0$. Рассмотрим далее случай, когда групповая скорость $v_{\text{к}}$ в точке пересечения характеристик положительна. Введем следующие обозначения:

$$\beta = k, \quad \beta_e = \frac{\omega}{v_0}, \quad \beta_p = \frac{\omega_p}{v_0}, \quad \beta_0 = \frac{\omega - \omega_0 + k_0 v_{\text{к}}}{v_{\text{к}}}, \quad D^2 = \frac{\varepsilon^2 v_0}{\omega^2 v_{\text{к}}} \quad (155)$$

и представим соотношение (154) в виде

$$(\beta - \beta_0) [(\beta_e - \beta)^2 + \beta_p^2] = \mp D^2 \beta_e^2 (\beta_e - \beta). \quad (156)$$

Уравнение (156) совпадает с дисперсионным уравнением лампы бегущей волны типа М [6], причем D играет роль параметра усиления. Заметим, что, если скорость верхнего потока меньше скорости нижнего, то $\sigma_0 < 0$, и в соотношении (156) стоит минус. В этом случае связь потока и поля приводит к неустойчивости, даже если отбросить собственную неустойчивость потока. Если же скорость верхнего потока больше скорости нижнего, то в (156) стоит плюс, и в пренебрежении собственной неустойчивостью связь волн является пассивной. В электронике первая ситуация отвечает такой конструкции лампы, когда замедляющая система расположена на положительном электроде (аноде), а вторая – на отрицательном электроде («холодном» катоде).

Если групповая скорость в точке пересечения дисперсионных характеристик отрицательна, то уравнение (148) приводится к уравнению лампы обратной волны типа М [6].

Таким образом, полными аналогами приборов с длительным взаимодействием типа М являются гидродинамические устройства с резонансным слоем жидкости, который находится в условиях синхронного взаимодействия с поверхностной волной в периодической структуре. Для таких устройств можно использовать известные результаты теории ламп бегущей и обратной волны типа М.

Иная ситуация возникает, если скорости верхнего и нижнего потоков существенно отличаются. Сюда же относится случай, когда слой жидкости между верхним потоком и структурой покоится (рис. 8, б). При этом собственная неустойчивость потока сильная, и синхронного взаимодействия в области действительных частот и волновых чисел нет. (На это обстоятельство было указано в работах [2, 3]; мы вернемся к анализу некоторых результатов этих работ во второй части статьи.) Тем не менее аналогия с электронными устройствами сохраняется. При этом, однако, должны рассматриваться режимы, когда ток пучка велик, и, соответственно, велик его пространственный заряд. Действительно, для электроники обращение в нуль скорости нижнего потока жидкости эквивалентно требованию, чтобы поверхностная плотность заряда ленточного пучка достигала величины, достаточной для компенсации статического электрического поля у отрицательного электрода: $\sigma_0/2\varepsilon_0 = E_0$. Такие режимы в теории лучевых приборов типа М ранее не анализировались.

Заключение

Уравнения динамики невязкой сжимаемой жидкости в двумерном случае оказывается возможным представить в форме, эквивалентной уравнениям Максвелла с магнитными токами. Отличие от электродинамики проявляется в появлении дополнительного соленоидального электрического тока, что, однако, не нарушает структуры уравнений.

Уравнения возбуждения объемных резонаторов и периодических структур гидродинамическими течениями и электронными потоками находятся в точном соответствии друг другу в двумерном случае, когда собственные акустические колебания в структуре можно полагать линейными, а жидкость в области движения вихрей – несжимаемой.

Уравнения движения вихревых частиц, совокупность которых отвечает гидродинамическому течению, в двумерном случае эквивалентны уравнениям движения электрических зарядов в статических скрещенных полях, электрическом и магнитном.

Развитая аналогия позволяет построить самосогласованную теорию взаимодействия гидродинамических течений с полями периодических структур. Теория лучевых электронных приборов СВЧ со скрещенными полями может быть применена непосредственно к анализу гидродинамических устройств со слабой собственной неустойчивостью потока. Для устройств с сильной собственной неустойчивостью гидродинамического течения аналогия сохраняется, однако соответствующие электронные приборы должны работать в режиме больших токов.

