А. П. Кузнецов

КАК РАБОТАЮТ И ДУМАЮТ ФИЗИКИ

УДК 530

Кузнецов А. П.
Как работают и думают физики. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. — 172 с.

Книга в доступной и занимательной форме знакомит с «неформальной» физикой, которая связана с окружающим миром. Обсуждаются такие вопросы, как оценки физических величин, методы размерностей и подобия, приближенные методы, «качественные» теории, использование математического анализа, интернета и др. Книга вводит школьника (с 9-го по 11-й класс) в «творческую лабораторию» физика-исследователя. По каждой теме имеется подборка задач. Представлены задачи исследовательского характера, которые могут быть использованы в рамках школьной научной лаборатории. Отдельная часть книги вводит в основные понятия нелинейной динамики — науки продолжающей бурно развиваться в настоящее время. Будет полезна школьникам, интересующимся физикой и исследовательской работой, а также учителям и, в определенной мере, студентам младших курсов.

ISBN 5-93972-515-5

http://rcd.ru
http://ics.org.ru

Предисловие к первому изданию

Книжка, которую Вы держите в руках, представляет собой курс, который читается учащимся Колледжа прикладных наук Саратовского государственного университета. Она состоит из двух частей, первая из которых соответствует восьмому, а вторая - девятому классам. Программа по физике в Колледже прикладных наук опережает программу средней школы, так что в восьмом классе учащиеся изучают механику, а в девятом - молекулярную физику и термодинамику. По каким причинам понадобился еще один курс физики, дополняющий традиционный?

В школьные и студенческие годы у будущих физиков часто возникает убеждение, что для того, чтобы стать хорошим ученым, достаточно решать задачи и читать учебники. Конечно, упорным трудом Вы добьетесь многого, особенно если Вы молоды и настойчивы. Однако, по мере своего роста, Вы почти наверняка почувствуете, что Вам чего-то не хватает, чтобы ощутить себя по-настоящему профессионалом. В чем же дело? Одно из самых удивительных свойств физики состоит в том, что значительная ее часть является своего рода фольклором, собранием знаний и навыков, которые передаются учеными из поколения в поколение. В учебниках, в которых излагается (пусть даже и очень хорошо) формализм физики, эти навыки либо опускаются, либо даются «по ходу дела». Для популяризации «фольклорной части» физики очень много сделал замечательный российский физик-теоретик Аркадий Мигдал. Хорошо известна его книга «Качественные методы квантовой теории». В предисловии к ней говорится: «К сожалению, обычно методы теоретической физики излагаются формально-математически, а не в той конструктивной форме, в какой ими пользуются в научной работе... Формальное изложение, при котором убраны все следы «пота», может... внушить начинающему научному работнику чувство неполноценности. Поэтому автор старался по возможности показать механизм подхода к задаче, особенно на первой стадии работы. При этом... раскрываются «секреты» мастерства, т.е. маленькие хитрости, которые ускоряют получение результатов». Однако, книга Мигдала доступна лишь студентам, да и то старших курсов. А можно ли рассказать что-то для школьников, только начинающих изучать физику? Оказывается, можно, и очень много.

Еще один мотив постановки предлагаемого курса - существование проблемы соотношения физики и математики, проблемы, которая создает огромные трудности как для изучающих физику учеников, так и для физиков-педагогов. Физика в очень высокой степени базируется на математике, однако, физика - наука существенно другая, нежели математика. Решая задачи, физик непрерывно отрывается от реального мира и «уходит» в область идеализированных математических моделей, и ...

непрерывно возвращается к окружающему миру, проверяя каждый свой ход, каждый результат с помощью «физических соображений». Овладеть математикой так, как это нужно физику - сложное и увлекательное дело.

Школьникам нужно рассказать и о некоторых сторонах их будущей профессии, сторонах, которые кажутся ученым и педагогам привычными, и которые бывают «забытыми» на уроках даже в физико-математических школах. Например, о том, что такое научная статья, какие бывают научные журналы, что такое «оттиск» научной статьи и т.д.

Предлагаемая Вашему вниманию книжка является в большей степени задачником. Каждая тема снабжена лишь очень коротким комментарием. Решение задач - это великолепный «тренинг» для будущего ученого. Конечно, прорешать задачи из одной книжки - это только маленький шаг на пути в прекрасный мир физики. Овладеть секретами мастерства физика Вам очень помогут журналы «Квант» и брошюры серии «Квант». Обязательно покупайте, выменивайте, выпрашивайте их, где бы Вы ни увидели! Ведь сейчас они, к сожалению, редкость.

Автор хотел бы выразить глубокую благодарность проф. С. П. Кузнецову и член-корр. РАН, проф. Д.И.Трубецкову, с которыми он обсуждал многие вопросы курса.

Предисловие ко второму изданию

Первое издание этой книжки представляло собой курс «неформальный» физики для 8-го и 9-го классов Лицея (тогда еще Колледжа) прикладных наук г. Саратова, о чем и сказано в предисловии к первому изданию. Сейчас хочется добавить, что нацеленность этого учебного заведения была не только на глубокую физико-математическую подготовку, но и на внедрение идей нелинейной динамики и синергетики. Мне пришлось много размышлять, какие подходы и методы из этих наук можно неназойливо ввести в физический курс. «Следы» этого можно найти в первых двух частях книжки. Это, например, идея двухпараметрического анализа физических систем. Идея выделения, как бы мы сказали более аккуратно, грубых и негрубых, ситуаций (глава «Качественные теории»). Далее, это возможность критических состояний (см. соответствующую главу), которые подготавливают почву для восприятия идеи бифуркации и др. Во втором издании к этим двум частям добавлены главы «Интернет» и «Исследовательские задачи», причем в перечень последних входят и исследование изохронного маятника Гюйгенса, катастрофы мыльной пленки, каустик и сборок в чашке и т.д.

Третья, новая часть, «Физики тоже любят математику», посвящена междисциплинарным связям. Взят самый простой, на первый взгляд, вариант – связь физики и математики. Но это видимая простота. Опыт преподавания в школе говорит о том, сколь разное видение может возникать у физиков и математиков по некоторым вопросам. Очень часто простое изучение математики (особенно таких понятий как производная, интеграл и дифференциальные уравнения), отнюдь не обеспечивает автоматически умение применять их в физике. Оказывается, что нужна отдельная, кропотливая работа по возникновению единого физико-математического мышления. Поэтому в этой части книги названия разделов математические, а содержание – физическое. Эта часть начинается с числовых последовательностей, которые популярны в школьной математике, но мало используются физиками в школе. Однако, для нас это было важно для дальнейшего, поскольку идея «дискретизации» физических систем позволяет подготовить восприятие современного инструментария нелинейной динамики – отображений. Наконец, дифференциальные уравнения очень важны в школе, так как без них нет понимания ни сути второго закона Ньютона, ни междисциплинарного характера теории колебаний.

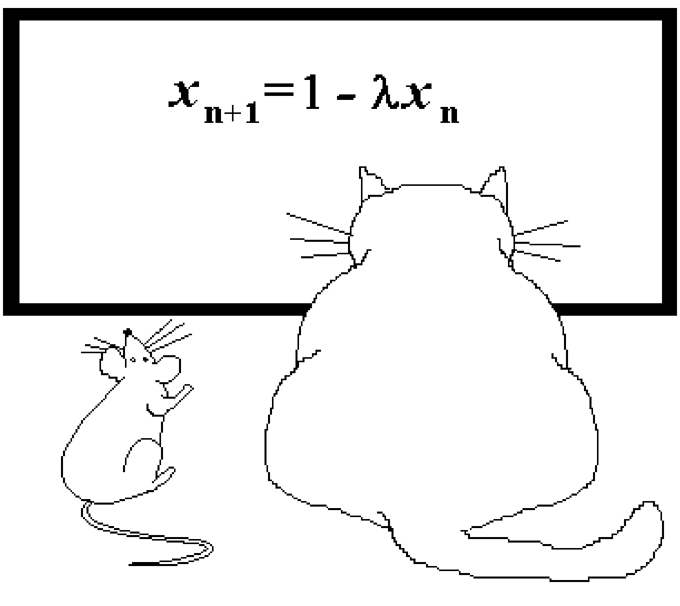
Цель четвертой части состояла в том, чтобы, опираясь на уже сформированные понятия, ввести школьника в круг некоторых понятий нелинейной динамики. При этом решение задач и тематика подобраны так, чтобы школьник выпускного класса, вообще говоря, оказался хотя бы и в некоторой мере подготовленным для исследовательской работы в этой области. Отображения объясняются на примере хорошо известной всем школьной задаче о цепочке сопротивлений. Ну, а далее следуют логистическое отображение, отображение Эно, «прыгающий» шарик, итерационные диаграммы и бифуркационные деревья. Отмечу, наконец, что в этой части мы ограничились лишь отображениями, поскольку они проще для восприятия и компьютерного моделирования.

Автор хотел бы выразить глубокую благодарность Тюрюкиной Л.В., Седовой Ю.В и Савину А.В. за помощь в подготовке рукописи к изданию.

Истинные чудеса XX века - это чудеса для сугубых профессионалов. Настоящие чудеса возникают в виде корявых формул, кое-как нацарапанных мелом на плохо протертой черной доске, чтобы потом нырнуть в мрачные недра гигантских ускорителей или вычислительных чудовищ и вынырнуть на поверхность в виде символов и таблиц на синих полосах термобумаги.

Аркадий Стругацкий

Борис Стругацкий



ЧАСТЬ I
КАК РАБОТАЮТ И ДУМАЮТ ФИЗИКИ

1. Что такое физика?

> ***Настоящим сочинением мы лишь открываем двери к этим двум новым наукам, изобилующим приложениями, которые в будущем будут неизмеримо больше приумножены пытливыми умами.***
>
> ***Галилео Галилей***

Физика - одна из основных наук об окружающем мире. Очертания этой науки определились за последние 400 лет. Что такое физика? Оглядываясь вокруг, человек замечал множество удивительных и красивых явлений. Его внимание привлекали шум прибоя, набегающие на берег морские волны, сияющие ночью на небе звезды, радуга после дождя. В течение веков люди размышляли обо всем этом, исходя в основном из законов логики и «здравого смысла». Однако со временем стало ясно, что можно понимать, объяснять и предсказывать многое из того, что человек видел вокруг.

Самой простой разновидностью явлений, с которыми человек имел дело, было движение. Ходили люди, бегали животные. Камни, подброшенные вверх, падали вниз. Как описать эти процессы? Размышления на эту тему привели около 400 лет назад к созданию механики. Она стала формироваться благодаря работам итальянского ученого Галилео Галилея, жившего в конце XVI - начале XVII веков. Галилей сделал много замечательных открытий. Но самое важное из них, пожалуй, состояло в осознании того факта, что надо искать закономерности, наблюдая и измеряя. И самой первой стала задача о колебаниях гигантской люстры в соборе. Наблюдая за ее колебаниями и измеряя время с помощью ритмичной музыки и пульса (ведь часов еще не было!), Галилей открыл, что время, за которое люстра совершает одно колебание, практически не зависит от размаха колебаний. Затем Галилей исследовал падение тел и ряд других задач.

Назовем еще одно имя, неразрывно связанное с механикой - Исаак Ньютон. Его вклад в механику столь велик, что благодаря его работам возникла своего рода механическая картина мира, и людям стало казаться, что весь мир подчиняется механическим законам. Успехи теории Ньютона были ошеломляющие. Издавались книги по механической системе мира. Говорят, были случаи, когда дамы отказывали женихам, если те не были знакомы с теорией Ньютона. Правда, движение планет в Солнечной системе чуть-чуть отличалось от предсказанного Ньютоном, и он считал, что бог раз в тысячу лет слегка подправляет их орбиты. Однако французский исследователь Лаплас в начале девятнадцатого века показал, что эти отклонения связаны с взаимным влиянием планет друг на друга и тоже могут быть объяснены теорией Ньютона. Именно тогда в ответ на вопрос Наполеона - где же в его системе бог, Лаплас произнес свою знаменитую фразу: «Je n'ai pas eu besoin de cette hypothese», то есть «Я не нуждаюсь в этой гипотезе».

Следующим кругом явлений, на которые обратили внимание люди, стали явления, связанные с теплотой. Нетрудно заметить, что одни предметы горячее, другие холоднее; для нагрева можно использовать огонь; если нагреть лед, он растает и т.д. Сначала люди научились измерять температуру и давление газов. Потом были установлены законы, которые позволяли вычислять температуру и давление в различных случаях. Размышления над природой теплоты привели к мыслям о том, что тепло связано с движением молекул, из которых состоят тела. Два наиболее выдающихся имени в молекулярной теории - это Джеймс Максвелл и Людвиг Больцман. Они построили теорию газа, состоящего из отдельных сталкивающихся друг с другом молекул. Число молекул в 1 см^3 газа при нормальных условиях огромно, около 10^{19} штук. Поэтому их движение невозможно описать с помощью простых законов механики, даже если использовать современные суперкомпьютеры, которых, конечно, не было во времена Максвелла и Больцмана.

Если потереть расческой о волосы, то она может притягивать маленькие кусочки бумаги. Проверьте! Ясно, что это какое-то совершенно новое явление. Когда собираются тучи, то в небе иногда сверкает молния. Эти и многие другие явления - предмет науки об электричестве. Основываясь на многих опытных фактах, Максвелл создал стройную теорию электромагнитного поля. Интересно, что в своих размышлениях Максвелл шел от механики - чтобы лучше представить себе электромагнитное поле, он мыслил его в виде устройства из шестеренок, колесиков и т.д.

Скажем несколько слов еще об одной группе очень красивых явлений природы. Каждое утро встает Солнце и освещает окружающий нас мир. Освещает? А что это такое? Каким законам подчиняется свет? Почему небо голубое, а закат красный? Почему у кошки в темноте блестят глаза? Раздел физики, изучающий свет, называется оптикой.

Наконец в начале нашего века возникает физика малых масштабов, квантовая физика. Оказалось, что мир малых размеров не поддается нашему воображению: у очень маленьких частиц невозможно одновременно точно определить положение и скорость. Выдающиеся физики, создатели квантовой механики - это Нильс Бор, Луи де Бройль, Эрвин Шредингер.

Создание квантовой механики позволило людям серьезно заняться исследованием структуры вещества. Как мы теперь знаем, существуют молекулы и атомы, причем атомы состоят из ядра и электронов. Ядро, в свою очередь, состоит из протонов и нейтронов, а протоны и нейтроны - из кварков. Кварки очень не похожи на все, к чему мы привыкли - их нельзя наблюдать отдельно друг от друга.

Физика больших скоростей и физика пространства - это теория относительности Альберта Эйнштейна. Мир Эйнштейна - это мир тел, размеры и массы которых зависят от скорости. Правда, скорости при этом огромны - они должны приближаться к скорости света, равной примерно 300000 км/с.

Вот так развивалась физика. Физика рисует картину мира, картину, охватывающую самые разные масштабы пространства и времени. Мир, в котором мы живем - наша Вселенная. Скопление галактик - самый крупный структурный элемент Вселенной. На астрофизических фотоснимках скопление галактик - это группы туманных пятнышек. В каждом скоплении около сотни и тысячи галактик. Наша галактика имеет вид спирали, размер которой около 10 килопарсек (т.е. около 300000 световых лет). В галактике около 100 миллиардов звезд. Чтобы исследовать Вселенную, людям пришлось объединить и механику, и учение о радиоволнах, и оптику, и атомную физику. Так что астрофизика - сумма большого числа классических разделов физики.

Физики изучают нашу планету, благодаря этому возникли физика атмосферы, физика океана, геофизика. Конечно, в этих разделах физики не обойтись без теории электричества, газовых законов, законов парообразования, без механики, без оптики. Ведь нужно объяснить, например, почему реки, текущие по совершенно гладкой равнине, изгибаются, почему сверкает молния и т.д.

Мы можем рассматривать отдельные живые существа и человека, как физические системы - механические, электрические, тепловые. Кровь бежит по сосудам - это механика. Электрические импульсы проходят по нервной системе - это электричество. Тепло выделяется и покидает наше тело за счет излучения - это наука о теплоте.

И все это физика. Физик - это очень интересная профессия. Если вы хотите стать физиком, то надо многому научиться. Очень полезно и интересно читать о том, как работали великие физики. На вопрос о том, как он открыл свои законы, Ньютон ответил: «Я постоянно размышлял о них». По словам современников, когда Ньютон писал свою знаменитую книгу «Математические начала натуральной философии», он был всегда бодр, никогда не впадал в раздражение, считал любой час потерянным, если его не удавалось посвятить размышлениям.

Для вас может быть полезен девиз Максвелла «Work, finish, publish».

Кто же такой современный физик-профессионал? Это отнюдь не человек, просто изучивший физику с помощью учебников. Это человек, овладевший многими профессиями и навыками. Прежде всего, надо уметь решать задачи. Нужно научиться самому формулировать задачи как для себя, так и для своего компьютера (он этого не сделает за вас!). Нужно уметь изложить свои результаты на бумаге. Физик должен печатать на электронной печатной машинке, либо владеть соответствующим текстовым редактором на компьютере. Очень важно уметь общаться с коллегами с помощью современных средств связи - факса, компьютерной почты. В современном мире многие результаты получаются одновременно несколькими группами ученых из разных стран, которые обмениваются информацией с помощью факсов и компьютеров. Сейчас много научных журналов, книг. Уже появились компьютерные научные журналы. Так что если вы получили важный результат, его еще надо суметь донести до сообщества ученых за счет энергичного общения. Нужно уметь доказать, что ваш результат правильный и необходимый.

Задачи

1. Когда Галилео Галилей вернулся домой из собора, он решил установить, правда ли, что периоды больших и малых колебаний маятника равны. Как бы вы поступили на его месте?
2. Найдите книгу Н. Носова «Витя Малеев в школе и дома». Отыщите и прочитайте место, в котором описано, как Витя научился решать задачи. Какие основные принципы он использовал? Сформулируйте их в краткой, но четкой форме.

2. Числа в физике

Мир устроен так, что многие свойства окружающих нас тел могут быть описаны числами. Почему это так - вовсе не такой простой вопрос, как кажется на первый взгляд. К описанию некоторых физических величин числами мы привыкли. Привычнее всего числа, выражающие расстояния. Мы хорошо понимаем, что такое сантиметр, миллиметр, метр, километр. Мы также привыкли к массе, которую в обиходе называем весом тела. Одно тело весит 1 кг, другое - 100 г. Это тоже привычные числа, которые часто встречаются в жизни. Если задуматься, то можно прийти к выводу, что «понятность» чисел при описании длины, массы и времени связана с тем, что человек наполнил магазины, работу, школу, квартиру устройствами, с помощью которых можно легко определить эти числа. Уже с раннего детства нас научили не задумываться, проделывая соответствующие измерения. Если же немного пофантазировать, то можно поставить много неожиданных вопросов. Например, как при помощи чисел описать игру блесток на поверхности реки в солнечный день? Можно ли описать с помощью чисел шорох листвы деревьев?

На уроках арифметики и алгебры мы узнаем о классификации чисел. Проще всего для понимания числа ***натуральные.*** Наверно, они появились раньше всего, когда человек считал животных в стадах: 1, 2, 3, и т.д. Числа бывают ***положительные*** и ***отрицательные.*** Представление об отрицательных числах мы получаем, измеряя температуру на улице в морозный день, например, -15^{O} С. Без особого труда можно привыкнуть к ***дробным*** числам. Пусть необходимо измерить длину карандаша. «Портновским» сантиметром, который содержит только деления по половине сантиметра, мы можем получить довольно приблизительное значение длины, например 8 см. Возьмем линейку с миллиметровыми делениями. Пусть мы получили 8 см и 3 мм. Результат запишем так: 8,3 см. С помощью штангенциркуля можно определить и десятые доли миллиметра. Получим число 8,31 см. Можно взять еще более точный измерительный прибор, но когда-то нам придется остановится. Результатом измерений будет число, содержащее конечное число знаков после запятой. Это один из возможных вариантов ***рационального*** числа. Всякое рациональное число может быть представлено в виде отношения двух натуральных чисел. Оно содержит после запятой либо конечное число цифр, либо периодически повторяющиеся группы цифр. Например, 14/11=1,272727…

В математике известны, кроме того, ***иррациональные*** числа, например, $\sqrt{3}$. Иррациональные числа тоже используют в физике. Чтобы хотя бы немного представить соотношение между рациональными и иррациональными числами, обратимся к следующей ситуации. Пусть маленький муравей ползет по бублику (рис.1).

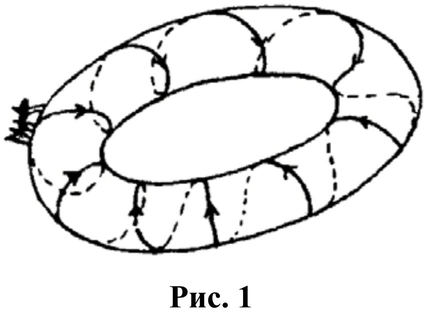


Рис. 1

Существует множество разных вариантов его путешествий. Муравей может обойти вокруг «дырки» m раз и за это же время совершить n оборотов по меридиану. Здесь m и n - некоторые целые числа. В этом случае траектория движения муравья замкнута - после mn оборотов он пойдет по старому пути. Для всех таких маршрутов число $\omega = {}^{m}\!/_{n}$ является рациональным. Можно сказать и иначе, какое бы рациональное число ω мы не взяли, найдется замкнутый маршрут муравья по бублику. А если число ω иррациональное? Этому числу будет соответствовать такой маршрут, когда муравей никогда не повторит свой путь, ползая сколь угодно долго. Эта забавная ситуация имеет отношение, например, к проблеме движения планет вокруг звезды, если планета к тому же вращается вокруг своей оси.

В физике приходится иметь дело с очень большими и очень маленькими числами. Например, время жизни Вселенной около 15 миллиардов лет. А время, за которое луч света проходит через оконное стекло, составляет 0,00000000001 с. Такие числа обычно записывают, используя степени десяти. В нашем случае это $1{,}5\cdot10^{10}$ лет и $1\cdot10^{-11}$ с. Конечно, можно записать $15\cdot10^{9}$ лет, это тоже будет правильно.

Задачи

1. Приведите примеры физических величин, которые описываются натуральными числами.
2. Приведите примеры физических величин, которые могут быть как положительными, так и отрицательными числами.
3. В известном стихотворении Маршака говорится «... И вышло у него в ответе два землекопа и две трети». Придумайте ситуацию, которая может характеризоваться дробным «числом людей».
4. Сколько периодически повторяющихся цифр содержит дробная часть рационального числа 17/13? Пусть это число измерено с такой точностью, что мы определили лишь два знака после запятой. Представьте измеренное число в виде отношения двух натуральных чисел.
5. Предложите способ, как поделить девять совершенно одинаковых яблок между семью людьми. Яблоки можно резать.
6. Определите приближенное значение иррационального числа $\sqrt{10}$. Для этого воспользуйтесь карандашом, линейкой и ... теоремой Пифагора.
7. С помощью нитки, цилиндрического карандаша и линейки определите примерно число π.

8. Выполните следующие действия, представив результат в принятой у физиков форме:

   $10^8 \cdot 10^8 =$

   $10^8 + 10^8 =$

   $10^{15} \cdot 10^{-14} =$

   $10^{15} : 10^{-14} =$

   $190000 =$

   $0{,}000025 =$

   $(5 \cdot 10^4) \cdot (3 \cdot 10^7) =$

   $5000 \cdot 10^4 - 2000 \cdot 10^7 =$

   $2700000000 \cdot 0{,}0002 =$

   $(4 \cdot 10^{15}) \cdot (3 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{12}) =$

   $(3 \cdot 10^7$ м/с$) : (2 \cdot 10^3$ с$) =$

9. Сколько метров содержится в миллиметре? Сколько сантиметров в километре? Сколько секунд в часе? Сколько граммов содержит литр воды? Сколько миллилитров содержит один кубометр? Сколько микрофарад содержится в миллифараде? Что больше - килотонна или мегаграмм?

10. На некоторой планете аборигены точно похожи на людей, но у них по шесть пальцев на каждой руке. Как они запишут число 14? Число 152?

Указание. Число 152 мы представляем в виде 1 10 +5 10 +2 10 , где 10 - число пальцев на двух руках.

3. Оценки физических величин

Одна из задач физики - определение численных значений физических величин. Однако, для этого иногда нужно построить слишком сложную теорию или выполнить громоздкие расчеты. Поэтому бывает очень полезно определить приближенное, примерное значение физической величины. Как говорят физики, нужно оценить физическую величину. В жизни мы непрерывно сталкиваемся с оценками, которые делаем интуитивно. Например, вы оцениваете, сколько времени уйдет на выполнение домашнего задания. Стоя в очереди, нетрудно оценить, сколько времени уйдет на покупку товара. Для этого нужно «прикинуть», сколько человек стоит в очереди, и сколько времени уходит на отпуск товара одному покупателю. Поскольку вы делаете оценку, а не хотите знать результат точно, то ответы 1 час 15 минут и 1 час 33 минуты будут одинаково правильными. Действительно, ситуация, когда вам надо ждать 1 час с минутами совершенно иная, чем та, когда надо ждать 2 - 3 минуты. Таким образом, числа, которые отличаются в 2 - 3 раза - это числа одного порядка. Если же числа отличаются в 10 раз, говорят, что они отличаются на один порядок, если в 100 - на два порядка и т.д.

Теперь понятно, почему в физике столь полезна запись в виде числа порядка единицы, умноженного на 10 в соответствующей степени. Ведь эта степень сразу дает порядок самого числа.

Итак, для физика очень ценно представлять примерный порядок величины. Это дает важную информацию о том, что учитывать, а что не учитывать в теории. Например, нужно ли учитывать электромагнитные поля звезд при описании образования галактик? С помощью метода оценок можно быстро получать ответы на совершенно неожиданные вопросы. Например, каково давление в центре Земли? С какой высоты можно прыгать в воду, чтобы не разбиться? Какова толщина льда, при которой машина не провалится? (Такую оценку делали физики в Ленинграде во время войны.) А в известной книге о физиках Д. Гранина «Иду на грозу» главный герой мчится с девушкой на мотоцикле и развлекает ее оценкой числа людей, которых они разбудили по дороге.

Большим мастером оценок физических величин был выдающийся физик Энрико Ферми. На своих лекциях он проводил за считанные минуты оценку числа настройщиков роялей в Чикаго. (Как это сделать?)

Давайте оценим число домашних кошек в Саратове. В Саратове порядка 10^6 человек. В каждой семье около 4 - 5 человек. Значит, в Саратове порядка $2\ 10^5$ семей. Зная сколько человек, сидит в классе, можно быстро подсчитать долю семей, в которых есть кошки. Это число колеблется от 1/4 до 1/2. Таким образом, в Саратове около $5\ 10^4 – 10^5$ домашних кошек. Точно также можно оценить число домашних собак, телефонов и т.д.

Оценки можно делать из разных соображений, здесь важен не столько путь решения, сколько результат. Например, число домашних телефонов можно оценить так. Я видел телефонные справочники, это две книги по 300 - 400 страниц. На каждой странице около сотни телефонов. Значит, число домашних телефонов, зарегистрированных на момент создания справочника, порядка 80 тысяч.

В физике оценки позволяют очень быстро получать важные результаты. Например, во время испытания первой атомной бомбы Энрико Ферми почти мгновенно оценил мощность ядерного взрыва, измерив вызванное ударной волной смещение клочков бумаги, которые он сыпал на землю.

Итак, нужно уметь оценивать физические величины. Это умение должно стать очень естественным для вас, настолько, чтобы вы могли в своей работе следовать правилу физика, специалиста по теории атомного ядра и гравитации Уилера: «Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа».

Задачи

1. Оцените порядки следующих математических выражений:

   а) $\dfrac{8{,}51\cdot 3.2}{345}$; б) $\dfrac{(9{,}3\cdot 10^{11})(3{,}8\cdot 10^{-7})}{0{,}0078}$;

   в) (6521+17)(821+3·(5-8)/2,1); г) $\sqrt{5}$;

   д) $\sqrt{6437}$; е) $\sqrt{3{,}2\cdot 10^{11}}$.
2. Оцените давление, оказываемое стоящим человеком на поверхность Земли.
3. Оцените выталкивающую силу, действующую на кирпич, находящийся в воде.
4. Какое расстояние пройдет человек, сделав миллион шагов?
5. Сколько весит вода в океане?
6. Как быстро пройдет мимо вас современный поезд?
7. Сколько шариков от пинг-понга поместится в классной комнате?
8. Оцените ширину бороздки современной долгоиграющей пластинки.
9. Оцените количество электроэнергии, потребляемой одной семьей
10. Оцените среднюю скорость троллейбуса.
11. Понаблюдайте дома за механическими часами и оцените, сколько раз они тикают в течение суток.
12. В древности полагали, что Земля лежит на спине кита, плавающего в океане. Оцените характерные размеры кита. Землю считайте полусферой радиуса R=6400 км, плотность земных пород - $\rho_з$=5,5 г/см^3, плотность кита - $\rho_к$=0,9 г/см^3. Кита представьте цилиндром, диаметр которого в 10 раз меньше его длины.

4. Характерный размер

С понятием порядка физической величины тесно связано еще одно понятие - характерный размер. Мир окружающих нас тел - это, в первую очередь, мир геометрии. Оглянемся вокруг и выберем какое-нибудь тело. Нам на глаза вряд ли попадется правильное геометрическое тело - шар, цилиндр, конус. Скорее всего, это будет тело сложной формы, например, чайник (рис.2). В моей лаборатории стоит электрический чайник, похожий на тот, который изображен на рисунке 2.

Попробуем описать геометрию чайника. Для этого вооружимся линейкой и начнем снимать размеры чайника. А как, собственно, проводить измерения? Куда

Рис. 2

приложить линейку? Сделаем для начала несколько измерений. Ясно, что при наших измерениях будут получаться разные результаты. Например, высота чайника от дна до крышки равна 15 см. Высота чайника от края ножек до верхушки ручки равна 19 см. Максимальный поперечный диаметр чайника равен 18 см. Можно снять еще какой-нибудь размер чайника. Давайте, однако, остановимся и попробуем понять, есть ли что-то общее между полученными нами числами. Обратите внимание, что все эти числа одного порядка. В такой ситуации физики говорят, что чайник имеет характерный размер порядка 20 см. О каком размере идет речь? Почти о любом. В этом «почти» заключена некоторая неопределенность. В физике, однако, и не пытаются ее преодолеть, это не нужно. Нужно совершенствовать свою интуицию, чтобы понимать это «почти», чтобы уметь оценивать характерные размеры и использовать получаемые оценки в физической теории.

Разумно предположить, что если нас интересует лишь порядок величины характерного размера, то мы уже можем предсказать результат последующих измерений. Например, расстояние от кончика носика чайника до заднего края ручки тоже будет порядка 20 см. (Правда, легко поверить, что не порядка 10 км?)

Внимательный читатель заметит, что если измерить какие-то другие «элементы» чайника, например толщину ручки, высоту ножек (если они есть) и т.д., то мы будем получать другие результаты. В этом случае следует сказать, что характерный размер ножек другой, порядка нескольких сантиметров.

Итак, характерный размер - это величина, которая характеризует геометрию тела, но существенным является лишь порядок величины. Это понятие при всей его видимой простоте очень важно. Ведь вокруг нас множество тел, характеризующихся совершенно разными по порядку величины размерами (Солнце, железнодорожный локомотив, муравей, атом и т.д.). Для многих из них очень легко сразу определить характерный размер, для других надо воспользоваться справочником, а для некоторых приходится проводить специальные измерения или вычисления.

Тело может иметь несколько характерных размеров. Например, соломинка имеет характерную длину и диаметр (рис.3).

Можно представить себе тело и с тремя характерными размерами. Например, полоска бумаги (рис.3) длиной 14,3 см, шириной 0,83 см и толщиной 0,0123 см имеет три характерных размера, ибо все они - величины разных порядков.

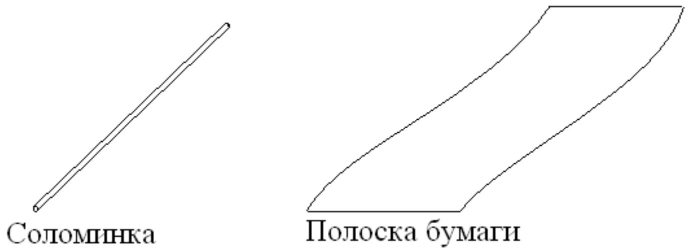


Рис. 3

Можно сказать, что полоска имеет характерную длину порядка 10 см, ширину порядка 1 см, и толщину порядка 0,01 см. Весьма эффектной иллюстрацией существования двух порядков длины является молекула ДНК. Если эту сложную молекулу вытянуть «в длину», то она достигнет размера порядка метра!

Обратим ваше внимание на то, что тело может быть охарактеризовано не только линейным размером, но и величиной объема. В принципе, порядок объема тела тоже важная величина. (Оцените, кстати, характерный объем чайника.) Иногда, чтобы подчеркнуть, что речь идет о «длине» употребляют выражение «характерный линейный размер тела». Но физики обычно прилагательное «линейный» опускают.

Задачи

1. Приведите примеры двух тел, характерные размеры которых отличаются на три порядка.
2. На карте изображено озеро (рис.4). Каков характерный размер озера?

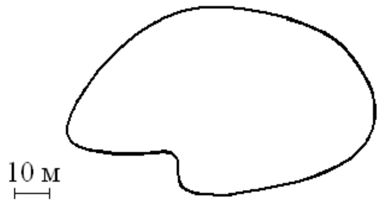


Рис. 4

3. Каков характерный размер Саратовской области?
4. В математике известна классификация треугольников по величине их сторон или углов (равнобедренный треугольник, равносторонний треугольник и т.д.). Разработайте классификацию треугольников, опирающуюся на понятие

характерной длины стороны.

5. Обсудите проблему соотношения характерных размеров для длин ступни и ноги человека.
6. Обсудите проблему применения понятия «характерный размер» для канцелярской скрепки.
7. Дачный участок имеет площадь 6 «соток». Оцените характерный линейный размер участка.
8. Айсберг имеет характерный линейный размер порядка 10 м. Оцените объем надводной части айсберга.
9. Итальянский физик и химик Авогадро (1776 - 1856) установил закон, в соответствии с которым моль любого вещества содержит одно и то же количество молекул N =6,02 10^{23} . Молем называют количество вещества, масса которого в граммах равна молекулярной массе. Например, для воды - это 18 г. Считая, что молекулы воды плотно прилегают друг к другу, оцените размер одной молекулы воды.

5. Масштаб

Предположим, что нам надо изобразить на бумаге (экране дисплея) амебу, характерный размер которой, как известно, составляет около 1 мм. Посмотрим на три портрета этой амебы, показанные на рисунке 5.

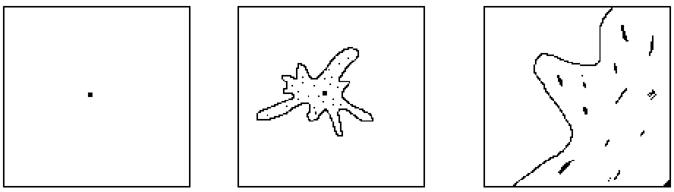


Рис. 5

Хотя амеба одна и та же, но эти три портрета радикально отличаются. Можно сказать, что амеба показана с разным увеличением. В первом случае увеличение очень небольшое, во втором – «умеренное», в третьем - большое. В такой ситуации говорят, что рисунки отличаются масштабом. Для того, чтобы дать общий вид амебы, мы должны выбрать масштаб рисунка так, чтобы амебу было удобно рассмотреть. На принятом у физиков языке можно сказать, что характерный масштаб рисунка должен соответствовать характерному размеру амебы. Этому требованию соответствует второй рисунок.

Понятие масштаба, которое естественным образом ассоциируется с географией, в физике используется не только для описания геометрии тел. Кроме характерных размеров можно ввести и другие величины, «присущие» телу или физическому процессу. В таких ситуациях физики тоже часто употребляют слова «характерный масштаб». Например, характерный масштаб времени, в течение которого можно изучить механику, составляет 1 год.

Оценка характерных масштабов очень важна при построении графиков зависимостей физических величин. Пусть, например, вы хотите построить график зависимости пути, пройденного автомобилем, от времени. Что для этого надо сделать? Прежде всего, нарисовать координатную плоскость. Вдоль оси y будем откладывать пройденный автомобилем путь, а по оси x - время в пути. Но какую величину расстояния припишем единичному отрезку вдоль оси y (метр, километр, десять километров)? А какую величину времени припишем единичному отрезку вдоль оси x (секунду, минуту, час?). Дело в том, что у нас нет пока сведений о том, о какой поездке идет речь. В Москву? На дачу? За молоком в соседний гастроном? Лишь имея более подробную информацию, можно выбрать характерные масштабы по осям координат и построить график. (Иногда приходится начертить черновой график, убедиться, что выбранный масштаб подходит или нет, и лишь потом строить необходимый график.) Так что выбор масштаба - это не формальная процедура, она требует понимания существенных особенностей физики процессов и явлений.

Изменение масштаба - очень интересная процедура, которая много может дать для физика. Давайте, применим ее для того, чтобы определить ... мгновенную скорость. Обратимся к графику движения, на котором показана зависимость координаты тела x от времени t (рис.6).

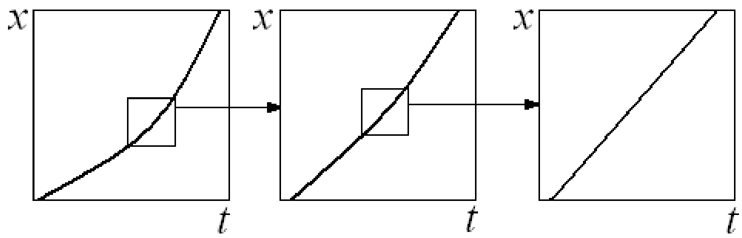


Рис. 6

Выберем маленький фрагмент на этом графике, и изменим, масштаб для этого фрагмента - увеличим его. На новом графике снова выберем маленький фрагмент и снова увеличим масштаб. В результате мы будем рассматривать лишь маленький кусочек исходного графика. Такой кусочек будет выглядеть как прямая линия. Но ведь это график прямолинейного движения! А для прямолинейного движения скорость численно равна наклону прямой. Проделав соответствующие измерения по графику, мы и определим значение мгновенной скорости в точке, окрестность которой была подвергнута процедуре увеличения масштаба.

Изменив масштаб, можно связать между собой физические зависимости, которые на первый взгляд кажутся совершенно разными. Нарисуйте, например, рядом график зависимости площади квадрата S от длины его стороны R и график зависимости площади круга от его радиуса R. А теперь, измените масштаб на первом рисунке вдоль оси S в π раз так, чтобы он «растянулся» в π раз вдоль вертикальной оси. Масштаб вдоль оси R оставьте неизменным. Нетрудно сообразить, что после этого графики зависимости площади квадрата от его стороны и площади круга от его радиуса будут неотличимы! Разница состоит лишь в выборе масштаба по одной из осей. Обе обсуждаемые зависимости даются формулой $S=CR^2$. Здесь C - некоторое постоянное число, как говорят, константа. Для квадрата $C=1$, а для круга $C=\pi$. Такие ситуации, когда зависимости отличаются лишь численным множителем, а в остальном тождественны, очень интересны. Впоследствии мы вернемся к ним.

Изменяя масштаб, можно «создавать» новые геометрические фигуры. Пусть, например, мы имеем окружность (рис.7.а).

