

УДК 517.9

П.В. Купцов, А.В. Купцова**ФИЗИЧЕСКИ МОТИВИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СЕТЕЙ
НА ОСНОВЕ ОТОБРАЖЕНИЙ ИКЕДЫ**

Проанализированы известные из литературы формальные способы введения связей между отображениями Икеды и предложены три модели динамических сетей, допускающих реализацию в виде реальных физических систем. Ценность предложенных моделей в том, что результаты их теоретического исследования в отличие от формально построенных сетей заведомо можно будет проверить в эксперименте и найти им практические применения.

Сложные динамические сети, отображение Икеды, система Дуффинга, импульсное воздействие

P.V. Kuptsov, A.V. Kuptsova**PHYSICALLY MOTIVATED MODELS OF DYNAMICAL NETWORKS BASED
ON IKEDA MAPS**

The paper deals with analysis of the formal coupling schemes of Ikeda maps and presents three models of dynamical networks that can be implemented as real physical systems. These models are important for further theoretical studies since the expected results can obviously be verified experimentally and can be valuable for practical applications.

Complex dynamical networks, Ikeda map, Duffing oscillator, impulse action

В последнее время стало понятно, что сложные сети, т.е., состоящие из большого числа узлов с нетривиальной структурой связей, можно использовать в качестве моделей самых разных систем – от физических до биологических, социальных и экономических [1]. Существуют разные виды сложных сетей. Можно указать, например, случайные сети [1], сети с безмасштабной структурой (в английской литературе они называются *scale-free networks*) [2], маломировые сети (*small-world networks*) [3], географические сети [4].

Значительный интерес вызывают так называемые динамические сети, в узлах которых помещены динамические системы, взаимодействующие друг с другом по линиям связей сети [1, 5]. Большое количество работ посвящено изучению сложной динамики такого рода систем. Например, одной из наиболее важных задач является изучение различных форм синхронизации динамических сетей [1, 6-8]. В зависимости от топологии и свойств узловых осцилляторов синхронизация сети может быть полной или фазовой, захватывать всю сеть или приводить к формированию кластеров [5, 9, 10]. Ещё один вид синхронизации – так называемая опосредованная синхронизация (*remote synchronization*), изучается в [11, 12].

Известно, что даже простейшие сети, имеющие регулярную и однородную структуру связей, такие как, например, решётки связанных отображений, могут демонстрировать далеко нетривиальное поведение [13]. В случае же сложной топологии динамика может быть ещё более богатой. В работе [14] показано, что звездчатая структура связей между узлами приводит к очень сильной мультистабильности, а в [15] на примере безмасштабных сетей, базовыми «строительными» элементами которых являются звездчатые структуры, изучаются различные формы кластеризации и связанные с ней закономерности локализации так называемых ковариантных ляпуновских векторов [16].

При изучении сложной динамики нелинейных систем огромную роль играют канонические модели, которые строятся на основе физических систем посредством принятия определённых упрощающих предположений. В качестве примера можно привести систему Лоренца и логистическое отображение. Важность изучения таких упрощённых систем обусловлена универсальностью динамических сценариев. Известный детальный сценарий того или иного поведения, полученный для упрощённой системы, служит отправной точкой при исследовании более сложной реальной системы.

Аналогичный подход имеет смысл применять при изучении сложных динамических сетей. Очевидный шаг состоит в том, чтобы строить модельные сети, связывая между собой известные канонические осцилляторы. Однако проблема в том, что связь в уравнения может быть введена разными способами, и априори не ясно, существует ли хотя бы принципиальная возможность реализовать формально сконструированную связь в виде реальной физической системы. Цель данной работы состоит в том, чтобы выяснить, каким физическим системам отвечают некоторые изучаемые в литературе модели связанных систем, полученные формально. Важность этого состоит в том, что в результате мы получим канонические модели динамических сетей, заведомо имеющие физические аналоги. Очевидно, что дальнейшее исследование таких моделей будет иметь более высокую практическую ценность по сравнению с чисто формальными моделями.