Для трехмерных задач прямой и полной аналогии между электродинамикой и гидродинамикой нет, но теорию возбуждения акустических периодических структур можно строить, следуя логике и содержанию электродинамической теории.

Работа поддержана грантами ведущих научных школ России НШ-828.2014.2 и НШ-1726.2014.2 (разделы 1,3-6). Часть работы, выполненная С.П.К. (раздел 2), поддержана грантом РНФ 15-12-20035.

Библиографический список

1. Элашии Ш. Волны в активных и пассивных периодических структурах // ТИИЭР. 1976. Т. 64, № 12. С. 18.
2. Андронов А.А., Фабрикант А.Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука. 1979, С. 68–104.
3. Андронов А.А., Фабрикант А.Л. К теории аэродинамического самовозбуждения звука: усиление поверхностных волн // Акустический журнал. 1980. Т. 26, № 5. С. 655–662.
4. Пирс Дж. Лампа с бегущей волной. М.: Сов. Радио, 1952. 230 с.
5. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. Радио, 1973. 400 с.
6. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970. 584 с.
7. Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ, 1979. 298 с.
8. Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В.Н. Шевчика и Д.И. Трубецкова. Саратов: Изд-во СГУ, 1975. 194 с.
9. Стретт Дж.В. (лорд Рэлей). Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.
10. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. М.: Мир, 1966. С. 246–249.
11. Бреховских Л.М. Поверхностные волны в акустике // Акустический журнал. 1959. Т. 5, № 1. С. 4–13,
12. Лепендин Л.Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
13. Лейман В.Г. Адиабатическая теория неустойчивости электронного потока в скрещенных полях // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1968, № 8. С. 26–34.
14. Лейман В.Г. Об устойчивости системы параллельных электронных потоков, фокусируемых магнитным полем // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1967. № 8. С. 15–26.
15. Хокни Р. Методы расчета потенциала и их приложения // В кн.: Вычислительные методы в физике плазмы. М.: Мир, 1974. С. 143–212.
16. Кузнецов С.П. Турбулентное движение электронного потока в скрещенных полях // ЖТФ. 1977. Т. 47, № 12. С. 2483–2487.
17. Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 1952. Vol. 211, № 1107. P. 564–587.
18. Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 1954. Vol. 222, № 1148. P. 1–32.
19. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.

20. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. О характере неустойчивости в ЛБВ вблизи границы полосы пропускания // Известия вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 9. С. 1104–1112.
21. Кузнецов А.П. Смена характера неустойчивости в системе двух слабо связанных волн // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8, № 15. С. 941–944.
22. Hung D.M.H. et al. Absolute instability near the band edge of traveling-wave amplifiers // Physical Review Letters. 2015. Vol. 115. № 12. P. 124801.
23. Гуань-дин-хуа. К теории возбуждения поверхностных звуковых волн // Акустический журнал. 1961. Т. 7, № 2. С. 181–184.
24. Meyer E. Neuere analogien zwischen akustischen und elektromagnetischen Schwingungen und Wellenfeldern. 4-th International congress Acoustics. Copenhagen. 1963. Vol. 2. P. 139–156.
25. Кузнецов С.П. Об одной форме уравнений возбуждения периодического волновода // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, № 2. С. 419–421.
26. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. С. 10.
27. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Сов. Радио, 1957. 582 с.
28. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. С. 18.
29. Гельфанд И.М. Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. 1950. Т. 73, № 1. С. 1117–1120.
30. Гельфанд И.М. О формулах преобразования Фурье // Математическое просвещение. 1960. Вып. 5. С. 155–159.
31. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1966. Т. 7. С. 250–253.
32. Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. 501 с.
33. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
34. Kambe T. A new formulation of equations of compressible fluids by analogy with Maxwell's equations // Fluid dynamics research. 2010. Vol. 42. № 5. 055502.
35. Кубанский П.Н. Поведение резонансной системы в потоке // ЖТФ. 1957. Т. 27, № 1. С. 180–188.
36. Yoshikawa S. Underwater organ pipes // J. Acoust. Soc. Jap. (E). 1984. Vol. 5. № 4. P. 211–221.
37. Nelson P.A., Halliwell N.A., Doak P.E. Fluid dynamics of a flow excited resonance, part II: flow acoustic interaction // Journal of Sound and Vibration. 1983. Vol. 91. № 3. P. 375–402.
38. Panton R.L., Miller J.M. Excitation of Helmholtz resonator by a turbulent boundary layer // The Journal of the Acoustical Society of America, 1975. Vol. 58. № 4. P. 800–806.