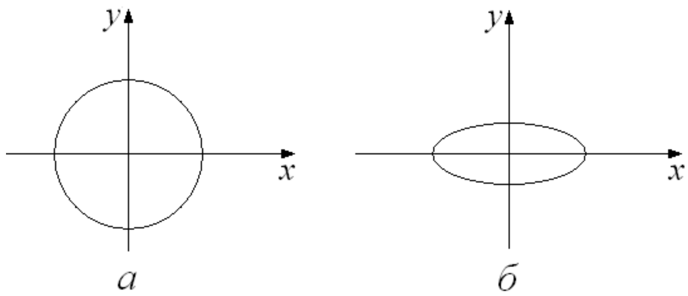


Рис. 7

Изменим масштаб вдоль оси y так, что окружность сожмется вдоль оси y (рис.7.б). Получившуюся фигуру называют эллипсом. Чем сильнее мы изменим масштаб по оси y, тем более вытянутый эллипс мы получим. Эллипс обладает многими интересными геометрическими свойствами. Для физиков эллипсы интересны, прежде всего, потому, что по ним движутся планеты вокруг Солнца.

Задачи

1. Вы хотите изобразить рядом кита и щуку так, чтобы они на рисунке имели примерно одинаковый размер. Во сколько раз будут отличаться масштабы рисунков?
2. На рисунке изображена линия. Покажите качественно фрагмент этой линии с помощью серии рисунков с увеличивающимся в 10 раз масштабом. Линия проведена шариковой ручкой.

3. Сколько нужно одинаковых карт масштаба 1:1000, чтобы ими покрыть местность, изображенную на одной такой карте?
4. Модель земного шара имеет размер, равный размеру шарика от пинг-понга. Чему равно расстояние от Саратова до Москвы на этой модели?
5. Вы отправились в кино. Кинотеатр расположен на расстоянии 1,2 км от дома. Выберите масштабы по осям координат, которые будут удобными, для того, чтобы изобразить ваш поход в кино в виде графика зависимости расстояния между вами и домом от времени.
6. Муравей путешествует с одного края дачного участка, имеющего площадь 6 соток, на другой. Выберите масштаб по осям координат, которые будут удобны для того, чтобы изобразить график зависимости пройденного муравьем пути от времени.
7. Уравнением $y=3x+2$ задана прямая на плоскости y, x. Изменится или нет наклон этой прямой, если масштаб по оси x увеличить в 5 раз? А если увеличить в 5 раз масштаб по оси y? А если увеличить масштаб в 5 раз и по оси x, и по оси y?
8. Уравнение окружности на плоскости x, y задается уравнением $y^2 + x^2 = R^2$, где R – радиус окружности. Покажите, что уравнение эллипса задается соотношением ${y^2}/{a^2} + {x^2}/{b^2} = 1$.

6. Точность в физике

Итак, мы научились определять примерные, приближенные значения физических величин и оценивать характерные размеры. Однако, если это необходимо, физическую величину нужно уметь рассчитать или измерить более точно. На первый взгляд кажется, что всегда надо стремиться к максимальной точности. Ведь физика – «точная наука»! Но на самом деле это не совсем так.

Каждое увеличение точности требует более дорогой и громоздкой аппаратуры. Например, чтобы измерить расстояние с точностью до миллиметра, нужна линейка. Линейка у нас всегда под рукой. А чтобы измерить расстояние с точностью до десятых долей миллиметра, нужен штангенциркуль. Не у каждого человека дома или на работе есть штангенциркуль, требуется время, чтобы его найти, а также время, чтобы научиться им пользоваться. Значит, увеличение точности измерения требует существенного увеличения времени, которое вы затратите на работу. А вдруг за это время вас опередят конкуренты - ваши коллеги?

Есть еще одна сложность. Дело в том, что чем точнее вы хотите рассчитать величину, тем большее число физических явлений надо учитывать. Например, вы хотите рассчитать орбиту Венеры. Прежде всего, необходимо принять во внимание притяжение со стороны Солнца. Учитывая только этот фактор, легко вычислить форму траектории Венеры. Но ведь на Венеру действует и Земля, и остальные планеты. А ведь есть и другие звезды, галактики, туманности и т.д. Значит, физик должен уметь остановиться в своем стремлении повысить точность. Об этом очень хорошо сказано в книге «Иду на грозу». Главный герой впервые начинает самостоятельную экспериментальную работу:

«После первых измерений ему показалось, что картина распределения получается слишком грубой. Он решил уточнить методику. Перебрал несколько сортов нитей подвески. Поставил сверхчувствительный гальванометр. Затем ему пришло в голову автоматически стабилизировать температуру прибора. Учесть искажающее влияние трансформаторов...

- Почему вы не учитываете полярные сияния? Заряды кота у сторожихи? - спросил его Аникеев. - Вы больны. Болезнь называется «не могу остановиться». Научитесь себя ограничивать. Получили примерную величину и двигайтесь дальше. Искать истину в последней инстанции - зряшный труд. И существует ли она, эта последняя инстанция?»

Значит, физика - вовсе не «точная наука», она всегда имеет дело с приближенными числами. Даже простые арифметические действия в физике не всегда столь уж просты. Зададимся вопросом, правильна ли запись 11,331см+12,1см=23,431см? С точки зрения математики здесь все верно. Но теперь поставим задачу иначе. Карандаш длиной 11,331 см, которая измерена с помощью штангенциркуля, и карандаш, длину которого измерили линейкой с миллиметровыми делениями и получили результат 12,1 см, положили на стол торцом к торцу. Какова суммарная длина двух карандашей? Ясно, что мы должны сказать 23,4 см. Ведь мы не знаем долей миллиметра во втором случае! Поэтому для физика в этой ситуации более правильна запись 11,331см+12,1см≈23,4см.

Итак, в физике выбрана определенная форма записи чисел, которая несет много полезной информации. Например, число $2{,}21\ 10^{12}$ м означает, что мы имеем дело с расстоянием порядка 10^{12} м, точность измерения около 1%, число достоверных цифр после запятой две. Вот сколько говорит число, если тот, кто обращается с ним, обращается аккуратно.

Может показаться, что определение точности - это процедура типа «страховки», просто гарантия измеренной или вычисленной величины. Однако это не так. Точность может быть очень существенной для физика. В этом очень просто убедиться. Возьмем микрокалькулятор, выберем число 1 и нажмем клавишу x^2 десять раз. На каждом шаге этой процедуры должно получаться число 1. Это математически строгий результат. А если мы немного ошиблись? Возьмем число 1,001 и проделаем этот же расчет. Получилось число 2,782885. Это что-то совсем не то. Таким образом, применение простейшей математической формулы при крайне малой ошибке в начальном числе дало совершенно другой результат. Но ведь абсолютно точных числовых данных в природе не бывает!

Как же мы решаем массу задач, например, о движении тел, брошенных под углом к горизонту? Ведь два разных тела абсолютно одинаково бросить нельзя. Но тогда, может быть, эти два тела полетят совсем по-разному? Тут есть, о чем подумать физику. Оказывается, что существует множество задач, когда малое изменение начальных условий приводит к радикальному изменению траектории тела. Это может приводить к возникновению хаоса - сложного, непериодического, непредсказуемого движения. Простейший пример такого рода - движение шарика, подпрыгивающего на вибрирующем столе. Подобными задачами в физике стали интересоваться по-настоящему только в самые последние годы, и в них еще остается много загадочного.

Задачи

1. Результат, какого из приведенных измерений является более точным: 36 км; 36,00 км? Почему? Во сколько раз выше точность?
2. Когда будущий лауреат Нобелевской премии Петр Леонидович Капица пришел устраиваться на работу к выдающемуся английскому физику Резерфорду, Резерфорд отказал ему со словами, что в его лаборатории нет мест. На это Капица сказал: «Но профессор, если вы примите меня на работу, то число ваших сотрудников увеличится не более чем на 10%. Вы же в своих работах всегда подчеркиваете, что физик не должен гнаться за большей точностью». Что вы можете сказать о численности группы Резерфорда?
3. Мама, папа и сын собрались поехать в отпуск в Москву на автомобиле. Мама поручила спланировать бюджет с точностью до рубля. С какой точностью для этого надо знать расстояние до Москвы? На 100 км пробега идет 12 л бензина, 1 л бензина стоит 7 рублей 20 копеек. (Поездка происходит в 1992 году.) Сын на всякий случай решил эту задачу и в предположении, что маме захочется знать бюджет с точностью до копейки. Какой результат он получил?

4. Определите, какова точность, с которой человек «на глаз» может измерить отрезок длиной около 1 см.
5. Размер клеточки в школьной тетради 0,5 см. С какой точностью они нанесены?
6. Нарисуйте в школьной тетради «от руки» окружность диаметром 5 см. С какой точностью вы смогли ее нарисовать?
7. В XVII веке Авраам Шарп получил число π с точностью до 72 знаков после запятой. С какой точностью можно вычислить, используя этот результат, длину окружности с радиусом, равным 10^{22} м - это расстояние до Большой Туманности в созвездии Андромеды.
8. С какой точностью надо измерить сторону квадрата, чтобы определить его площадь с точностью не ниже 1 %?

7. Зависимости физических величин. Функции и графики в физике.

Мы теперь знаем, что физические величины измеряются числами. Существенное свойство окружающего мира состоит в том, что некоторые из физических величин зависят друг от друга. Отыскать такие зависимости иногда не просто. Часто трудно бывает даже сказать, есть ли зависимость, или ее нет совсем. Например, зависит или нет число дорожно-транспортных происшествий от усилий агитационных машин ГИБДД на улицах? Чтобы ответить на этот вопрос, требуется специальное исследование. Но совершенно ясно, что, например, расход бензина зависит от величины пройденного автомобилем пути. А вот численность населения Гавайских островов не зависит от числа двоек, полученных учениками Лицея прикладных наук.

Как сделать зависимости наглядными? Физики используют три основных способа: рисуют графики, составляют таблицы, получают формулы. (Подумайте и приведите примеры зависимостей, заданных тремя перечисленными способами.)

Математический аппарат, который позволяет описывать зависимости физических величин - это теория функций. Физик должен очень хорошо владеть теорией функций. Он должен уметь быстро, легко и свободно рисовать графики функций. Умело находить на них характерные точки (минимумы, максимумы и т.д.). Этому искусству вы должны научиться на уроках математики. Но для физика функция - чуть более «живой» объект. Ведь она всегда выражает зависимость из реальной жизни! Значит, опыт и интуиция могут много рассказать о том, как должен выглядеть график.

Многое из того, что мы говорили о числах, справедливо и для функций. Можно нарисовать примерный, приближенный график, который схватывает суть зависимости. В этом случае говорят, что график функции построен «качественно». Затем можно подсчитать или измерить зависимость более точно и нарисовать уточненный график и т.д.

На графике функции можно увидеть некоторые характерные «элементы», которые для опытного человека всегда бросаются в глаза. В каком-то смысле качественная информация о функции, которую мы запоминаем, и есть информация о том, какие это элементы и каково их взаимное расположение. Очень важно понимать, что для появления этих «элементов» на графиках зависимости всегда должны быть какие-то физические основания.

Участки монотонности. Максимумы и минимумы. Мы приведем экономическую, а отчасти «психологическую» интерпретацию этих новых понятий. Пусть нас интересует зависимость количества денег, имеющихся в нашем распоряжении, от времени (рис.8). Это количество может монотонно расти (хорошо!), может монотонно уменьшаться (плохо!).

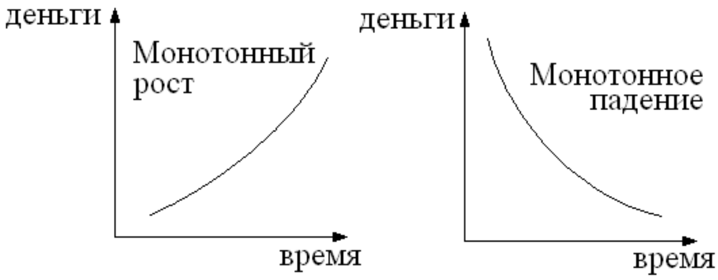


Рис. 8

Пусть теперь количество денег у нас растет, растет, а потом, к сожалению, начинает уменьшаться. В подобном случае говорят, что функция имеет максимум (рис.9). Или, наоборот, наша жизнь была очень печальной, число денег все время убывало, но, начиная с некоторого момента, стало расти. В подобной ситуации говорят, что функция имеет минимум (рис.9).

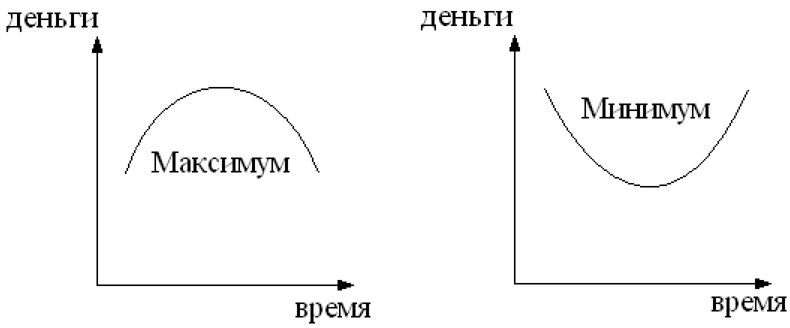


Рис. 9

Разрыв. Если нет каких-то специальных физических причин, то график исследуемой функции «скорее всего» плавный, гладкий. Такова, например, зависимость температуры воздуха от времени в течение хорошего, солнечного дня, изображенная на рисунке 10.

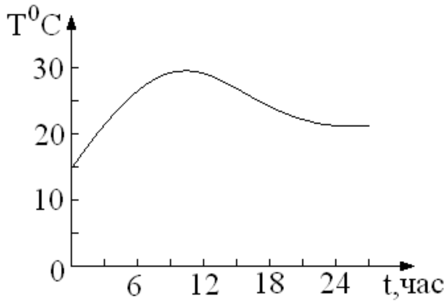


Рис. 10

Рассмотрим теперь качественно иную ситуацию. Пусть нас интересует зависимость числа яблок в холодильнике от времени. «Проведя измерения», мы можем получить примерно такой график (рис.11).

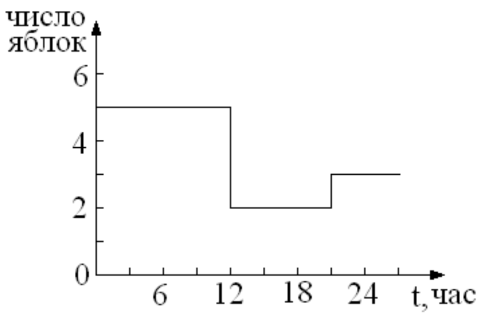


Рис. 11

Существенная особенность этого графика - наличие характерных горизонтальных «полочек». Их появление связано с тем, что число яблок в холодильнике всегда целое. Как видно из нашего рисунка, в 15 часов из холодильника достали три яблока, а в 21 час - одно положили обратно. Именно эти действия привели к «скачкам» на графике. В подобной ситуации говорят, что функция имеет разрывы.

Действительно ли функция «рвется»? Обычно более детальное исследование физической ситуации приводит к следующему. На тех характерных масштабах времени, на которых мы описали наш процесс, величина изменяется скачком. Однако, если исследовать поведение зависимости на существенно меньших масштабах, то мы можем обнаружить более «тонкое» устройство графика.

Например, график зависимости температуры от времени может иметь разрыв, если во время хорошего, солнечного дня внезапно налетит тайфун. Если же мы рассмотрим окрестность разрыва, то увидим, что температура на характерном отрезке времени порядка 10 минут менялась плавно (рис.12). Правда, для того, чтобы

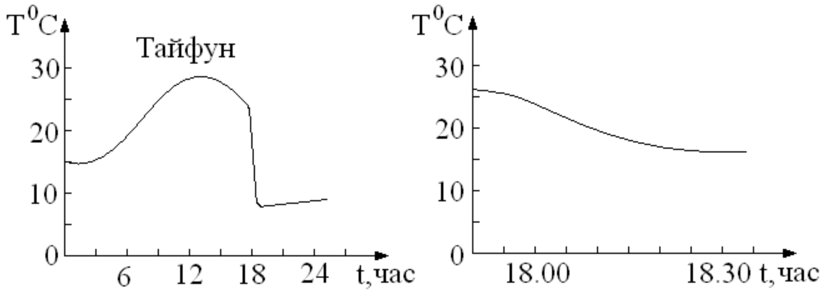


Рис. 12

зарегистрировать это плавное изменение, требуется проводить гораздо более частые измерения температуры.

Излом. Излом - это точка, в которой естественное продолжение графика не совпадает с тем, как он ведет себя на самом деле (рис.13).

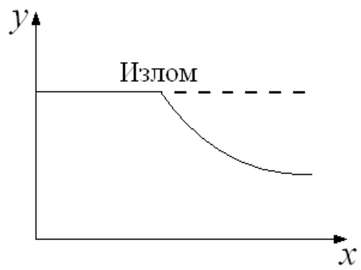


Рис. 13

То, что мы сказали о разрывах, относится и к изломам: для их появления необходимы физические причины. Например, на графике зависимости температуры нити лампочки накаливания от времени изломы появляются тогда, когда мы щелкаем выключателем. Изломы могут иметь тонкую структуру, для обнаружения которой необходимы более тщательные измерения.

Задачи

1. На одном графике (рис.14) приведены зависимости длины отрезка, площади квадрата и объема куба от длины стороны l. Определите, какой график соответствует каждой из указанных зависимостей.

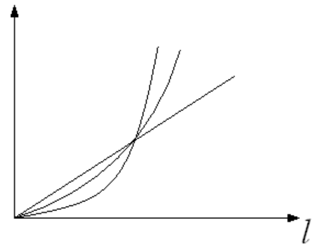


Рис. 14

2. Постройте график зависимости площади прямоугольного треугольника с катетом, равным 1 см, от величины угла, прилежащего к этому катету. Имеет ли этот график разрывы, изломы, максимумы или минимумы?

3. В таблице приведены значения температуры T на улице, измеренные в некоторые моменты времени t. День спокойный, солнечный. Постройте график зависимости температуры на улице от времени. (Используйте миллиметровую бумагу!) Чему была равна температура в 13 часов, 17 часов, 19 часов? Какую температуру можно ожидать в 21 часов?

t, час	11	12	14	15	16	18	20
T^0 C	27,1	28,7	30,0	29,7	28,7	25,0	20,0

4. Постройте график зависимости массы стакана с водой от объема воды, налитой в стакан.
5. Дачный пароходик курсирует вверх-вниз по реке. Постройте возможный график зависимости координаты пароходика, отсчитываемой вдоль реки, от времени.
6. Мама, папа и сын едут в отпуск на автомобиле. Сын следит за расходом бензина. Нарисуйте график зависимости количества бензина в баке автомобиля от пройденного пути, который получил сын.
7. Нарисуйте примерный график зависимости числа учеников в школе от времени в течение суток. Будет ли он одинаков для декабря и сентября? В чем отличие и почему?
8. Нарисуйте примерный график зависимости потребляемой в вашей квартире электроэнергии от времени в течение суток. Объясните его.
9. Нарисуйте примерный график зависимости числа людей от времени в вашей квартире в течение суток.
10. Нарисуйте график зависимости высоты уровня воды в ванне от времени. Рассмотрите два случая: пробка открыта, пробка закрыта.
11. В момент времени t=0 включили электрическую лампочку. Нарисуйте качественно график зависимости температуры нити лампочки от времени.
12. Шар диаметром 5 см погружают в воду. Постройте качественно график зависимости выталкивающей силы, действующей на шар, от глубины, на которую погрузили шар.
13. Пуля, летящая со скоростью v, пробивает кубик из пенопласта (рис.15). Нарисуйте качественно зависимость скорости и ускорения пули от времени.

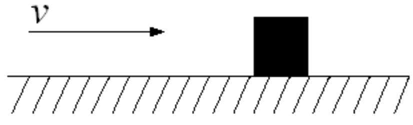


Рис. 15

14. Маленький грузик висит на пружине (рис.16). Грузику ударом сообщают скорость v, направленную вертикально вверх. Нарисуйте качественно зависимость координаты и скорости грузика от времени. Сопротивление воздуха отсутствует.

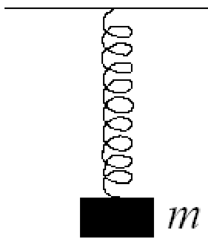


Рис. 16

15. Космический корабль приближается к планете по спирали (рис.17). Нарисуйте примерный график зависимости координат x и y от времени.

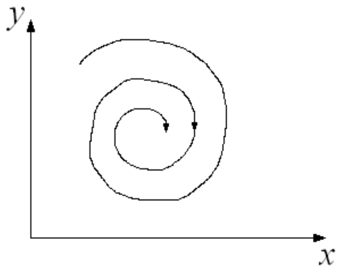


Рис. 17

8. Асимптотическое поведение зависимостей

Функции в физике - не просто математические объекты, они всегда связаны с реальным миром. Чтобы установить функциональную связь обычно требуется провести измерения, выполнить расчет и т.д. Однако в некоторых областях изменения переменных характер физической зависимости иногда удается выяснить из простых, «жизненных» соображений. Пусть, например, мы решаем следующую задачу. В Земле от Северного до Южного полюсов прорыта гигантская шахта. Постройте график зависимости силы тяжести F, действующей на тело массы m, от расстояния от центра Земли. Тело может находится как внутри шахты, так и вне нее.

Давайте «наметим» график из следующих соображений. Очень далеко от Земли сила тяжести практически равна нулю, поскольку тяготение убывает с расстоянием. В центре Земли сила тяжести тоже равна нулю - в этом случае тело испытывает одинаковое воздействие пород Земли со всех сторон. Наконец, на поверхности Земли сила тяжести равна mg. Итак, мы кое-что уже знаем, хотя «по-настоящему» и не решали задачу! Можно нарисовать примерный график искомой зависимости (рис.18).

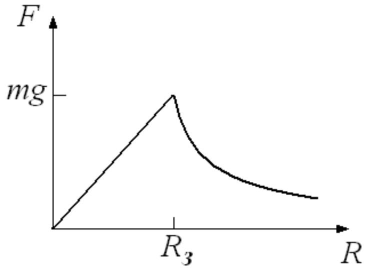


Рис. 18

Об этом графике можно сказать следующее: «При больших значениях R сила тяжести стремится к нулю, она стремится к нулю и при малых R.» Ситуации, когда физическая переменная стремится к каким-либо значениям, называют предельными или асимптотическими. Всякая информация о предельных случаях очень ценится в физике. Ведь она помогает следовать правилу Уилера: «Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа».

С помощью асимптотических оценок можно найти ошибку в результатах чужой теории или эксперимента, не занимаясь детальной проверкой. Обратимся еще к одной задаче. Горизонтальная балка прямоугольного сечения жестко заделана одним концом в стену. К другому концу балки приложена сила F (рис.19). Смещение y конца балки зависит от силы F, длины l, ширины a и толщины балки b, а также от коэффициента E с размерностью Н/м^2, характеризующего материал балки. На экзамене, решая эту задачу, студент вывел следующую формулу: $y = \dfrac{4Fb}{Eal^3}$. Как вы думаете, как отреагировал профессор?

Профессор не стал решать эту сложную задачу. Чтобы проверить формулу студента, он воспользовался «физическими соображениями». Формула $y = \dfrac{4Fb}{Eal^3}$

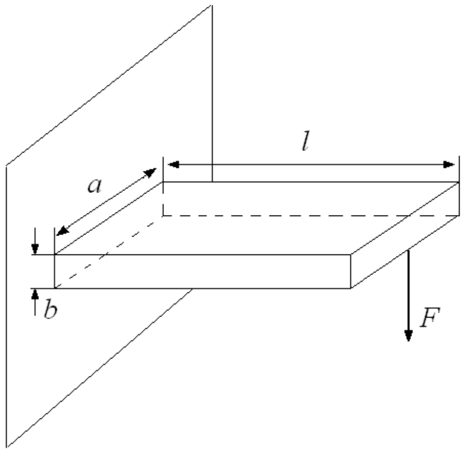


Рис. 19

должна быть справедливой ***при любых значениях параметров***. Профессор проверил ее при очень маленьких значениях толщины балки *b*. Формула, полученная студентом, при стремящемся к нулю *b* предсказывает очень маленькое значение смещения конца балки *y*. Профессор «представил себе» очень тонкую «балку». Конечно, это уже не балка, а, фактически, тонкий лист. Но такой лист сильно согнется под действием силы, приложенной к его концу! А значит, формула студента неправильна, она предсказывает неверный результат в асимптотическом случае $b \to 0$. (Записью $b \to 0$ заменяют слова «величина *b* стремится к нулю».)

Профессор указал студенту на его ошибку. Подумав, студент написал еще одну формулу: $y = \dfrac{4Fl^2}{Eab}$. Но и эту формулу профессор забраковал, не проводя вычислений. Почему?

Задачи

1. В ведро высыпали стальные шарики - столько, сколько помещается. Нарисуйте качественно, как выглядит эта ситуация в асимптотике очень больших шариков.
2. Аборигены высекли из цельной скалы куб с ребром в 100 м. Какие слова больше подходят для описания картины, открывшейся путешественникам: «колоссальная стена» или «кажется, я вижу нечто любопытное, что трудно разобрать при моем зрении»?
3. Преобразуйте следующие математические выражения в асимптотике очень больших x:

   а) $y = \dfrac{1}{1+x}$, б) $y = \sqrt{x^2 + 4}$.
4. Ученик получил формулу для объема конуса $V = \pi R^2 h^3 / (h^2 + R^2)$, где R - радиус основания конуса, а h - его высота. Выделите два предельных случая и проверьте для них справедливость формулы.
5. Как известно, при равноускоренном движении зависимость координаты от времени дается соотношением $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$. Напишите более простую формулу, которой можно пользоваться, если время движения тела t велико. Сделайте оценку величины времени, начиная с которого полученной приближенной формулой можно пользоваться. Чему равно это время, если x_0 =1см, v_0 =1м/с, a=10м/с^2 ?
6. На легком стержне укреплен массивный шарик (рис.20). Стержень может вращаться вокруг точки О. Шарик отклонили на угол φ от вертикали и

отпустили. Через время T шарик прошел «туда-сюда» и вернулся в исходное положение. Затем опыт повторили для другого начального угла φ. На рисунке 20 приведены два варианта графика зависимости времени T от угла φ. Какой из графиков, по вашему мнению, правильный?

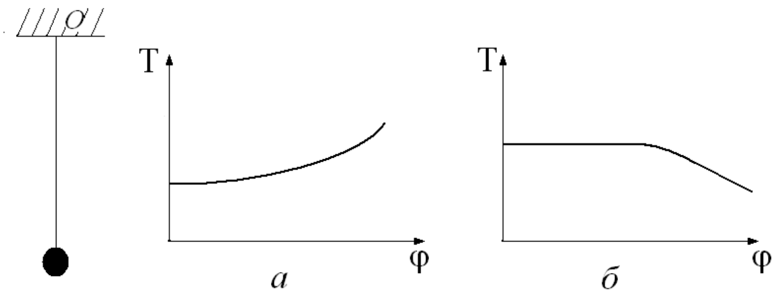


Рис. 20

7. На неподвижный шар массы M налетает со скоростью v другой шар. В результате упругого удара шар массы m отлетел со скоростью $u=mv/M$. Правильное ли это утверждение?
8. Мяч бросили вертикально вверх. Что больше, время подъема или время падения? Учесть сопротивление воздуха.

9. Измерения и эксперимент в физике

Очень многие зависимости физики устанавливают экспериментально, т.е. измеряют величины и на основе этих измерений делают выводы об их взаимосвязи. Измерение - это основной метод работы физиков-экспериментаторов.

Чем больше талант экспериментатора, тем на более простом оборудовании он может получить эффектные результаты. Но эксперимент - это всегда большой труд, требующий напряжения, внимания и времени. Эксперимент - это своего рода искусство. На каждом шаге решения экспериментальной задачи приходится применять какие-то маленькие хитрости и находки. Решения задач здесь бывают неожиданными и интересными.

Большое значение имеет умелая обработка результатов эксперимента. Даже имея примитивное оборудование, за счет обработки результатов измерений можно добиться высокой точности. Как это сделать? Давайте обратимся к примеру. Пусть перед нами стоит экспериментальная задача: имея линейку с миллиметровыми делениями, определить толщину листа книги.

Взяв линейку и приложив ее к одному листу, мы можем установить лишь, что толщина листа менее 1 мм. «На глаз» можно сказать, что она, по-видимому, около 0,1 мм. Что же делать дальше?

Приготовим пачку из 100 листов. Толщину такой пачки уже можно измерить линейкой. Первое, на что обращаешь внимание при измерении - стопку надо слегка сжать, чтобы устранить промежутки между листами. Измерение дало значение 9 мм с точностью 1 мм. Значит, толщина листа 0,09 мм, а точность этого измерения около 0,01 мм. Это уже неплохой результат.

Как еще повысить точность? Мы измеряем толщину стопки листов с точностью около 1 миллиметра. При этом 100 листов имеют «истинную» толщину, лежащую где-то между 9 мм и 10 мм. Но ведь можно поступить следующим образом. Не будем фиксировать количество листов в пачке, а начнем постепенно «подкладывать» их до того момента, когда толщина стопки не станет равной точно 10 мм. Такая стопка содержит, как оказалось в проделанном автором эксперименте, 103 листа, а значит толщина листа 0,097 мм.

Не будем останавливаться на достигнутом. Придуманную нами схему измерений можно применить не один раз. Измерим 5 раз число листов в пачках толщиной в 10 мм. Были получены значения 103, 105, 107, 106, 107 листов. В ходе эксперимента пришла в голову идея, что надо брать пачки примерно по 100 листов в разных местах книги. Действительно, если мы будем повторять измерение на одном месте, есть шанс получить одно и то же число, поскольку листы примнутся, и книга будет открываться на одном и том же месте. Теперь мы можем сделать таблицу.

Номер опыта	Число листов	Толщина листа мм	Средняя толщина мм	Погрешность каждого опыта мм	Средняя погрешность мм
1	103	0,09708		0,0022	
2	105	0,09524		0,0004	
3	106	0,09434	0,09488	0,0005	0,001
4	107	0,09346		0,0014	
5	106	0,09434		0,0005	

В нее мы занесли результаты всех 5 измерений. Сложив их все и поделив на число измерений, можно вычислить среднее значение толщины листа: 0,09488 мм.

Какие факторы влияли на точность? К несчастью, их, как всегда, много. Линейка позволяет измерять расстояния с ограниченной точностью, листы в стопке можно сжать по-разному, к концу измерений мы устали и были менее внимательными и т.д. Кроме того, все листы в книге на самом деле разной толщины. Так что определить точность измерений, приняв во внимание все эти факторы, очень сложно.

Но мы все же можем оценить точность наших измерений. Для этого надо подсчитать, насколько мы ошиблись по сравнению со средним значением во всех опытах. Эти данные представлены в пятом столбце таблицы. Затем вычисляем среднюю ошибку. Она равна 0,001 мм. Теперь имеет смысл округлить наш результат, поскольку число 0,09488 содержит несколько «незаконных» лишних цифр. Итак, окончательно

Толщина листа равна 0,095 мм ± 0,001

Наш опыт позволяет решить еще одну задачу. Давайте экспериментально найдем зависимость между числом листов в стопке N и толщиной стопки l. Тогда мы получим функцию, которую можно изобразить на графике (рис.21).

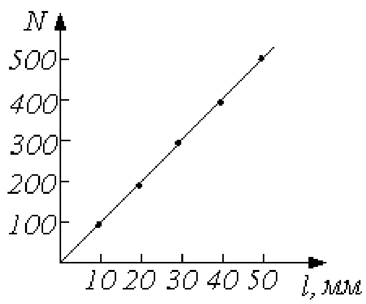


Рис. 21

Нетрудно сообразить, что искомая зависимость имеет вид прямой линии. Действительно, число листов $N=l/d$, где d - толщина одного листа. Взяв линейку, можно провести эту линию. Экспериментальные точки чуть-чуть не ложатся на прямую, что связано с погрешностью измерений. С помощью такого графика тоже можно найти толщину листа по величине углового коэффициента построенной прямой. (Вы помните, как найти угловой коэффициент прямой по графику?) Таким образом, есть еще один способ определения толщины листа. Наверно, он один из лучших, поскольку мы обрабатываем результаты всех пяти измерений простым «приложением» линейки к экспериментально полученному графику. Стоит сказать, что существует специальный численный алгоритм, который позволяет по экспериментальным точкам провести прямую линию оптимальным образом (так называемый метод наименьших квадратов). Но и «на глаз» получается хорошая точность.

Кажется, на этом оборудовании мы сделали все, что могли. Мы потратили много времени и сил. Стоило ли гнаться за такой точностью? (Вспомним советы Аникеева.)

Точность эксперимента часто играет важнейшую роль в установлении фундаментальных законов природы. Очень часто такие эксперименты выполняются на пределе точности - ведь речь идет о совершенно новых исследованиях. Например, существуют теории, согласно которым известные людям поля: электромагнитные, сильные, слабые, представляют собой проявления некоторого единого поля. Если это так, то протон - не идеально стабильная частица, время его жизни около $10^{34\pm2}$ лет. Это очень большое число. Ведь Вселенная существует всего лишь около 10^{10} лет. Если взять очень много протонов, около 10^{33} штук, то можно ожидать, что за один год распадется несколько протонов. Эксперименты по наблюдению за возможными распадами протонов сейчас проводятся. Для них созданы специальные установки, содержащие тысячи тонн вещества, находящиеся в глубоких шахтах и устройства, которые могут зафиксировать распад единичных протонов. Пока установлено, что время жизни протона больше, чем 10^{31} лет.

Задачи

1. Определите размер клеточки в школьной тетради. Оборудование: полоска миллиметровой бумаги.
2. Определите вес одной капли. Оборудование: пипетка, чашка, сосуд с водой, весы.
3. Определите вес скрепки.
4. Определите толщину скрепки.
5. Определите вид зависимости длины окружности, площади круга и объема шара от их радиусов. Оборудование: несколько цилиндров, нитка, весы, шарики разных размеров, лист бумаги, линейка, стакан с водой.
6. У вас есть динамометр, набор разновесов и нитка. С какой точностью вы можете измерить массу тела?
7. Разработайте способ экспериментального определения высоты пятиэтажного дома.

10. Размерности физических величин

Кроме численных значений, физические величины характеризуются своей размерностью. С понятием размерности мы знакомимся еще до того, как начинаем изучать физику. Например, мы хорошо знаем, что длина измеряется в метрах, масса в граммах и т.д. На первый взгляд кажется, что размерность играет вспомогательную роль. На самом деле это не так. Размерность - хороший помощник физика. Умение обращаться с размерностью помогает избежать ошибок в преобразованиях, а иногда дает возможность получить ответ к задаче, когда другие способы решения найти не удается.

Давайте поговорим о размерности подробнее. Не указав размерности, нельзя сопоставить физической величине какое-либо число. Например, бессмысленно сказать, что длина предмета равна 10. Надо обязательно уточнить, чего 10? Метров, сантиметров, а может быть парсек? Вот эта дополняющая число информация и называется размерностью. Таким образом, размерность физической величины устанавливает, с каким эталоном надо соотнести число. Если длина стены равна 10 метров, это означает, что вдоль стены можно уложить 10 раз линейку метровой длины.

Существуют основные размерности. Они соответствуют физическим величинам, которые людям проще измерять. Обычно это длина, масса, время. Им соответствуют размерности «метр», «килограмм», «секунда», или сокращенно «м», «кг», «с». Остальные физические величины имеют производную размерность, например, размерность скорости – «м/с», ускорения – «м/с^2» и т.д. Вообще-то, можно придумать единицу скорости, и считать ее основной. Тогда производной станет единица длины. Принципиальных возражений против этого нет, но это очень неудобно.

В физических соотношениях размерности правой и левой части всегда должны быть равны. Невозможна запись

3 бегемота - 2 бегемота = 1 крокодилу.

Также не верна запись

100 бегемотов = 100 килобегемотов,

хотя, казалось бы, цифры одинаковы.

Это правило позволяет быстро находить ошибку, когда вы проводите большое количество промежуточных расчетов. Например, в задаче о балке, которую мы уже обсуждали, профессор мгновенно забраковал и третий вариант ответа $y = \dfrac{4Fl^{2b}}{Ea^2}$. Он рассуждал следующим образом. Размерность левой части соотношения равна «метрам»:

$$[y] = м.$$

Квадратные скобки в этой записи обозначают размерность. Вычислим теперь размерность правой части:

$$\left[\frac{4Fl^{2b}}{Ea^2}\right] = \frac{Н \cdot м^2 \cdot м}{(Н/м^2)^2 \cdot м^2} = м^3$$

Получается, что размерность левой части равенства и размерность правой не совпадают. Значит, формула не верна.

Но простая проверка преобразований - это далеко не все выгоды размерности. Оказывается, анализ размерности физических величин позволяет получать новые формулы. Соответствующий прием называют методом размерностей. Давайте научимся пользоваться этим методом. Отыщем формулу для объема шара. Первый этап решения задачи с помощью метода размерности состоит в том, что определяются все величины, которые могут войти в искомую формулу. Ясно, что объем шара, может зависеть только от его радиуса R. Выпишем размерности всех интересующих нас величин:

$$[V] = м^3 , \quad [R] = м.$$

Единственный способ, с помощью которого из размерности «м» можно получить «$м^3$», состоит в том, чтобы возвести радиус в куб. Поэтому искомая формула имеет вид:

$$V = C\,R^3.$$

В полученное соотношение вошел некоторый неизвестный нам численный коэффициент, который мы обозначили через C. Это число нельзя определить с помощью метода размерностей. Константу C можно отыскать экспериментально, с помощью компьютерного моделирования или строго решив задачу.

Решим с помощью метода размерностей еще одну, более сложную задачу. Чему равно время, за которое маятник совершает одно полное колебание? (Это время называют периодом колебаний.) Строгое математическое решение этой задачи приводит к дифференциальному уравнению, которое не изучают в школе. Не будем, поэтому пытаться написать уравнение движения, а попробуем ответить на вопрос: от каких физических величин зависит период колебаний T? Мы знаем, что период малых колебаний не зависит от начального угла отклонения маятника. Нить, на которой подвешен маятник, очень легкая, поэтому период колебаний не может зависеть от ее массы. Грузик имеет очень маленький размер, так что этот размер тоже не может быть существенным. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то останутся всего три величины: длина нити l, ускорение свободного падения g, масса маятника m.

Итак, ответ к нашей задаче должен выглядеть в виде формулы, в левой части которой должен стоять период колебаний T, а в правой - неизвестная нам пока комбинация из длины нити l, ускорения свободного падения g, массы маятника m. Выпишем размерности величин, входящих в искомую формулу:

$$[T] = с;$$

$$[l] = м,\ [g] = м/с^2 ,\ [m] = кг.$$

Размерности левой и правой части любого равенства должны быть равны. Как «приготовить» секунды из м, м/$с^2$, кг? Способ один:

$$c = \sqrt{м/(м/с^2)}$$

Следовательно, ответ к задаче имеет следующий вид:

$$T = C\sqrt{l/g}\ .$$

Здесь С - какое-то неизвестное нам безразмерное число. Определим константу С экспериментально. Изготовим маятник длиной 1 м, и измерим период колебаний. Он окажется около 2 с. Значит число $C = T/\sqrt{l/g}$ приближенно равно 6,3. (Точное значение C=2π.)

Мы получили, что период колебаний зависит от длины маятника как $\sqrt{l}$. Поэтому, если увеличить длину маятника в 2 раза, то период колебаний возрастет в $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ раз. Кроме того, мы установили, что период колебаний маятника не зависит от массы грузика. Это существенные результаты, которые могут быть проверены экспериментально.

Давайте еще немного поразмышляем над задачей о маятнике. Что будет, если маятник совершает колебания с большим размахом? Тогда период колебаний должен зависеть от начального угла отклонения φ. Это величина безразмерная. Но ведь размерности левой и правой частей уравнений все равно должны быть одинаковы. Это с неизбежностью приводит нас к выводу о том, что формула для периода колебаний выглядит так:

$$T = \sqrt{l/g} \cdot f(\varphi)\ .$$

В этом соотношении $f(\varphi)$- некоторая функция, которую установить из соображений размерности невозможно. Однако ее график можно построить экспериментально. Для этого надо установить зависимость $T(\varphi)$ для какой-то одной фиксированной длины l. Если затем построить график измеренной зависимости, отложив по горизонтальной оси угол φ, а по вертикальной – комбинацию $T = \sqrt{l/g}$, то это и будет график функции $f(\varphi)$. Кстати, у нас обязательно при этом получится $f(0)$≈6,3 (почему?). Кроме того, при малых значениях φ функция будет почти не зависеть от φ (почему?).