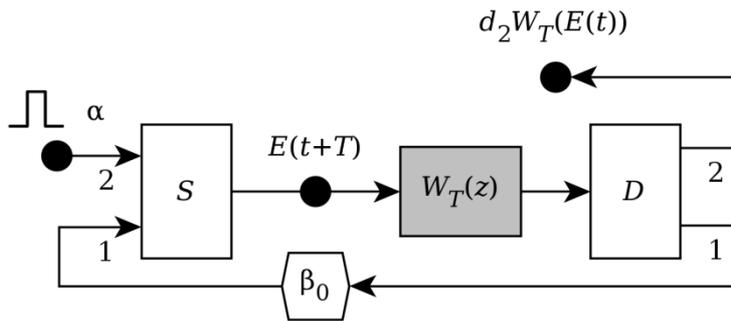


Рис. 1. Блок-схема системы Икеды

Рассмотрим так называемую систему Икеды, которая была впервые описана в [17, 18] как пример оптической системы, генерирующей хаос (см. рис. 1). На рисунке серой заливкой выделена нелинейная среда. Считая, что время прохождения излучения по системе значительно больше, чем характерное время отклика среды, её свойства можно задать комплексной функцией $W_T(z)$. Здесь индекс T обозначает время, необходимое излучению, чтобы пройти оптическую систему и вернуться через петлю обратной связи на вход.

Экспериментальная реализация этой системы описана в [19]. В качестве нелинейной среды в этой работе использовался отрезок одномодового оптоволокна.

Система Икеды работает следующим образом (рис. 1). Лазер накачки посылает импульсы с интервалом T и с амплитудой электрического поля α через сумматор S на нелинейную среду. Далее установлен делитель D , с коэффициентами деления амплитуды излучения d_1 и d_2 . Делитель необходим для того, чтобы осуществлять наблюдение за системой: с его входа 2 излучение поступает на регистрирующую аппаратуру. С выхода 1 делителя излучение проходит attenuator / усилитель с коэффициентом передачи β_0 . Значение этого коэффициента определяет глубину обратной связи. Затем излучение попадает на вход 1 сумматора S , где смешивается с очередным импульсом, что даёт очередное значение наблюдаемой динамической переменной $E(t + T)$. Таким образом, динамику системы можно описать следующим отображением:

$$E(t + T) = \alpha + W_T(E(t))d_1\beta_0 \tag{1}$$

В исходных работах Икеды и его соавторов [17-19] нелинейная среда в приближении быстрого отклика описывается функцией

$$W_T(z) = z \exp(i|z|^2 + \phi) \tag{2}$$

Таким образом, отображение Икеды можно записать в следующей форме:

$$z(t + 1) = \alpha + \beta z(t) \exp\left(i\left(|z(t)|^2 + \phi\right)\right) \tag{3}$$

Здесь z обозначает перенормированную комплексную амплитуду электрического поля, время t нормировано так, чтобы интервал между импульсами был равен единице, ϕ – линейный набег фазы в резонаторе, α – нормированная амплитуда поля лазера накачки, $\beta \leq 1$ – вещественный параметр, характеризующий степень диссипации. При $\beta = 1$ система становится консервативной.

Позже, в работах [20, 21] была предложена модифицированная модель, в которой учитываются эффекты насыщения в среде, за которые отвечает дополнительный параметр γ :

$$W_T(z) = z \exp\left(i\left(\phi - \frac{\gamma}{1 + |z|^2}\right)\right) \tag{4}$$

Соответствующее отображение имеет вид

$$z(t+1) = \alpha + \beta z(t) \exp \left(i \left(\phi - \frac{\gamma}{1 + |z(t)|^2} \right) \right). \quad (5)$$

Иногда в литературе оба эти отображения ошибочно называют отображением Икеды. Однако только (3) появляется в работах самого Икеды с соавторами. Отображение (5) получено по аналогии другими исследователями, и его корректно называть отображением Икеды – Хаммеля – Джонса-Молони.

В [22, 23] рассматривается система Икеды, в которой излучение, покидающее нелинейную среду, не возвращается через петлю обратной связи снова на вход, а направляется в другую систему, где смешиваясь с импульсом накачки, попадает на нелинейность. Положительная обратная связь в такой системе возникает за счёт того, что цепочка замкнута в кольцо – излучение из нелинейной среды последнего звена цепочки смешивается с накачкой первого элемента.