Поступила в редакцию 8.10.2015

ANALOGY IN INTERACTIONS OF ELECTRONIC BEAMS AND HYDRODYNAMIC FLOWS WITH FIELDS OF RESONATORS AND PERIODIC STRUCTURES

Part 1

A. P. Kuznetsov^{1,2}, S. P. Kuznetsov^{2,3}, D. I. Trubetskov^{1,4}

¹Saratov State University

²Kotel'nikov Institute of Radio-engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

³Udmurt State University, Izhevsk

⁴National Research Nuclear University MEPhI, Moscow

The hydrodynamic equations of inviscid compressible fluid are converted to a form suitable for development of self-consistent theory of interaction of hydrodynamic flows with resonators and periodic structures by analogy with the theory of microwave electronics devices with crossed electric and magnetic fields. We consider excitation of the acoustic velocity fields by the sources provided by vorticity in the flow. For two-dimensional problems, neglecting by nonlinearity of natural acoustic oscillations and by compressibility of the fluid in the domain of vortex motion, we obtain the excitation equations of acoustic resonators in a form entirely analogous to the equations for resonators in electrodynamics. For three-dimensional resonators there is no complete analogy, but we provide a derivation corresponding to the electrodynamics theory in general structure. To illustrate solutions of self-consistent equations we consider dynamics of a flat vortex tape interacting with a comb-type periodic structure. Also we consider the self-consistent problem for the case of interaction of the vortex flow with an arbitrary periodic structure. The dispersion equation is obtained, and on the basis of its analysis some designs of hydrodynamic devices are suggested analogous to the electronic beam devices with crossed fields.

Keywords: Electron beam, hydrodynamic flow, vortices, periodic structures, theory of excitation.

References

1. *Elachi C.* Waves in active and passive periodic structures: A review // Proceedings of the IEEE. 1976. Vol. 64, № 12. P. 1666–1698.
2. *Andronov A.A., Fabrikant A.L.* Landau damping, wind waves and whistle // Nonlinear Waves. 1979. S. 68–104. (in Russian).
3. *Andronov A.A., Fabrikant A.L.* To the theory of aerodynamic self-excitation of sound: amplification of surface waves // Akusticheskij Zhurnal. 1980. Vol. 26, № 5. S. 655–662 (in Russian).
4. *Pierce J.R.* Traveling-Wave Tubes // Bell System Technical Journal. 1950. Vol. 29. № 3. P. 390–460.
5. *Weinstein L.A., Solntsev V.A.* Lectures on microwave electronics. Moscow: Sov. Radio, 1973. 400 s. (in Russian).
6. *Shevchik V.N., Trubetskov D.I.* Analytical methods of calculation in microwave electronics. Moscow: Sov. Radio, 1970. 584 s. (in Russian).