Можно проделать несколько серий измерений зависимости периода колебаний от начального угла отклонения φ при разных значениях длины нити l. Построим эти зависимости, отложив по вертикальной оси величину $T = \sqrt{l/g}$. Тогда все они должны представлять собой одну и ту же кривую! Ведь фактически, мы каждый раз строим график функция $f(\varphi)$, а она одинакова во всех случаях. Когда возникает такая ситуация, у физиков принято рисовать одну серию результатов точечками, другую - крестиками, третью - квадратиками и т.д. Тогда результаты, относящиеся к разным значениям длины, оказываются выделенными. Получается следующая картинка (рис.22).

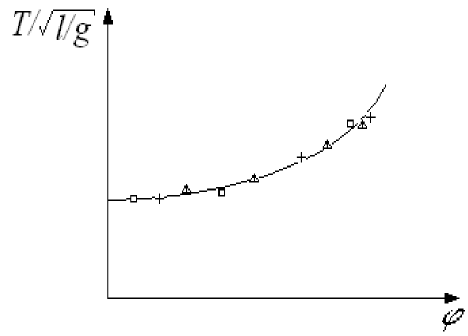


Рис. 22

Взглянув на такой график, можно сразу сказать, хорошо ли работает наша формула. Критерием этого является, ложатся или нет точечки, крестики, квадратики на одну кривую. Если да, то в этом случае говорят, что получилась универсальная функция. Она является универсальной в том смысле, что она пригодна одновременно для всех маятников, какова бы ни была длина их подвеса.

Задачи

1. Размерности каких из перечисленных величин относятся к основным: атмосферное давление, время обращения Земли вокруг своей оси, скорость автомобиля, длина железнодорожного состава, мощность электрической плитки, масса птичьего пера? Если такие величины есть, то удобно ли использовать их в качестве эталона?
2. В известном мультфильме Удава измеряют в попугаях. Какие параметры Попугая можно использовать в качестве эталона для введения основных единиц?
3. Выразите через основные следующие размерности: Н, Па, Дж, Вт.
4. Определите экспериментально константу C в формуле $V=CR^3$ для объема шара. Используйте для этого следующее оборудование: шар, линейку или штангенциркуль, мерную мензурку с водой.
5. Получите формулу для площади круга из соображений размерности. Определите экспериментально константу C в этой формуле, используя клетчатую бумагу и циркуль.
6. Экспериментально определите, во сколько раз возрастает период колебаний маятника при увеличении его длины в два раза.
7. Тело движется по окружности радиуса R с постоянной по величине скоростью v.

Из соображений размерности получите выражение для ускорения тела.

8. Спутник движется вокруг Земли по низкой орбите. Получите формулу для периода обращения спутника из соображений размерности. Ускорение свободного падения у поверхности Земли равно g, ее радиус R.
9. Для того, чтобы оторвать змею от добычи, ее надо тянуть за хвост с силой F. За какое время змея, лежащая на гладкой горизонтальной поверхности вдоль прямой линии, может свернуться, образовав кольцо? Масса змеи M, ее длина l.
10. Маленький кубик массы m прикреплен к пружине жесткости k (рис.23). Если кубик сместить в сторону, то он начнет колебаться около положения равновесия. Так же как и для маятника, период малых колебаний кубика не зависит от их размаха. Чему равен период колебаний? Трение отсутствует.

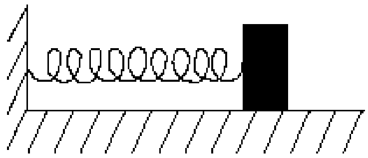


Рис. 23

11. Скорость звука в газе зависит от давления p и плотности газа ρ. Получите формулу для скорости звука.
12. Тело брошено под углом α к горизонту. Из соображений размерности получите формулы для дальности полета тела l и максимальной высоты подъема тела h. Постройте качественно универсальную функцию, характеризующую зависимость дальности полета от угла.
13. Площадь прямоугольного треугольника однозначно определяется величиной гипотенузы c и углом α, прилежащим к гипотенузе. Из соображений размерности получите формулу для площади прямоугольного треугольника. Постройте качественно универсальную функцию, характеризующую зависимость площади прямоугольного треугольника от угла α.
14. Используя результат предыдущей задачи, докажите теорему Пифагора.

11. Подобие - один из способов узнать зависимость физических величин

Подобие - это термин, который известен нам из геометрии. Чтобы получить фигуру, подобную данной, ее можно перефотографировать и напечатать фотоснимок с другим увеличением (рис.24).

Рис. 24

Подобие тесно связано с понятием характерного размера. Чтобы полностью определить то или иное геометрическое тело, необходимо задать некоторое число параметров - характерных размеров. Число таких характерных размеров может быть существенно разным, оно зависит от «сложности» геометрии фигуры или тела. Например, квадрат будет полностью определен, если задать всего один его размер - длину стороны. Чтобы определить круг, тоже достаточно задать один размер, например, радиус.

Если фигура характеризуется единственным геометрическим размером, то можно утверждать, что все фигуры этого типа подобны. Например, подобны друг другу все квадраты и подобны друг другу все круги (рис.25).

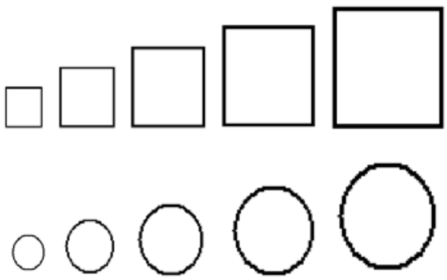


Рис. 25

Также подобны друг другу все кубы и все шары. Пусть теперь, чтобы определить фигуру, надо задать два или больше геометрических размера. Такие фигуры уже не обязательно подобны. Например, не подобны два прямоугольника, показанные на следующем рисунке (рис.26).

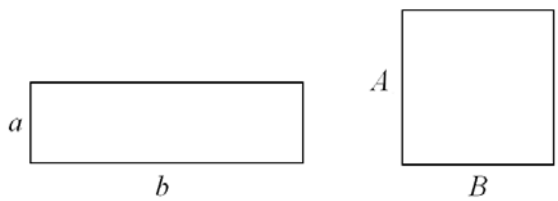


Рис. 26

Чтобы фигура была подобна какой-либо данной, ***лишь один из ее размеров может быть произвольным.*** Например, чтобы превратить второй из изображенных прямоугольников в подобный первому, мы можем сохранить его высоту неизменной, но должны подобрать длину так, чтобы она отличалась в $n=A/a$ раз от длины первого прямоугольника (рис.27).

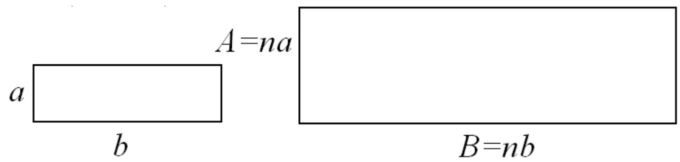


Рис. 27

Число $n=a/A$ называется коэффициентом подобия.

В геометрии доказывается, что если размеры подобных фигур отличаются в n раз, то их площади отличаются в n^2 раз. Идея такого доказательства очень проста. Разобьем одну из фигур на маленькие квадратики. Очевидно, что можно выполнить совершенно аналогичное разбиение на квадратики второй фигуры, только размеры квадратиков будут отличаться в n раз, а их площади – в n^2 раз (рис.28).

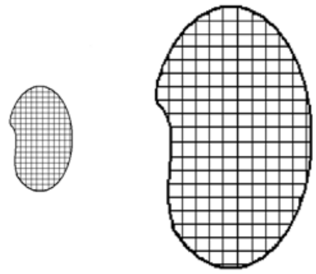


Рис. 28

Но площади фигур примерно равны суммарной площади всех целых квадратиков, находящихся внутри фигур. Поскольку количества таких квадратиков для подобных фигур равны, то площади подобных фигур относятся как n^2 .

Аналогично этому можно доказать, что если размеры подобных тел отличаются в n раз, то их объемы отличаются в n^3 раз. Соотношения для площади (n^2) и объема (n^3) подобных фигур и тел легко запомнить, поскольку в показателе степени стоит размерность пространства. Для плоских фигур она равна двум, для объемных тел - трем. (Кажется удивительным, но сейчас физики и математики решают и такие задачи, когда этот показатель дробный.)

Термин «подобие» используется не только в геометрических, но и в физических задачах. О физическом подобии говорят обычно в следующей ситуации. Пусть имеется некоторая физическая система, которая характеризуется какой-либо величиной (объемом, весом, периодом колебания и т.д.) Необходимо ответить на вопрос: чему равно значение этой величины для системы, все размеры которой увеличены в некоторое число раз n?

Такие задачи можно решать двумя способами. Можно просто получить формулу для искомой величины и посмотреть, как изменится интересующая нас величина. А можно поступить и по- другому. Чтобы лучше уяснить это, обратимся к примеру. Пусть имеется куб со стороной 2 см, который весит 10 г. Сколько весит куб, изготовленный из того же материала, но со стороной 4 см? Подсчитаем объем первого куба. Получим 8 см^3. Подсчитаем объем второго куба. Получим 64 см^3 . Поскольку кубики изготовлены из одного материала, то их вес пропорционален объему. Следовательно, второй кубик весит 10 (64:8) = 80 г. Это правильное решение. Но задачу можно решить и быстрее. Действительно, второй куб «точно такой же, как первый», но все его линейные размеры в 2 раза больше, чем у первого. Это означает, что его объем и вес в $2^3 = 8$ раз больше, т.е. 80 г.

На первый взгляд, второе решение не особенно лучше первого. Решим, однако, следующую задачу. Икосаэдр со стороной 2 см весит 100 г. Сколько весит икосаэдр со стороной 8 см, изготовленный из того же материала? Для того, чтобы решить эту задачу первым способом, нужно знать, что такое, собственно, икосаэдр? Далее нужно или вывести, или найти в справочнике формулу для объема этого тела, и провести вычисления. Второй же способ почти сразу приводит нас к ответу. Действительно, первый и второй икосаэдр - это геометрически подобные объемные тела. Поэтому сразу можно сказать, что вес второго икосаэдра будет в $(8:2)^3 = 64$ раза больше.

Метод подобия в физике часто позволяет быстро получить решение сложной задачи. Ответим, например, на вопрос: какая капля падает в воздухе быстрее - крупная или мелкая? Установившаяся скорость падения капли определяется балансом силы тяжести и силы сопротивления воздуха. Капли разного размера падают с разной скоростью, поскольку сила тяжести зависит от размера капли, а сила сопротивления воздуха зависит от размера капли и ее скорости. Формулу для силы сопротивления воздуха мы с вами пока еще не знаем. Очевидно, однако, что эта сила пропорциональна площади поверхности капли, т.е. пропорционально R^2 , где R - радиус капли. Масса же капли пропорциональна объему капли, т.е. R^3 . Таким образом, с ростом размера капли R объем капли растет быстрее, чем ее поперечное сечение. Следовательно, сила тяжести растет быстрее силы сопротивления, а значит, крупные капли падают быстрее.

При решении задач из соображений подобия очень эффективен метод размерности. Например, с помощью этого метода мы установили, что период колебаний маятника T дается формулой

$$T = C\sqrt{l/g}\ .$$

Если нас интересует вопрос, во сколько раз измениться период колебаний маятника при изменении длины подвеса l в n раз, то мы вполне можем ответить на него.

Для этого не нужно знать константу *C*.

Первым, кто обратил внимание на важность законов подобия в физике, был Галилей. В своей первой книге он задался интересным вопросом: могла ли существовать гигантская собака, подобная нормальной, но, скажем, раз в 10 больше. Галилей сделал наброски рисунков костей такой собаки. Он понял, что вес ее возрастет в 10^3 раз, а площадь костей всего лишь в $10^2 = 100$ раз. Значит, кости должны быть в 10 раз более толстыми, а обычные кости не выдержат веса гигантской собаки. Галилей считал науку о подобии очень важной наряду с механикой, он так и назвал свою книгу – «Трактат о двух науках».

В технике метод подобия используют в кораблестроении и самолетостроении. Если сделать маленькие модели кораблей и самолетов, подобрав при испытаниях какие-то другие значения скоростей моделей, то можно оценить свойства будущих самолетов и кораблей. Правила пересчета скорости от реальных самолетов и кораблей к их моделям производят с помощью метода подобия.

В шутливой форме много и интересно о подобии писал Я. И. Перельман, обсуждая книгу Свифта о приключениях Гуливера в Лилипутии и в стране великанов.

Задачи

1. Сколько характерных линейных размеров нужно задать, чтобы полностью определить прямоугольник? Параллелограмм? Параллелепипед? Цилиндр? Конус? Шаровой сегмент? Фотографию, изображенную на первом рисунке в этом разделе?
2. У вашего товарища имеется набор геометрически подобных конусов. Сколько линейных размеров нужного вам конуса следует сообщить товарищу, чтобы он смог дать этот конус вам?
3. Сколько характерных линейных размеров нужно задать, чтобы полностью определить геометрию пружины? Пружина навита из толстой проволоки виток к витку вдоль цилиндрической поверхности. Сколько геометрических размеров надо задать, чтобы выделить одну пружину из семейства геометрически подобных пружин?
4. Длина основания равнобедренного треугольника 3 см, а боковой стороны 4 см. Чему равна высота, опущенная на основание, у подобного ему треугольника с коэффициентом подобия 3? Проделайте вычисления двумя способами.
5. Ребро одного куба равно 2 см, а диагональ второго равна 6 см. Чему равен коэффициент подобия?

6. Установите экспериментально, как зависит от линейного размера фигуры ее площадь. Оборудование: несколько подобных фигур сложной формы, вырезанных из бумаги; весы.
7. Как зависит от линейного размера объем подобных друг другу тел? Посмотрите по справочнику дома формулы для объема разных тел: цилиндров, конуса и т.д. и проверьте свои соображения.
8. Предположим, что все размеры стальной проволоки изменили в n раз. Во сколько раз изменится:

   а) объем?

   б) масса?

   в) площадь поверхности?

   г) коэффициент жесткости?

   д) разрывное напряжение?
9. После семи стирок линейные размеры куска мыла уменьшились вдвое, то есть вдвое уменьшились его ширина, длина и высота. На сколько стирок его еще хватит?
10. Оцените длину шкурки, которую снимают, почистив килограмм картошки. Считайте, что картофелины имеют форму шара радиуса R=3см. Ширину шкурки примите равной 1 см. Во сколько раз изменится длина снятой шкурки, если размер каждой картофелины в n раз меньше? Килограмм какой картошки можно быстрее почистить: крупной или мелкой?
11. Имеются два клубка, намотанные из одинаковой шерстяной нити. Один из них в n раз больше другого. Во сколько раз длиннее нить, из которой он намотан?
12. После того, как человек вышел из воды после купания, на его коже осталось около 200 г воды. Оцените, какой процент веса Дюймовочки ростом 2,5 см составит вода после купания.
13. Резервуар для воды имеет прямоугольную форму и укреплен над поверхностью земли на четырех столбах диаметром 2 см. Если изготовить резервуар в 10 раз длиннее, шире и выше, то каков должен быть диаметр столбов?
14. Модель крана поднимает 10 бетонных плит, а с 11 плитами трос рвется. Сколько плит поднимет реальный кран, если все линейные размеры модели (включая, разумеется, и размер плит) увеличить в 10 раз?
15. Кости ног некоторого животного в n раза прочнее костей другого, принадлежащего тому же семейству и имеющего ту же форму. Каково отношение ростов этих животных?

16. Великан и лилипут устроили соревнование: кто больше подтянется на перекладине. Кто выиграет и почему?
17. В лесу живут два подобных друг другу существа, причем все размеры одного в 10 раз больше. Крупное существо весит 50 кг, питается 3 раза в день и съедает за сутки 1 кг пищи. Сколько весит второе существо? Сколько пищи оно съедает в день? Сколько раз в день оно питается? Считайте, что существа ведут не очень активный образ жизни, и почти вся энергия, которую они получают при переваривании пищи, идет на поддержание теплового баланса с окружающей средой. Потери тепла пропорциональны площади поверхности тела.
18. Имеются две геометрически подобные пружины, причем все линейные размеры второй в n раз больше. Коэффициент жесткости первой пружины равен k. Чему равен коэффициент жесткости второй пружины? Упругие свойства материалов характеризуются модулем Юнга E, имеющем размерность Н/м^2 .

12. Кое-что о формулах

По мере изучения физики вы знакомитесь с все большим и большим количеством формул. Нужно ли помнить их все наизусть? Для школьников и студентов этот вопрос становится наиболее острым, когда наступает пора сдавать экзамен или зачет. Но этот вопрос имеет значение и для ученых в их повседневной работе. Понятно, что, не зная ни одной формулы, невозможно заниматься наукой. Поэтому на первый взгляд может показаться, что чем больше формул знаешь на память, тем лучше. Проверим эту гипотезу.

Итак, пусть мы с вами готовимся к экзамену по механике. Возьмем, несколько учебников и будем выписывать формулы, которые нам встретятся. Например, для движения с постоянным ускорением можно обнаружить в учебниках следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0) + \vec{a}(t - t_0)^2 / 2, \\
&x = x_0 + v_0 t + a t^2 / 2, \\
&S = v_0 (t - t_0) + a(t - t_0)^2 / 2, \\
&S = a t^2 / 2.
\end{aligned}$$

Оказывается, в учебниках существует множество формул даже на одну тему! Неужели их все надо знать наизусть? Похоже на то, что если учить все формулы подряд из книг и учебников, то не останется ни времени, ни сил на работу. Думаю, вы уже согласны с тем, что в количестве формул, которые стоит запомнить, есть некоторый оптимум. Как отобрать эти формулы?

Из выписанных нами соотношений для движения с постоянным ускорением можно выбрать лишь одно первое. Действительно, оно самое общее - все остальные следуют из него в виде частных случаев.

Можно поступить и по-другому. Возьмем более простое соотношение

$$x = v_0 t + at^2 / 2.$$

Это соотношение менее общее, однако, зная его, легко восстановить более сложные формулы. Если учесть начальное положение тела (добавив в правую часть x_0), от проекций перейти к векторам (заменив v на $\vec{v}$ и x на $\vec{r}$), учесть произвол в выборе начала отсчета времени (заменив t на $(t\text{-}t_0)$), то мы получим первую формулу из нашей «шпаргалки». Конечно, для того, чтобы конструировать подобным образом сложные формулы из простых, нужно неплохо знать физику. И если информация, дополняющая формулы, «сама собой» всплывает в голове, то это уже не результат зубрежки, а самые серьезные знания по физике. Важно не просто запоминать формулы, важно, чтобы с каждой формулой ассоциировался определенный блок знаний. Как этого добиться? Только работой, решением задач, развитием интуиции и т.д.

Тот, кто хорошо знает физику, может конструировать формулы, ... не решая задачи. Пусть, например, необходимо найти ускорение двух связанных нитью грузов массы M и m на блоке. Давайте «угадаем» ответ. Ясно, что ускорение a зависит от масс грузов и ускорения свободного падения. В движение систему приводит разность сил тяжести, равная $(M\text{-}m)g$. Эта сила «действует» на суммарную массу системы M+m. Но тогда искомое ускорение дается соотношением

$$a = \frac{(M - m)}{M + m} g .$$

Конечно, наши рассуждения не отличаются строгостью. Однако, подобными приемами вполне можно пользоваться, если вам надо вспомнить результат задачи, которую вы когда-то уже решали; если вы хотите угадать ответ задачи, которая никак не получается; если вы хотите проверить ответ, полученный формальным методом. Конструирование формул применяется и в серьезной науке, особенно, если она еще только развивается. При этом широко используются метод размерностей, соображения подобия и т.д.

Надо сказать, что бывают «знаменитые» формулы, о которых знают не только физики. Например, известная формула Альберта Эйнштейна

$$E = mc^2 ,$$

связывает энергию тела и его массу. У физиков не менее почитаемо соотношение

$$E = h\nu .$$

С помощью этой формулы частице с энергией E можно приписать некоторую волну с частотой ν. Эта формула лежит в основе квантовой механики - механики, которой подчиняются частицы микромира.

Задачи

1. Выпишите формулу для дальности полета тела, брошенного под углом к горизонту. Внимательно изучите структуру этой формулы. Какие ее особенности можно использовать для того, чтобы «восстановить» эту формулу, если вы ее забудете?
2. Как, используя соотношение $v^2 = 2gh$, получить формулу для высоты подъема тела, брошенного под углом к горизонту?
3. Не решая следующую задачу, «угадайте» ответ. На вершине призмы с углами при основании α и β находится блок (рис.29). Через блок перекинута невесомая нить, на концах которой находятся два груза массы M и m. Определите ускорение грузов. Трение отсутствует.

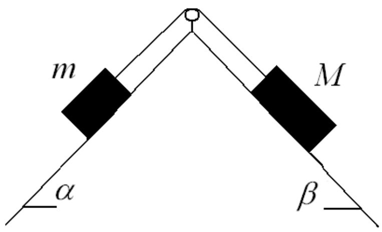


Рис. 29

4. Подготовьте список формул, которые вам стоит запомнить по механике.

13. Рисунок к задаче

С чего начинать решение сложной физической задачи? Один из распространенных среди школьников методов состоит в выписывании большого числа всех известных формул и последующих попыток комбинирования их друг с другом. Такой путь почти никогда не дает результата. Ну, хорошо, скажете вы, пусть это не правильный метод, а что же делать, если задача все же не получается?

Оказывается, гораздо полезнее начать с того, чтобы нарисовать рисунок. Обращали ли вы внимание на то, что мы в задумчивости иногда выводим на бумаге какие-то фигуры? Дело в том, что наше мышление очень образное. Как правило, мы связываем с новым понятием, с ходом решения задачи какой-то зрительный образ. Вот почему полезно рисовать рисунки к задачам. Если вы в тупике, «нарисуйте» максимум из того, что вам известно. Лучше всего об этом расскажет Витя Малеев из уже известной нам книжки.

«... Вот тут то я и задумался. Читал задачу раз десять подряд и никак не мог найти, в чем здесь загвоздка.

«Ну, - думаю, - это третьеклассникам задают такие задачи, что, и четвероклассник не может решить! Как же они учатся, бедные?»

Стал я думать над этой задачей. Стыдно мне было не решить ее. Вот, скажет Лика, в четвертом классе, а для третьего класса задачу не смог решить! Стал я думать еще усиленнее. Ничего не выходит. Прямо затмение на меня нашло! Сижу и не знаю, что делать. В задаче говорится, что всего орехов было 120, и вот их надо разделить так, чтобы у одного было в два раза больше, чем у другого. Если бы тут были какие-нибудь другие цифры, то можно было бы еще что-нибудь придумать. А тут, сколько ни дели 120 на 2, сколько ни отнимай 2 от 120, сколько ни умножай 120 на 2, все равно 40 и 80 не получится.

С отчаяния я нарисовал в тетрадке ореховое дерево, а под деревом мальчика и девочку, а на дереве 120 орехов. И вот рисовал я эти орехи, рисовал, а сам все думал и думал. Только мысли мои куда-то не туда шли, куда надо. Сначала я думал, почему мальчик нарвал вдвое больше, а потом догадался, что мальчик, наверно, на дерево влез, а девочка снизу рвала, вот у нее и получилось меньше. Потом я стал рвать орехи, то есть просто стирал их резинкой с дерева и отдавал мальчику и девочке, то есть пририсовывал орехи у них над головой. Потом я стал думать, что они складывали орехи в карманы. Мальчик был в курточке, я нарисовал ему по бокам два кармана, а девочка была в передничке. Я на этом передничке нарисовал один карман. Тогда я стал думать, что, может, девочка нарвала орехов меньше потому, что у нее был только один карман. И вот я сидел и смотрел на них: у мальчика два кармана, у девочки один карман... И вдруг у меня в голове, будто молния блеснула мысль: «Все 120 орехов надо делить на три части!»

Итак, если есть возможность проиллюстрировать решение рисунком, графиком, диаграммой, это надо делать! Приучите себя к этому, и вы не пожалеете в будущем.

Как показывает опыт, даже если вы уже решили задачу, полезно представить ее результат графически. Это поможет запомнить решение, и, возможно, даст толчок к дальнейшим размышлениям.

Рисунок иногда не только помогает решать сложные задачи, но и бывает существенным образом включен в структуру теории. Такие рисунки в середине сороковых годов придумал выдающийся американский физик Ричард Фейнман. Эти рисунки иллюстрируют взаимодействие между элементарными частицами.

Теперь во всем мире подобные рисунки называют «фейнмановскими диаграммами». Такие диаграммы используются при расчете сложных взаимодействий частиц и полей, причем чтобы правильно выполнить расчет, надо правильно нарисовать цепочку рисунков.

Задачи

1. Дайте графическое решение следующей задачи. Два автомобиля стартуют друг навстречу другу со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Расстояние между автомобилями l. Через какое время автомобили встретятся?
2. Изобразите на рисунке скорости тел и силы, действующие на тела, в следующих ситуациях:
   1) мячик летит в воздухе;
   2) ракета движется в космосе с выключенным двигателем;
   3) кубик лежит на наклонной плоскости;
   4) монета начинает скользить по наклонной плоскости, имея компоненту скорости, параллельную ребру;
   5) автомобиль едет по дороге с постоянной скоростью;
   6) кубик лежит на книге, которую рукой двигают с постоянным горизонтальным ускорением (поверхность книги горизонтальна).
3. На рисунке 30 показана фотография цепочки массы M = 10 г, подвешенной за концы. Найдите максимальную силу натяжения в цепочке.

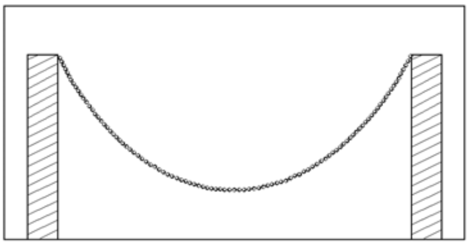


Рис. 30

4. На рисунке 31 показана стробоскопическая фотография шарика, брошенного под углом к горизонту из начала координат. Найдите начальную скорость шарика.

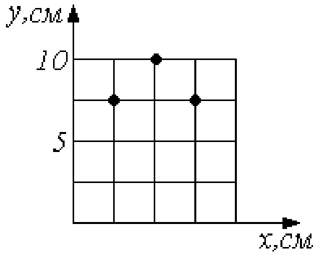


Рис. 31

14. Физические термины

Физики иногда вводят новые термины. Термин появляется тогда, когда определяется круг явлений, который полезно как-то назвать. Придумать термин очень непросто. Ведь он должен быть нужным, понятным и стать общепринятым. Новым терминам дают подчас неожиданные и красивые названия. Например, некоторые из разновидностей кварков называют «очарованные» и «странные».

Внимательно просмотрите следующий словарик новых терминов, которые появились на наших занятиях, и дайте четкий ответ самому себе, понимаете ли вы их смысл? Свободно ли вы можете называть их вслух и сможете ли вы объяснить кому-либо (товарищу, брату, папе, маме, профессору и т.д.), что они означают? (Вспомните последний принцип Вити Малеева!)

Порядок физической величины
Оценка физической величины
Точность измерения
Асимптотическое поведение зависимости
Предельный случай
Физическое подобие
Метод размерностей
Универсальная функция

15. Справочник - помощник физика

На уроках вы получаете знания по физике, математике, химии и т.д. И «правила игры» таковы, что учителя не спрашивают у вас то, что они не объясняли. В каком-то смысле, занятия в школе – «микромодель» пути познания, пройденного человечеством. Поэтому при решении задач, скажем, на уроке по геометрии нельзя использовать еще не доказанные учителем теоремы. В своей же работе ученому не всегда нужно доказать все теоремы и формулы, которыми он пользуется. Необходимо уметь применять «готовые» результаты, полученные другими людьми. Для этого очень полезны различные справочники. Вам обязательно надо научиться пользоваться справочниками. Надо уметь найти место, где есть справочники, надо уметь отыскать нужный справочник и по справочнику разыскать то, что нужно вам в данный момент.

Сейчас значительное количество информации люди хранят уже не на бумаге, а в памяти компьютеров. Наверно, скоро все необходимые сведения вы будете получать от информационных систем через компьютерные сети.

А пока попробуйте ответить на следующие вопросы.

Задачи

1. Сколько звезд видно на небе невооруженным глазом?
2. Какого размера бывают айсберги?
3. Какова температура на поверхности Солнца?
4. Что такое гало?
5. Чему равна масса конуса из молибдена, если высота конуса 5 см, а диаметр основания 3 см?
6. Сколько тепла выделится при сгорании 2 кг бензина?
7. Как устроена Солнечная система?
8. Чему равен $\sin 3\alpha$?
9. Просмотрите несколько справочников и выделите основные группы содержащихся в них сведений, которые могут быть вам полезны (например, значения фундаментальных физических постоянных и т.д.)
10. Что такое «именной указатель»? Что такое «предметный указатель»? Как ими пользоваться?

16. Научные журналы и ваша библиотека

Из двух предыдущих заданий вы уже поняли, какое значение имеет навык в получении необходимой информации. Очень много интересного и полезного для своей работы физики узнают из разнообразных журналов. В научно-популярных журналах изложение ведется на уровне, доступном как для специалистов, так и для более широкой публики. В нашей стране издаются несколько хороших подобных журналов: «Наука и жизнь», «Химия и жизнь», «Природа», «Знание – сила». Несколько более сложными являются прекрасные журналы «Квант» и «В мире науки».

Издается также множество журналов, которые доступны только профессиональным физикам. Несколько условно можно выделить три основные их разновидности. Есть журналы, в которых публикуются статьи, посвященные каким-либо относительно широким областям физики. Подобные статьи называют обзорными, поскольку они основываются на анализе большого числа специальных работ. «Успехи физических наук» - наиболее известный в нашей стране журнал такого типа. В большинстве же журналов публикуются в основном небольшие статьи, посвященные «текущей» научной работе. В мире наиболее престижен журнал «Physical Review».

Будет очень хорошо, если когда-нибудь вы начнете публиковать свои статьи в этом журнале. Кроме того, существуют журналы для срочной публикации, в которых можно быстро напечатать очень короткие, но важные сообщения. Такие сообщения называют «письмами». «Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики», «Physical Review Letters», «Physics Letters» - это некоторые журналы для быстрой публикации. Вообще-то, в мире издаются тысячи научных журналов. Умение ориентироваться в этой массе периодической литературы - очень важное и необходимое качество для ученого.

Издается также множество популярных и научных книг. Искать какую-либо книгу тогда, когда это необходимо, бывает очень сложно. Поэтому важно собирать свою, домашнюю научную библиотеку. Книги для нее нужно подбирать не только те, которые могут понадобиться вам сегодня, но и завтра, послезавтра. Некоторые книги будут «ждать» своего часа несколько лет. В некоторые из них вы будете заглядывать часто, в некоторые редко. Среди ваших книг будут любимые, но все они будут важны для вас.

Наиболее хорошие книги и учебники неоднократно переиздаются, но купить их в нужный момент бывает непросто. Поэтому можно рекомендовать вам уже сейчас отыскать для своей библиотеки «Курс общей физики» Д. В. Сивухина, «Фейнмановские лекции по физике» и «Курс теоретической физики» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица.

Задачи

1. Просмотрите по несколько номеров журналов «Наука и жизнь», «Химия и жизнь», «Природа», «Знание – сила». Дайте краткую характеристику стиля каждого из журналов. Выберите журнал, который понравился вам больше всего.
2. Просмотрите двенадцатые номера журнала «Квант» за несколько лет и подберите ссылки на статьи на темы: «Сила трения», «Исаак Ньютон», «Геометрия Лобачевского».
3. Просмотрите несколько номеров журнала «В мире науки». Найдите статью, которая была бы вам интересна. Сделайте короткую аннотацию этой статьи, т.е. составьте несколько предложений, в которых изложено ее основное содержание.
4. Пройдитесь по книжным магазинам и попробуйте подобрать книги для своей научной библиотеки.

17. Интернет

Замечу…, что подавляющее большинство моих одпланетников понятия не имеют о реальных возможностях этого восьмого чуда света – Большого Всепланетного информатория…
А. и Б. Стругацкие. «Жук в муравейнике»

Эти слова, написаны братьями Стругацкими еще в прошлом, 20-ом веке. Теперь такой Большой Всепланетный информаторий создан и называется Интернет. Интернет является глобальной системой и делает человечество планетарным, открытым миром, но миром, в котором каждый может найти свое место.

Надо иметь ввиду, что возможности Интернета колоссальны, но пользоваться ими можно по-разному. Сам выход в Интернет и Ваши профессиональные навыки работы в нем, могут быть направлены по совершенно разным руслам. Например, Вы можете использовать Интернет для подбора материалов к своему реферату по физике, а можете просто «скачать» готовый. Интернет предоставляет обе эти возможности. Так что выбор за Вами.

Первые шаги в Интернете лучше начинать с освоения поисковых систем. Эти системы по выбранной комбинации слов находят сайты, где встречаются эти слова. (Или их комбинации, если они заключены в кавычки.). Правда, начав это делать, Вы обнаружите, что очень часто требуются дополнительные запросы. Например, на запрос по фамилии «Иванов» я получил список из 1612887 страниц. Ясно, что просмотреть все их невозможно. А, например, на фамилию «Тименков» обнаружилось всего 63 страницы. Это уже обозримый список.

Многие научно-исследовательские институты и вузы имеют свои сайты. На них легко выти через поисковые системы. Как правило, здесь можно найти и персоналии, и списки публикаций, и информацию о факультетах и специальностях, правила приема и т.д. Но имейте ввиду, что это не единственный «рецепт» поиска научной группы. Так если Вы попытаетесь найти известную в нелинейной динамике Мэрилендскую группу через ссылку «University of Maryland», то наверняка запутаетесь, так как этот университет более чем обширен. Отметим, наконец, что некоторые сайты имеют свои внутренние поисковые системы.

Многие лицеи и гимназии также имеют свои сайты. Если Вы познакомитесь с ними, то узнаете много интересного. Оказывается, есть лицеи при вузах, а есть и лицеи в системе Российской Академии наук.

Конечно, хорошо создать свой собственный сайт. Но, уверяю Вас, что это не простая задача. Я имею в виду не технику - ею современные школьники зачастую владеют достаточно виртуозно. Важно понять, о чем этот сайт, и что за материал на него помещать. Здесь лучше воспользоваться консультацией своих старших коллег. Стоит заметить, что Ваш сайт должен быть полезен другим. Иными словами он должен предлагать что-то новое Вашим посетителям.

Только Интернет по настоящему сделал человечество планетарным. Интернет позволяет быстро устанавливать связи с близкими Вам по образу мышления и интересам людьми на всей планете, что, вполне возможно, является самым важным достоинством Интернета. Это можно сделать, например, направив письмо авторам понравившегося Вам сайта. Поэтому полезно регулярно просматривать по поисковой системе ссылки на Ваш собственный сайт. Тогда Вы сможете обнаружить, что кто-то, в свою очередь, сослался на Вас, а значит, с этими людьми будет полезно и интересно вступить в контакт.

Далее, в Интернете существует множество электронных библиотек. Среди них есть художественная литература, но встречаются и высококлассные научные библиотеки.

В Интернете много книжных магазинов. Рекомендуем регулярно посещать их и заказывать интересные Вам книжки.

Для интересующихся наукой школьников очень важно, что в Интернете выставлен журнал «Квант», который очень полезен тем, кто интересуется физикой и математикой. Есть и другие научно-популярные журналы.

Интернет позволит Вам создать свою электронную библиотеку, которая будет важна для Вас и полезна. Например, если речь идет о физике, то это могут быть задачники, сборники олимпиадных задач, статьи из «Кванта» и других популярных журналов. Надо четко понимать, что хотя все эти материалы и есть в Интернете, но то, что Вам нравится или необходимо, следует иметь, что называется «под рукой». Кроме того, Интернет динамичен, что недавно было выставлено, вполне может исчезнуть.

Интернет очень многообразен. Если вы интересуетесь не только наукой, но и ее историей, то сможете познакомиться с биографиями великих ученых. Если Вы любите фантастику, то найдете много интересного для себя. Наконец, интересно найти людей, имеющих, такое же, как и у Вас хобби и т.д.

Задачи

1. С помощью поисковой системой Яндекс посмотрите свежие новости по теме «Наука».
2. Используя поисковую систему, разыщите сайт «Окно в науку» и познакомьтесь со всеми его подразделами и переходами.
3. Найдите сайты физико-технического лицея и лицея прикладных наук г. Саратова. Что Вам в них понравилось? Что, по вашему мнению, на них можно было бы изменить?
4. Разыщите сайты, посвященные олимпиадным задачам по физике и познакомьтесь с ними. Отдельно разыщите задачи Всероссийских олимпиад по физике.
5. Разыщите в Интернете Заочную нелинейную школу.
6. Используя поисковую систему, выясните, что такое «золотое среднее» (или «золотое сечение»), какие его основные свойства и приложения.
7. Сделайте подборку материалов на тему «спутники Сатурна».
8. Используя возможности сети Интернет познакомьтесь с множеством Мандельброта.
9. Найдите в Интернете задачи Капицы. Познакомьтесь с ними. В чем их отличие от «обычных» задач по физике?
10. Познакомьтесь с «хаотической галереей» известной Мерилендской научной группы (США), ее сайт http://www-chaos.umd.edu.
11. Найдите системы заочного образования для школьников (заочные школы).
12. Найдите сайт, на котором размещены статьи из журнала «Квант». Ознакомьтесь с его структурой, «скачайте» несколько статей, которые интересны для Вас. Посмотрите раздел журнала, касающийся абитуриентов.
13. Аналогично для журнала «Природа».
14. Разыщите книжки из серии «Библиотечка Кванта».
15. Найдите системы дистанционного обучения в сети интернет по физике, математике, информатике.
16. Какие физико-математические школы есть в Челябинске? (Санкт-Петербурге, Москве, Долгопрудном). В чем их особенности? (Подсказка. Можно найти и использовать список победителей Всероссийской олимпиады.)
17. Какие летние физико-математические школы проводятся (проводились) в России?

18. Какие научные конференции для школьников проводятся (проводились) в России? Попытайтесь найти информацию о международных конференциях.
19. Проводится ли и какие интернет-конференции для школьников?
20. Выясните, что такое турнир юных физиков?
21. Выясните правила прием в МФТИ.
22. Кто такой американский физик Митчелл Фейгенбаум и какое открытие он сделал?
23. Что такое реакция Белоусова-Жаботинского? Какова история ее открытия?
24. Что такое «эффект бабочки»?
25. Кто из российских ученых был лауреатом Нобелевской премии?
26. Что такое теория катастроф?
27. Когда была написана книга братьев Стругацких «Жук в муравейнике»?

18. Обсуждаем проблему

Кроме справочника, физики часто пользуются книгами, научными журналами. Иногда кто-то может подсказать, где читать про интересующую вас проблему (папа, мама, профессор), а иногда это сделать некому. Тогда приходится самому ходить в библиотеку, или искать других понимающих в данной проблеме людей. Попробуйте сами разыскать (любым доступным способом!) информацию о следующих проблемах и подготовить небольшой рассказ о том, что вам удалось узнать.

Задачи

1. Почему не падает велосипед?
2. Почему у кошки глаза блестят?
3. Почему гудят провода?
4. Что такое смерч?
5. Как устроены кристаллы?

19. Сами формулируем задачу

Мы с вами обсудили много полезных приемов, которые применяются при решении задач. Пора и самим попробовать придумать задачу.