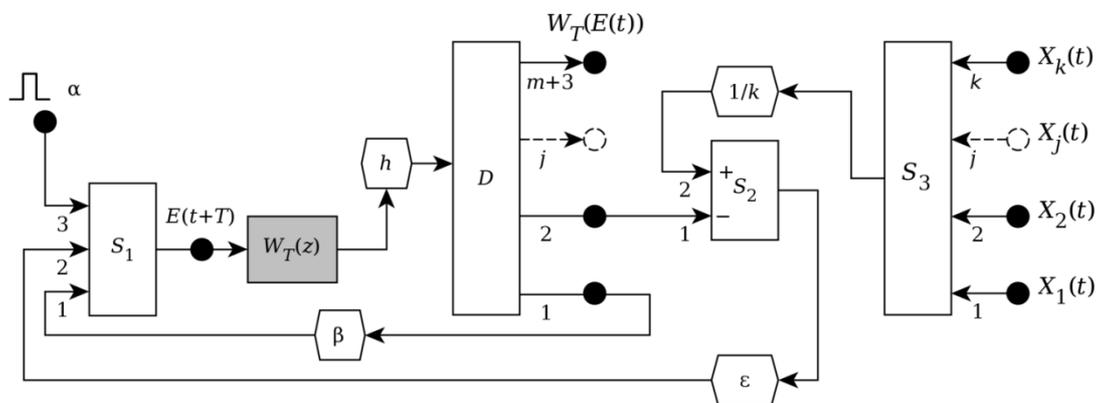


Рис. 2. Узел сети на основе оптических систем Икеды

Эту идею можно взять за основу для построения динамической сети. На рис. 2 показана блок-схема узла такой сети. Нелинейная среда выделена серой заливкой. Излучение складывается на сумматорах $S_{1,2,3}$. Вход 1 сумматора S_2 инвертирующий. Также используется делитель D , имеющий $m + 3$ выходов с одинаковыми коэффициентами деления. Здесь m – количество узлов сети, с которыми связан данный узел. Ослабление или усиление излучения осуществляются на аттенуаторах / усилителях, обозначенных шестиугольниками. Коэффициент передачи усилителя h подобран таким образом, чтобы на каждом выходе делителя D была восстановлена амплитуда излучения на выходе из нелинейной среды.

Лазер накачки создаёт импульсы с амплитудой α и периодом следования T , которые попадают в систему через вход номер 3 сумматора S_1 . Через другие входы этого сумматора в систему попадает излучение петли обратной связи, а также излучение от других узлов сети. Далее излучение проходит через нелинейную среду, а затем попадает на делитель D . Излучение с выхода 1 делителя через аттенуатор / усилитель β возвращается в систему через вход 1 сумматора S_1 . Излучение с выхода 2 делителя попадает на инвертирующий вход 1 сумматора S_2 , где смешивается с излучением от k соседних узлов сети и далее, через аттенуатор / усилитель ϵ , направляется на вход 2 сумматора S_1 . Выход 3 делителя предназначен для подключения регистрирующей аппаратуры, а оставшиеся m выходов направляют излучение данного узла на связанные с ним узлы сети. Таким образом, динамику этой системы можно описать следующим отображением:

$$E(t+T) = \alpha + W_T(E(t))\beta + \left(\left(\sum_{j=1}^k X_j \right) \frac{1}{k} - W_T(E(t)) \right) \epsilon. \quad (6)$$

Чтобы построить динамическую сеть на основе этого элемента, обозначим комплексную амплитуду поля в данном узле сети как $z_n(t) = E(t)$, где n – номер данного узла, и перенормируем вре-