7. The relativistic high-frequency electronics. Gorky: Inst. Appl. Phys, 1979. 298 s. (in Russian).
8. Electronics of the backward wave tubes / Eds V.N. Shevchik and D.I. Trubetskoy. Saratov State University. 1975. 194 s. (in Russian).
9. *Rayleigh L.* The Theory of Sound. Dover: New York, 1945.
10. *Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M.L.* The Feynman Lectures on Physics. Addison Wesley, 1963. Chapter 12.
11. *Brekhovskich L.M.* Surface waves in acoustics. Review // *Akusticheskij Zhurnal*. 1959. Vol. 5, № 1. S. 4–13 (in Russian).
12. *Lependin L.F.* Acoustics. Moscow: Higher School. 1978. 448 s. (in Russian).
13. *Leiman V.G.* The adiabatic theory of the instability of the electron beam in crossed fields // *Elektronnaya tekhnika. Ser. Elektronika SVCh*. 1968. № 8. S. 26–34. (in Russian).
14. *Leiman V.G.* The stability of the system of parallel electron beams, the focusing magnetic field // *Elektronnaya tekhnika. Ser. Elektronika SVCh*. 1967. № 8. S. 15–26. (in Russian).
15. *Hockney R.W.* The potential calculation and some applications // In *Methods in Computational Physics*. Vol. 9. New York: Academic Press, 1970. P. 135–211.
16. *Kuznetsov S.P.* Turbulent motion of the electron beam in crossed fields // *Zh. Tekh. Fiz.* 1977. Vol. 47, № 12. S. 2483–2487. (in Russian).
17. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. I. General theory // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 1952. Vol. 211, № 1107. P. 564–587.
18. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 1954. Vol. 222, № 1148. P. 1–32.
19. *Rabinovich M.I., Trubetskoy D.I.* Oscillations and waves: in linear and nonlinear Systems. Springer Science & Business Media, 2012. 578 p.
20. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P.* Nature of the instability in the region of the limit of the passband // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1980. Vol. 23, № 9. P. 736–743.
21. *Kuznetsov A.P.* Nature of the instability in a system of two weakly coupled waves // *Sov. Tech. Phys. Lett.* 1982. Vol. 8, № 8. P. 408.
22. *Hung D.M.H. et al.* Absolute instability near the band edge of traveling-wave amplifiers // *Physical Review Letters*. 2015. Vol. 115. № 12. P. 124801.
23. *Din-wha Guan.* To the theory of acoustical surface waves excitation // *Akusticheskij Zhurnal*. 1961. Vol. 7, № 2. S. 181–184. (in Russian).
24. *Meyer E.* Neuere analogien zwischen akustischen und electromagnetischen Schwingungen und Wellenfeldern // 4-th International congress Acoustics. Copenhagen. 1963. Vol. 2. P. 139–156.
25. *Kuznetsov S.P.* On one form of excitation equations of a periodic waveguide // *Sov. J. Commun. Technol. Electron.* 1980. Vol. 25. P. 419–421.

26. *Rudenko O.V., Soluyan S.I.* Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. Moscow: Nauka, 1975. S. 10. (in Russian).
27. *Weinstein L.A.* Electromagnetic waves. Moscow: Sov. Radio, 1957. 582 s. (in Russian).
28. *Strelkov S.P.* Introduction to the theory of vibrations. Moscow: Nauka, 1964. 437 s. (in Russian).
29. *Gelfand I.M.* Expansion in eigenfunctions of an equation with periodic coefficients // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1950. Vol. 73, № 1. S. 1117–1120. (in Russian).
30. *Gelfand I.M.* On formulas of Fourier transform // *Matematicheskoe prosveshchenie*. 1960. № 5. S. 155–159. (in Russian).
31. *Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M.L.* The Feynman Lectures on Physics. Addison Wesley. 1963. Chapter 40.
32. The modern hydrodynamics. Advances and problems. Moscow: Mir. 1984. 501 s. (in Russian).
33. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. Pergamon Press. 1959. 548 p.
34. *Kambe T.* A new formulation of equations of compressible fluids by analogy with Maxwell's equations // *Fluid dynamics research*. 2010. Vol. 42, № 5. 055502.
35. *Kubanskii P.N.* The behavior of the resonant system in stream // *Zh. Tekh. Fiz.* 1957. Vol. 27, № 1. P. 180–188.
36. *Yoshikawa S.* Underwater organ pipes // *J. Acoust. Soc. Jap. (E)*. 1984. Vol. 5, № 4. P. 211–221.
37. *Nelson P.A., Halliwell N.A., Doak P.E.* Fluid dynamics of a flow excited resonance, part II: flow acoustic interaction // *Journal of Sound and Vibration*. 1983. Vol. 91, № 3. P. 375–402.
38. *Panton R.L., Miller J.M.* Excitation of Helmholtz resonator by a turbulent boundary layer // *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1975. Vol. 58, № 4. P. 800–806.



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета. Имеет звание профессора. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач) и др.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 www.sgtnd.narod.ru
 E-mail: apkuz@rambler.ru

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988). Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Автор монографии «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», монографии «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены одиннадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
426034 Ижевск, ул. Университетская, 1
Удмуртский государственный университет
E-mail: spkuz@yandex.ru

Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
115409 Москва, Каширское шоссе, 31
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
E-mail: dtrubetskov@yahoo.com