Откуда берутся задачи по физике? Школьники решают задачи, которые для них сочиняют преподаватели. (Некоторые задачи известны так давно, что никто не помнит, кто их автор.) Но вот приходит время, когда нужно заниматься физикой самостоятельно. А это значит, надо самому сформулировать для себя задачу. Этому можно учиться сейчас, а не ждать, когда вы получите диплом о высшем образовании.

Ведь придумать задачу иногда не менее важно, чем ее решить. Например, в переписке с Ньютоном, Роберт Гук поставил задачу об определении формы орбит планет. Решая ее, Ньютон создал свою знаменитую книгу «Математические начала натуральной философии», положившую начало теоретической физике.

Придумать задачу зачастую гораздо сложнее, чем ее решить. Сочиняя задачу, надо очень хорошо представлять физическую ситуацию, которая положена в основу задачи. Ведь обычно или в условии, или в самом вопросе к задаче содержится некоторая подсказка для решающего. А если вы составляете задачу сами, то этой подсказки пока еще нет.

После того как вы составили задачу, очень важно еще раз внимательно прочитать ее формулировку. Хорошо ли стилистически сформулирована задача? Почему-то школьники, увлекающиеся физикой, часто не любят излагать свои мысли словами, а предпочитают формулы. Но умение излагать свои мысли - абсолютно необходимая компонента профессии физика.

Тщательно проверьте, достаточно ли в условии данных для решения задачи? Нет ли лишних данных? Решите эту задачу еще раз, как бы заново. Еще лучше, дайте порешать ее своему товарищу. Какие затруднения у него возникнут? С чем они связаны, с самой физикой, или с тем, что вы не очень хорошо составили задачу? Не пожалейте времени для ответа на эти вопросы, и вы получите очень полезные навыки для будущей работы.

Ниже приведены несколько задач, в которых оставлена лишь часть «дано». Нужно самим придумать, что «требуется определить», т.е. сформулировать вопрос к задаче. К некоторым задачам можно сформулировать несколько вопросов. Составив эти вопросы, определите, какие из них более сложные. Попробуйте также сами придумать несколько задач целиком.

Задачи

1. Стальной шар, масса которого равна 1,2 кг, имеет объем 200 см^3 . «?»
2. Длина платформы железнодорожной станции равна 100 м. Товарный состав, движущийся со скоростью 60 км/ч, идет мимо платформы 16с. «?»
3. В цилиндрическом сосуде с площадью дна 125 см^2 находится вода. Когда в сосуд положили кубик льда, уровень воды повысился на 9 мм. «?»
4. Материальная точка движется 10 с по плоскости *x, y* по замкнутому маршруту, составленному из отрезков прямых, из точки с координатами (-3,0), затем в (1,0), (-1,3) и возвращается снова в точку (-3,0). Значения координат даны в метрах. «?»

5. Тележка массы M и длины l может катиться без трения по горизонтальной поверхности. У заднего края тележки лежит брусок массы m. Коэффициент трения между бруском и тележкой μ. К бруску приложена горизонтальная сила F, направленная вперед. «?»
6. Придумайте задачу по кинематике.
7. Придумайте задачу по динамике.
8. Придумайте задачу на оценку порядка физической величины.

20. Заключительные задачи

Мы закончили изучение первой части нашей книжки. Многие из задач, которые мы решали, не требуют глубоких знаний всех разделов физики. Но со всеми методами, с которыми вы познакомились, вам придется сталкиваться всю жизнь, и всю жизнь совершенствовать свое мастерство в оценках физических величин, построении графиков, измерении. Ведь при изучении каждого раздела физики - механики, электричества, теплоты и т.д. надо будет «работать и думать». Решите еще несколько задач, чтобы освежить в памяти некоторые из использованных нами методов.

Задачи

1. Оцените минимальную скорость, которую необходимо сообщить маленькому шарику, чтобы он перелетел из одного конца классной комнаты в другой.
2. Оцените ускорение, которое возникает, когда вы сбегаете по школьной лестнице при переходе с одного пролета лестницы на другой.
3. Если Земля сложена из тех же пород, что и на поверхности, то какова ее масса?
4. Сколько поколений прошло на Земле со времени появления первобытного человека?
5. Известно, что максимальная высота гор на Земле около 10 км. Оцените размер астероидов, начиная с которого они имеют шарообразную форму. Считайте, что астероид сложен из тех же пород, что и Земля.
6. Измерьте толщину нити, пользуясь миллиметровой бумагой и цилиндрическим карандашом.
7. Как долго гремит гром?
8. Как быстро растает кубик льда с ребром примерно в 1 см, приготовленный в холодильнике, и брошенный в воду при комнатной температуре?
9. По каким линиям движутся планеты вокруг Солнца? По каким линиям движутся кометы, приходящие из космоса и покидающие Солнечную систему?

10. При какой температуре жидкий гелий становится сверхтекучим?
11. Площадь ромба однозначно определяется величиной стороны a и углом α между сторонами ромба. Из соображений размерности получите формулу для площади ромба.
12. В некотором диапазоне значений скоростей сила сопротивления в газе зависит от площади поперечного сечения тела S, плотности газа ρ, и скорости тела v. Во сколько раз отличаются скорости капель, размеры которых отличаются в n раз?
13. Массивный шарик висит на пружине. Все размеры пружины и шарика увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличится растяжение пружины? Во сколько раз изменится период колебаний системы?

ЧАСТЬ II
КОЕ – ЧТО О ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Мы живем в удивительном мире. Нам хочется понять то, что мы видим вокруг, и спросить: каково происхождение Вселенной? Какое место занимаем в ней мы, и откуда мы и она - все это взялось?

Для ответа на эти вопросы мы принимаем некую «картину мира». Такой картиной может быть как башня из стоящих друг на друге черепах, несущих на себе плоскую Землю, так и теория суперструн. Обе они являются теориями Вселенной, но вторая значительно математичнее и точнее первой. Ни одна из этих теорий не подтверждена наблюдениями: никто никогда не видел гигантскую черепаху с нашей Землей на спине, но ведь и суперструну никто никогда не видел. Однако модель черепах нельзя назвать хорошей научной теорией, потому что она предсказывает возможность выпадения людей через край мира.

Стивен Хокинг

В математике мы чувствуем себя комфортно, если имеется система аксиом и следствий из них - теорем. Математика приучает нас к строгости и логике. В этом нам помогает ее изящный формализованный язык. Платон говорил, что математика - это язык, на котором с людьми разговаривают боги.

В физике тоже много математики, доказательств, формальных методов. Но для физика очень важна, как говорят, физическая картина происходящего. Решая задачу, вы должны хорошо представлять, что собственно происходит? Построение физической теории или решение задачи начинается не с формул, а с рассказа о явлении. И на всем протяжении решения следует помнить о физической интерпретации каждого вашего шага, каждого нового результата, полученного математическими методами.

В этой части книжки мы поговорим с вами о некоторых аспектах физической теории.

1. Физическая модель

В механике вы решали задачи, в которых рассматривались тела, связанные «нерастяжимыми» нитями, перекинутыми через «невесомые» блоки, тела, движущиеся без трения по «идеально гладким» поверхностям и т.д. Вы быстро привыкли к таким удивительным объектам, хотя прекрасно знаете, что на самом деле нерастяжимых нитей, невесомых блоков и идеально гладких поверхностей не бывает. Хорошо, что кто-то за нас придумал этот фантастический мир, для которого задачи имеют простые решения. А если надо самим описать физическую ситуацию, кто тогда придумает идеализированную картину явления? Ясно, что это надо делать самим. Как же сделать так, чтобы наша теория не превратилась в нечто подобное «теории гигантской черепахи с плоской Землей на спине»? Создать идеализированную картину физического явления - это своего рода искусство. Ведь надо суметь упростить реальный процесс, но так, чтобы ухватить его существенные черты, именно те, которые вы хотите описать и понять!

Идеализированная ситуация, в которой какие-то стороны реальности отброшены, а какие-то учтены, называется физической моделью. Построение модели - хотя и увлекательное, но и не простое занятие. Сначала следует построить самую приближенную, как иногда говорят, самую «грубую» модель реальности. Рассказывают, что когда выдающийся российский математик Чебышев делал доклад об оптимальном раскрое ткани, то первые его слова были: «Представим себе, что человек - это шар». Это пример самой простой модели человека. Затем можно построить более сложную модель, учитывающую более «тонкие» эффекты. (В примере с раскроем ткани - существование рук и ног.) Так возникает целая цепочка усложняющихся моделей, которые описывают одно и то же явление.

Как отобрать факторы, которые стоит учитывать при построении модели, а какие следует отбросить? В этом очень эффективную помощь вам окажет метод оценки порядка физической величины. Предположим, что вы подозреваете, что несколько факторов оказывают влияние на характер физического процесса. Оцените влияние каждого из них. Если окажется, что оно примерно одного порядка, то в вашей модели надо учесть все перечисленные факторы. Может, однако, оказаться, что воздействие одних факторов более существенно, а других - менее. Тогда в самой грубой модели вы учтете факторы, дающие самый существенный вклад. Для уточненной модели вам следует принять во внимание факторы, дающие вклад, на порядок меньший и т.д.

Некоторые модели бывают полезными лишь в период работы над теорией.

(Такова, например, первоначальная модель Максвелла электромагнитного поля, представляющая собой набор зацепляющихся друг за друга механических устройств.) Потом эти модели забываются, но чтобы придумать что-то новое, они были необходимы людям! Некоторые же модели оказываются столь удачными, что возникают целые разделы физики, посвященные той или иной модели. Например, исследование модели «абсолютно черного тела» дало толчок для развития целой новой науки - квантовой механики. Модели часто носят имена людей, предложивших их, или же интенсивно исследовавших. (Правда, при этом не всегда соблюдается принцип исторической справедливости.) Например, широко известна модель Изинга, которая позволила людям продвинуться в понимании природы магнетизма.

Задачи

1. Является ли кусок ваты удачной моделью облака?
2. Вам необходимо определить площадь поверхности тела человека. Предложите иерархию усложняющихся моделей, пригодных для этой цели. Сколько параметров необходимо задать, чтобы применить каждую из предложенных вами моделей? Определите время, которое вы затратите на вычисления с помощью каждой модели.
3. Оцените влияние вращения Земли на величину ускорения свободного падения у поверхности Земли. Оцените влияние притяжения Луны и Солнца на величину ускорения свободного падения. Какой из этих трех факторов наиболее существенен? Можно ли рассчитывать движение тел у поверхности Земли, учитывая притяжение Солнца, но пренебрегая вращением Земли? Притяжением Луны?
4. Рассмотрите движение двух грузов на нити длиной порядка одного метра, перекинутой через блок. Получите условие, при выполнении которого можно пренебречь влиянием массы нити. Реалистично ли это условие? Считая, что блок закреплен, а нить скользит по блоку, получите условие, при выполнении которого можно пренебречь трением нити о блок. Считая, что сопротивление воздуха описывается формулой Ньютона, получите условие, при выполнении которого можно пренебречь сопротивлением воздуха. Какой из трех перечисленных факторов окажет наибольшее влияние в случае, когда массы грузов равны 50 г и 200 г, а коэффициент трения =0,01?
5. Можно ли пренебречь сопротивлением воздуха в задаче о колебаниях маятника? Считайте, что сила сопротивления подчиняется закону Стокса.

6. У поверхности Земли располагается мощное месторождение. Оно фиксируется по изменению величины ускорения свободного падения Δg. Предложите модель, пригодную для оценки запасов руды по величине Δg. Плотность руды ρ, плотность земной породы $\rho_З$.
7. Определите сжатие Юпитера у полюсов $\Delta r/r_0$ (Δr – разность экваториального и полярного радиусов), если известно, что средний радиус Юпитера r_0 = 70000 км, ускорение свободного падения у поверхности g = 20 м/с^2 , время обращения вокруг своей оси T = 10 часов. В качестве простейшей модели Юпитера, используйте «жидкую» планету с компактным центральным ядром, в котором сосредоточена основная масса планеты.

2. Алгебра приближенных чисел

Физическая модель - одно из центральных понятий физики. При ее построении надо хорошо понимать, какие факторы более существенны, а какие менее. На математическом языке эти правила описания физического явления довольно часто удается сформулировать в виде условий малости тех или иных физических величин. Существование малых величин дает возможность применять своеобразную математическую технику, о которой и пойдет речь.

Мы с вами уже немного говорили об арифметике приближенных чисел. Также полезны, бывают приближенные алгебраические действия. В этом случае вы проводите преобразование выражения, содержащего обозначенную буквой величину, относительно которой известно лишь, что она мала. Одна из наиболее популярных формул алгебры приближенных чисел выглядит следующим образом:

$$(1+x)^2 \approx 1+2x.$$

Проверим ее. Возьмем x=0,001. Тогда $(1+0,001)^2$ =1,002001, что с хорошей точностью равно 1,002. В этом частном случае формула «сработала». А в более общем? Пользуясь известным соотношением алгебры, можно записать точное выражение

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 .$$

Значит, чтобы получить нашу приближенную формулу, мы должны пренебречь величиной x^2. Нетрудно понять, что так можно делать, если величина x мала по сравнению с единицей. Обычно условие, что x значительно меньше единицы, записывают следующим образом:

$$x \ll 1.$$

Выпишем основные формулы алгебры приближенных чисел.

$$\boxed{\begin{array}{l} (1+x)^2 \approx 1+2x \\ \sqrt{1+x} \approx 1+x/2 \\ \dfrac{1}{(1+x)} \approx 1-x \\ \sin x \approx x \\ \cos x \approx 1-x^2/2 \\ e^x \approx 1+x \end{array}}$$

Во всех этих формулах предполагается, что величина x мала по сравнению с единицей, причем в тригонометрических формулах величина x измерена в радианах.

Преобразуем для примера выражение $\dfrac{\sqrt{4+x}}{2+x}$, используя формулы, представленные в рамочке:

$$\frac{\sqrt{4+x}}{2+x} = \frac{\sqrt{(1+x/4)}}{1+x/2} \approx (1+x/8)(1-x/2) \approx 1-3x/8.$$

Соотношения, обведенные рамочкой, можно интерпретировать и как приближенные равенства пар функций, например $y=(1+x)^2$ и $y=1+2x$. Давайте построим графики этих двух функций и убедимся в справедливости нашего утверждения (рис.32).

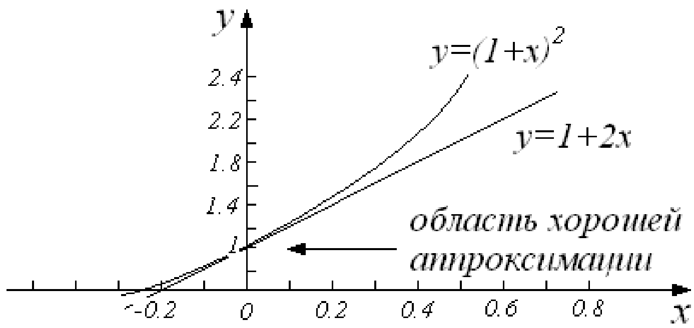


Рис. 32

Как мы видим, графики близки друг к другу в некоторой области значений переменной x. В подобном случае говорят, что функция $y=1+x/2$ ***аппроксимирует*** функцию $y=(1+x)^2$ в этой области.

Как приближенные равенства используют физики? Для их применения должны быть какие-то основания, характеризующие особенности происходящих явлений. Например, если маятник совершает колебания около положения равновесия, то его смещение вычисляется по формуле $x = l\sin\varphi$, где l - длина нити, φ - угол отклонения маятника (рис.33.а). Если колебания происходят так, что угол отклонения маятника все время остается малым (рис.33.б), то можно воспользоваться соотношением $\sin\varphi \approx \varphi$ и считать, что $x \approx l\varphi$. Этим приближенным равенством можно пользоваться при условии

$\varphi << 1$. Нетрудно видеть, что это же условие можно сформулировать и иначе: $x << l$, т.е. смещение маятника мало по сравнению с длиной нити.

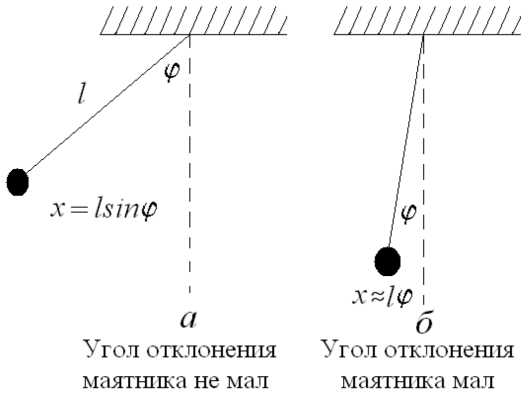


Рис. 33

Для физика очень важно условие малости физической величины. При решении задач это условие иногда сразу бросается в глаза. Например, если вы решаете задачу о движении на блоке двух грузов с массами 200 г и 100 г, скрепленных нитью массы 0,1 г, то совершенно ясно, что масса нити мала по сравнению с массами грузов. Бывает, однако, и так, что условие малости величины завуалировано. Рассмотрим, например, следующую задачу. На поверхности воды плавает цилиндр длины l = 20 см и радиусом R = 2 см так, что он погружен в воду на глубину h = 3 см. На цилиндр посредине сверху надавливают пальцем с силой F = 0,02 Н. Чему равна глубина погружения цилиндра? Прежде чем решать задачу, оценим по порядку величины максимальную архимедову силу, которая может действовать на цилиндр:

$$F_{Ap} = \rho g V = \pi \rho g R^2 l \approx 2{,}4 H .$$

Но сила, действующая со стороны пальца, F = 0,02 Н. Следовательно, она мала по сравнению с максимальной архимедовой силой:

$$F << F_{Ap} .$$

Отсюда мы можем сделать вывод о том, что под действием пальца цилиндр погрузится в воду на глубину Δh, где Δh - малая величина по сравнению с первоначальной глубиной h:

$$\Delta h << h.$$

Определим Δh. По закону Архимеда $F = \rho g \Delta V$, где ΔV - часть цилиндра, ушедшая под воду при надавливании пальцем (рис.34).

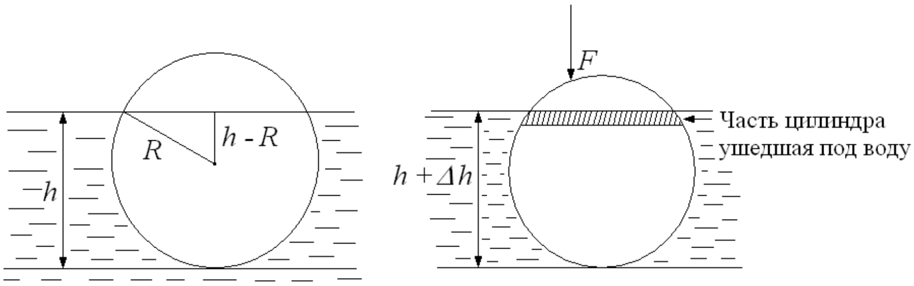


Рис. 34

При малом заглублении цилиндра в воду под действием силы F можно считать, что объем $\Delta V \approx S\Delta h$, где S - площадь сечения цилиндра плоскостью, совпадающей с поверхностью воды. Итак,

$$\Delta V \approx S\Delta h = 2\sqrt{R^2 - (h-R)^2} \cdot l\Delta h = 2\sqrt{(2R-h)h}l\Delta h\,.$$

Отсюда легко получаем, что

$$\Delta h \approx F/[2\rho gl\sqrt{h(2R-h)}] \approx 0{,}3 \text{ мм.}$$

Таким образом, наше предположение, что цилиндр очень незначительно заглубится в воду подтвердилось, поскольку величина $\Delta h \approx 0{,}3$ мм много меньше величины $h = 3$ см. Запомните одно правило: в физике не бывает просто малых величин. Если вы говорите, что какая-то величина мала, значит, вы обязаны указать, по сравнению, с чем она мала. Если вы предполагаете малость какой-то физической величины в ходе решения задачи, то уже «решив» задачу, вы обязаны проверить свое предположение, посмотреть, действительно ли полученное значение физической величины удовлетворяет необходимому условию.

Задачи

1. Докажите, что $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$, если $x << 1$.
2. Докажите, что $(1+x)^3 \approx 1+3x$, если $x << 1$.
3. С помощью микрокалькулятора «докажите» справедливость соотношения $\sin x \approx x$ при малых x. Для этого постройте на миллиметровой бумаге график зависимости относительной погрешности $\Delta = (\sin x - x)/\sin x$, выраженной в процентах, от величины x. Определите, до каких значений переменной x можно пользоваться соотношением $\sin x \approx x$ с точностью не ниже 10%.
4. Преобразуйте следующие выражения при малых x:

   а) $\sqrt{1+x}/(1-x)^2$; б) $91+x)^3 - 1 - tgx$; в) $(2x \cdot \sin x - 1 + \cos x)/x$.
5. В каком случае в соотношении $x^2 + 0{,}01x$ можно пренебречь первым членом? Вторым членом? Нельзя отбросить ни тот, ни другой?

6. Без помощи микрокалькулятора определите приближенные значения следующих выражений:

   а) $\sin(1^0)$, б) $\sqrt{126}$, в) $\cos(44^0)$.

7. Используя микрокалькулятор и миллиметровую бумагу, изобразите на одном графике функции $y = \sin x$ и $y = x$. В какой области значений х графики близки друг к другу? То же самое для функций $y = \cos x$ и $y = 1 - x^2/2$.

8. Решите приближенно уравнение $\cos x = kx$ в области $0 < x < \pi$. Рассмотрите два случая: $k >> 1$ и $k < 1$. В каждом из этих случаев сначала постройте самое «грубое» решение, а затем уточните его.

9. Из закона всемирного тяготения получите формулу, описывающую уменьшение величины ускорения свободного падения с высотой вблизи поверхности Земли. До каких высот можно пользоваться этой формулой, ошибаясь менее чем на 10%?

10. Тело брошено под углом α к горизонту с некоторой скоростью v. Получите формулу для дальности и высоты полета тела при малых значениях угла α. Если этот угол увеличить в 2 раза, во сколько раз возрастет дальность и высота полета тела?

11. На сколько процентов изменится частота колебаний груза на пружине, если жесткость пружины увеличить на 3%, а массу груза - на 2%? Задачу решите без использования микрокалькулятора.

12. Тело, брошенное под углом к горизонту $\alpha_1 = 45^0$, пролетело расстояние $l = 20$ м. На сколько ближе оно упадет, если его бросить из той же точки и с той же скоростью, но под углом $\alpha_2 = 43^0$? Задачу решите без использования микрокалькулятора.

13. Из формулы теории относительности Эйнштейна для энергии движущегося тела $E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, получите обычную (физики говорят - нерелятивистскую) формулу для кинетической энергии.

14. В схеме, показанной на рисунке 35, движок сдвинули вправо на расстояние, составляющее 2% длины реостата. На сколько процентов меняется при этом ток в цепи? Напряжение цепи остается постоянным. Рассмотрите два случая: первоначально движок находится на расстоянии 1/4 длины реостата от его левого края, и движок находится точно посередине.

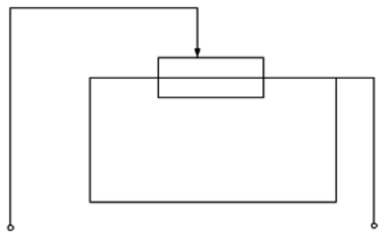


Рис. 35

15. Шар радиуса 5 см, изготовленный из материала с плотностью =0,1 г/см, плавает в воде. Определите глубину погружения шара. ***Указание.*** Объем шарового сегмента $V=\pi h^2(R-h/3)$.
16. В цилиндрической пробирке длиной 10 см находится легкий поршень на расстоянии 6 см от дна пробирки. В пробирку поверх поршня начинают наливать воду, с тем, чтобы вода заняла весь объем пробирки выше поршня. Насколько сместится поршень при этом? (Считайте, что газ под поршнем подчиняется закону Бойля - Мариотта $PV=const$.)
17. Сосуд объемом V разделен подвижным поршнем площади S на две равные части. Давление газа в сосуде равно P. Определите период малых колебаний поршня около положения равновесия. Масса поршня M много больше массы газа. (Считайте, что газ под поршнем подчиняется закону Бойля - Мариотта.)

3. Геометрия разных масштабов

Итак, решение физической задачи может существенным образом использовать наличие больших и малых величин, характеризующих представленную в этой задаче ситуацию. Такой подход к решению приводит не только к своеобразной алгебраической технике, но может быть использован и при геометрических построениях. Поясним, как это делается, с помощью нескольких примеров.

Одна из самых простых фигур, подробно изучаемых в геометрии, - треугольник. Известна классификация треугольников, основанная на соотношении длин их сторон. Вы хорошо знаете, что бывают равносторонние и равнобедренные треугольники. Свойства этих треугольников достаточно часто используются при решении физических задач. Но полностью ли удовлетворяет физиков такая классификация треугольников? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к следующему рисунку (рис.36).

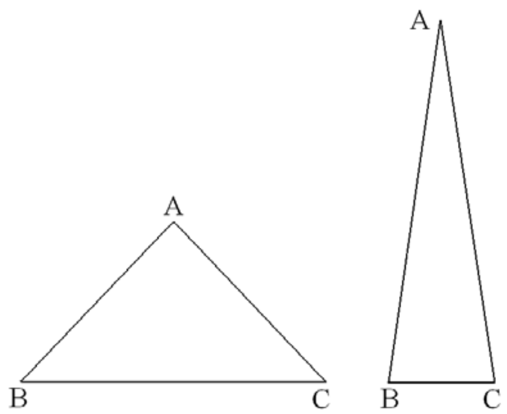


Рис. 36

Оба показанных на этом рисунке треугольника являются равнобедренными. Однако, как они не похожи! Как описать отличие этих двух треугольников? На принятом у физиков языке мы можем сказать, что характерная длина боковой стороны первого треугольника того же порядка, что и длина основания. У второго треугольника характерная длина боковой стороны много больше, чем основания.

«Вытянутые» треугольники очень часто встречаются при решении физических задач. Например, они появляются, когда определяют расстояние до далеких звезд с помощью метода параллакса. Суть этого метода состоит в том, что измеряются два угла, под которыми видна звезда из противоположных точек земной орбиты (рис.37).

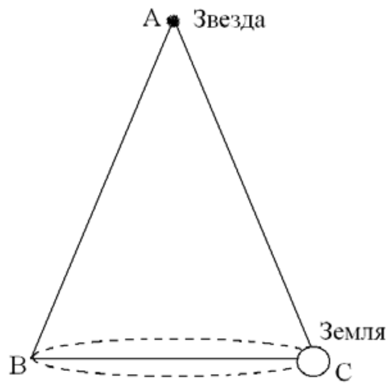


Рис. 37

Расстояние между этими точками BC и два измеренных угла полностью определяют треугольник ABC, из которого и находится искомое расстояние до звезды. Ясно, что треугольник ABC относится к типу «вытянутых» треугольников, поскольку расстояние даже до ближайших звезд много больше размеров земной орбиты.

Получим некоторые соотношения для треугольника, в котором длина двух сторон одного порядка, а длина третьей стороны на один или несколько порядков меньше. Рассмотрим сначала прямоугольный треугольник (рис.38).

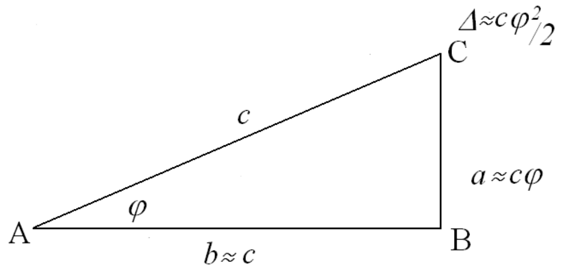


Рис. 38

«Маленький» катет такого треугольника равен $a = c\sin\varphi$, где c - гипотенуза. Используя известное нам соотношение алгебры приближенных чисел $\sin\varphi \approx \varphi$, получаем

$$a \approx c\varphi.$$

«Большой» катет равен $b = c\cos\varphi$. Но тогда можно записать

$$b \approx c(1-\varphi^2/2).$$

Это два основных соотношения в прямоугольном треугольнике, угол φ при вершине которого мал.

Обратите внимание на одно интересное следствие второго соотношения. Найдем разницу Δ между гипотенузой и «большим» катетом

$$\Delta = c - b \approx c\varphi^2/2.$$

Эта разница очень мала - она порядка $c\varphi^2$. Поэтому часто величиной Δ можно пренебречь и считать, что гипотенуза и большой катет равны: $b \approx c$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для равнобедренного треугольника (рис.39).

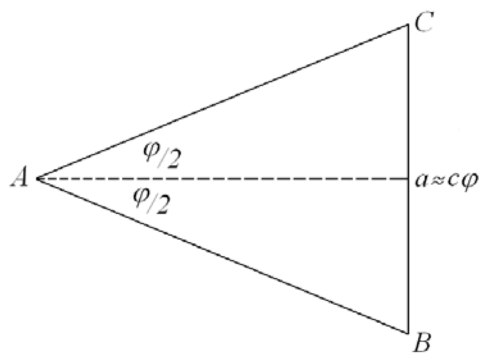


Рис. 39

В этом случае длина основания a связана с длиной боковых сторон с простым соотношением $a = 2c\sin(\varphi/2)$. Отсюда следует, что

$$a \approx c\varphi.$$

Посмотрим, как полученные соотношения можно применить в физике. Для этого решим следующую задачу.

Задача. Резиновый жгут длины l натянут с силой F. Посредине жгута прикреплен шарик массы m. Определите период малых колебаний шарика. Колебания происходят в невесомости.

Давайте отклоним шарик на некоторое небольшое расстояние x от положения равновесия (рис.40).

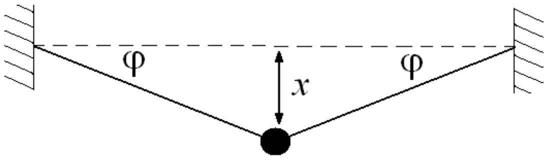


Рис. 40

При малой величине смещения x угол φ мал, и мы имеем треугольник с исследованными нами свойствами.

Прежде всего, отметим, что при смещении шарика жгут удлинился на величину $\Delta l \approx l\varphi^2/2$. (Докажите это самостоятельно.) Следовательно, сила натяжения жгута возросла на величину $\Delta F = k\Delta l \approx kl\varphi^2/2$, где k - коэффициент жесткости жгута. При малых углах φ это очень маленькая величина, ею можно пренебречь и считать, что сила натяжения жгута не изменилась и равна F.

Подсчитаем теперь силу, которая стремится вернуть шарик обратно, в равновесное положение (рис.41).

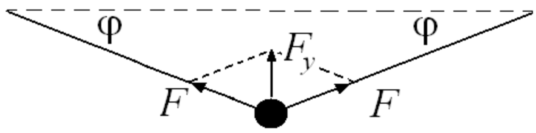


Рис. 41

Из рисунка видно, что возвращающая сила равна

$$F_v = 2F\sin\varphi \approx 2F\varphi.$$

С другой стороны, смещение шарика x можно вычислить следующим образом:

$$x = l\mathrm{tg}\varphi/2 \approx l\varphi/2.$$

Итак, для возвращающей силы находим:

$$F_v = 4Fx/l.$$

Мы получили, что возвращающая сила пропорциональна смещению. Но ведь это закон Гука! Эффективное значение коэффициента жесткости в «поперечном» направлении равно K=4F/l. Теперь осталось лишь применить формулу для периода колебаний груза на пружине, и задача решена:

$$T = 2\pi\sqrt{m/K} = \pi\sqrt{ml/F}\ .$$

Давайте еще раз проанализируем наши приближения. Во-первых, мы заменили sinφ на φ. Поэтому точность расчета тем выше, чем лучше выполняется неравенство

$$x \ll l.$$

Во вторых, мы пренебрегли дополнительным удлинением жгута Δl, возникающим при колебаниях шарика. Это можно делать, если $\Delta F = kl\varphi^2/2 \ll F$. Поскольку $\varphi \approx 2x/l$, то должно быть $x \ll \sqrt{Fl/2k}$ или

$$x \ll \sqrt{\Delta x_0 l/2},$$

где $\Delta x_0 = F/k$ - начальное растяжение жгута. Если $\Delta x_0 \ll l$ и $x \ll l$, то это неравенство выполняется.

Задачи

1. Через весь земной шар по его поверхности натянута веревка так, что отсутствует зазор между веревкой и поверхностью Земли. В веревку добавили кусок длиной 1 м. Проползет ли в образовавшийся зазор кошка?
2. Оцените высоту равнобедренного треугольника, стороны которого равны 1,00000001 и 2,00000001. Рассмотрите два возможных случая.
3. Докажите, что в треугольнике хотя бы две стороны всегда одного порядка длины.
4. В треугольнике ABC сторона AB много больше стороны BC. Докажите, что сторона AC того же порядка длины, что и AB, а угол ABC мал. Может ли быть малым угол ACB?
5. Получите приближенную формулу для площади треугольника, у которого одна из сторон много меньше двух других. Рассмотрите сначала случай равнобедренного треугольника, а затем - произвольного. Оцените точность вашей формулы.
6. Из вершины A прямоугольного треугольника ABC опущена высота AH. Проведена окружность с центром в точке B, проходящая через точку A. Докажите, что при малых значениях угла ABC окружность делит отрезок CH примерно пополам.
7. Докажите, что если в треугольнике все три стороны одного порядка длины, то возможны только две альтернативные ситуации:
   1) все углы треугольника одного порядка;
   2) два угла треугольника малы и их величины одного порядка.
8. Получите приближенную формулу для площади правильного N-угольника,

применимую в случае, когда число N велико. Сторона многоугольника равна а.

9. Оцените точность, с которой можно вычислять диаметр Луны с помощью соотношения $d_л = \varphi R_{зл}$, где $R_{зл}$ - расстояние от Земли до Луны, а φ - угол, под которым Луна видна с Земли. (Воспользуйтесь микрокалькулятором, либо «уточненной» формулой $\sin x \approx x - x^3/6$.)
10. Человек среднего роста считает, что горизонт «находится» на расстоянии около 4 км. Используя эту информацию, оцените радиус Земли. Во сколько раз «отодвинется» горизонт, если человек заберется на вышку, высота которой в два раза превышает его рост?
11. При испытании самолета оказалось, что хвостовое оперение попадает в струю газа от двигателей, расположенных на крыле самолета. Тогда двигатели «довернули» на угол 4^0 так, что струя стала уходить чуть в сторону. На сколько дальше от хвостового оперения проходит струя газа? На сколько процентов упала при этом «полезная» сила тяги двигателей? Расстояние от двигателей до хвоста 25 м.
12. Из лука стреляют вертикально вверх стрелой массы m. На какую высоту поднимется стрела? Натяжение тетивы лука T, ее длина l, тетиву оттягивают на расстояние h.
13. На горизонтальной поверхности с коэффициентом трения μ лежит тело массы m. К телу приложена сила F, направленная под небольшим углом α к горизонту. Определите ускорение тела. Постройте график зависимости ускорения тела от угла α при нескольких значениях внешней силы F. При каком значении угла α ускорение максимально? При каких значениях угла α тело будет оставаться в покое при фиксированной величине внешней силы? При каких значениях внешней силы тело будет оставаться в покое при любых α? Коэффициент трения $\mu << 1$.
14. Из резинового шнура длины l и массы m с коэффициентом жесткости k изготовили кольцо, которое вращается с угловой скоростью ω вокруг своего центра. Найдите радиус кольца.
15. Докажите, что при малых x окружность $x^2+y^2=R^2$ может быть аппроксимирована параболой.
16. Аппроксимируйте функцию $y = a\cos kx$ окружностью при малых x. В какой точке расположен центр этой окружности? Чему равен ее радиус?
17. Проволока согнута в форме параболы $y = ax^2$. На проволоке находится бусинка,

которая может скользить без трения. Бусинку отпускают с высоты h без начальной скорости. Чему равна сила давления бусинки на проволоку в точке О (рис.42)?

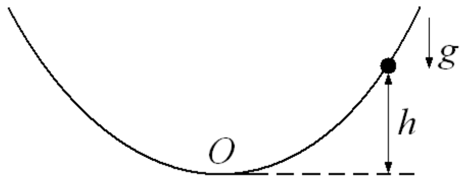


Рис. 42

18. Автомобиль движется с постоянной по величине скоростью v по дороге, представляющую собой синусоиду с амплитудой A и периодом l: $y = a\sin(2\pi x/l)$. В каких точках дороги центростремительное ускорение автомобиля максимально? Определите его величину.
19. Из жести изготовлена пластинка, имеющая «синусоидальный» вертикальный профиль $y = a\sin(2\pi x/l)$. В одной из образовавшихся «ямок» колеблется шарик. Определите период колебаний шарика. Считайте колебания малыми.
20. Спутник движется по эллипсу, уравнение которого задано соотношением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. В точке с координатами $x=0$, $y=b$ скорость спутника оказалась равной v. Определите центростремительное ускорение спутника.

4. Два масштаба времени в одной задаче

Чтобы построить физическую модель и решить задачу, очень важно представлять себе характерные масштабы времени происходящих процессов. Одни процессы происходят «быстро», другие «медленно». Ясно, что это не очень четкие понятия, их смысл зависит от конкретной ситуации. (Например, время может течь «медленно» на скучном уроке, а на интересном «быстро».) В физике понятия быстро и медленно очень часто используется при решении задач.

Чтобы лучше разобраться, как это делается, рассмотрим следующую задачу. Шарик массы m = 100 г может колебаться на пружине с частотой 2 Гц. Система находится в покое. Затем на шарик начинает действовать сила, зависящая от времени, как показано на рисунке 43. Найдите амплитуду колебаний шарика.

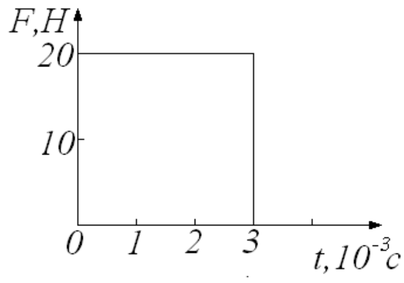


Рис. 43

Физическая ситуация, описанная в задаче, характеризуется двумя характерными масштабами времени. Первый из них - период собственных колебаний шарика T, равный 0,5 с. Второй - характерное время действия внешней силы Δt, равное 3 10^{-3} с. Поскольку период колебаний много больше времени действия внешней силы

$$T >> \Delta t,$$

то смещением шарика за время действия этой силы можно пренебречь. Таким образом, внешняя сила носит характер короткого удара. В результате этого удара шарик приобретает импульс $F\Delta t$ и, соответственно, скорость $v = F\Delta t/m$. После этого он совершает свободные колебания, амплитуду которых A определим из условия $kA^2/2 = mv^2/2$, где $\omega = \sqrt{k/m}$. Окончательно $A = F\Delta t/m\omega \approx$ 5см.

Если внешняя сила носит характер кратковременного удара, то легко решается и задача, когда сила зависит от времени каким-либо сложным образом (рис.44).

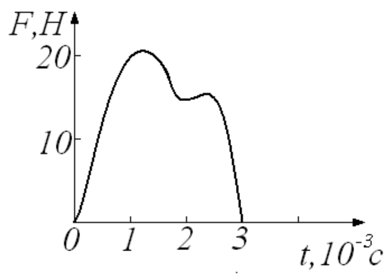


Рис. 44

В этом случае за время действия силы шарик практически не смещается и получает скорость $v = P/m$, где P - импульс внешней силы, численно равный площади под изображенной на рисунке кривой.

Достаточно часто можно считать быстрыми процессы столкновения тел. Оценим, например, время столкновения футбольного мяча со стенкой.

Выберем модель процесса столкновения. Будем считать, что мяч деформируется незначительно, сохраняя в целом форму шара, и лишь в области контакта со стенкой его оболочка становится плоской (рис.45).