мя так, чтобы интервал следования импульсов был равен единице. Хотя рассматриваемая схема допускает построение сети на основе ориентированного графа, когда связи от данного к соседним узлам и связи от соседних к данному могут не совпадать, мы ограничимся неориентированным, т.е. будем считать, что если узел i воздействует на узел j , то имеется также и обратное воздействие узла j на узел i . Тогда $k = m = k_n$, где k_n – количество связей узла с номером n . Пусть конфигурация связей задаётся матрицей связности \mathbf{A} . Так как мы рассматриваем сеть на основе неориентированного графа, эта матрица симметричная. Кроме того, ограничимся невзвешенными графами, т.е. величины всех связей равны друг другу. Тогда элементами матрицы \mathbf{A} будут единицы и нули, причём на главной диагонали всегда будут записаны нули. Элементы этой матрицы обозначим как a_{ij} . Тогда можно записать следующую систему связанных отображений:

$$z_n(t+1) = \alpha + \beta W_T(z_n(t)) + \varepsilon \left(\frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^N a_{nj} W_T(z_j(t)) - W_T(z_n(t)) \right). \quad (7)$$

Здесь N – число узлов сети, а $W_T(z)$ задаётся формулой (2) или (4).

В уравнении (7) переменные, задействованные в связи, предварительно подвергаются нелинейному преобразованию функцией $W_T(z)$. С формальной точки зрения организация связи непосредственно через переменные $z_n(t)$ представляется более естественной. Теоретически такая форма связи отображений Икеды рассматривалась в [24]. Однако с точки зрения реализации в виде оптической системы это не так. Чтобы организовать связь непосредственно через $z_n(t)$, требуется параллельно с нелинейной средой включить линию задержки, которая, получая на вход порцию излучения перед нелинейной средой, передавала бы его в неизменной форме с задержкой T на сумматор S_1 . Очевидно, что такая система более сложна.

Тем не менее связь такого типа может в быть реализована в виде радиофизической системы. В [25] показано, что отображение Икеды описывает динамику осциллятора с кубической нелинейностью, так называемый осциллятор Дуффинга, находящийся под действием последовательности δ -импульсов. Используя это, построим узел динамической сети, в которой связь включается одновременно с появлением очередного импульса. Блок-схема такой системы показана на рис. 3. Непосредственно система Дуффинга выделена серой заливкой. Реализацию этой системы в виде радиофизической системы можно найти, например, в [26].

Источник коротких импульсов P управляет электронным ключом K_1 , который замыкает цепь с интервалом T и подаёт на вход системы Дуффинга сигнал с сумматора S_1 , включающий постоянную составляющую α_0 и результирующий сигнал от других узлов сети. Выходными сигналами осциллятора Дуффинга являются вещественные переменные $x(t)$ и $y(t) \equiv \dot{x}(t)$. Так как действие δ -импульсов сводится к коррекции значения переменной $y(t)$, связь имеет смысл организовать также через эту переменную (но вообще говоря, точно так же можно было бы рассмотреть связь по $y(t)$). Сигнал $y(t)$ подаётся на делитель D , с одного из выходов которого он направляется на другие узлы сети, связанные с данным. С другого выхода сигнал подаётся на инвертирующий вход сумматора S_2 . На неинвертирующий вход этого сумматора подаётся суммарный сигнал от других узлов сети после его ослабления в k раз. Далее сигнал с выхода сумматора S_2 попадает на аттенуатор ε , а затем на вход системы через сумматор S_1 . Уравнение, соответствующее описываемой динамике, может быть записано в следующем виде:

$$\ddot{x}_n + g \dot{x}_n + \omega^2 x_n + q x_n^3 = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\alpha_0 + \varepsilon \left(\frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^N a_{nj} y_j - y_n \right) \right) \delta(t - lT). \quad (8)$$

Здесь нижний индекс u динамических переменных нумерует узлы сети, k_n – количество связей узла n с другими узлами, a_{nj} – элемент матрицы связности сети, наконец N – число элементов сети.