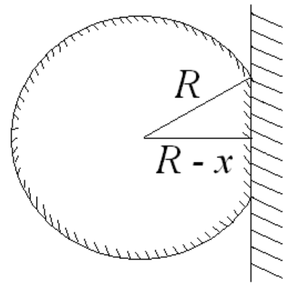


Рис. 45

Пусть мяч деформировался на величину x, малую по сравнению с радиусом мяча R. Радиус области контакта мяча со стенкой можно вычислить по формуле

$$r = \sqrt{R^2 - (R-x)^2} = \sqrt{2Rx - x^2} \approx \sqrt{2Rx}\,.$$

Мы воспользовались тем, что $x < R$. Объем мяча меняется незначительно, следовательно, давление внутри мяча также практически не меняется. Поэтому сила, действующая на мяч со стороны стенки, равна

$$F \approx (P\text{-}P_0)S \approx (P\text{-}P_0)\pi r^2 \approx 2\pi R(P\text{-}P_0)x,$$

где P - давление воздуха в мяче, P_0 - атмосферное давление, S - площадь контакта мяча со стенкой. Таким образом, сила пропорциональна величине деформации. Это снова закон Гука с эффективным коэффициентом жесткости $k = 2\pi R(P\text{-}P_0)$. Следовательно, мяч сожмется, остановится и «оттолкнется» от стенки за время τ, равное половине периода колебаний:

$$\tau = T/2 = \pi\sqrt{m/k} \approx \pi\sqrt{m/2\pi R(P-P_0)}\,.$$

Сделаем численные оценки. Будем считать, что мяч «накачан» так, что избыточное давление внутри него равно одной атмосфере, т.е. 10^5 Па. Массу мяча примем $m \approx 0{,}4$ кг, радиус $R \approx 0{,}15$ м. Подставляя эти значения в полученную формулу, находим

$\tau \approx 6{,}4\ 10^{-3}$ с.

Таким образом, время соударения мяча со стенкой действительно мало.

Столкновения «сплошных» упругих тел, например, стальных шаров, тоже обычно являются быстрыми процессами. Характерное время таких столкновений определяется временем распространения волны деформации, которая проходит по телу «туда-сюда» и определяется размерами тел и скоростью звука.

Понятие о быстрых и медленных процессах важно не только в механике. Оказывается, даже свойства веществ могут зависеть от характерного времени наблюдения. Например, если изготовить шарик из силикона, то на небольших характерных временах он будет вести себя подобно резиновому мячику (отскакивать от стенки при ударе и т.д.). Но если подождать достаточно долго, то шарик из силикона, лежащий на столе, начнет «течь» как вязкая жидкость. Такое свойство силикона получило название вязкоупругость. (Подробнее о вязкоупругости можно узнать из книжки А.Ю. Гроссберга и А.Р. Хохлова «Физика полимеров», Библиотечка «Квант», выпуск 74.)

Задачи

1. Можно ли выделить «быстрые» и «медленные» процессы при исследовании зависимости температуры на улице от времени в течение года?
2. При атмосферном электрическом разряде мы видим молнию и слышим гром. Какие характерные времена можно соотнести с этим природным явлением? Попробуйте оценить их порядок.
3. Почему для измерения температуры медицинским термометром требуется 10 минут, а «стряхнуть» его можно почти сразу?
4. Опишите, чем отличаются процессы в цилиндре двигателя внутреннего сгорания в случаях, когда смесь сгорает постепенно или со взрывом (детонация). В каком случае выше К.П.Д. двигателя?
5. В задаче о колебаниях шарика на пружине оцените величину смещения шарика за время действия внешней силы и сравните ее с амплитудой колебаний.
6. Футбольный мяч падает с высоты 3 м. Оцените характерную силу, действующую на мяч со стороны земли в момент удара. Сравните ее с весом мяча. Оцените максимальную величину деформации и сравните ее с радиусом мяча. Оцените изменение давления в мяче при ударе и сравните его с начальным давлением.
7. Два стальных шарика диаметром 1 см, находящиеся на расстоянии 1 м, движутся друг навстречу другу со скоростями v = 10 см/с. Выделите характерные стадии физического процесса и оцените их длительность. Скорость звука в металле $c \approx 1000$ м/с.
8. Металлический полый шар массы M заполнен резиной массы $m = M/4$. Два таких шара, двигаясь в невесомости навстречу друг другу с равными скоростями v_0 , испытали центральное столкновение. Найдите установившуюся скорость разлета шаров. Известно, что незаполненные шары сталкивались упруго. Скорость звука в резине значительно меньше, чем в металле.
9. Маятник отклонили на угол $\pi/2$ от вертикали и отпустили (рис.46). При этом он

вернулся в исходное положение через время t_1 . Когда же на пути маятника поставили стенку, как показано на рисунке, время возвращения в исходное положение составило t_2 . Найдите угол α, если известно, что он мал. Удар о стенку мгновенный и абсолютно упругий. Длина нити l. Какому условию подчиняются времена t_1 и t_2 , когда угол α мал?

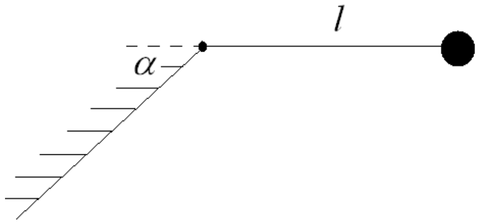


Рис. 46

10. Кубик из пенопласта массой M = 100 г лежит на горизонтальной подставке (рис.47). Высота кубика h = 10 см. Снизу кубик пробивает вертикально летящая пуля массой m=10 г. Скорость пули при входе в кубик v_1 = 100 м/с, при вылете v_2 = 95 м/с. Оцените время, за которое пуля пролетает через кубик. Оцените силу, которая действует на кубик со стороны пули, и сравните ее с весом кубика. Оцените скорость, с которой подпрыгнет кубик. Оцените смещение кубика за время пролета пули. Оцените высоту, на которую подпрыгнет кубик и время его свободного полета. Оцените высоту, на которую поднимется пуля и время ее свободного полета. Выделите характерные стадии физического процесса, описанного в этой задачи, и укажите их длительность.

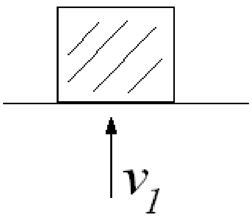


Рис. 47

5. Уравнения в физике

Итак, физическая модель выбрана, сделаны все разумные приближения и записаны необходимые уравнения. На первый взгляд может показаться, что «физика закончилась». Действительно, мы свели задачу к чисто математическим соотношениям: уравнению или системе уравнений. Теперь остается лишь продемонстрировать коллегам свою технику решения уравнений. На самом деле и на этой стадии решения приходится привлекать физические соображения.

Предположим, что наша задача приведена к квадратному уравнению. Но квадратное уравнение может иметь два корня. Оба ли решения имеют смысл с точки зрения реальной физической ситуации? Если нет, то почему? Какое из этих решений оставить? На такие вопросы физик отвечать обязан, поскольку они являются частью задачи, которую он решает.

Рассмотрим следующую задачу. С земли запускают шар-зонд, который поднимается вверх равномерно со скоростью V. Кроме того, с земли бросают вертикально вверх со скоростью v камень. В какой момент времени встретятся шар-зонд и камень? Известно, что интервал времени между стартом шара и броском камня равен τ.

По условию задачи не сказано, что произошло раньше - запущен зонд или брошен камень. Чтобы обойти эту сложность, будем считать, что камень брошен в момент времени $t = 0$, а зонд стартовал в момент времени $t = \tau$. При этом допустим, что величина τ может быть как отрицательной, так и положительной. В первом случае сначала бросили камень, а потом стартовал зонд, а во втором наоборот.

Зависимости координат камня и зонда от времени даются известными кинематическими соотношениями

$$x=vt-gt^2/2, \quad x=V(t-\tau).$$

Условие встречи приводит к квадратному уравнению

$$vt-gt^2/2 = V(t-\tau),$$

решая которое, получаем

$$t_1 = (V-v)/g - \sqrt{(V-v)^2/g^2 + 2V\tau/g},$$
$$t_2 = (V-v)/g + \sqrt{(V-v)^2/g^2 + 2V\tau/g}.$$

Построим теперь графики зависимости координат шара и камня от времени. Будем варьировать величину τ, как параметр, и посмотрим, какие качественно разные ситуации взаимного расположения графиков возможны.

Для случая, когда начальная скорость камня v больше скорости зонда V, таких ситуаций четыре (рис.48).

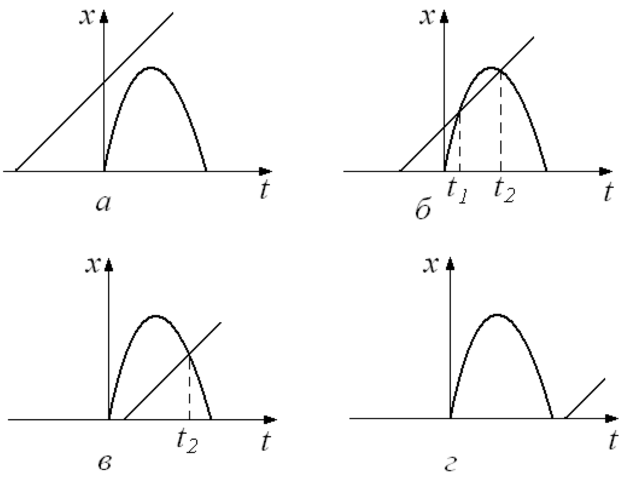


Рис. 48

На рисунке 48.а графики движения зонда и камня не пересекаются. На языке алгебры мы скажем, что дискриминант квадратного уравнения отрицателен

$$(V\text{-}v)^2 /g^2 +2V\tau/g < 0.$$

С точки зрения физики, это соотношение удобно записать в виде условия, накладываемого на время τ,

$$\tau < -(V\text{-}v)^2 /2Vg.$$

Физическая интерпретация анализируемой ситуации очень проста: зонд запущен «задолго» до того момента, когда брошен камень.

На рисунке 48.б изображена ситуация, когда графики движения камня и зонда пересекаются в двух точках. Это означает, что шар и камень могут «встретиться» два раза. Если камень ударяет в зонд, то смысл имеет только одно решение, которому соответствует меньшее значение координаты. Поэтому из двух решений квадратного уравнения следует выбрать t_1 . Такая ситуация возникает, если время τ удовлетворяет неравенству

$$-(V\text{-}v)^2 /2Vg < \tau < 0.$$

Физически рассмотренная ситуация соответствует тому, что зонд стартовал раньше камня, но начальная скорость камня достаточно велика, и камень догоняет зонд. (Подумайте самостоятельно, как интерпретировать наличие двух корней квадратного уравнения в этом случае.)

Графики движения камня и зонда на рисунке 48.в пересекаются в двух точках, однако, первая точка соответствует отрицательной координате. Шар и зонд могут встретиться только один раз, и следует выбрать другой корень квадратного уравнения t_2. Этой ситуации соответствуют времена τ такие, что

$$0 < \tau < 2v/g.$$

В этом случае зонд стартовал после того, как был брошен камень и камень «падает» на зонд сверху.

И, наконец, возможна ситуация, когда обе точки пересечения графиков соответствуют отрицательной координате (рис.48.г). Поэтому хотя квадратное уравнение имеет два решения, но камень и зонд не столкнутся: камень упал на землю до момента старта зонда. Это возможно при

$$\tau > 2v/g.$$

Случай, когда начальная скорость камня v меньше скорости зонда V, рассмотрите самостоятельно.

Итак, вот какое исследование пришлось нам проделать, уже после того, как задача была «решена»!

А если задача приводит к кубическому уравнению? Как быть, ведь его «не проходят» в школе? Можно обратиться к справочнику за соответствующей формулой решения кубического уравнения (она носит имя Кардано). Но ее использование грозит нам столкновением с новым типом чисел - комплексными числами. Что же делать, если применение формулы Кардано встретило затруднение? Ведь задачу надо решать несмотря ни на что. (К сожалению, физик не всегда может ждать, когда математики решат какую-то математическую проблему или расскажут ему о решении.)

Давайте рассмотрим для примера следующую задачу. Два сообщающихся сосуда соединены тонкой трубкой. Один сосуд имеет форму перевернутого конуса высоты H = 10 см с радиусом основания R = 3 см. Второй сосуд - цилиндр высоты H = 10 см и радиуса r = 1 см . В систему наливают объем воды V = 60 см^3 . На какой высоте установится уровень?

Объем воды в цилиндрическом сосуде равен $\pi r^2 h$, а в коническом сосуде - $[\pi(hR/H)^2 h]/3 = \pi R^2 h^3/3H^2$, где h - высота уровня воды. Поскольку суммарный объем жидкости равен V, то

$$\pi r^2 h+\pi R^2 h^3/3H^2 = V.$$

Мы получили кубическое уравнение относительно искомой величины h. Прежде чем его решать, выполним несколько преобразований.

Сделаем замену переменной $x = h/H$:

$$\pi r^2 Hx + \pi R^2 Hx^3/3 = V.$$

Смысл x очень прост - это доля высоты системы, занятая водой. Такая замена позволяет перейти к уравнению с безразмерными коэффициентами:

$$x+(R^2/3r^2)x^3 = V/\pi r^2 H.$$

Это уравнение уже удобно для математического исследования. Подставив в него численные значения величин R, r и V, получим

$$x+3x^3 = 6/\pi.$$

Построим график функции $y = x+3x^3$ (рис.49). Достаточно ограничиться областью $0<x<1$, поскольку только такие значения x имеют физический смысл.

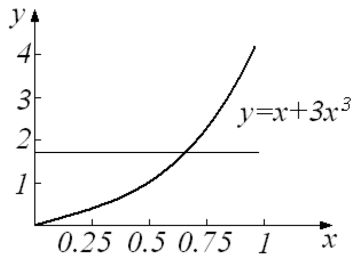


Рис. 49

Функция $y = x+3x^3$ монотонно возрастает. Следовательно, наше уравнение имеет единственный корень. Построенный график позволяет оценить примерное значение корня $x \approx 0{,}75$. Это уже неплохой результат!

Что делать дальше? Используя микрокалькулятор, можно построить график функции $y = x+3x^3$ в окрестности точки $x \approx 0{,}75$ и уточнить решение. А можно получить уточненное решение и аналитически. Для этого будем считать, что $x = 0{,}75+\Delta$, где Δ - маленькая добавка, такая что $\Delta << 0{,}75$. Подставим соотношение $x = 0{,}75+\Delta$ в наше уравнение:

$$(0{,}75+\Delta)+3(0{,}75+\Delta)^3 = 6/\pi.$$

Воспользуемся теперь правилами алгебры приближенных чисел

$$0{,}75 + \Delta + 3\ 0{,}75^3 + 9\ 0{,}75^2\ \Delta \approx 6/\pi.$$

Теперь легко находим

$$\Delta \approx -0{,}0174.$$

Следовательно, уточненное значение корня $x = 0{,}75 + \Delta \approx 0{,}7326$. Добавка Δ действительно оказалась малой.

Более точно и быстро наше уравнение можно решить на компьютере. Однако, решение уравнений с помощью компьютера - тема отдельного разговора. Здесь мы ограничимся лишь результатом расчета: $x \approx 0{,}73222044$. Итак, уровень воды установится на высоте $h = xH \approx 7{,}32$ см. Это и есть ответ к нашей задаче.

Приведенная нами схема решения (составление уравнения, приведение его к безразмерному виду, минимизация числа коэффициентов, определение числа корней, грубая их оценка и, наконец, точное решение) используется достаточно часто, когда физическая задача приводится к сложному уравнению. Следует сказать, что не всегда следует стремиться к максимальной точности решения такого уравнения. Действительно, вряд ли имеет физический смысл решение задачи о сообщающихся сосудах с точностью до десятых долей миллиметра, ведь на самом деле использованная нами модель уже не годится для такой точности. (Часть воды остается в трубке, соединяющей сосуды, несколько изменяет уровень поверхностное натяжение и т.д.) Так что в нашей задаче вполне достаточно ограничиться приведенным приближенным решением.

Задачи

1. К пружине жесткости k подвешен груз массы m. Груз удерживают так, что пружина не растянута, а затем подталкивают вверх со скоростью v. В какой точке остановится груз? Дайте физическую интерпретацию всем возможным решениям.
2. Из куска проволоки, имеющего сопротивление R, изготовили кольцо. К кольцу подключили один провод. Где надо подключить второй провод, чтобы сопротивление между точками подключения равнялось r? При любых ли r задача имеет решение? Сколько существует решений и какова их физическая интерпретация?
3. Мяч, брошенный под углом α к горизонту, попадает в вертикальную стену на высоте h. На каком расстоянии от точки броска находится стена? Сколько решений имеет эта задача? Постройте траектории мяча, соответствующие каждому решению. При каких значениях h задача не имеет решения? Дайте физическую интерпретацию полученному условию.
4. В цилиндрической пробирке длиной L находится легкий поршень на расстоянии l от дна пробирки. В пробирку поверх поршня начинают наливать воду с тем, чтобы вода заняла весь объем пробирки выше поршня. На каком расстоянии от дна расположится при этом поршень? Чтобы отобрать, нужный корень уравнения, оцените порядок величины смещения поршня. Рассмотрите далее случай, когда пробирка заполняется ртутью. Можно ли воспользоваться тем же правилом отбора корня? Исследуйте положения поршня в пробирке с ртутью на устойчивость. Для этого постройте на одном рисунке графики зависимостей давления газа под поршнем и гидростатического давления столба воды от положения поршня. Каким точкам на этих графиках соответствует равновесие поршня?
5. Под каким углом следует наклонить плоскость, чтобы маленький грузик начал

скользить по ней с ускорением a? Коэффициент трения грузика о плоскость равен μ. Постройте график зависимости требуемого угла α от безразмерного параметра a/g. При всех ли a задача имеет решение? Сколько возможно решений? Определите величину угла при $\mu = 0{,}3$ и $a = 2$ м/с^2.

Указание. При решении и исследовании уравнения $\sin x + p\cos x = q$ может быть полезна замена параметра $p=\mathrm{tg}\beta$.

6. Считая, что $x = 0{,}7326 + \Delta$, где Δ - малая величина, получите более точное значбение корня уравнения $x+3x^3 = 6/\pi$.
7. Отыщите в справочнике формулу Кардано и решите с ее помощью уравнение $x+3x^3 = 6/\pi$.
8. Решите задачу о сообщающихся цилиндрическом и коническом сосудах в случае, когда в систему залили $V = 80$ см^3 воды. На сколько повыситься уровень, если затем долить еще 1 см^3 воды?
9. Шар радиуса 5 см, изготовленный из материала с плотностью $\rho = 0{,}8$ г/см, плавает в воде. Определите глубину погружения шара. Какую безразмерную неизвестную величину удобно ввести? Сколько действительных корней имеет полученное уравнение? Все ли они имеют физический смысл?
10. Пружина характеризуется следующей зависимостью силы упругости F от величины деформации x: $F = -kx - cx^3$. На такой пружине подвешен груз массы m. Найдите равновесное положение груза, считая, что отклонение от закона Гука незначительно.
11. На покоящуюся, на горизонтальной плоскости систему, состоящую из двух шариков массы m каждый, соединенных пружиной, налетает слева шарик массы M. При этом происходит абсолютно упругий центральный удар. Найдите величину отношения m/M, при котором удар произойдет еще раз.

6. Качественные теории

Что за странные слова вынесены в заголовок этого параграфа? Как это может быть теория качественной? Ведь теории нужны для того, чтобы вычислять физические величины, пусть приближенно или хотя бы по порядку величины.

Давайте, однако, обсудим следующую ситуацию. Мяч бросают с поверхности земли. На расстоянии l от точки броска стоит стена высоты h (рис.50).

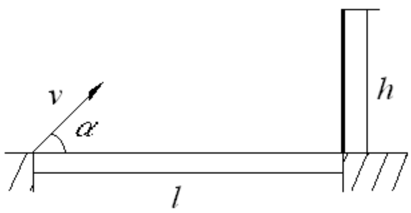


Рис. 50

Если бы мы решали «стандартную» задачу по физике, то вопрос к задаче мог бы звучать так: «Начальная скорость мяча равна v, а угол, под которым бросили мяч, равен α. В какой точке мяч удариться о стенку?»

Но мы с вами уже знаем, как важно представить физическую ситуацию во всем ее многообразии. Поэтому давайте сформулируем вопрос иначе: «Какие возможны ***качественно различные*** варианты движения мяча?» Нетрудно сообразить, что мяч может упасть на землю, не долетев до стены. Кроме того, мяч может удариться о стенку. Наконец, мяч может перелететь через стенку (рис.51).

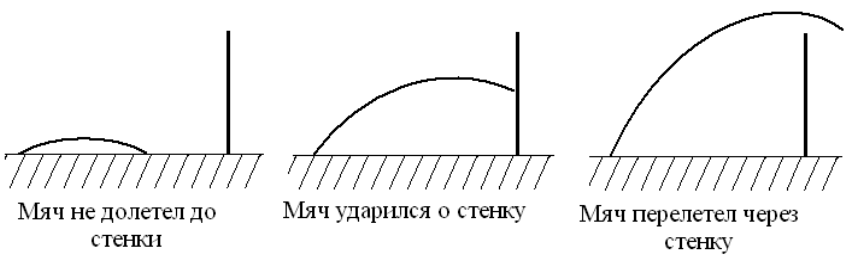


Рис. 51

Итак, возможны три качественно разные ситуации. Какая из них реализуется, зависит от начальной скорости мяча v и угла α, под которым он брошен. Отметим, что существуют целые области значений начальной скорости и углов, при которых возможен определенный исход.

Для дальнейшего анализа нам понадобятся два кинематических соотношения. Одно из них дает дальность полета мяча

$$L = v^2 \sin 2\alpha / g \, .$$

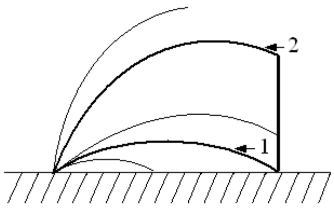
Второе позволяет определить высоту, на которой окажется мяч, пролетев по горизонтали расстояние l:

$$H = l(tg\alpha - \mathrm{l}g/2v^2\cos^2\alpha) \, .$$

Результат исследования, выполненного в стиле качественной теории, удобно представить в виде ***двумерной диаграммы***. Такая диаграмма представляет собой плоскость параметров задачи, на которой изображены области, отвечающие, всем качественно разным ситуациям. Этот метод в математическом смысле эквивалентен графическому решению неравенств с двумя неизвестными.

Построим двумерную диаграмму, соответствующую нашей задаче. Прежде всего, выберем два параметра, которые будут отложены по осям абсцисс и ординат. С физической точки зрения, наиболее естественно было бы использовать угол α и начальную скорость v. Однако, безразмерный параметр lg/v^2 удобнее, чем скорость v, поскольку для него получаются более простые соотношения. Отметим, что физический смысл имеют лишь неотрицательные положительные значения этого параметра и значения угла α, лежащие в интервале от 0 до $\pi/2$.

Найдем, прежде всего, линии, разграничивающие области параметров с разным характером движения. Им соответствуют «граничные» траектории мяча, разделяющие семейства траекторий трех описанных нами типов (рис.52).



Траектории 1 и 2 разделяют траектории мяча, отвечающие разным исходам

Рис. 52

Построение подобных «граничных» ситуаций является важной компонентой качественного анализа задачи, в которой возможны различные типы поведения.

Для нашей задачи уравнения разграничительных линий даются следующими соотношениями

$$l = v^2 \sin 2\alpha / g \,,$$

$$h = l(tg\alpha - \lg/2v^2 \cos^2 \alpha)\,.$$

Выразим отсюда безразмерный параметр lg/v^2:

$$\lg/v^2 = \sin 2\alpha \,,$$

$$\lg/v^2 = \sin 2\alpha - (h/l)(\cos 2\alpha + 1)\,.$$

Приступим теперь к построению двумерной диаграммы. Изобразим разграничительные линии, соответствующие траекториям 1 и 2, на одном рисунке (рис.53).

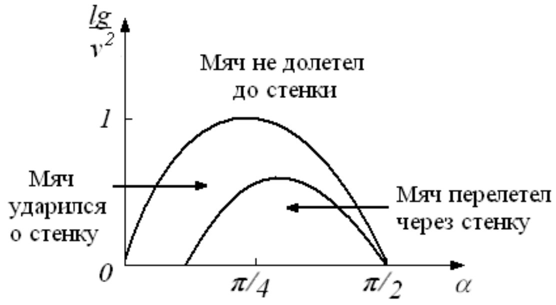


Рис. 53

Эти линии разбили диаграмму на три области, которые соответствуют трем возможным типам движения мяча. Нетрудно установить, какая область соответствует какому «исходу».

А что будет происходить, если мы будем бросать несколько мячей с некоторой определенной скоростью, постепенно увеличивая угол? Чтобы ответить на этот вопрос, следует провести на диаграмме горизонтальные линии, которые соответствуют фиксированным значениям скорости (рис.54).

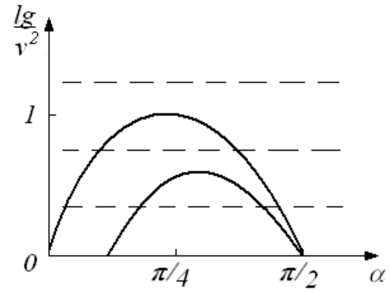


Рис. 54

Как видно из рисунка, возможны три «сценария такого эксперимента с набором мячей».

1) Все мячи не долетают до стенки.

2) Мячи, брошенные под малыми углами, не долетают до стенки; мячи, брошенные в некотором интервале больших углов, ударяются в стенку; Мячи, брошенные под еще большими углами, не долетают до стенки.

3) Мячи, брошенные под малыми углами, не долетают до стенки; мячи, брошенные под большими углами, ударяются в стенку; мячи, брошенные под еще большими углами, перелетают через стенку, и далее в обратном порядке.

Определим пороговые значения скорости, при которой меняются типы «сценариев». Очевидно, что им соответствуют максимумы разграничительных линий. Максимум линии, заданной уравнением $lg/v^2 = \sin 2\alpha$, достигается при значении $\alpha=\pi/4$ и равен единице. Поэтому соответствующее пороговое значение скорости

$$v_{\min 1}^2 = lg.$$

Это минимальное значение скорости, при которой мяч уже может долететь до стенки.

Максимум линии, заданной уравнением

$$lg / v^2 = \sin 2\alpha - (h / l)(\cos 2\alpha + 1)$$

равен $(\sqrt{1 + h^2 / l^2} - h / l)$. (Докажите это самостоятельно.) Таким образом, соответствующее пороговое значение скорости

$$v_{vin2}^2 = \frac{lg}{\sqrt{1 + h^2 / l^2} - h / l}.$$

Это минимальное значение скорости, при которой мяч уже может перелететь через стенку.

Одним из первых, кто понял необходимость качественных теорий, был выдающийся французский физик и математик Анри Пуанкаре. Он решал задачу о движении планет солнечной системы при наличии взаимного влияния планет. Оказалось, что это очень сложная задача. Тогда Пуанкаре изменил саму постановку вопроса к задаче. Он не стал интересоваться, как именно в деталях будут двигаться планеты. А стал формулировать вопрос так: «Упадут ли, в конце концов, планеты на Солнце или нет?» Оказалось, что даже такие вопросы требуют очень серьезного анализа. В настоящие время существуют целые области математики, основанные на подобных идеях, например, качественная теория дифференциальных уравнений.

Одним из примеров двумерных диаграмм могут служить фазовые состояния вещества. На такой диаграмме по двум осям координат отложены два параметра - давление P и температура T, а также изображены соответствующие области твердой, жидкой и газообразной фазы какого-либо вещества (рис.55).

Рис. 55

Как пользоваться такой диаграммой? Зафиксируем некоторое значение температуры T и давления P. На диаграмме, им соответствует точка (T, P). Если такая точка попала в область твердой фазы, это означает, что если создать давление P и температуру T, вещество будет находится в твердой фазе и т.д.

Еще один пример диаграммы мы возьмем из акустики. На следующем рисунке изображена диаграмма слышимости звуков (рис.56).

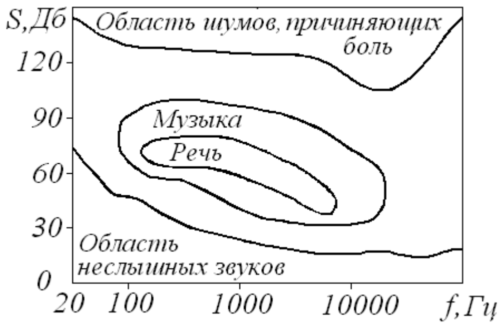


Рис. 56

Здесь в качестве параметров фигурируют интенсивность звука S и его частота f. На диаграмме показаны области, отвечающие музыке, речи, шуму и т.д.

Задачи

1. Сколько возможно качественно разных типов реакции родителей на вашу успеваемость в конце учебного года?
2. В вертикально расположенной пробирке под поршнем находится газ, а над поршнем – жидкость. Какие качественно разные состояния системы возможны после нагревания пробирки? (Жидкость не закипает.)
3. Опишите все возможные типы движения в каждой из трех «потенциальных ям», изображенных на рисунке 57.

Рис. 57

4. Используя диаграмму состояний для задачи о мяче, брошенном в направлении стенки, ответьте на вопрос: какие исходы будут наблюдаться, если бросать мячи под фиксированным углом с возрастающей начальной скоростью. Дайте физическую интерпретацию условию $h = l\text{tg}\alpha$, соответствующему пересечению второй разграничительной линии на диаграмме с осью абсцисс.
5. Используя диаграмму состояния вещества, приведенную в тексте, опишите возможные типы фазовых превращений в системе, которые можно наблюдать с ростом температуры при фиксированном давлении.
6. Пусть имеется некоторое уравнение. Назовем качественно разными ситуациями, когда оно имеет разное количество решений. Изобразите на плоскости параметров области, отвечающие качественно разным ситуациям для

следующих уравнений:

а) $x^2 + px + q = 0$,

б) $x^4 + px^2 + q = 0$,

в) $\sin x + p\cos x = q$ для значений $0 < x < \pi$.

7. На доске массы M лежит небольшой брусок массы m (рис.58). Коэффициент трения между доской и бруском равен μ_1, а между доской и поверхностью - μ_2. К бруску приложена горизонтальная сила F. Укажите все возможные качественно разные ситуации поведения системы. Установите значения параметров, при которых реализуются эти ситуации. Изобразите на плоскости параметров μ_1, μ_2 области, соответствующие различным типам динамики системы.

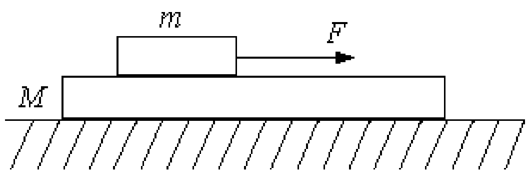


Рис. 58

8. На горизонтальной поверхности с коэффициентом трения μ лежит тело массы m. К телу приложена сила F, направленная под углом α к горизонту. Укажите все возможные качественно разные ситуации поведения системы. Изобразите соответствующие области на плоскости безразмерных параметров α, mg/F. Как будет меняться характер движения тела, если к нему прикладывают фиксированную по величине силу, постепенно увеличивая угол, под которым она действует?

9. В теплоизолированный сосуд, содержащий массу M воды при температуре T, бросили кусок льда массы m при температуре $-t$. Какие качественно разные состояния системы возможны после установления теплового равновесия? Изобразите на плоскости m, M области, соответствующие каждому из этих состояний. Каким точкам на плоскости m, M соответствует нулевая конечная температура?

10. Тонкая однородная палочка длины l и плотности ρ шарнирно укреплена за верхний конец так, что шарнир находиться на расстоянии h от поверхности жидкости плотности $\rho_{ж.}$ Какие качественно разные ситуации расположения палочки возможны? Изобразите на плоскости параметров h/l $\rho/\rho_ж$ области, соответствующие этим ситуациям. Рассмотрите два случая: точка прикрепления

шарнира находится над поверхностью жидкости, и точка прикрепления шарнира находится под поверхностью жидкости.

11. Шарик массы m прикреплен к невесомому резиновому жгуту жесткости k, длина которого в недеформированном состоянии равна l. Шарик на жгуте вращают так, что жгут образует угол α с вертикалью. Выберите безразмерные параметры, характеризующие эту задачу, и изобразите на плоскости этих параметров область, внутри которой возможно такое поведение системы. Что будет происходить с шариком вне этой области?
12. На рисунке 59 показана схема известного опыта, демонстрирующего инертность тел. Начиная с некоторого момента времени, нижнюю нить тянут с постоянной силой f. В зависимости от величины силы рвется либо нижняя, либо верхняя нить, либо обе нити остаются целыми. Найдите на плоскости T, f области, внутри которых реализуются эти ситуации. Считайте, что разрыв нити наступает при натяжении T; вплоть до разрыва нить имеет постоянный коэффициент жесткости k. Масса груза M, нить невесома.

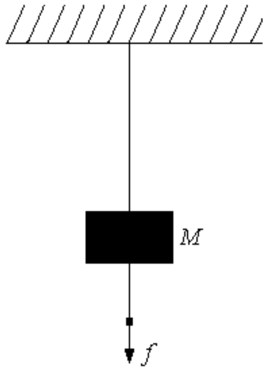


Рис. 59

7. Критические ситуации

Очень часто для ответа на вопрос, поставленный в стиле качественной теории, бывает нужно изучать какую-то особую выделенную ситуацию. Такие ситуации достаточно часто возникают и при решении задач по физике, имеющих стандартную формулировку.

Пусть, например, на наклонной плоскости стоит цилиндр радиуса r и высоты h. Угол α наклона плоскости к горизонту постепенно увеличивают. Спрашивается, при каком значении угла α цилиндр опрокидывается?

Чтобы решить эту задачу, надо выделить специфическую ситуацию, когда цилиндр только-только «хочет» опрокинуться. Эта ситуация называется критической (рис.60).

Рис. а. Цилиндр стоит устойчиво

Рис. б. Критическая ситуация. Цилиндр начал опрокидываться.

Рис. 60

В критической ситуации цилиндр «почти» оторвался от наклонной плоскости. Это означает, что и сила реакции опоры, и сила трения приложены к точке *O*. Моменты этих сил относительно оси, проходящей через точку *O*, равны нулю. Цилиндр будет оставаться в равновесии до тех пор, пока сила тяжести имеет момент, равный нулю. Это возможно, только тогда, когда вертикаль, опущенная из центра тяжести цилиндра, проходит через точку *O*. Из этих соображений легко получаем условие начала опрокидывания:

$$\mathrm{tg}\alpha=2r/h.$$

Определить параметры задачи, при которых возникает то или иное критическое состояние, не всегда просто. Например, как вы знаете, поток жидкости или газа может быть регулярным – ламинарным, а может быть нерегулярным – турбулентным. Ясно, что если мы увеличиваем скорость набегающего потока жидкости, то должно возникнуть критическое состояние, соответствующее переходу от ламинарного течения к турбулентному. Однако, вычислить критическое значение скорости и исследовать особенность поведения жидкости вблизи критического состояния потока оказалось очень и очень непростой задачей. Сейчас эта проблема все еще остается в центре внимания активно работающих физиков.

Задачи

1. С вершины неподвижной полусферы радиуса R соскальзывает без начальной скорости маленький кубик. В какой точке он оторвется от полусферы?
2. В сферической лунке радиуса R и глубины h находиться шар радиуса r. Систему двигают с горизонтальным ускорением a. При какой величине ускорения шар выкатиться из лунки?
3. Тележка скатывается по наклонному желобу, который переходит в кольцо радиуса R, лежащее в вертикальной плоскости (рисунок). С какой высоты надо отпустить тележку, чтобы она выполнила «мертвую петлю»? Трением

пренебречь.

4. Шестиугольный карандаш толкнули вдоль горизонтальной плоскости, как показано на рисунке 61. При каких значениях коэффициента трения μ между карандашом и плоскостью карандаш будет скользить по плоскости, не вращаясь?

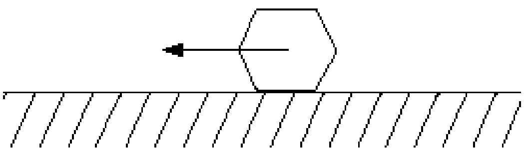


Рис. 61

8. «Эталонные задачи»

Задачи бывают учебные, бывают научные. А что такое «эталонные» задачи?

Наука развивается таким образом, что любая область физики (механика, термодинамика, теория колебаний и т.д.) не сводится к набору теоретических положений и следствий из них. Структура физики значительно сложнее. Очень часто решение какой-либо задачи начинает кочевать из учебника в учебник, и, наконец, она становится, как говорят, классической. При этом важной является не только задача сама по себе, но и те идеи, методы, приемы, тот образ мышления, которые привлекаются для ее анализа.

Особенно большое значение такие задачи имеют на ранних стадиях становления теории. Например, интенсивно развивающаяся сейчас теория нелинейных волн во многом основана на решении ряда эталонных задач.

Умение решать определенное число основных задач является существенным признаком овладения теорией. Можно сказать и иначе: тот, кто умеет решать «эталонные» задачи, не встретит принципиальных трудностей в решении других задач, характерных для данной области физики.

«Эталонные» задачи – это не строго заданный список. Мы можем, составить его и сами. Давайте подумаем, какие «эталонные» задачи по механике можно назвать? Конечно, это груз на наклонной плоскости, два груза на блоке, задача о столкновении двух шаров и т.д.

Полезно не только уметь решать эталонные задачи, но и уметь чувствовать, какая из задач является «эталонной». Если вы это умеете делать, вы хорошо чувствуете структуру физической теории.

Задачи

1. Составьте список из 10 – 15 «эталонных» задач по всему курсу механики.
2. Составьте список «эталонных» задач по гидростатике и гидродинамике.

Мы должны знать. Мы будем знать.
Давид Гильберт

9. Исследовательские задачи

Обычные задачи по физике Вы решаете на уроках или дома, несколько более сложные – на олимпиадах. Но урок, олимпиада, работа над домашним заданием скоротечны. На каждую задачу Вы тратите не так много времени - ведь необходимо решать их довольно большое число. (В физико-математических школах – сотни!). В профессиональной же жизни ученого-исследователя ситуация прямо противоположная. Ученый тратит на задачу обычно не то что часы, или даже дни, а месяцы и годы. Иногда в этот процесс вовлекаются целые поколения ученых. Такова история, например, известной теоремы, которую сформулировал еще в 17-ом веке Ферма, и которая была доказана лишь недавно. А вот в вопросе о механизме и природе турбулентности в жидкости и газе сейчас наметился прогресс, есть много идей и «находок», но полной ясности все еще нет.

Таким образом, ***исследовательская*** работа требует своего рода «погружения», постоянных размышлений. Она состоит из поиска, ошибок и открытий, больших и маленьких. Именно поэтому не все, кто блестяще выступал на олимпиадах и даже на уроках, находят себя в научной работе. И, наоборот, многие, кто не блистал на олимпиадах, но склонен к размышлениям и самостоятельной работе, становились выдающимися учеными. Один перечень имен грозит серьезным потрясением учебному процессу, поэтому о персоналиях здесь умолчим. (Я ни коей мере не против олимпиад, но хочу подчеркнуть, что это не единственный и не бесспорный билет на «поезд» в науку.)

Еще одна особенность реальных задач в том, что исследователю не только можно, но и нужно пользоваться учебниками, монографиями, статьями, консультациями, помощью коллег, возможностями сети Интернет. Ведь цель состоит именно ***в получении решения***, а не в тренинге по решению задач с известным ответом! В школе же обычно все иначе. Также в школе никогда (за редким исключением) не учат технологии «мозгового штурма» задачи. Вспомним в связи с этим, хотя бы, полное молчание в аудитории и грозные взгляды учителя во время контрольных работ. А в реальной жизни навыки «мозговой атаки» очень пригодилось бы.