По аналогии с тем, как это сделано в [25], получим отображение Икеды для системы (8). В промежутке между импульсами правая часть уравнения превращается в ноль, и мы можем найти его приближённое решение, применив метод медленно меняющихся амплитуд. Далее учтём, что сразу после очередного δ -импульса координата $x(t)$ остаётся неизменной, а скорость $\dot{x}(t)$ получает добавку $\alpha_0 + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^N a_{nj} y_j / k_n - y_n \right)$. Тогда состояние системы сразу после $(l+1)$ -го импульса можно найти таким образом (время перенормировано так, чтобы интервал между импульсами был равен 1):

$$z_n(t+1) = \alpha + \beta z_n(t) e^{i(|z_n(t)|^2 + \phi)} + \varepsilon \left(\frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^N a_{nj} \operatorname{Re} z_j(t) - \operatorname{Re} z_n(t) \right). \quad (9)$$

Здесь

$$z_n = \sqrt{\frac{3q}{2\omega g} (1 - e^{-gT})} \left(i \frac{x_n}{2} + \frac{\dot{x}_n}{2\omega} \right), \quad \alpha = \frac{\alpha_0}{2\omega} \sqrt{\frac{3q}{2\omega g} (1 - e^{-gT})}, \quad \beta = e^{-gT/2}, \quad \phi = \omega T. \quad (10)$$

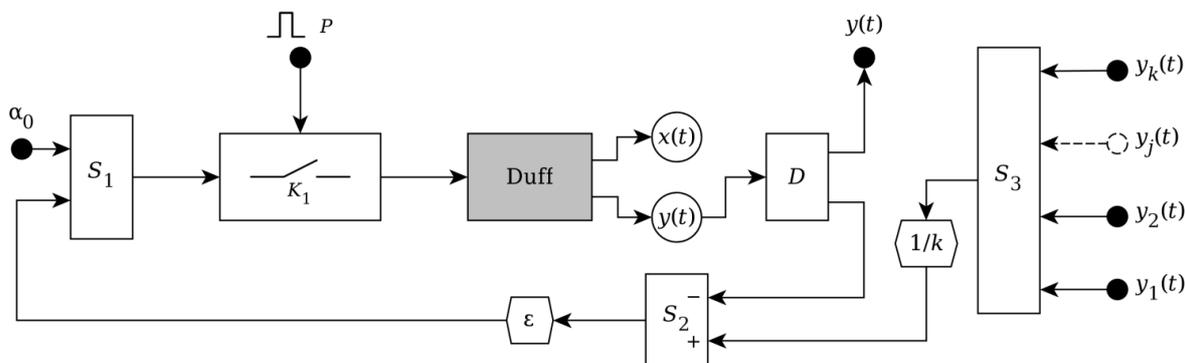


Рис. 3. Узел сети на основе осцилляторов Дуффинга под импульсным воздействием

Ещё один вид связи между системами Икеды рассматривается в теоретических работах [27, 28]. Здесь переменные связи добавляются к показателю экспоненты. Как обсуждалось выше, в случае оптической системы вид показателя экспоненты определяется свойствами нелинейной среды и допущениями, которые сделаны при её анализе. Поэтому такой вид связи следует отнести к параметрическому типу. При этом она должна быть ступенчатой, т.е. свойства нелинейной среды должны переключаться в зависимости от значений переменных связи только непосредственно в момент прихода очередного импульса. Реализация этого на основе оптических систем представляется затруднительной. Тем не менее существует, по меньшей мере, принципиальная возможность организовать связь такого типа на основе радиофизических систем Дуффинга.

Блок-схема узла сети показана на рис. 4. В отличие от предыдущего случая на рис. 3 здесь источник коротких импульсов P управляет сразу двумя электронными ключами. Ключ K_1 , как и раньше, управляет подключением постоянной компоненты воздействия α_0 . Второй ключ K_2 управляет ступенчатой перестройкой параметров, отвечающих за собственную частоту системы Дуффинга. Вместе с приходом очередного импульса в зависимости от состояния переменных связи задаётся новое значение собственной частоты и оно сохраняется до прихода следующего импульса. Подобное поведение можно реализовать, дополнив систему Дуффинга цифровым блоком с запоминающим устройством.