Еще одно отличие школьных задач состоит в том, что их авторы точно знают, как эту задачу решать. (Трудно представить себе, чтобы творилось бы в школе на уроках в противоположном случае.) А вот задачи, которые решают ученые, как раз отличаются тем, что часто не ясно, ни как их решать, ни что получится. (Кстати, иногда ничего. Многие выдающиеся ученые, например физики Альберт Эйнштейн, Игорь Евгеньевич Тамм, химик Дмитрий Иванович Менделеев очень много времени потратили на задачи, которые решить не удалось.) Как не вспомнить здесь следующую цитату из известного произведения братьев Стругацких: ...

«Г-голубчики, - сказал Федор Симеонович озадаченно,
разобравшись в почерках. - Это же п-проблема Бен Б-бецалеля.
К-калиостро же доказал, что она н-не имеет р-решения. Мы сами
знаем, что она не имеет решения, сказал Хунта, немедленно
ощетиниваясь. - Мы хотим знать, как ее решать...»

Задачи без заранее известного ее авторам ответа вообще не встречается в школьных учебниках. Но именно такие задачи учат познавать окружающий мир, устанавливать новые закономерности. При этом, не важно, чтобы тема была амбициозна и грандиозна, важен ***характер*** исследования. Большим мастером составления таких задач был наш выдающийся соотечественник, Нобелевский лауреат Петр Леонидович Капица. Подобные задачи он часто давал на вступительные экзамены в аспирантуру. По воспоминаниям, это «держало в форме» не только претендентов, но и их руководителей, поскольку к ним молодежь бегала за консультациями. (Обязательно найдите список задач П. Л. Капицы в сети Интернет!)

Таким образом, можно и на «школьном» уровне сформулировать задачи, которые были бы близки к характеру работы ученого. Их можно назвать ***исследовательскими*** задачами. Некоторое их количество мы предложим здесь Вашему вниманию. Чтобы подчеркнуть их исследовательский характер, мы дали каждой задаче свое название.

Итак, из приведенных ниже задач для начала нужно выбрать всего одну - ту, которая Вам понравится. На ее решение придется потратить не час и даже не один день. Таким образом, значение имеет ***не число*** решенных задач, а ***глубина*** проработки решения. Такие задачи, можно надеяться, помогут Вам лучше понять науку, как профессию, состоящую в получении новых результатов "своими руками".

И еще одно замечание. Вы можете решать такие задачи не в одиночку – образуйте школьную научную лабораторию, - и вперед, к новым знаниям!

В силу сказанного, не хочется давать подробный пример решения какой-либо задачи. Однако в качестве «подсказки», приведем возможный план исследований одной темы. Пусть она звучит так: «Циклоида. От компьютерного моделирования до изохронного маятника Гюйгенса». Предлагаемый Вам план работы иллюстрирует также роль компьютера в исследованиях в целях моделирования и отображения процессов, а также и для получения информации. Исследовательская работа в целом не сводится только к работе на компьютере, но компьютер помогает «вжиться» в задачу, что очень важно в исследовательской работе. Итак, вот наш план.

- В Интернете или справочнике по математике (может быть придется сходить в библиотеку) найдите математическую формулу, задающую циклоиду.
- Напишите программу, которая рисует циклоиду на экране компьютера.
- Напишите программу, которая демонстрирует катящееся колесо и «высвечивает» траекторию точки на ободе колеса. Рассмотрите случай, когда точка может не лежать точно на ободе. Посмотрите, как траектория при вариации расстояния от точки до обода превращается в классическую циклоиду.
- Напишите программу, которая строит семейство нормалей к циклоиде. (Уравнение нормали к кривой найдите в справочнике или воспользуйтесь консультацией преподавателя.) Внимательно рассмотрите огибающую семейства нормалей. Какую кривую оно напоминает?
- С помощью Интернета выясните, что такое эволюта и эвольвента и как эти понятия относятся к циклоиде.
- С помощью Интернета соберите максимум информации об изохронном маятнике Гюйгенса. Наряду с другими вариантами, попробуйте поиск по ключевым словам «Маятник Гюйгенса»
- Изготовьте изохронный маятник Гюйгенса в варианте с циклоидальными направляющими и проведите с ним эксперименты. Проверьте, насколько это удастся, изохронность маятника и работоспособность теоретической формулы для периода.
- Найдите в Интернете биографию Гюйгенса и познакомьтесь с ней.
- С помощью Интернета или электронной библиотеки выясните свойство циклоиды, как «брахистохроны» - линии, форма которой такова, что время соскальзывания с данной высоты по данной линии минимальна.
- Изготовьте изохронный маятник Гюйгенса в виде листа жести, изогнутого по циклоиде (брахистохроне), по которой катается шарик. Получите формулу для периода такого маятника (учтите момент инерции шарика!) и сравните с экспериментом.

Итак, особенность задач в этом параграфе в том, что они не имеют строго определенных решений - каждая из них допускает множество подходов и дальнейшее развитие. «Арсенал» Вашего исследования не фиксирован. Используйте теоретические соображения, эксперименты, компьютерное моделирование, по своим наклонностям и возможностям - в тексте даются лишь отдельные советы. Обсуждайте Вашу задачу с другими учениками. Используйте литературу - для решения некоторых задач это полезно, а решение некоторых из них без этого и невозможно. Используйте консультации своих учителей и ученых.

Задачи

1. ***Монета на наклонной плоскости.*** Монету на наклонной плоскости толкают параллельно ребру этой плоскости. Исследуйте, как трансформируется траектория скольжения монеты на этой плоскости в зависимости от угла наклона, коэффициента трения, начальной скорости. Проведите также компьютерное исследование и соответствующие эксперименты. Попробуйте провести классификацию возможных траекторий.
2. ***Искажение поверхности океана.*** П.Л. Капица предложил такую задачу: над поверхностью океана помещена материальная точка массы m. Точка располагается на высоте h над невозмущенным уровнем океана. Исследуйте вид возмущенной поверхности воды. Постройте соответствующие «профили» на компьютере. Все ли возможные конфигурации в такой системе можно наблюдать в реалистичных условиях на Земле? Рассмотрите возможные модификации этой задачи, например, случай расположения двух притягивающих центров над водой и др.
3. ***Форма изогнутой линейки.*** Сожмите металлическую линейку, приложив к ее концам некоторое усилие. Какую форму примет слегка изогнутая линейка? Проверьте предположения, что форма линейки задается:

   а) синусоидой,

   б) параболой.
4. ***Цепочка с грузиками***. Как надо распределить по цепочке систему грузиков разного размера, чтобы она приняла в поле тяжести форму окружности? Изготовьте такую цепочку и проведите эксперименты
5. ***Катастрофы мыльной пленки.*** Имеются два проволочных кольца с радиусами R и r (рис.62). Выясните, при каких значениях расстояния между кольцами h может существовать мыльная пленка, натянутая одновременно на оба кольца, образуя некоторую фигуру вращения. (Внутри колец пленок нет). Что

произойдет с мыльной пленкой, если постепенно увеличивать h? Проведите теоретическое рассмотрение и проделайте соответствующие эксперименты. Продумайте, как экспериментально зафиксировать конфигурацию пленки.

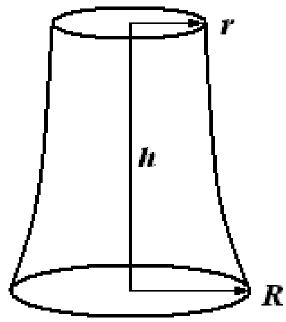


Рис. 62

6. ***Оптические каустики в цилиндрической чашке.*** В цилиндрическом сосуде (например, в чашке с молоком) можно наблюдать яркую линию с еще более ярким острием. Эта линия - каустика - представляет собой огибающую световых лучей, отраженных от цилиндрической поверхности. Проведите теоретическое, экспериментальное и компьютерное исследование такой каустики.
7. ***Случайное блуждание на компьютере.*** Проведите численное моделирование задачи о случайном блуждании на двумерной решетке размера NxN, считая: что на каждом шаге по времени частица с равной вероятностью переходит в одно из соседних (по вертикали и горизонтали) узлов или остается на месте. Постройте несколько траекторий. Получите численно оценку среднего времени ухода на расстояние, большее R, от точки старта для нескольких различных R. Предложите эмпирическую формулу для этой зависимости. Попробуйте исследовать аналогичную задачу в трехмерном пространстве.
8. ***Плавающий шар***. Исследуйте вопрос о глубине погружения шара в жидкость. Проведите эксперименты с разными шариками и жидкостями разной плотности. Результаты экспериментов удобно представить в подходящих безразмерных переменных, в качестве которых могут выступать соответствующие комбинации размерных величин, характеризующих задачу. (Плотность жидкости можно менять, подсыпая в воду соль.) Изучите возможные колебания шара на поверхности воды. Как зависит период от введенных безразмерных параметров? Оцените роль диссипация в системе? Линейны или нелинейные колебания шара?
9. ***Статические и колебательные свойства висящей цепочки.*** Говорят, что если

цепочку подвесить за концы, то она примет форму цепной линии. Проверьте это утверждение. Если слегка толкнуть цепочку за концы в горизонтальном направлении и снова зафиксировать их, то возникнут колебания. Попробуйте исследовать эти колебания.

10. ***Вращающаяся цепочка***. Исследуйте устойчивые конфигурации, которые может принимать массивная цепочка, если ее вращать за один конец. Проведите предварительно эксперименты, изготовив цепочку из скрепок. Попытайтесь реализовать соответствующую компьютерную модель.
11. ***Неизохронный маятники.*** Гюйгенс установил, что маленький шарик совершает строго изохронные колебания (т.е. колебания, период которых не зависит от амплитуды), если он движется по циклоиде. Какую форму следует придать поверхности, чтобы колебания шарика соответствовали «потенциальной яме» не с квадратичным минимумом, а с минимумом четвертой степени?
12. ***Радуга.*** Найдите в справочнике данные по коэффициенту преломления света в воде в диапазоне от красного цвета до фиолетового и воспроизведите в цветной графике на компьютере расчет траекторий лучей света в капле воды (теория радуги Декарта). Определите, под какими углами по отношению к направлению на солнце наблюдатель увидит красное и фиолетовое кольца радуги. Попробуйте провести аналогичное исследование для капли несферической формы.
13. ***Поющая бутылка.*** Известно, что если дуть в горло бутылки, то бутылка будет издавать звук определенной частоты («гудеть»). Определите, от каких параметров бутылки зависит высота издаваемого тона (т.е. частота звука). Проведите эксперименты с различными бутылками и пузырьками. Проверьте найденную зависимость экспериментально. (Для этого Вам скорее всего понадобится пианино и, возможно, консультация человека, получившего музыкальное образование.)
14. ***Моделирование линзы.*** Напишите программу, моделирующую прохождение света через толстую линзу. При построении хода лучей пользуйтесь законами преломления, а не свойствами тонкой линзы. Рассмотрите прохождение пучка лучей через толстую линзу. Сравните полученную картину с известной из курса физики. Исследуйте, как зависит ход лучей от параметров линзы.
15. ***Бильярд.*** Напишите программу, моделирующую движение шарика в замкнутой области, считая все удары о стенки абсолютно упругими. Рассмотрите движение

в областях различной формы. (Квадрат, эллипс, прямоугольник и т.д.) Попробуйте выявить какие-то закономерности в динамике частицы. Организуйте поиск в сети Интернет по проблемам бильярдов. (Это весьма обширная область статистической физики и нелинейной динамики).

16. ***Прыжок с гирями.*** Известно, что древнегреческие атлеты прыгали в длину с гирями. Бросая их в определенный момент, они увеличивали дальность прыжка. Попробуйте определить, в какой момент и как нужно отбросить гири, чтобы максимально увеличить дальность прыжка.
17. ***Качалка.*** В теории катастроф очень популярна модель, известная как качалка (рис.63). Рассмотрите параболическую качалку, форма нижней поверхности которой задана уравнением $y=x^2$. Исследуйте проблему устойчивости такой системы. Ознакомьтесь с теорией качалки (Постон и Стюарт, Теория катастроф), связывающей проблему ее устойчивости с построением огибающей семейства нормалей. Проведите компьютерное моделирование семейства нормалей. Изготовьте качалку из картона, проведите эксперименты с ней и сравните с результатами компьютерного моделирование. Реализуйте ту же программу исследований для качалки в форме эллипса.

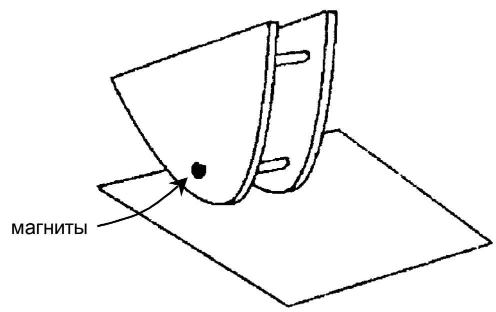


Рис. 63.

18. ***Неваляшка (Ванька-Встанька)***. Рассмотрим «модель» этой известной игрушки в виде цилиндра со смещенным центром тяжести. Если такой цилиндр положить на плоскую поверхность, то он имеет два положения равновесия: устойчивое (центр тяжести занимает наинизшее положение) и неустойчивое (центр тяжести занимает наивысшее положение). Исследуйте, какие положения равновесия будет иметь этот цилиндр, если его положить на выпуклый (или вогнутый) полуцилиндр (большего радиуса). Что будет происходить при выведении цилиндра из положений равновесия?
19. ***Математический ряд и физический эксперимент.*** Если положить на один кирпич сверху второй, то его можно сдвинуть на расстояние $x_1 = l/2$, прежде, чем

произойдет падение. На какое расстояние x_2 можно сдвинуть третий кирпич, положенный на второй (рис.64)? Получите соответствующую последовательность x_n для возрастающего числа кирпичей. Чему равна длина стенки в пределе бесконечного числа кирпичей? Попробуйте экспериментально реализовать соответствующую ситуацию. (Рекомендуем использовать не кирпичи, а что-нибудь полегче - костяшки домино, спичечные коробки и др.) Обсудите результаты эксперимента и их соответствие с теорией. Попробуйте в эксперименте реализовать другую стратегию, нацеленную на получение длинной стенки. Стенку, какой длины Вам удастся создать?

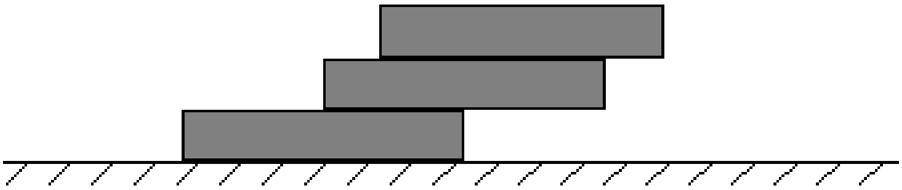


Рис. 64

20. ***«Падающее домино».*** Составим из костей домино цепочку, поставив их на меньшую грань на равном расстоянии друг от друга. Если толкнуть первую кость, то, падая, она толкнет вторую и т.д. Исследуйте процесс распространения такой «волны». В частности, определите, зависит ли (и если да, то как) время падения всей цепочки от расстояния между костями, количества костей, силы толчка первой кости, других параметров. Проведите эксперимент. Попробуйте сделать теоретический расчет и сравнить результаты**.** ***Примечания***: 1. Лучше использовать детское домино (с костями большого размера). 2. Для измерения времени, скорее всего, понадобится более точный прибор, чем часы с секундной стрелкой.
21. ***Маятник с переменной массой.*** Изготовьте маятник из сосуда, в который можно наливать виду (например, из бутылки). Изучите зависимость периода колебаний маятника от массы налитой в бутылку воды. Попробуйте построить такой график теоретически. Сначала, считайте маятник математическим с длиной, равной расстоянию до центра масс системы, затем – физическим. Сравните результаты двух теорий и эксперимента.
22. ***Компьютерная реализация принципа Гюйгенса.*** Принцип Гюйгенса состоит в том, что волновой фронт, испущенный поверхностью, можно найти как огибающую множества сферических (на плоскости круговых) фронтов, испущенных каждой точкой излучающей поверхности. Реализуйте компьютерную иллюстрацию принципа Гюйгенса для эллипса. Попробуйте

выполнить компьютерную мультипликацию распространяющегося фронта и обсудите его форму. Попробуйте в качестве излучающей поверхности взять другие гладкие кривые

Часть III.
ФИЗИКИ ТОЖЕ ЛЮБЯТ МАТЕМАТИКУ

…Любит ли он поросят или нет?
И КАК он их любит?…
Пятачок. Милн. «Винни Пух и все, все, все»

В этой части книги мы продолжим разговор о том, как физики используют математику. По-видимому, физики принадлежат к наиболее активным «потребителям» математики. Даже сложился определенный тип «математического» физика – физик-теоретик. Здесь уместно упомянуть, что нашему выдающемуся соотечественнику Льву Давидовичу Ландау именно прекрасное знание теории функций комплексного переменного позволило понять, что некоторая «особенность» задачи о движении бесстолкновительной плазмы требует аккуратного математического обращения, что привело к открытию нового физического явления, известного теперь как «затухание Ландау». Подобных примеров не мало. Очень часто физики переоткрывают для себя тот или иной математический аппарат, когда в нем возникает потребность. Так, например, было с матричным формализмом в квантовой механике. Очень многие математические идеи Анри Пуанкаре нашли воплощение в современной теории колебаний и т.д.

Замечательно, что иногда математика оказывается для физиков не просто инструментом, а открывает совершенно новые подходы. В этом случае возникает совсем новый способ построения теории, иной, чем в традиционной физике. Действительно, в физике изучают определенные типы явлений: механику, электричество, теплоту и т.д. Но вполне может случиться, что совершенно разные физические процессы приводятся к одинаковым уравнениям. Тогда возникает замечательная ситуация, когда Вы, используя уже готовые наработки, готовые знания и готовую интуицию, с ходу можете решать (иногда очень эффектно для коллег) совсем другие задачи из другой области физики. Говорят, этим приемом весьма успешно пользовался Лев Давидович Ландау. Соответствующий принцип очень лаконично и ясно сформулировал Ричард Фейнман: «Одинаковые уравнения – одинаковые решения». А наш соотечественник, Леонид Исаакович Мандельштам говорил об «интернациональном» языке теории колебаний, основанном на определенном виде дифференциальных уравнений. Сейчас таких «интернациональных» теорий стало много к ним относится, в частности, теория бифуркаций, теория динамических систем, теория динамического хаоса и т.д.

Наше же обсуждение в этой части книги будет касаться, в основном, математического анализа. С одной стороны, анализ очень важен для физиков. А вот с другой… Вопрос о том, **КАК** следует преподавать математический анализ в школе (да, наверное, не только в школе) остается дискуссионным. Чтобы не поссориться на этой почве с математиками, эта часть книги названа «физики тоже любят математику». И это действительно так, хотя, наверное, разные из них любят математику по-разному и в разной степени. Есть среди физиков такие, для кого математика не только инструмент, но и хобби. Но вот для всякого начинающего исследователя еще в школе встает вопрос, как этим инструментом овладеть. К сожалению, преобладает очевидная на первый взгляд точка зрения, состоящая в том, что пусть прежде всего математики на своих уроках изложат строгим образом математическую теорию. А тогда, на уроках физики, ученики без проблем смогут ее применять. К сожалению, такая методика в школе обычно терпит фиаско. Применению математического анализа надо учить (или учиться самому) отдельно. Это создает некоторые «внутришкольные» проблемы и коллизии. По нашему мнению, нужны или специальные уроки, или даже специальный курс, нацеленный именно на использование математического анализа в физике. Во многом он должен состоять из решения задач, так как, решая задачи, учишься применять математические знания и навыки. Такой курс был реализован, в свое время, в лицее прикладных наук и предлагается теперь Вашему вниманию.

1. Числовые последовательности

В математике числовые последовательности – достаточно популярный раздел. Самые известные из них – это арифметическая и геометрическая прогрессии. Для математиков числовые последовательности и их теория – первый шаг к математическому анализу. В физике же теория последовательностей используется не так часто (по сравнению, скажем, с тригонометрией). В то же время многие физические процессы допускают ***дискретизацию***, а значит, приводят к числовым последовательностям. Например, брошенное под углом к горизонту тело описывает непрерывную кривую, но вспышки стробоскопа заменяют ее на набор дискретных точек. Или еще один пример. Пусть Вы смотрите на термометр один раз в день, в 8 утра, выходя в школу. В этом случае вместо непрерывной функции зависимости температуры от времени, Вы имеете деле с дискретной переменной. Ей можно присвоить номер, отвечающий очередному дню. В современной науке очень развился аппарат для работы с дискретными переменными, однако, мы обсудим эти возможности чуть позже, а сейчас предлагаем потренироваться в решении физических задач с применением числовых последовательностей.

Задачи

1. Придумайте способ, как «экспериментально» получить последовательность, составленную из нулей и единиц. Реализуйте его.
2. Предложите «экспериментальный» способ построения числовой последовательности, составленной только из цифр 0, 1, 2, 3.
3. На рисунке 65 показан стробоскопический снимок тела, скользящего по наклонной плоскости. Каковы свойства последовательностей x_n и v_n? Вспышки стробоскопа происходят через равные интервалы времени.

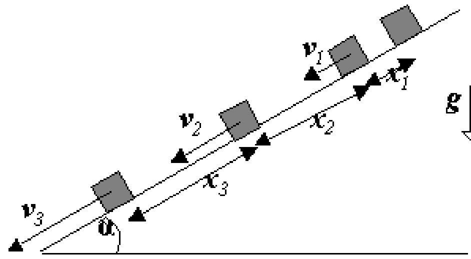


Рис. 65

4. Космический корабль приближается к планете. Луч радара, следящего за кораблем, равномерно вращается с частотой ω. Корабль приближается к планете так, что проекция его скорости на направление луча радара постоянна и равна v. Радар измеряет расстояние до корабля через промежутки времени, равные периоду его развертки $T=2\pi/\omega$. Каковы свойства последовательности значений расстояний, зафиксированной радаром?
5. Интенсивность света, проходящего через некоторое вещество, изменяется по закону Бугера: $I=I_0e^{-\alpha x}$, где x – координата, отсчитываемая от границы воздуха и вещества. Имеется цепочка из пластин толщины d, изготовленных из такого вещества, пронизываемых световым лучом (рис.66). Установите свойства последовательности I_0, I_1, I_2, I_3, ….Пройдет ли свет через такую бесконечную цепочку?

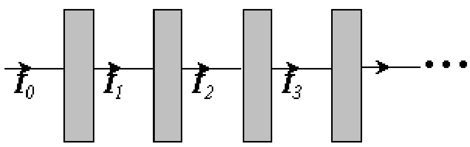


Рис. 66

6. Имеется цепочка из пластин, толщина которых изменяется по закону геометрической прогрессии с показателем β. Установите свойства последовательности I_0, I_1, I_2, I_3,…. Пройдет ли свет через бесконечную цепочку таких пластин? Если да, то чему будет равна его интенсивность? Толщина

первой пластины d.

7. Шарик, брошенный без начальной скорости с высоты h на горизонтальную поверхность, подпрыгивает на высоту $h/2$. На каком расстоянии от точки броска шарик перестанет прыгать и начнет двигаться по поверхности, если его бросить с поверхности со скоростью 1 м/с под углом 45 градусов к горизонту (рис.67)?

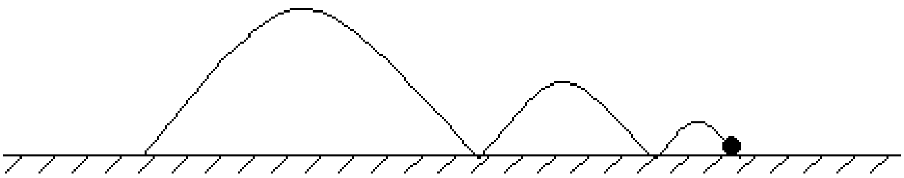


Рис. 67

8. Бактерии имеют такой закон развития: каждая живет 1 час и каждые полчаса порождает одну новую (всего две за свою жизнь). Каково будет потомство одной бактерии через 6 часов после ее рождения?

9. Маленький шарик шарнирно укреплен на легком стержне длины l (рис.68.). Шарику сообщают некоторую скорость v_0 так, что он начинает вращаться вокруг точки O. В процессе его движения фиксируется последовательность значений горизонтальной проекции скорости шарика в нижней точке его траектории. Постройте график этой последовательности и опишите ее свойства. Имеет ли она предел? Учесть небольшое сопротивление воздуха.

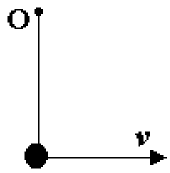


Рис. 68

10. Автомобиль стартует из точки A и начинает движение по кольцевому шоссе протяженностью 200 м. График зависимости пути, пройденного автомобилем от времени, показан на рисунке 69. Проходя мимо точек A и B, автомобиль дает короткий гудок. Определите последовательность моментов времени, в которые раздается гудок. Расстояние AB равно 100м, а BA - 200м. Дайте графическое решение задачи.

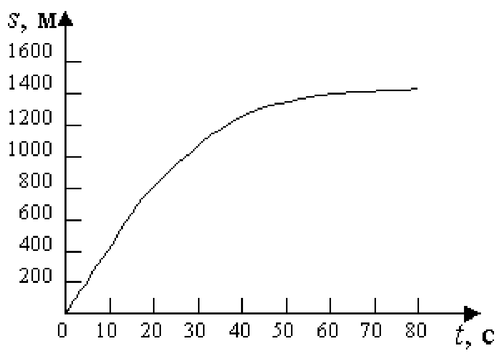


Рис. 69

11. Представьте себе клубок шерстяных ниток. Мысленно рассеките его плоскостью. Стартовав со свободного конца нити, пройдите мысленно вдоль нее, обозначая через x_n, y_n координаты каждого очередного пересечения нити с плоскостью. Имеют ли последовательности x_n и y_n пределы в «физическом» смысле?
12. За три часа концентрация некоторого лекарства в крови пациента падает в два раза. Инъекции лекарства производят один раз в шесть часов. Получите разностное уравнение, описывающее динамику концентрации лекарства в крови непосредственно перед каждой очередной инъекцией. Составьте таблицу, иллюстрирующую динамику концентрации лекарства. Нарисуйте примерный график изменения концентрации лекарства в крови от времени. Во сколько раз отличаются концентрации перед инъекцией и сразу после нее через достаточно большой интервал времени?
13. Решите предыдущую задачу в случае, если инъекции производят один раз в сутки.
14. Как установил Ньютон, температура остывающего тела изменяется по закону $T=T_c+(T_0-T_c)e^{-\alpha t}$, где T_0 - начальная температура тела, T_c – температура окружающей среды, α – некоторый коэффициент. Через равные интервалы времени телу сообщают количество тепла Q. Теплоемкость тела C. Получите разностное уравнение, описывающее изменение от раза к разу температуры тела сразу после получения очередной «порции» тепловой энергии. Каков характер соответствующей последовательности значений температуры: убывающий или нарастающий? От чего это зависит? Найдите предельное значение этой последовательности. Как будет изменяться температура тела в «реальном» времени? Нарисуйте примерный график. В каком интервале будет колебаться температура тела через достаточно большое время? Зависит ли асимптотический закон изменения температуры от ее начального значения?
15. Покажите, что разностное уравнение $x_{n+1}=x_n/2+a/2x_n$ можно использовать для вычисления квадратного корня из числа a. (Такой способ применяли еще в древнем Вавилоне). Найдите первые десять членов последовательности x_n, порождаемой этим уравнением, в случае a=2. Величину x_0 положите равной единице. Сколько итераций надо сделать, чтобы получить значение $\sqrt{2}$ с точностью 1%? От чего зависит число итераций, которые необходимо совершить, чтобы получить заранее заданную точность?

16. Ученик вышел из дома в Лицей прикладных наук, но на полдороге он передумал и решил пойти в кино. Пройдя полдороги в кино, он передумал, и снова пошел в Лицей и т.д. Каким будет асимптотический характер движения ученика? Все объекты расположены на открытой местности (рис.70). Выполните сначала простое геометрическое построение и найдите точки поворота ученика, а затем дайте строгое решение задачи. Зависит ли закон асимптотического движения ученика от начальной точки на плоскости? Чем он определяется?

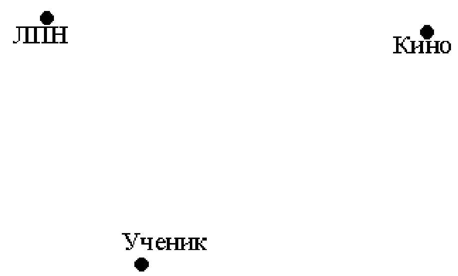


Рис. 70

17. Решите предыдущую задачу в случае, когда ученик циркулирует между ЛПН, кино и катком. Определите период установившегося движения ученика, если эти три объекта находятся в вершинах прямоугольного треугольника с катетами 500м и 1000м. Скорость движения ученика - 5 км/ч.

2. Производная в математике и физике

Как мы уже видели, физики широко используют алгебру и геометрию. Вы, конечно, слышали и о неевклидовой геометрии, которая применяется в теорию относительности. Одно время очень популярна была топология и т.д. Но, как мы говорили во введении к этой части, есть раздел школьной (или почти школьной) математики, который стал своего рода камнем преткновения. Речь идет о математическом анализе, и в первую очередь, о понятии производной.

Для математиков определение производный - тонкий процесс, содержащий некоторые математически изящные и для времени, когда они были разработаны, неожиданные построения.

Физики мыслят производную как ***скорость*** изменения некоторой величины в ходе какого-то процесса. Им достаточно этого интуитивного представления и ***правил,*** по которым эту скорость вычисляют.

Но тут, как говорится, нашла коса на камень. Очень многих математиков такой подход раздражает. Они считают его неверным и ошибочным. И полагают, что сначала нужно научиться всем тонкостям, связанным с бесконечно малыми, пределами и т.д. Только после такого обучения физик имеет право пользоваться инструментом анализа.

Доходило до смешного – хорошо помню, как нам в физико-математической школе учителя не советовали на вступительных экзаменах в вуз говорить, что мы знакомы с производной, так как нас обязательно «провалят» на соответствующих математических тонкостях. А не знать производную, мы тогда вполне имели право – она не входила в школьные программы. Уже в преподавательской практике приходилось сталкиваться с ситуацией, когда математики обижались, если физики вводили какое-либо математическое понятие раньше, чем они. (Этот относится не только, к производной и интегралу, но и, например, к вектору.) Гораздо более серьезно и печально в этом плане выглядит нешуточная дискуссия вокруг замечательной книжки Якова Борисовича Зельдовича «Высшая математика для начинающих».

Наверное, истина, как всегда посередине. Надо познакомиться и со строгими доказательствами, и с «ремеслом» применения производной. Надо также сказать, что с появлением компьютеров, оперирующих с фантастической точностью, понятие «бесконечно малое число» стало гораздо менее абстрактным, чем в XVII-XIX веках. И, видимо, жизнь подтверждает, что использовать производную, не зная всех тонкостей доказательств, можно. Ведь огромное количество людей прекрасно умеет пользоваться телевизором, не имея представления о том, как он, собственно, работает. Тоже самое, наверное, в еще большей степени относится к компьютеру. Точно также, скрипач-виртуоз вполне может быть не знаком со всеми таинствами и этапами изготовления скрипки.

Заметим также, что и сами математические подходы к методологии анализа могут быть разными. Например, один из его создателей - Ньютон шел путем, гораздо более близким физикам. (Хотя себя считал математиком). Об этом можно прочесть в книжке Владимира Игоревича Арнольда «Гюйгенс и и Барроу. Ньютон и Гук.»

Поговорим теперь немного о восприятии физиком производной. Конечно, проще всего мыслить образами из механики. На каждом автомобиле стоит прибор, который показывает его скорость. Это спидометр. Как он работает? Он не может дать истинное мгновенное значение скорости. Он измеряет среднюю скорость на небольшом, но все же конечном отрезке пути. Поэтому для физика скорость есть $V=\Delta x/\Delta t$, где Δx – очень маленький отрезок пути, а Δt – очень маленький отрезок времени, за которое этот путь пройден. Конечно, эти наши с Вами «очень маленькие» не вызывают восторга у математиков. Но физик может мыслить немного по-другому. Для него малость означает малость ***по сравнению с другими характерными масштабами задачи*** (см. первую часть книжки). Наконец, компьютеры, как мы уже говорили, делают понятие малых величин очень практичными. Хотя, будем справедливыми, и с физической точки зрения здесь могут возникнуть нюансы. Действительно, реакция разных людей разная, и один водитель может заметить мелкое дрожание стрелки спидометра, а другой нет. А каковы инерционные свойства стрелки? Не испортят ли они всю картину? И все же понятие скорости ***привычно,*** а как это не удивительно, привычка делает вещи более понятными. А из возникших тонкостей можно опять найти выход с помощью рассуждения о разных масштабах. Например, период собственных колебаний стрелки должен быть много больше характерного времени измерения Δt , и тогда ее собственные колебания не будут заметны.

Но перейдем к «деловой» части нашей программы. Далее мы будем полагать, что читатель владеет «ремеслом», то есть немного умеет дифференцировать и интегрировать.

Применение производной в физике весьма многообразно. Прежде всего, некоторые величины просто являются производными других, и тогда анализ дает способ их вычисления. Так, скорость, - это производная от пройденного пути. Поэтому, если путь зависит от времени как $S=at^2/2$, то скорость будет зависеть от времени так: $V=dS/dt=at$. Удивительно, но в школьном курсе не вполне внятно говориться о том, что ускорение есть первая производная скорости, и, соответственно, вторая производная пути по времени. По этой причине отнюдь не сразу школьники, изучающие физику, узнают, что второй закон Ньютона – это, собственно, ***дифференциальное уравнение.*** Причина та же – дифференциальное уравнение появляется в лучшем случае на вершине школьной математики, а физику надо как-то изучать.

Предлагаем Вашему вниманию несколько задач, использующих понятие производной. Обратите внимание, что при решении некоторых из них, Вам понадобиться знать, как с помощью производной построить касательную к графику функции. Тех, кто не помнит соответствующей формулы, отсылаем к справочнику.

Задачи

1. Пружина характеризуется зависимостью потенциальной энергии от удлинения $U(x)=kx^2/2+ax^4$ ($k>0$, $a>0$). Определите зависимость силы упругости пружины от ее удлинения. При каком условии выполняется закон Гука?
2. Покажите, что формула для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух масс $U(R)=-GMm/R$ соответствует закону всемирного тяготения Ньютона.
3. По тонкому кольцу радиуса R равномерно распределен электрический заряд Q (рис.71). Найдите зависимость электрического поля от координаты x,

отсчитываемой вдоль оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости. Сделайте это двумя способами: с помощью закона Кулона и вычислив производную от зависимости потенциала от координаты x.

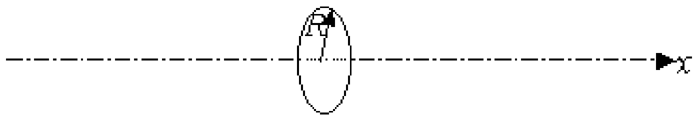


Рис. 71

4. Найдите закон изменения электрического поля вдоль оси диполя с дипольным моментом p, вычислив производную от зависимости потенциала от координаты. Диполем называются два заряда противоположных знаков q и $-q$, расположенные на малом расстоянии l, причем дипольный момент $p=ql$.
5. Найдите приближенно относительное изменение периода колебаний математического маятника при увеличении длины нити со 100 см до 101 см? С каким ускорением надо двигать в вертикальном направлении точку прикрепления маятника, чтобы скомпенсировать найденное изменение периода колебаний?
6. Оцените максимальную скорость автомобиля, график движения которого показан на рисунке 72.

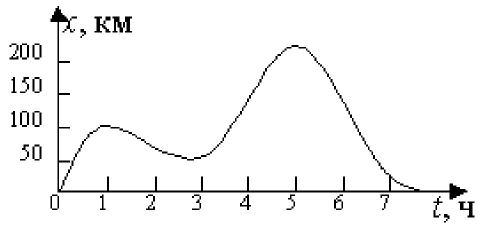


Рис. 72

7. Торпедный катер выходит на цель, двигаясь по параболе $y = -Cx^2$, где $C = 0{,}01$ м$^{-1}$. В какой точке следует выпустить торпеду, чтобы поразить неподвижную цель, имеющую координаты $x = 100$ м, y=300 м. Сколько решений имеет задача? Дайте физическую интерпретацию каждому из них.
8. На рисунке 73 показана зависимость силы упругости пружины от удлинения пружины. К пружине подвешен груз массой m=100 г. Определите период малых колебаний груза около положения равновесия.

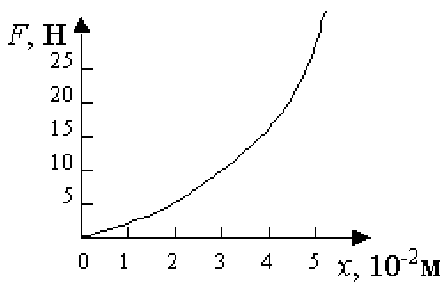


Рис. 73

9. Материальная точка массой m движется под действием силы $f(x)$, зависящей от координаты x вблизи минимума потенциальной энергии x_0. Покажите, что период малых колебаний точки дается выражением $T=2\pi[m/f''(x_0)]^{1/2}$.

   Указание: при малых Δx справедливо приближенное равенство $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+(f''(x_0)/2)\Delta x^2$.

10. Найдите период возможных малых колебаний материальной точки массой m, движущейся вдоль оси x, если зависимость потенциальной энергии от координаты x дается следующими формулами:

    а) $U(x) = U_0 \sin(2\pi x/l)$;

    б) $U(x) = 4a[(b/x)^6-(b/x)^{12}]$;

    в) $U(x) = U_0 [(x/l)^3-3x/l)]$.

3. Задачи на максимум и минимум

Очень полезны в физике производные при решении задач на максимум и минимум. Это связано с тем, что максимуму и минимуму гладкой функции отвечает нулевое значение производной. Решим, например, следующую задачу.

Задача. На горизонтальной поверхности с коэффициентом трения μ лежит брусок массы m. К бруску приложена сила F, направленная под углом α к горизонту. При каком минимальном значении величины силы можно сдвинуть брусок с места? Под каким углом к горизонту для этого следует приложить усилие?

Описанная система, вместе с действующими силами, показана на рисунке 74.

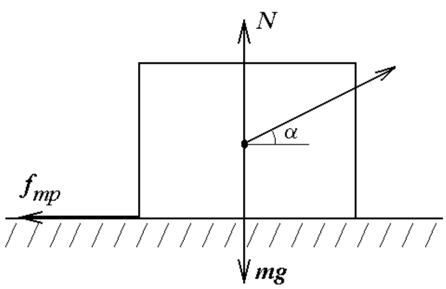


Рис. 74

Эта задача допускает решение и традиционными методами, но оно весьма нетривиально. А понятие производной делает решение почти автоматическим. Действительно, проектируя силы на вертикальное направление, получим

$$N + F\sin\alpha = mg .$$

Условие начала скольжения дается равенством проекцией сил на горизонтальное направление

$$F\cos\alpha = f_{тр},$$

при известном дополнительном равенстве $f_{тр} = \mu N$. Из этих трех уравнений без труда находим

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

По условию, нужно найти угол α, отвечающий минимальной силе. Как видно из последнего соотношения, этому значению силы отвечает максимум выражения

$$\cos\alpha + \mu\sin\alpha.$$

Дифференцируя его и приравнивая производную нулю, находим условие экстремума

$$-\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0.$$

Отсюда $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu$, или $\alpha = \mathrm{arctg}\,\mu$. Полученное соотношение и дает ответ к задаче. Интересно, что при малом коэффициенте трения $\alpha \approx \mu$. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что найденный экстремальный угол действительно отвечает именно минимуму силы.