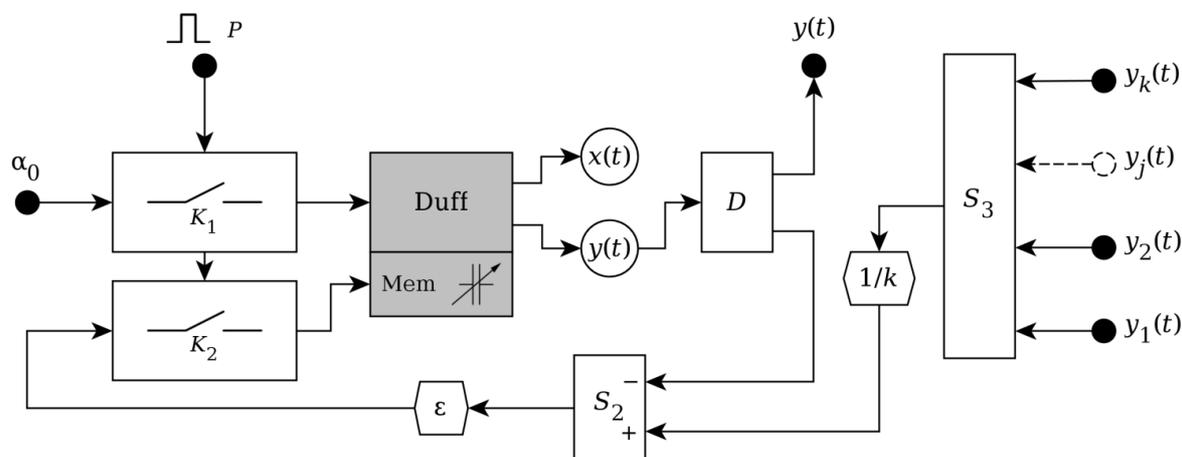


Рис. 4. Узел сети осцилляторов Дуффинга с параметрической ступенчатой связью

Уравнение, описывающее данную систему, имеет вид

$$\ddot{x}_n + g \dot{x}_n + (\omega^2 + V_n(t))x_n + q x_n^3 = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_0 \delta(t - lT). \quad (11)$$

Здесь $V_n(t)$ – ступенчатая функция, которая сохраняет своё значение между импульсами, а в момент появления очередного импульса принимает значение

$$V_n = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^N a_{nj} y_j - y_n \right). \quad (12)$$

Проделав преобразования по аналогии с описанными выше, мы получим следующее отображение:

$$z_n(t+1) = \alpha + \beta z_n(t) \exp \left(i \left(|z_n(t)|^2 + \phi + \varepsilon \left(\frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^N a_{nj} \operatorname{Re} z_j(t) - \operatorname{Re} z_n(t) \right) \right) \right). \quad (13)$$

Здесь $\varepsilon = T \varepsilon_0$ и остальные обозначения соответствуют (10).

Таким образом, мы рассмотрели три способа построения физически мотивированных моделей динамических сетей на основе отображений Икеды. Первая модель – уравнение (7) соответствует оптической системе, а две другие – уравнения (9) и (13) описывают связанные системы Дуффинга, находящиеся под действием δ -импульсов. Дальнейшее детальное изучение динамических свойств этих сетей представляется важным, так как полученные для них теоретические результаты могут с очевидностью быть проверены экспериментально и могут найти практические применения.

Работа частично поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Complex networks: Structure and dynamics / S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno et al. // *Physics Reports*. 2006. Vol. 424. № 4-5. P. 175-308.
2. Barabási A.L., Albert R., Jeong H. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web // *Physica A*. 2000. Vol. 281. № 1-4. P. 69-77.
3. Watts D.J. *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*. Princeton: Princeton University Press, 2003. 280 p.
4. Barthelemy M., Gondran B., Guichard E. Spatial structure of the internet traffic // *Physica A*. 2003. Vol. 319. № 1. P. 633-642.
5. Wang X.F. Complex networks: topology, dynamics and synchronization // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2002. Vol. 12. № 5. P. 885-916.
6. Synchronization in complex networks / A. Arenas, A. Diaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, C. Zhou // *Physics Reports*. 2008. Vol. 469. № 3. P. 93-153.
7. Osipov G.V., Kurths J., Zhou C. *Synchronization in oscillatory networks*. Springer Science & Business Media, 2007.
8. Golubitsky M., Stewart I. Recent advances in symmetric and network dynamics // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2015. Vol. 25. № 9. P. 097612.
9. Synchronization and graph topology / I. Belykh, M. Hasler, M. Lauret, H. Nijmeijer // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2005. Vol. 15. № 11. P. 3423-3433.
10. Arenas A., Diaz-Guilera A., Perez C.J. Vicente Synchronization Reveals Topological Scales in Complex Networks // *Phys. Rev. Lett.* Mar 2006. Vol. 96. P. 114102.
11. Remote synchronization in star networks / A. Bergner, M. Frasca, G. Sciuto et al. // *Phys. Rev. E*. Feb 2012. Vol. 85. P. 026208.
12. Analysis of remote synchronization in complex networks / L.V. Gambuzza, A. Cardillo, A. Fiasconaro et al. // *Chaos*. 2013. Vol. 23. P. 043103.
13. Kaneko K. Overview of coupled map lattices // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 1992. Vol. 2. № 3. P. 279-282.
14. Kuptsov P.V., Kuptsova A.V. Wild multistability of star-like networks of Hénon maps // arXiv:1505.05091. 2015. P. 1-10.