Задачи

1. Маленький кубик скользит без трения по поверхности со скоростью v_0, приближаясь к изгибу, профиль которого дается функцией $y=x/[(x/a)^2+1]$. Определите максимальную и минимальную скорости, которые кубик будет иметь в процессе движения. Ось x горизонтальна, ускорение свободного падения g.
2. Один моль идеального газа расширяется так, что его давление зависит от объема газа по закону $P=a-bV^2$ ($a>0$, $b>0$). Определите максимальную температуру газа.
3. Закон взаимодействия двух молекул в некоторых случаях может быть описан потенциалом Ленарда-Джонса $U(r)=4a[(b/r)^6-(b/r)^{12}]$. Изобразите график зависимости потенциала от расстояния между молекулами. Определите положение минимума потенциала. Используя этот результат, оцените расстояние между молекулами вещества и величину энергии, необходимой, чтобы оторвать молекулы друг от друга. (Параметры a и b считайте известными.) Найдите зависимость силы межмолекулярного взаимодействия от расстояния и изобразите соответствующий график.
4. По кольцу радиуса R равномерно распределен электрический заряд Q (рис.75). Вдоль оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости, может двигаться точечный заряд $-q$. При каком положении заряда на него действует максимальная сила?

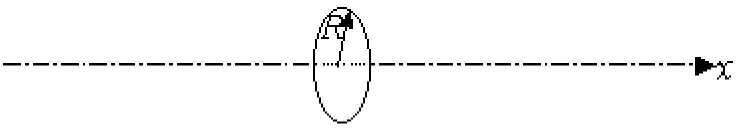


Рис. 75

5. В толстостенный стакан массы M наливают жидкость с плотностью ρ (рис.76). Постройте качественно график зависимости высоты центра масс системы от высоты h налитой в стакан воды. При каком значении уровня воды центр масс системы занимает наинизшее положение? Внутренняя часть стакана имеет форму цилиндра с площадью сечения S и высоты H. В пустом стакане центр масс располагается на расстоянии h_0 от дна.

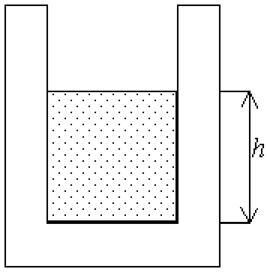


Рис. 76

6. Частица с массой m налетает на атомное ядро с массой M. После упругого удара ядро приобрело кинетическую энергию, составляющую n-ую часть кинетической энергии налетавшей частицы. Постройте график зависимости величины n от отношения масс частиц $k=m/M$. При каком отношении масс доля переданной энергии максимальна?
7. Известно, что для некоторых модификаций и соединений углерода валентные связи атомов углерода направлены к вершинам тетраэдра, причем угол между ними составляет 109°28'. Покажите, что если в круге радиуса R вырезать сектор так, чтобы получить развертку конуса, объем которого максимален, то угол при вершине такого конуса равен 109°28'.
8. Известно, что прочность балки прямоугольного сечения определяется выражением bh^2 , где b – ширина балки, h – ее высота. Как из цилиндрического бревна радиуса R сделать балку наибольшей прочности?
9. На какой высоте следует поместить лампу над центром круглого стола, чтобы на его краях получить максимальную освещенность?

4. Экспонента

Экспонента – эта одна из замечательнейших функций в физике, понимание которой, однако, наступает только после изучения математического анализа. Эта функция, $y=Ce^{ax}$, является решением самого простого дифференциального уравнения

$$dy/dx = ay.$$

Здесь e=2,718281828… - универсальная математическая константа, a – некоторая постоянная, C –постоянная величина, определяемая из граничных условий (постоянная интегрирования). Таким образом, производная пропорциональна самой функции. Вспомнив смысл производной, как скорости, легко приходим к физическому варианту понимания экспоненты. Экспонента описывает процессы, когда скорость изменения величины равна самой величине. Отсюда вытекает вывод о «взрывном» характере соответствующих процессов. Действительно, с ростом величины растет и скорость ее изменения. Значит, величина растет все быстрее и быстрее. Математики часто любят вводить число e иначе, через некоторый предел. Это надо помнить, но все же физический смысл экспоненты через свойство пропорциональности функции и производной легче запоминается и полезнее в приложениях.

Экспонента очень распространена. Например, по экспоненциальному закону может на начальной стадии нарастать численность колонии бактерий, пока не вступят в действие другие факторы, например, ограничение запасов пищи. Экспонента всегда присутствует в явлениях, связанных с радиоактивным распадом.

Чтобы лучше понять, как экспонента появляется в реальной жизни, решим простую задачу.

Задача. Канат намотан на цилиндрическую тумбу так, что он делает N полных оборотов. Корабль натягивает трос с силой F. Какую силу должен приложить матрос, чтобы удержать корабль? Коэффициент трения троса о тумбу равен μ.

Рассмотрим маленький кусок каната, обвивающий тумбу (рис.77).

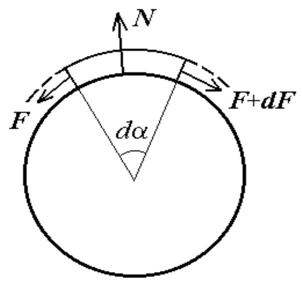


Рис. 77

Пусть угол, по которым этот кусок виден из центра тумбы, есть $d\alpha$. И пусть сила натяжения на длине этого куска (за счет трения этого фрагмента каната) возрастает на величину dF. Ясно, что

$$dF = \mu N,$$

где N – сила давления нашего фрагмента на тумбу. Осталось найти связь F и N. Проецируя силы на радиальное направление, получаем

$$F\sin\frac{d\alpha}{2}+\left(F+dF\right)\sin\frac{d\alpha}{2}=N\,.$$

Помня, что dF и $d\alpha$ малы, а $\sin d\alpha \approx d\alpha$, получаем $Fd\alpha = N$. Теперь легко находим, что

$$dF=\mu N=\mu F d\alpha\,,$$

или

$$\frac{dF}{d\alpha}=\mu F\,.$$

Итак, мы получили уравнение экспоненты. Отсюда автоматически следует

$$F=F_0 e^{\mu\alpha}\,.$$

Давайте сделаем численные оценки. Пусть μ = 0.2, а трос четыре раза обвивает тумбу, т.е. $\alpha = 8\pi$. Тогда

$$F=e^{1,6\pi}F_0\,.$$

Итак, усилия матроса этот прием увеличивает в $e^{1,6\pi} \approx$ 152,24**…** раз! А если коэффициент трения составляет 0,4, то выигрыш в силе уже 23227,59… раз. Таковы свойства «взрывного» роста экспоненты.

Задачи

1. Радиоактивный элемент распадается по закону $N(t)=N_0e^{-t/T}$, где T – среднее время жизни. Определите период полураспада элемента. Для радия среднее время жизни T = 2400 лет. Определите период полураспада радия.
2. За время t=800 лет распалось Δm = 10 г радия. Сколько его было в начальный момент времени?
3. Содержания радия на Земле в среднем составляет 10^{-12} (по атомам). Каково было содержания радия десять тысяч лет назад? пять миллиардов лет назад?
4. Покажите, что производная от давления по вертикальной координате в изотермической атмосфере пропорциональна давлению. Получите закон изменения давления с высотой. Оцените, во сколько раз ниже атмосферного давление на вершине самой высокой горы?
5. Груз массы M подвешен на тросе. Как должна меняться толщина троса, чтобы в любом его сечении нагрузка на единицу площади сечения была одинаковой? Плотность материала троса ρ, площадь сечения в точке прикрепления груза S.

5. Интеграл

Чтобы поупражняться в применении интеграла, решим следующую задачу.

Задача. Вычислите силу гравитационного взаимодействия материальной точки массы m и однородного тонкого цилиндра длины L и массы M. Цилиндр и точка лежат на одной линии так, что кратчайшее расстояние между ними равно R (рис.78).

Рис. 78

Разобьем наш стержень на маленькие (для физика – конечные!) кусочки длины dx (рис.79).

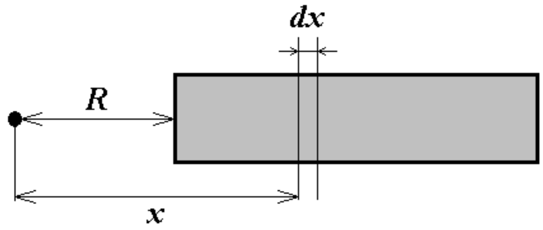


Рис. 79

Масса этого кусочка $dm = \frac{M}{L} dx$. Сила его гравитационного притяжения к материальной точке есть

$$dF = \frac{\gamma m dm}{x^2}.$$

(Начало координат совпадает с материальной точкой m.) Обратите внимание, что $dx << x$, поэтому в знаменателе просто пишем x^2, игнорируя распределенный характер кусочка dx.

Суммарная сила и есть интеграл, т.е. сумма вкладов от всех остальных кусочков dx:

$$F = \int_R^{L+R} dF.$$

Мы пишем определенный интеграл, потому что стержень занимает конечный отрезок от R до L+R. Поэтому мы аккуратно поставили интервалы интегрирования.

Итак,

$$F = \gamma m \int_R^{R+L} \frac{dm}{x^2} = \frac{\gamma m M}{L} \int_R^{R+L} \frac{dx}{x^2} = -\frac{\gamma m M}{L} \cdot \frac{1}{x}\bigg|_R^{R+L} = -\frac{\gamma m M}{L}\left(\frac{1}{R+L} - \frac{1}{R}\right).$$

Мы учли, что $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$. Окончательно

$$F = \frac{\gamma m M}{R(R+L)}.$$

Это и есть ответ к задаче. Посмотрим, что будет, если стержень отодвинуть очень далеко. Тогда R>>L и получаем

$$F = \frac{\gamma m M}{R^2}.$$

Тела в этом случае взаимодействуют как материальные точки, как и должно быть.

Итак, при использовании интегрирования работает идея «разбивания на маленькие кусочки». В приведенном примере это относилось к простейшей, одномерной задаче. Но идею разбивания на маленькие кусочки для подготовки к интегрированию можно распространить и на двумерные системы. При этом часто можно использовать свойство симметрии системы. Обратимся, например, к такой задаче.

Задача. Диск массы m и радиуса R вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Чему равна его кинетическая энергия?

Воспользуемся тем, что скорости элементов, равноудаленных от центра диска, одинаковы. Поэтому его удобно разбить на тонкие кольца толщины dr, расположенные на расстоянии r от центра (рис.80).

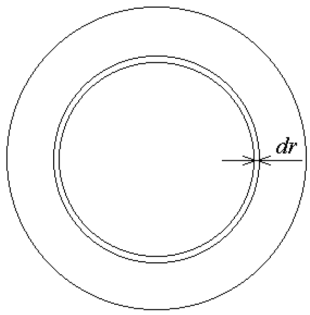


Рис. 80

Масса такого кольца есть $dm = \dfrac{M}{\pi R^2} dS$, где dS – площадь кольца. В силу малости dr легко получаем

$$dS = 2\pi r \cdot dr .$$

Для этого мы просто длину кольца умножили на его ширину. (По-прежнему «работает» малость dr!)

Тогда кинетическая энергия нашего элемента есть

$$dW = \frac{\upsilon^2}{2} dm = \frac{\omega^2 r^2}{2} \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr = \frac{\omega^2 M}{R^2} \cdot r^3 dr .$$

В силу малости малость dr можно считать, что ***все*** точки кольца лежат на расстоянии r от центра. Полную энергию находим интегрированием

$$W = \int dW = \int_0^R \frac{\omega^2 M}{R^2} r^3 dr = \frac{\omega^2 M}{R^2} \cdot \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \frac{\omega^2 R^2 M}{4} .$$

Это и есть ответ к задаче. Если записать кинетическую энергию W, как $W = \dfrac{I\omega^2}{2}$, то можно видеть, что мы фактически показали, что момент инерции диска $I = \dfrac{MR^2}{2}$.

Задачи

1. Материальная точка движется так, что ее ускорение меняется по линейному закону $a=ct$. Получите закон зависимости координаты тела от времени в следующих случаях:

   а) в момент времени t=0 скорость и координата равны нулю;

   б) в момент времени t=0 скорость равна v_0 , а координата x_0;

   в) в момент времени $t=t_0$ скорость равна v_0, а в момент времени t=0 координата равна x_0.

2. Докажите, что объем шара равен $4\pi R^3/3$.
3. Имеется тонкий диск радиуса R, по которому равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ (рис.81). Определите зависимость потенциала и напряженности электрического поля от расстояния до диска вдоль оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости. Исследуйте случаи, когда это расстояние мало и велико по сравнению с радиусом диска.

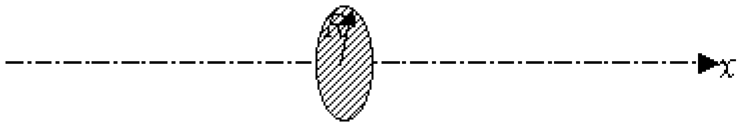


Рис. 81

4. Определите положение центра масс тонкой пластинки, имеющей форму половины круга радиуса R.
5. Определите положение центра масс однородной полусферы радиуса R.
6. Найдите закон изменения потенциала внутри равномерно заряженного шара радиуса R. Потенциал на бесконечности примите равным нулю. Чему равен потенциал в центре шара?
7. Имеется два плоскопараллельных заряженных слоя толщины h, имеющих одну общую грань. Объемные плотности заряды равны соответственно ρ_1 и ρ_2. Найдите закон распределения потенциала внутри слоев и постройте соответствующие графики.
8. Найдите энергию электрического поля, заключенного между двумя концентрическими сферами с радиусами R и r, несущими заряды Q и $-Q$ соответственно. Плотность энергии электромагнитного поля $W=\varepsilon_0 E^2/2$.
9. Идеальный газ массы m изотермически расширился от объема V_1 до объема V_2. Вычислите работу газа. Температура газа T, молярная масса μ.
10. Воду массой M=100 г нагрели от температуры t_1 =10°C до t_2=90°C. Определите изменение энтропии воды (для тех, кто знаком с понятием энтропии).

11. Получите выражение для энтропии идеального одноатомного газа.
12. Однородный диск радиуса R и массы M вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Определите кинетическую энергию диска.
13. Для атмосферы, удовлетворяющей закону распределения Больцмана, определите высоту центра масс некоторого выделенного столба воздуха. Чему равна эта высота для Земли, если считать среднюю температуру равной 10°C?
14. При вращении цилиндрического стакана с водой вокруг оси с угловой скоростью ω поверхность воды принимает форму параболоида вращения $y=\omega^2 r^2/2g$, где y – абсцисса точки поверхности, r – ее расстояние от оси. В стакан радиуса R налили объем воды V. При какой угловой скорости вращения стакана обнажится дно? Стенки стакана достаточно высоки.

6. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения – это уравнения, в которые входят производные. Например, к ним относится соотношения, выражающие второй закон Ньютона, ибо скорость – это производная координаты от времени, а ускорение – производная скорости от времени. Иными словами, ускорение – вторая производная координаты по времени. Для материальной точки, приравняв ускорение, умноженное на массу, силе и получим второй закон Ньютона.

При решении дифференциальных уравнений у физиков есть маленький секрет. Они позволяют обращаться с величиной dx просто как с маленькой, но конечной величиной. У математиков это тоже «почти» можно, но dx тогда называют дифференциалом, и его мыслят все же бесконечно малым. Хорошо помню, как в школе не мог совершенно понять, как решать дифференциальные уравнения. Так мне строго «наказали», что величина dy/dx есть ***неразделимый символ***. И только, когда старший товарищ подсказал, что с dy и dx можно обращаться довольно произвольно, вдруг все стало на свои места. Наверное, это не совсем верно с точки зрения математики, но, как говорится, из песни слов не выкинешь.

А теперь давайте немного поупражняемся и решим следующую задачу, в рамках которой нам придется учитывать, что второй закон Ньютона – это дифференциальное уравнение.

Задача. Модели корабля массой m сообщили начальную скорость v_0. Считая, что сила сопротивления пропорциональна скорости с известным коэффициентом k, определите зависимость скорости и координаты модели от времени. Какое расстояние пройдет модель до полной остановки?

Запишем второй закон Ньютона для нашей задачи:

$$ma = f_{mp} = -k\upsilon,$$

где f_{mp} – сила сопротивления, пропорциональная скорости тела υ. Знак минус отвечает торможению тела. Воспользуемся тем, что ускорение есть производная скорости. Тогда

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon .$$

Обратимся с dt как с алгебраической величиной:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{k}{m}dt .$$

Интегрируем обе части

$$\int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{k}{m}\int dt,$$

$$m\upsilon + C = -\frac{k}{m}t .$$

Откуда

$$\upsilon = Ce^{-kt/m} .$$

Найдем постоянную C. При $t = 0$ должно быть $\upsilon = \upsilon_0$. Поэтому

$$\upsilon = \upsilon_0 e^{-kt/m} .$$

Но задача еще не решена. Вспоминаем, что скорость – это производная координаты

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 e^{-kt/m} .$$

Вновь обращаемся с dt, как с алгебраической величиной

$$dx = \upsilon_0 e^{-kt/m} dt .$$

Интегрируем полученное соотношение

$$\int dx = \upsilon_0 \int e^{-kt/m} dt,$$

$$x = -\frac{m\upsilon_0}{k}e^{-kt/m} + C .$$

Поскольку в начальный момент времени $t = 0$ координата $x = x_0$, то

$$C = x_0 + \frac{m\upsilon_0}{k} .$$

Окончательно

$$x = \frac{m\upsilon_0}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right) + x_0 .$$

Интересно, что при $t \to \infty$ получаем $x = x_0 + \dfrac{m\upsilon_0}{k}$. Таким образом, до полной остановки тело пройдет конечное расстояние $\dfrac{m\upsilon_0}{k}$.

Итак, в процедуре решения на «физическом» уровне дифференциальных уравнений (по крайней мере простых) нет ничего столь уж хитрого. В то же время, из-за их слабого «представительства» в школьном курсе больше всего страдает теория колебаний, которая основана именно на ***общности дифференциальных уравнений*** колебательных процессов различной природы**.** Поэтому теория колебаний то появляется в механике, конечно, без дифференциальных уравнений, то исчезает из этого раздела. В лучшем случае дело ограничиваются несколько загадочными разговорами об аналогии между маятником и колебательным контуром. Но без дифференциальных уравнений эту аналогию на самом деле понять достаточно глубоко очень трудно.

Задачи

1. Лодка тормозится под действием силы, пропорциональной ее скорости. За 4 секунды скорость упала с 2 м/с до 1 м/с. Какое расстояние прошла при этом лодка?
2. Решите задачу из текста, в предположении, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости модели.
3. В дне цилиндрического сосуда радиуса R имеется небольшое отверстие радиуса r. Начальный уровень воды в сосуде H. Установите закон, по которому изменяется во времени высота воды в сосуде. Через какое время вытечет вся вода? Сделайте численную оценку для случая R=5см, r=2мм, H=20см. По какому закону изменяется скорость вытекающей струи? Считайте, что скорость вытекания определяется формулой Торичелли $v = \sqrt{2gh}$, где h – уровень воды в сосуде.
4. Вода вытекает через маленькое отверстие площади S из сосуда, имеющего форму перевернутого конуса высоты H с углом при вершине α. Первоначально сосуд полностью заполнен водой. Через какое время из сосуда вытечет вся вода?
5. Маленький шарик массы m и радиуса r отпущен без начальной скорости в среде с коэффициентом вязкости η и плотностью ρ. Ускорение силы тяжести g. Определите закон движения шарика, считая, что сопротивление среды описывается формулой Стокса. Силой Архимеда пренебречь. Определите предельную скорость падения шарика. Оцените время, за которое шарик достигнет этой скорости и расстояние, которое он при этом пройдет. Выполните численные оценки для глицерина и стального шарика радиуса r=1мм. Какой высоты надо взять сосуд, чтобы можно было наблюдать падение шарика с постоянной скоростью?

6. С поверхности планеты массы M и радиуса R вертикально вверх брошено тело с начальной скоростью v_0. Определите зависимость высоты подъема от времени. Покажите, что при небольшом значении начальной скорости получается обычная формула для движения в поле силы тяжести. Уточните понятие «небольшое значение скорости». Атмосфера отсутствует.
7. Резиновый шнур имеет длину в недеформированном состоянии l и характеризуется коэффициентом жесткости k. На какую длину растянется шнур под действием собственного веса, если его подвесить за один из концов? Масса шнура M.
8. Используя первое начало термодинамики, получите дифференциальное уравнение для давления идеального газа в адиабатическом процессе. Теплоемкость газа при постоянном объеме равна C_V . Решив это уравнение, получите зависимость давления от объема, характерную для адиабатического процесса.
9. Давление P в изотермической атмосфере как функция высоты описывается дифференциальным уравнением $dP/dx=-(\mu g/RT)P$. Известно, что давление на высоте H равно P_H . Чему равно давление на поверхности планеты?
10. Температура воздуха T изменяется с высотой h по линейному закону $T=T_0+ah$. По какому закону изменяется давление воздуха? Воздух считайте идеальным газом с молярной массой μ.
11. В межзвездном пространстве летит тело. Определите закон изменения температуры тела во времени. Начальная температура тела T_0, теплоемкость тела C, площадь поверхности S. Считайте, что остывание тела происходит за счет теплового излучения.
12. Остывание тела за счет теплопроводности описывается дифференциальным уравнением $T'=-\alpha(T-T_c)$. Здесь T – температура тела, T_c – температура окружающей среды. Получите закон изменения температуры со временем и постройте соответствующие графики. Какие две различные физические ситуации описывает полученное соотношение?
13. Конденсатор емкости C замкнут на резистор с сопротивлением R. В начальный момент времени ток в цепи равен I_0 . Определите закон изменения заряда на обкладках конденсатора. За какое время величина тока упадет в 2 раза?
14. Конденсатор емкости C замкнут на элемент, вольтамперная характеристика которого дается следующим соотношением: $I=a(e^{bU}-1)$, где a и b - положительные коэффициенты. Начальное напряжение на конденсаторе равно

U_0. Определите закон изменения напряжения на конденсаторе от времени.

15. Маятник в виде массивного шарика на невесомом стержне отклонили на малый угол α_0 от неустойчивого положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Определите закон изменения угла α в случае, когда он остается малым. Сформулируйте ограничение на время движения, при выполнении которого угол остается малым. Оцените это время для α_0=1° и l=1м.

7. Математический кругозор

Наряду с твердым знанием и умением пользоваться целым рядом разделов математики, очень важно иметь и определенный математический кругозор. То есть иметь, хотя бы на очень популярном уровне, представление о достижениях многих поколений математиков. Мне кажется, что в физико-математическом лицее обязательно должен быть курс на эту тему, который вел бы либо математик, умеющий понятно объяснять, опираясь на интуицию (которая, по мнению выдающегося математика Владимира Игоревича Арнольда, играет не последнюю роль в математике), либо физик, обладающий склонностью к математическому мышлению и увлеченный математикой. Читателям же для расширения математического кругозора рекомендуем Интернет и библиотеки. Итак, используя возможности сети Интернет и библиотек, попробуйте ответить на следующие вопросы.

Задачи

1. Что такое лист Мебиуса?
2. Что такое бутылка Клейна?
3. Как выполнить трехмерную развертку четырехмерного куба?.
4. Так доказали или нет Великую теорему Ферма?
5. Что такое теоремы Геделя?
6. Что такое проблемы Гильберта?
7. Какой математический смысл в терминах «косы»?
8. Какой смысл в математике придают слову «сборка»?

Часть IV

НЕЛИНЕЙНЫЙ МИНИМУМ

…Что там у Вас в физике новенького?

Из кинофильма

Эта часть книжки несколько отличается от остальных. Ее цель состоит в том, чтобы ввести школьника в круг и вопросов, которые актуальны ***сейчас***. Ведь школьная физика – это очень интересно, но, как правило, это «дела давно минувших дней». Приобщиться к современной физике очень непросто. Обычно это возможно на старших курсах вуза, когда освоен определенный объем знаний и навыков. Однако в конце XX века появилась наука, новые идеи которой доступны и школьнику. Более, того широкое внедрение компьютеров и, что особенно важно, их постоянное совершенствование позволяют даже школьникам, ну если не получать новые результаты, то по крайней мере чувствовать себя сопричастными к современным исследованиям. Содержание этого раздела представляет своего рода минимум знаний и навыков, который позволяет ориентироваться в мире нелинейной динамики.

1. Нелинейный мир

Успехи механики в XVII-XIX веках были столь впечатляющими, что стало казаться возможным представить себе всю Вселенную как гигантскую ***динамическую систему***. Эту позицию четко сформулировал Лаплас: «Состояние системы природы в настоящем есть, очевидно, следствие того, каким оно было в предыдущий момент, и, если мы представим себе разум, который в данное мгновение постиг все связи между объектами Вселенной, то он сможет установить соответствующие положения, движения и общие воздействия этик объектов в любое время в прошлом или будущем» (1776 г.). Эта доктрина, получившая название лапласовского детерминизма, выразила в концентрированном виде идеал научного познания, каким он виделся в те времена. Понадобился длительный путь развития науки и научного мировоззрения (термодинамика и статистическая физика, квантовая механика), чтобы убедиться в несостоятельности такого представления о мире. И все же лапласовский детерминизм совсем недавно казался незыблемым для простых моделей типа осциллятора.

Конец XX века привнес ощущение научной революции, сравнимой с возникновением собственно научного метода в эпоху Галилея. В центре внимания исследователей вновь оказались самые фундаментальные свойства окружающего мира: эволюция систем во времени и геометрия природы. Однако характер интереса к этим понятиям изменился. Картина мира стала переосмысляться, наполняясь новыми образами (катастрофы, бифуркации, хаос, фракталы). Весьма характерны в этом смысле слова нобелевского лауреата И. Пригожина: «Если в физике и химии где-то и существует простота, то заведомо не в микроскопических моделях. Она скорее кроется в идеализированных макроскопических представлениях, например, о простых движениях типа гармонического осциллятора». Модели в виде осцилляторов, различных одномерных отображений и другие оказались во многом центральными объектами интенсивно развивающихся синтетических научных дисциплин, к которым относятся теория колебаний, теория бифуркаций, теория динамических систем, теория динамического хаоса.

В 1963 г. американский метеоролог Э. Лоренц опубликовал статью «Детерминированное непериодическое течение», в которой обсуждались результаты численного исследования достаточной простой системы дифференциальных уравнений, моделирующих динамику жидкости при конвекции в подогреваемом снизу слое. Лоренц подверг полученные результаты тщательному и глубокому обсуждению, акцентируя внимание на связь между сложным поведением системы и присущей ей неустойчивостью. Позднее это свойство пропагандировалось им как «эффект бабочки» (butterfly effect): в приложении к метеорологии взмах крыльев бабочки может через достаточно время повлечь существенное изменение погоды. Таким образом, бывают случаи, когда невозможно предсказать поведение даже простой системы.

К настоящему времени соответствующие представления развиты настолько глубоко, что можно говорить о теории динамического хаоса – науке о «непредсказуемом» поведении простых динамических систем. Цель этой части – дать представление о порядке и хаосе, или, иными словами, ввести в основные понятия ***нелинейной динамики.*** Нелинейная динамика описывает эволюцию во времени нелинейных систем (например, математического маятника, когда угол его отклонения уже нельзя считать малым, как это обычно предполагается в школьном курсе физики.) Поэтому на первый взгляд кажется, что в основе нелинейной динамики и учения о динамическом хаосе должна лежать глубокая теория дифференциальных уравнений. К счастью, оказывается, что это не совсем так. Существуют другие математические объекты – разностные уравнения или отображения, которые демонстрируют все основные феномены нелинейной динамики. Отображения гораздо проще для исследования, да и компьютерного моделирования, так как на их изучения тратиться радикально меньше компьютерного времени. Отображения лишь недавно стали входить в «инструментарий» исследователей, и поэтому они не представлены в школьном курсе физики. Как мы убедимся сейчас, на самом деле отображения очень естественно могут появляться при решении даже простых физических задач.

2. Разностные уравнения или отображения на примере школьной задачи

Практически в любом сборнике олимпиадных задач по физике можно найти задачу о бесконечной цепочке резисторов. Она формулируется так: чему равно сопротивление цепочки резисторов, которая состоит из одинаковых звеньев (рис.82)?

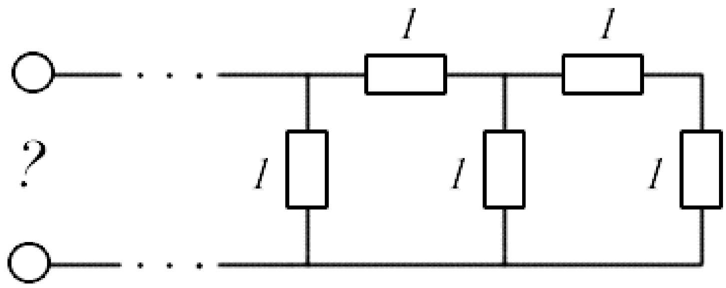


Рис. 82

Сопротивления всех резисторов одинаковы, и мы будем полагать их равными единице. Традиционное решение этой задачи основано на соображении о том, что добавление еще одного звена к бесконечной системе не изменяет ее, т.е. данная схема эквивалентна показанной на рисунке 83.

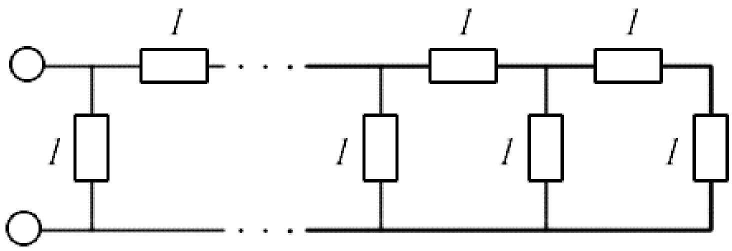


Рис. 83

В результате приходим к схеме, показанной на рисунке 84.

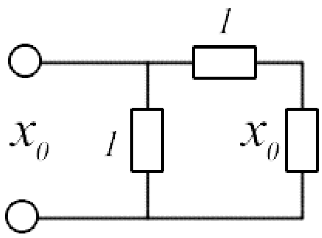


Рис. 84

Здесь x_0 – искомое сопротивление. Нетрудно получить, что

$$x_0 = \frac{(x_0+1)\cdot 1}{(x_0+1)+1}, \text{ или } \quad x_0 = \frac{x_0+1}{x_0+2}.$$

Тогда

$$x_0^2 + x_0 - 1 = 0.$$

Отсюда следует ответ к задаче:

$$x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618034.$$

Описанный метод в журнале «Квант» в статье, посвященной методам вычисления сопротивлений различных схем, назвали методом Иона Тихого – по имени известного героя Станислава Лема, сумевшего разместить постояльца в полностью заполненной гостинице с бесконечным числом номеров.

Такое решение, хотя и весьма изящно, но оставляет некоторое чувство неудовлетворения, поскольку остаются открытыми некоторые вопросы. В первую очередь: какое отношение к реальности имеет эта задача и это решение? Ведь реальная цепочка будет содержать конечное число звеньев. Можно сформулировать вопрос так: если мы можем измерять сопротивление с заданной точностью, то сколько звеньев должна содержать цепочка, чтобы считаться бесконечной? Кроме того, если вдуматься, то заранее не очевидно, что добавление новых звеньев в реальной конечной цепочке будет приближать результат измерения сопротивления к значению x_0. Вдруг малые погрешности, которые вносят реальные резисторы, будут вносить нарастающий вклад? Ведь цепочка бесконечная!

Оказывается, на все эти вопросы можно ответить, привлекая изящный математический аппарат ***разностных уравнений или отображений***, являющийся частью современной теории ***динамических систем.*** Итак, обратимся к нашей схеме, отсчитаем конечное число звеньев n и n+1 от правого конца (рис.85).

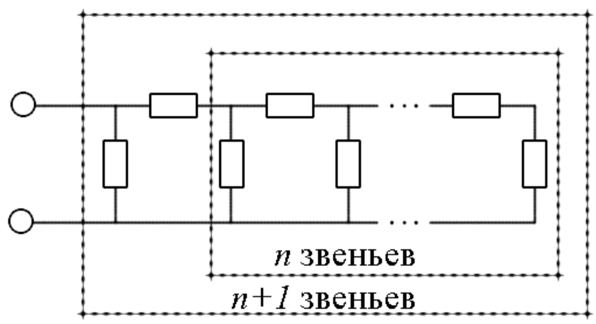


Рис. 85

Из рисунка хорошо видно, что схема эквивалентна такой:

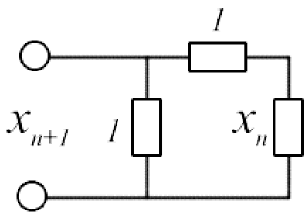


Рис. 86

Отсюда легко получаем

$$x_{N+1} = \frac{x_N + 1}{x_N + 2}.$$

Это и есть простейший пример ***отображения***. В общем, виде одномерное отображение задается соотношением

$$x_{N+1} = f(x_N).$$

(В нашем случае $f(x) = \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$.) Мы назвали отображение ***одномерным***, поскольку в него входит одна переменна – x.

Дискретное отображение $x_{n+1}=f(x_n)$ является, по-видимому, простейшим примером ***динамической системы.*** Смысл этого термина раскрывается просто: отображение $x_{n+1}=f(x_n)$ по заданному начальному значению x_1 позволяет определить все последующие значения переменной x_2, x_3 и т.д. Действительно:

$$x_2=f(x_1),$$

$$x_3=f(x_2),$$

$$\ldots$$

Свойства отображений удобно иллюстрировать на так называемой итерационной диаграмме. Для ее построения надо, прежде всего, изобразить график функции $f(x)$. В нашем случае это перевернутая гипербола, смещенная влево на две единицы и на одну единицу вверх (рис.87). (Заметим, что поскольку сопротивления положительны, то смысл имеет лишь кусок графика в первой четверти.)

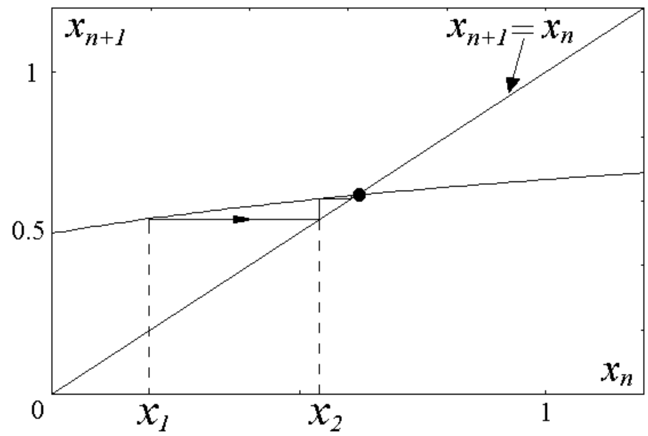


Рис. 87

На графике удобно изобразить еще и биссектрису. Задавшись теперь начальным значением x_1, можно найти $x_2=f(x_1)$ по графику. Затем это значение переносится на биссектрису и процедура повторяется. Возникает своеобразная лесенка, иллюстрирующая ход итераций.

Как видно из графика, наше отображение имеет, как говорят, ***неподвижную точку***, т.е. такую, для которой $x_0=f(x_0)$. Она как раз соответствует решению задачи по методу Иона Тихого.

По рисунку получается, что последовательные итерации сходятся к неподвижной точке. Как это доказать более строго? Каков характер сходимости (быстрый, медленный)? На эти вопросы можно ответить в общей формулировке.

Для этого исследуем поведение системы в случае, когда значений переменной близки к предельному значению x_0. Положим поэтому $x_{N+1} = x_0 + \tilde{x}_{N+1}$ и $x_N = x_0 + \tilde{x}_N$, где знаком «тильда» сверху обозначены малые добавки к x_0. Тогда из $x_{N+1} = f(x_N)$ имеем

$$x_0 + \tilde{x}_{N+1} = f(x_0 + \tilde{x}_N) \approx f(x_0) + f'(x_0)\tilde{x}_N \quad \Rightarrow$$
$$\tilde{x}_{N+1} = f'(x_0)\tilde{x}_N$$

Таким образом, если имеется некоторая маленькая добавка к значению x_0, то после первой итерации она умножается на постоянное число $C = f'(x_0)$, после второй – на C^2, после третьей – на C^3 и т.д. Это означает, что переменная x приближается к неподвижной точке по закону геометрической прогрессии с показателем C. Отметим, что наше рассмотрение на итерационной диаграмме соответствует тому, что мы аппроксимируем $f(x)$ касательной (вспомните геометрический смысл производной!) в окрестности x_0 Соответствующая итерационная диаграмма и дает геометрическую прогрессию (рис.88).

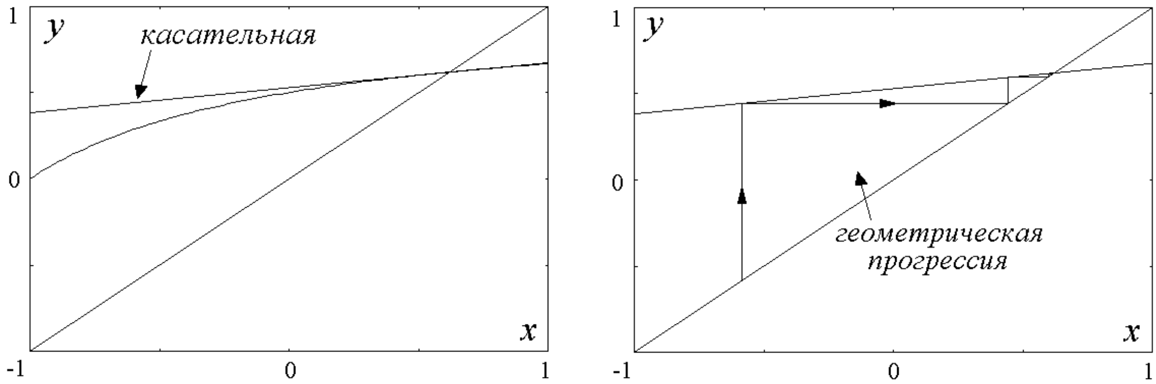


Рис. 88

Теперь по свойству геометрической прогрессии автоматически получаем, что если

- $|f'(x_0)| < 1$, то итерации сходятся;
- $|f'(x_0)| > 1$, то итерации расходятся.

Это, как говорят, позволяет судить об ***устойчивости*** неподвижной точки.

В первом случае неподвижную точку называют устойчивой, а во втором – неустойчивой.

Сходящийся процесс мы уже изобразили на итерационной диаграмме, а расходящийся может выглядеть так (рис.89):

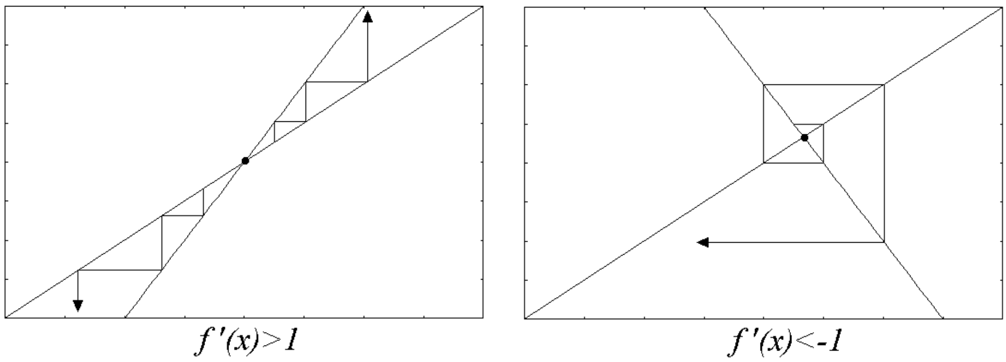


Рис. 89

Вернемся от отображения общего вида к нашему случаю. Тогда

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2+x} \quad f'(x_0) = \frac{1}{(2+x_0)^2} = \frac{4}{\left(\sqrt{5}+3\right)^2} \approx 0{,}145900 .$$

Итак, как мы видим C=0.145900. Это означает, что итерации сходятся, причем поскольку $f'(x_0)$ мало, значит, сходятся очень быстро. В этом убеждаемся, итерируя соотношение $x_{N+1} = \frac{x_N + 1}{x_N + 2}$. Результат представлен в следующей таблице.