15. Kuptsov P.V., Kuptsova A.V. Predictable nonwandering localization of covariant Lyapunov vectors and cluster synchronization in scale-free networks of chaotic maps // *Phys. Rev. E*. Sep 2014. Vol. 90. P. 032901.
16. Kuptsov P.V., Parlitz U. Theory and computation of covariant Lyapunov vectors // *Journal of nonlinear science*. 2012. Vol. 22. № 5. P. 727-762.
17. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // *Optics Communications*. 1979. Vol. 30. № 2. P. 257-261.
18. Ikeda K., Diado H., Akimoti O. Optical turbulence: Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // *Physical Review Letters*. 1980. Vol. 45. № 9. P. 709-712.
19. Observation of Bifurcation to Chaos in an All-Optical Bistable System / H. Nakatsuka, S. Asaka, K. Itoh et al. // *Physical Review Letters*. 1983. Vol. 50. № 2. P. 109-112.
20. Moloney J.V. Coexistent attractors and new periodic cycles in a bistable ring cavity // *Optics Communications*. 1983. Vol. 48. № 6. P. 435-438.
21. Hammel S.M., Jones C.K.R.T., Moloney J.V. Global dynamical behavior of the optical field in a ring cavity // *JOSA B*. 1985. Vol. 2. № 4. P. 552-564.
22. Otsuka K., Ikeda K. Hierarchical multistability and cooperative flip-flop operation in a bistable optical system with distributed nonlinear elements // *Optics letters*. 1987. Vol. 12. № 8. P. 599-601.
23. Otsuka K., Ikeda K. Self-induced spatial disorder in a nonlinear optical system // *Physical Review Letters*. 1987. Vol. 59. № 2. P. 194.
24. Pal S. Spatiotemporal Dynamics of Coupled Ikeda Maps Over a Ring Network / S. Pal, S. Poria // *International Journal of Applied Mathematical Research*. 2012. Vol. 1. № 4. P. 383-390.
25. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамические систем разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // *Известия вузов. ПНД*. 2000. Т. 8. № 2. С. 31-41.
26. Analog Simulation of the Dynamics of a van der Pol Oscillator Coupled to a Duffing Oscillator / J.C. Chedjou, H. B. Fotsin, P. Woafu, and S. Domngang // *IEEE Transactions on circuits and systems – I: Fundamental theory and applications*. 2001. Vol. 48. № 6. P. 748-757.
27. Lai Y.C. Unstable dimension variability and complexity in chaotic systems // *Physical Review E*. 1999. Vol. 59. № 4. P. R3807-R3810.
28. Harrison M.A., Lai Y.C. Bifurcation to high-dimensional chaos // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10. № 6. P. 1471-1483.

Купцов Павел Владимирович –
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры «Приборостроение»
Саратовского государственного технического
университета имени Гагарина Ю.А.

Купцова Анна Викторовна –
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Приборостроение»
Саратовского государственного технического
университета имени Гагарина Ю.А.

Pavel V. Kuptsov –
Dr. Sc., Professor
Department of Instrumentation Engendering
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov

Anna V. Kuptsova –
Ph. D., Associated Professor
Department of Instrumentation Engendering
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov

Статья поступила в редакцию 11.09.15, принята к опубликованию 10.11.15