Число звеньев в цепочке, N	x_N	%
1	$x_1=1$	
2	$x_2=2/3\approx0{,}666667$	7,86
3	$x_3=5/8\approx0{,}625000$	1,12
4	$x_4=13/21\approx0{,}619048$	0,16
5	$x_5=34/55\approx0{,}618182$	0,02
…	…	…
∞	$x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618034$	0

Мы убеждаемся, что увеличение числа звеньев действительно приводит в неподвижную точку. Из таблицы видно, что, оказывается, цепочку всего из трех звеньев можно считать бесконечной с точностью до 1%, а из пяти – уже с точностью всего 0,02%!

Устойчивость неподвижной точки этого отображения снимает и еще один физический вопрос: о том, не «испортят» ли возможные дефекты в цепочке результат нашего решения. Продумайте сами, почему это так и изобразите соответствующие итерационные диаграммы.

Нам осталось сказать, что в силу большой важности величины $f'(x_0)$ она носит специальное название – мультипликатор, и обозначается обычно $\mu=f'(x_0)$.

Задачи

1. Шарик падает с некоторой высоты на горизонтальную поверхность. При каждом ударе о поверхность шарик теряет долю скорости ε. Напишите отображение, задающие зависимость высоты (n+1)-го подскока от n-го. Какую последовательность образуют высоты подскоков?
2. Что будет, если в задаче о цепочке сопротивлений начальное (крайнее правое) сопротивление равно 100, а остальные – по-прежнему равны 1?
3. В задаче из раздела «числовые последовательности» говорилось, что отображение $x_{n+1}= (x_n+a/x_n)/2$ можно использовать для вычисления квадратного корня из числа a. Найдите первые пять членов последовательности x_n, порождаемой этим отображением при a=2. Величину x_1 положите равной единице. Проиллюстрируйте решение задачи с помощью итерационной диаграммы. Покажите, что неподвижная точка этого отображения устойчива. Можно ли использовать отображение $x_{n+1}= a/ x_n$? Почему?
4. Найдите неподвижные точки и исследуйте их устойчивость для отображения $x_{n+1}= ax_n-bx_n^3$.
5. Как будет выглядеть итерационная диаграмма для отображения, дающего арифметическую прогрессию?
6. Напишите программу, которая строит итерационные диаграммы одномерного отображения для заданной функции $f(x)$ и заданного начального значения x_1.
7. Изготовьте цепочку сопротивлений и проверьте в эксперименте данные таблицы из текста. При использованной Вами точности приборов и изготовления резисторов сколько элементов в цепочке будет достаточным?

3. Логистическое отображение и бифуркационные деревья

Могут ли отображения демонстрировать поведение более сложное, чем в рассмотренной задаче о бесконечной цепочке сопротивлений? Ответ на этот вопрос положительный. Оказывается, что для более сложной динамики достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела квадратичный экстремум.

Простейшей функцией с квадратичным экстремумом является парабола, а соответствующее отображение называют логистическим

$$x_{n+1} = rx_n\left(1 - x_n\right).$$

Изобразим график функции $x_{n+1} = rx_n\left(1 - x_n\right)$, т.е. итерационную диаграмму нашего отображения (рис.90).

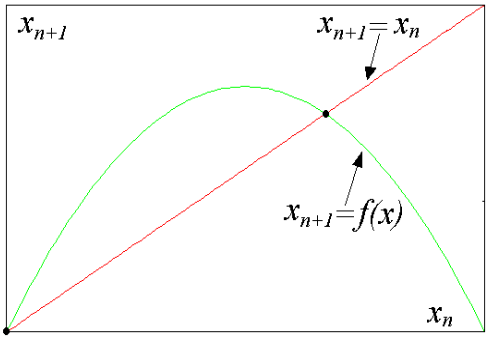


Рис. 90

Хорошо видно, что отображение может иметь уже две неподвижных точки. Одна из них имеет ординату x_0=0. Исследуем устойчивость этой точки, для чего вычислим соответствующую производную (мультипликатор):

$$f'(x) = \left(r - 2rx\right)\Big|_{x=0} = r\ .$$

При r >1 эта точка неустойчива. Изобразим динамику в этом случае на итерационной диаграмме (рис.91).

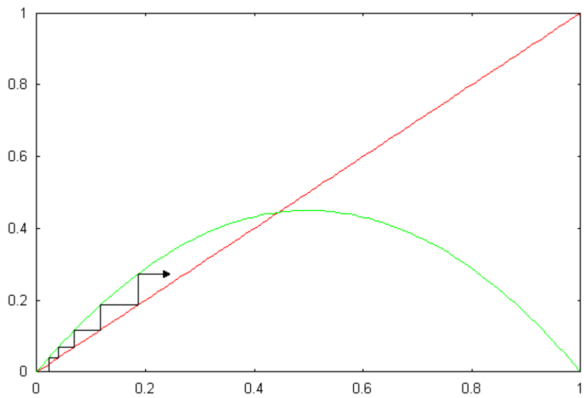


Рис. 91

Можно заметить, что итерации вблизи начала координат идут по закону геометрической прогрессии. Этот факт послужил основой для серьезного изучения логистического отображения в популяционной биологии. Действительно, известно, что при достаточном количестве пищи (параметр r) популяция (например, рыба в пруду) размножается по закону геометрической прогрессии. Для простоты будем считать, что x_n дает количество рыбы в пруду в n-ый год. Таким образом, начальное значение x_1 - это число рыб, выпущенных в пруд в первый год, x_2 – количество рыбы на следующий год и т.д.

Спрашивается, что будет с этой рыбой по истечении достаточно большого времени? Сначала количество рыбы будет нарастать по геометрической прогрессии. Ясно, однако, что если рыбы слишком много, то популяция перестает расти. Поэтому график *f(x)* и имеет падающий участок.

Интуиция говорит о том, что количество рыбы в пруду сначала нарастает, а затем стабилизируется. (Математики сказали бы, что последовательность x_n имеет предел.) Наш график как будто подтверждает в этом интуицию (рис.92).

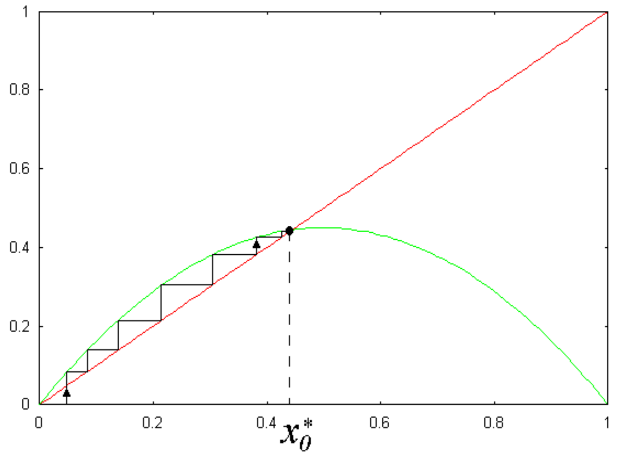


Рис. 92

Как можно видеть, есть еще одна неподвижная точка x_0^*, к которой сходятся итерации.

$$x_0 = rx_0(1 - x_0),\ x_0^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

Это и будет установившееся количество рыбы в водоеме.

Однако, устойчива ли эта неподвижная точка? Найдем ее мультипликатор

$$\mu = f'(x_0^*) = r - 2rx_0^* = r - 2r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r.$$

Если r немного больше 1, то да; точка устойчива, но при r >3 получаем, что мультипликатор $\mu = \left|f'(x_0^*)\right| > 1$, а значит «стабильное» состояние популяции оказывается неустойчивым (рис.93)!

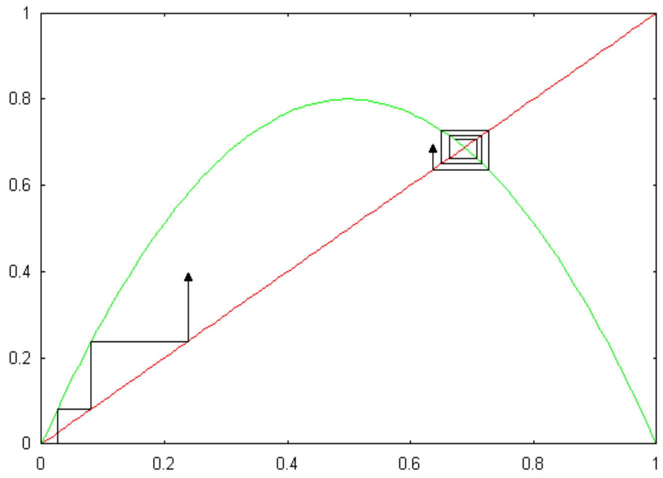


Рис. 93

А какой же режим рождается при r=3? Используя итерационную диаграмму, можно предположить, что это будет ситуация типа показанной на рисунке 94.

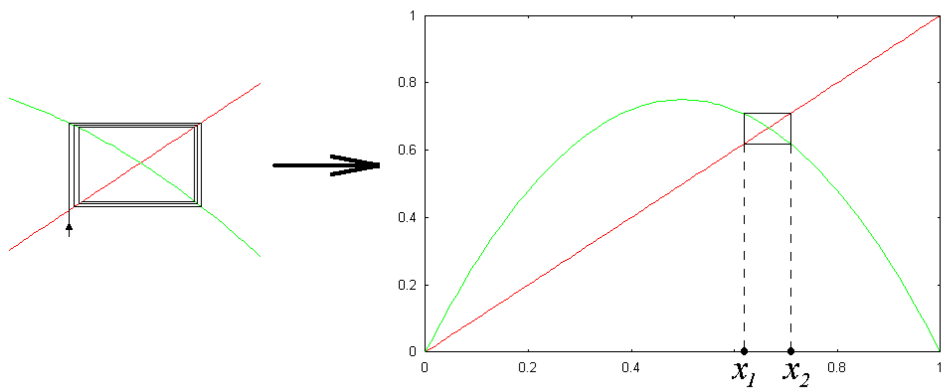


Рис.94

Говорят, что в этом случае отображение имеет ***2-цикл***. Можно легко получить явное выражение для его элементов из следующего условия:

$$\begin{cases} f(x_2)=x_1 \\ f(x_1)=x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=rx_2(1-x_2) \\ x_2=rx_1(1-x_1) \end{cases}.$$

Сложим друг с другом оба уравнения системы, а затем вычтем из первого уравнения второе. В итоге получаем:

$$\begin{cases} x_1-x_2=(x_1-x_2)[r(x_1+x_2)-r] \\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)\left(\dfrac{r-1}{r}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1+r}{r} \\ x_1x_2=\dfrac{1+r}{r^2} \end{cases}.$$

Используя теорему Виета, можем записать уравнение для поиска элементов 2-цикла:

$$x^2-\frac{1+r}{r}x+\frac{1+r}{r^2}=0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем:

$$x_{1,2} = \frac{1 + r \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$

Из этой формулы, кстати, хорошо видно, что 2-цикл рождается при r=3, а при r<3 его существование невозможно, так как под корнем стоит отрицательное число.

Итак, если пищи слишком мало, то первые поколения нарастают очень быстро по численности, а затем стационарная численность рыбы не устанавливается, а она начинает меняться периодически от года к году: x_1, x_2, x_1, x_2 и т.д. Это очень важный результат с точки зрения динамики популяции.

Ну, а если еще больше увеличить r? Аналитически можно показать, что существует значение параметра, при котором станет неустойчивым и 2-цикл. Действительно, для элемента 2-цикла можно написать соотношение

$$x_1 = f(x_2) = f(f(x_1)).$$

Таким образом, элемент 2-цикла есть неподвижная точка двукратно проитерированного отображения. Этот факт позволяет легко определить устойчивость цикла, поскольку тогда можно применить полученный ранее способ анализа устойчивости неподвижной точки. При этом только надо использовать правило дифференцирования сложной функции. Итак

$$\mu = [f(f(x_1))]' = f'(f(x_1))f'(x_1) = f'(x_2)f'(x_1).$$

В нашем случае $f'(x) = r - 2rx$ и легко получаем

$$\mu = r^2(1-2x_1)(1-2x_2) = r^2[1 - 2(x_1 + x_2) + 4x_1x_2] =$$
$$= r^2\left[1 - 2\frac{1+r}{r} + 4\frac{1+r}{r^2}\right] = -r^2 + 2r + 4$$

Таким образом, при $r=1+\sqrt{6}=3{,}449$ мультипликатор обращается в –1, и 2-цикл становится неустойчивым! Какой режим при этом рождается? Точка x_1 «удвоится» – расщепится на две. То же самое произойдет с точкой x_2. Значит, у нового движения будет четыре элемента, т.е. реализуется ***4-цикл***.

Что будет, если еще больше увеличить параметр, можно установить уже только при помощи компьютерного моделирования.

Для этого, прежде всего, естественно использовать программу построения итерационных диаграмм. Итак, приступаем к компьютерному моделированию. Сначала убедимся, что в интервале 3<r<3,449 действительно рождается 2-цикл. Затем чуть-чуть увеличим параметр r>3,449 и убедимся, что рождается 4-цикл. Далее будем брать другие значения параметра и смотреть, что получится.

На рисунке 95 показаны некоторые типы итерационных диаграмм, которые возможны для отображения, заданного квадратичной параболой. Мы здесь использовали другое представление параболического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$, которое более удобно в ряде отношений.

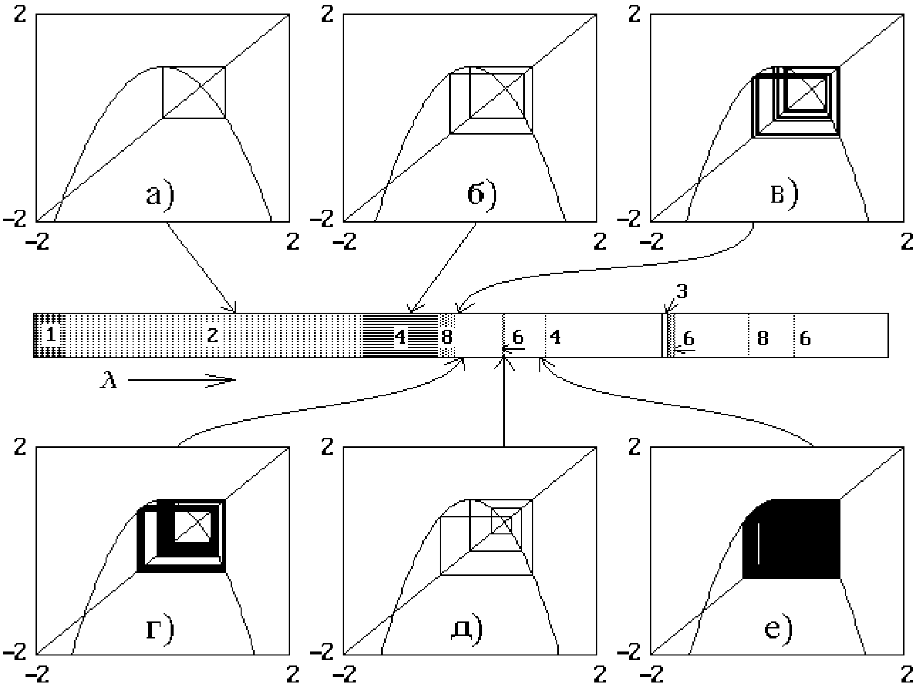


Рис. 95

Мы видим, что 4-цикл превращается в циклы периода 8, 16 и т.д., затем возникает сложный, неповторяющийся процесс. Эти режимы называют динамическим хаосом. Что это означает на языке динамики популяции? Пусть мы запустили рыбу в пруд и подкармливаем рыбу, чтобы иметь большой улов. Если пищи немного, то численность популяции станет стабильной. Если пищи увеличить, то возможны колебания численности рыбы год от года – в одном году рыбы много, а на будущий год - мало. Если же количество пищи перейдет через некоторое пороговое значение, то численность рыбы начнет хаотически, непредсказуемо меняться год от года! Весьма неожиданный и нетривиальный результат. Ясно, что сама возможность такого поведения в предельно простых и ***предсказуемых*** системах является важным открытием. О его нетривиальности говорит тот факт, что возможность такого динамического хаоса была осознана только в конце двадцатого века!

Вернемся к нашим диаграммам. Можно видеть, что с ростом параметра возникают сложные циклы периодов 6, 4, 3 и т.д., чередующиеся с областями непериодического поведения.

Еще одна эффектная иллюстрация сложного поведения квадратичного отображения – ***бифуркационное дерево*** (или, как иногда говорят, дерево Фейгенбаума по имени американского физика, установившего многие интересные законы динамики отображений). Бифуркационное дерево дает зависимость установившихся значений переменной x от параметра. Наше аналитическое рассмотрение позволяет нарисовать начальный участок дерева (рис. 96).

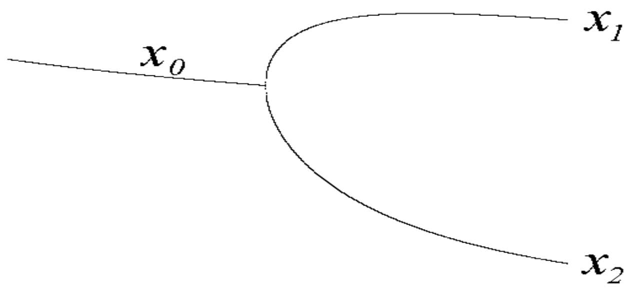


Рис. 96

Это неустойчивая неподвижная точка и рождающийся 2-цикл. В последнем случае переменная последовательно посещает две ветви дерева. Такую ситуацию называют ***бифуркацией удвоения периода***. Полное дерево (для всех значений параметра) можно построить с помощью компьютера. Для этого надо задать некоторое начальное значение переменной и параметра. Затем выполнить несколько сот итераций отображения, чтобы исключить переходные процессы и реализовать установившийся режим, и вывести некоторое количество точек на экран дисплея. Затем процедуру повторить для слегка измененного количества параметра. (Рекомендуем в качестве нового начального значения переменной использовать то, что получилось на предыдущем шаге процедуры.) И далее все повторить для всего диапазона управляющего параметра. В результате получится картинка, показанная на рисунке 97.

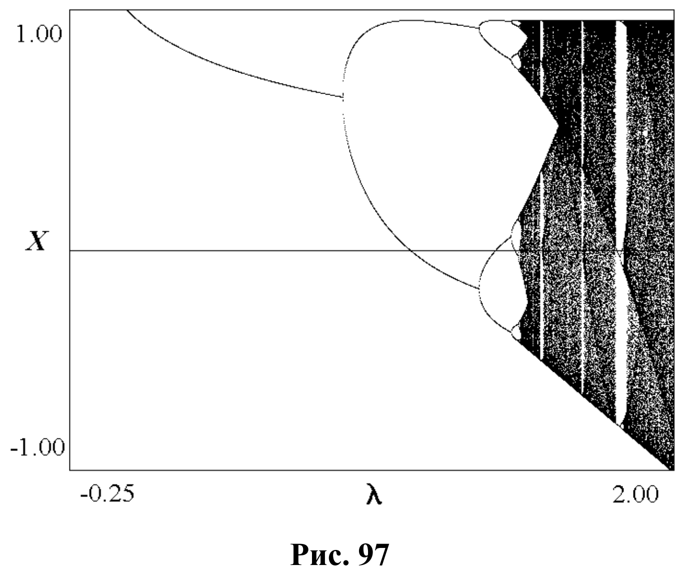


Рис. 97

На бифуркационном дереве хорошо видны моменты удвоений периода, когда дерево расщепляется на две ветви, хаотический режим и различные окна периодических режимов в хаосе.

Одно из удивительных открытий американского физика Фейгенбаума состояло в том, что аналогичное поведение демонстрирует не только это, но и другие отображения, моделирующие математические, физические, химические и даже социальные системы. Он сумел обосновать этот факт теоретически. Еще более удивительно, что и системы в виде дифференциальных уравнений тоже демонстрируют такое поведение – переход к хаосу через удвоения периода. При этом законы такого перехода, открытые Фейгенбаумом, универсальны – т.е. одинаковы для всех систем. Можно сказать, что возникновение хаоса в результате каскада удвоений периода – это одна из фундаментальных закономерностей природы.

Задачи

1. Покажите, что отображение $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ заменой переменных приводится к виду $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$. Проведите исследование неподвижных точек и 2-циклов логистического отображения в форме $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ аналогично тому, как это сделано в тексте.
2. Найдите значения параметра λ, отвечающее сверхустойчивому 2-циклу, характеризующимся равным нулю мультипликатором.
3. Реализуйте программу, которая строит бифуркационное дерево для логистического отображения. Укажите значения параметров, когда реализуются 2-цикл, 3-цикл, 4-циклы (их несколько!), 5-циклы.
4. Постройте итерационные диаграммы логистического отображения, дающие характерные циклы и хаотические режимы.
5. Постройте бифуркационное дерево для отображения $x_{n+1}=\lambda\cos x_n$. Сравните с деревом логистического отображения.
6. Создайте программу, которая при щелчке мышью на бифуркационном дереве в отдельном окне строит итерационную диаграмму.

4. Прыгающий шарик

Рассмотренные нами примеры были одномерными отображениями, поскольку характеризовались единственной переменной x. Теперь мы рассмотрим пример системы, которая характеризуется уже двумя измерениями.

При решении задачи 1 из раздела «Дискретные отображения на примере школьной задачи» вы познакомились еще с одной системой, демонстрирующей, наряду с логистическим отображением, геометрическую прогрессию. Вы показали, что высота подскока шарика, отпущенного над горизонтальной поверхностью, дается соотношением

$$h_{n+1} = (1-\varepsilon)^2 h_n,$$

где ε - доля теряемой при ударе скорости. Правда, это убывающая прогрессия, так как $(1-\varepsilon)<1$. А нельзя ли превратить эту систему в систему со сложной динамикой? Для этого надо как-то поддержать колебания шарика. Простейшее решение состоит в том, чтобы заставить поверхность вибрировать, например, по гармоническому закону (рис.98):

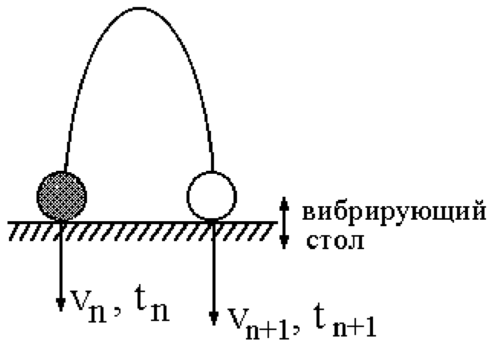


Рис. 98

Тогда «стол» может двигаться навстречу шарику, сообщать энергию и поддерживать колебания. Для такой системы довольно просто построить дискретное отображение. Прежде всего договоримся о выборе дискретных переменных. В отличие от логистического отображения их будет две: скорость шарика перед n-ым ударом υ_n и момент его удара t_n.

Сделаем одно очень существенное предположение – будем пренебрегать смещением стола в момент удара. (Этот можно сделать, если скорость шарика достаточно велика по сравнению со скоростью плиты.) Тогда движение шарика на плоскости t, y выглядит так, как показано на рисунке 99.

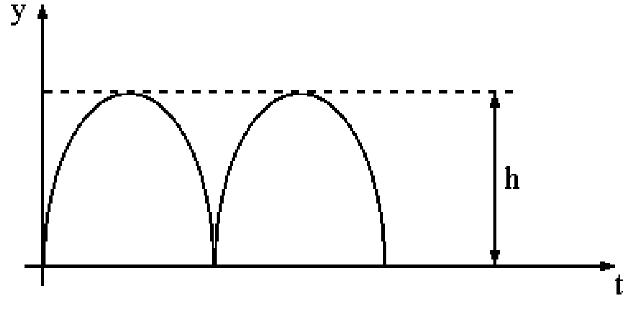


Рис. 99

Итак, скорость шарика перед ударом υ_n. Пусть скорость стола зависит от времени по закону

$$\upsilon(t) = V_0 \sin \omega t.$$

Тогда перед ударом его скорость есть $\upsilon = V_0 \sin \omega t_n$. Перейдем в систему отсчета, связанную со столом. В этой системе отсчета шарик налетает со скоростью

$$\upsilon_n + V_0 \sin \omega t_n .$$

При ударе по условию теряется доля скорости ε. Тогда в этой системе отсчета скорость шара после удара

$$(1-\varepsilon)(\upsilon_n + V_0 \sin \omega t_n).$$

Вернемся в исходную систему отсчета, для чего добавим к найденному значению скорости скорость стола. Тогда шарик отлетает от плиты со скоростью

$$(1-\varepsilon)(\upsilon_n + V_0 \sin \omega t_n) + V_0 \sin \omega t_n .$$

Ясно, что, подпрыгнув с этой скоростью в отсутствии сопротивления воздуха, он с ней же упадет на стол. Но это уже будет скорость перед (n+1)-ым ударом. Таким образом

$$\upsilon_{n+1} = (1-\varepsilon)\upsilon_n + V_0(2-\varepsilon)\sin \omega t_n .$$

Время свободного полета шарика $\tau = 2\upsilon_{n+1}/g$. Тогда очевидно

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2\upsilon_{n+1}}{g}.$$

Мы получили искомое двумерное отображение. Его можно несколько упростить, приведя к безразмерному виду. Для этого положим $\varphi_n = \omega t_n$.

Тогда

$$\upsilon_{n+1} = (1-\varepsilon)\upsilon_n + V_0(2-\varepsilon)\sin \varphi_n ,$$
$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{2\omega}{g}\upsilon_{n+1}.$$

Полагая $V = \dfrac{2\omega}{g}\upsilon$, получим

$$V_{n+1} = (1-\varepsilon)V_n + k \sin \varphi_n \quad (\varphi_n, \bmod 2\pi),$$
$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + V_{n+1}.$$

Здесь $k = \dfrac{2(2-\varepsilon)V_0\omega}{g}$.

Итак, в безразмерном виде наше отображение характеризуется двумя параметрами: ε - параметр диссипации и k – безразмерная амплитуда колебаний стола.

В наше соотношение мы добавили символы $(\varphi_n, \bmod 2\pi)$. Это означает, что мы берем не само значение фазы φ_n, а добавку к $2\pi n$, где n – целое. Такое дополнение естественно, так как синус - 2π-периодическая функция, а φ_n будет меняться в ограниченном интервале от 0 до 2π.

Убедимся, что наше предположение о том, что вибрации стола поддержат колебания шарика, верно. Найдем неподвижную точку отображения

$$V = (1-\varepsilon)V + k\sin\varphi,$$
$$\varphi = \varphi + V - 2\pi n.$$

Отсюда

$$V = 2\pi n,$$
$$\frac{2\pi n\varepsilon}{k} = \sin\varphi.$$

Это уравнение имеет два решения

$$\varphi = \pm\arcsin\frac{2\pi n\varepsilon}{k}$$

при условии $2\pi n\varepsilon < k$. Можно показать, что одна из этих точек устойчива, а другая – нет. (Вообще, устойчивые и неустойчивые точки рождаются парами.) Таким образом, если безразмерная амплитуда $k > 2\pi\varepsilon$, то в системе возможна неподвижная точка, которой отвечают подскоки на одинаковую высоту (рис.99).

Мы можем легко найти высоты подскоков в этой точке

$$h = \frac{m\upsilon_{n+1}^2}{2} = \frac{mg^2}{8\omega^2}V^2 = \frac{mg^2\pi^2}{2\omega^2}.$$

Будем теперь увеличивать амплитуду колебаний стола k. Обратимся к компьютерному моделированию. На рисунке 100 показано бифуркационное дерево, дающее зависимость установившейся скорости V от амплитуды k при фиксированном значении ε=0,9.

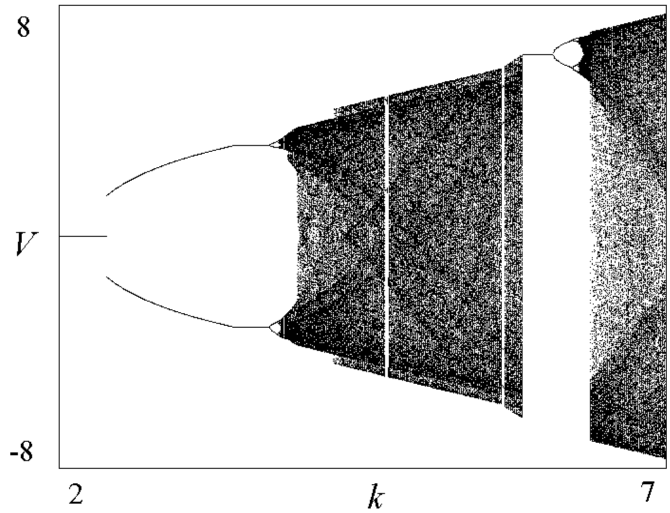


Рис. 100

Можно видеть, что в системе имеет место бифуркации удвоения периода. Нам остается добавить, что наша практически школьная задача на самом деле является одной из серьезных моделей нелинейной динамики. Ее ввел российский физик Заславский, как некоторую модель астрофизики ускорения космических частиц гравитационными полями звезд. Однако она получила популярность скорее как именно как модель шарика, прыгающего на столе. Ее реализовывали и экспериментально, для чего в качестве вибрирующего стола использовали диффузор громкоговорителя (рис.101)

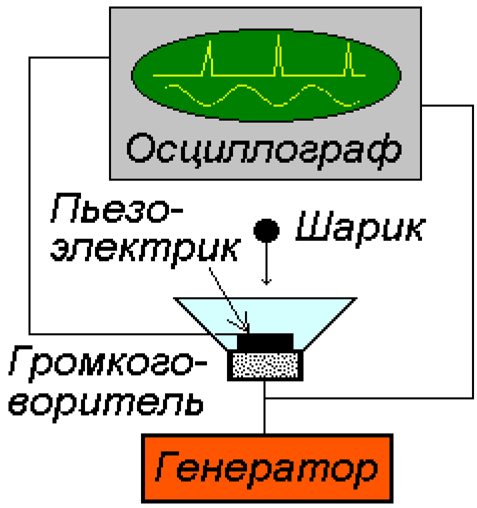


Рис. 101

В эксперименте наблюдались и удвоения периода и хаотические колебания.

Задачи

1. Постройте бифуркационное дерево в задаче о прыгающем шарике для ε=0,3, ε=0,5 и ε=0,9.

2. Изобразите качественно график $y=y(t)$, подобный рис.3, для случая удвоенного периода колебаний.
3. Напишите программу, которая строит график $y(t)$. Рассмотрите случаи 2-цикла, 4-цикла, хаоса, и другие возможные варианты.
4. Обсудите применимость сделанного приближения о пренебрежении смещением плиты. Когда оно будет справедливо?

5. Отображение Эно

Простейшим одномерным отображением со сложной динамикой является логистическое отображение

$$x_{n+1} = rx_n\left(1 - x_n\right) \text{ или } x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2,$$

которое описывает, например, динамику популяции.

В предыдущем разделе на примере задачи о прыгающем шарике мы познакомились с двумерными отображениями. Нельзя ли построить двумерное обобщение логистического отображения? Оказывается, можно. При введении одномерного отображения мы предполагали, что численность популяции в $(n+1)$-ый год зависит лишь от численности в n-ый год. Предположим теперь, что память "глубже" – численность в $(n+1)$-ый год зависит и от численности в $(n-1)$-ом году. Эта зависимость должна быть слабой. Поэтому будем полагать ее линейной. Тогда

$$x_{n+1} = rx_n\left(1 - x_n\right) - bx_{n-1},$$

где b – некоторый новый коэффициент.

Введем теперь обозначение $y_{n+1} = x_n$. Тогда

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= rx_n\left(1 - x_n\right) - by_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned}.$$

Это и есть искомое двумерное отображение. Если использовать другое представление для квадратичной функции, то это отображение можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned}.$$

Такое отображение впервые предложил французский астрофизик Мишель Эно, и оно носит его имя. (Эно не использовал биологическую интерпретацию, а исходил из другой мотивации – искал простейшие двумерные квадратичные отображения со сложной динамикой.)

Интересно, что отображение Эно можно получить и для простой физической системы.

Пусть в воде плавает лодка массы *m*, на которой установлен двигатель, включающийся периодически с периодом *T* на очень короткое время (рис.102). Пусть за это время лодка получает импульс *P*. Будем считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости с коэффициентом *k*.

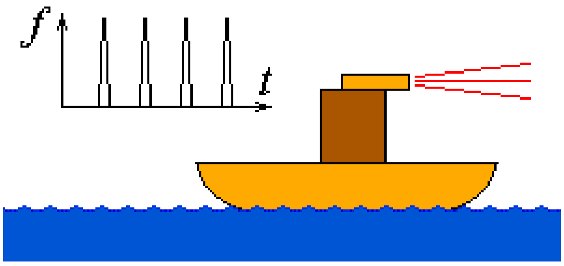


Рис. 102

В промежутке между моментами работы двигателя лодка движется свободно. Мы уже решали такую задачу в третьей части книжки. Поэтому теперь без труда воспользуемся готовым решением:

$$x = x_0 + \frac{V_0 m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Перейдем теперь к конструированию отображения.

Первый важный шаг при построении отображений – это выбор переменных. В нашем случае решение задачи «подсказывает», что удобно использовать значение координаты x_n и V_n непосредственно перед включением двигателя.

Двигатель работает очень короткое время и по условию сообщает лодке дополнительный импульс *P*. Тогда координата лодки сразу после действия двигателя не успевает измениться, а скорость получает добавку P/m:

$$x = x_n, \quad V = V_n + P/m.$$

Далее лодка движется свободно и можно применить наше решение, используя найденные координату и скорость как начальные значения

$$x_0 = x_n, \quad V_0 = V_n + P/m.$$

Тогда через время *T* получим

$$x(T) = x_n + \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}T}\right)\left(V_n + P/m\right),$$

$$V(T) = \left(V_n + P/m\right)e^{-\frac{k}{m}T}.$$

Но это значения координаты и скорости непосредственно перед (n+1)-ым импульсом! По нашему определению – x_{n+1} и V_{n+1}. Тогда

$$x_{n+1} = x_n + \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}T}\right)\left(V_n + P/m\right),$$

$$V_{n+1} = \left(V_n + P/m\right)e^{-\frac{k}{m}T}.$$

Итак, мы получили дискретное отображение для двух переменных x_n и V_n, как говорят, двумерное отображение.

Найденное нами отображение линейно и поэтому демонстрирует очень простую динамику. Представим себе, однако, что задача поставлена несколько иначе. Пусть на лодке укреплен магнит, а импульсы она получает от внешнего магнитного поля, включаемого на короткое время (рис.103).

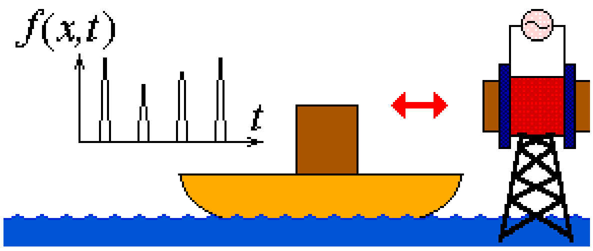


Рис. 103

В этом случае магнитное поле будет разным в разных точках и поэтому P=P(x), где функция P(x) характеризует распределение этого поля.

Тогда получим

$$x_{n+1} = x_n + \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}T}\right)\left(V_n + P(x_n)/m\right),$$

$$V_{n+1} = \left(V_n + P(x_n)/m\right)e^{-\frac{k}{m}T}.$$

Или, что то же самое:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m}{k}\left(1 - e^{\frac{k}{m}T}\right)V_{n+1},$$

$$V_{n+1} = \left(V_n + P(x_n)/m\right)e^{-\frac{k}{m}T}.$$

Из первого уравнения видно, что удобно ввести замену переменной

$$y = x + \frac{m}{k}\left(1 - e^{\frac{k}{m}T}\right)V.$$

Действительно, тогда y_{n+1}=x_n. В свою очередь

$$x_{n+1} = x_n + \frac{P(x_n)}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}T}\right) + \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}T}\right)\frac{x_n - y_n}{e^{\frac{k}{m}T} - 1}$$

или

$$x_{n+1}=f(x_n)-by_n,\ \text{где}\ b=e^{-\frac{k}{m}T}\ \text{и}\ f(x)=x(1+b)+\frac{P(x)}{k}(1-b).$$

Мы получили искомое двумерное отображение

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=f(x_n)-by_n\\ y_{n+1}&=x_n. \end{aligned}$$

Ясно, что нужно как-то конкретизировать функцию $f(x)$. Простейшее предположение состоит в том, что это квадратичная функция $f(x)=1-\lambda x^2$. Тогда

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=1-\lambda x_n^2-by_n\\ y_{n+1}&=x_n. \end{aligned}$$

Мы пришли к отображению Эно.

Обсудим теперь кратко некоторые свойства этого отображения. Отображение Эно при b=0 превращается в логистическое отображение. Поэтому для него естественно ожидать аналогичного поведения.

Найдем, прежде всего, неподвижную точку:

$$\begin{aligned} x_0&=1-\lambda x_0^2-by_0\\ y_0&=x_0. \end{aligned}$$

Тогда $\lambda x_0^2+(1+b)x_0-1=0.$ Откуда

$$x_0=\frac{-(1+b)\pm\sqrt{(1+b)^2+4\lambda}}{2\lambda}.$$

Неподвижных точек две, как и у логистического отображения. Они существуют при условии:

$$\lambda>-\frac{(1+b)^2}{4}.$$

Найдем теперь 2-цикл:

$$\begin{cases} x_2=1-\lambda x_1^2-by_1\\ y_2=x_1\\ x_1=1-\lambda x_2^2-by_2\\ y_1=x_2 \end{cases}$$

Подставляя второе уравнение в третье и четвертое в первое, получаем

$$\begin{aligned} x_2&=1-\lambda x_1^2-bx_2\\ x_1&=1-\lambda x_2^2-bx_1 \end{aligned},$$

или

$$\begin{aligned} (1+b)x_2&=1-\lambda x_1^2\\ (1+b)x_1&=1-\lambda x_2^2 \end{aligned}.$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получим

$$(1+b)(x_1+x_2) = 2 - \lambda\left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right]$$
$$(1+b)(x_2-x_1) = \lambda\left[(x_2-x_1)(x_1+x_2)\right].$$

Если $x_2 \neq x_1$, то из второго уравнения следует, что

$$x_1 + x_2 = \frac{1+b}{\lambda},$$

а тогда из первого –

$$x_1x_2 = \frac{(1+b)^2 - \lambda}{\lambda^2}.$$

По теореме Виета элементы 2-цикла ищем из квадратного уравнения

$$x^2 - \frac{1+b}{\lambda}x + \frac{(1+b)^2 - \lambda}{\lambda^2} = 0.$$

Откуда

$$x_{1,2} = \frac{1+b}{2\lambda} \pm \frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda - \frac{3}{4}(1+b)^2}.$$

Таким образом, 2-цикл возможен при условии:

$$\lambda > \frac{3}{4}(1+b)^2.$$

При b=0 получаем λ=3/4=0,75 – значение, при котором неподвижная точка теряет устойчивость и рождается 2-цикл. Естественно предположить, что аналогичная ситуация имеет место и в отображении Эно, хотя доказать это значительно сложнее. Мы этого делать не будем, а используем компьютерное моделирование.

На следующем рисунке показано бифуркационное дерево отображения Эно при b=0,3 (рис.104). Можно видеть, что оно не только демонстрирует рождение устойчивого 2-цикла из неподвижной точки, но и весь каскад бифуркаций удвоения периода, хаос и окна периодичности в хаосе. Новым является то, что дерево иногда скачком «разбухает». Такое явление в нелинейной динамике называют ***кризисом.***

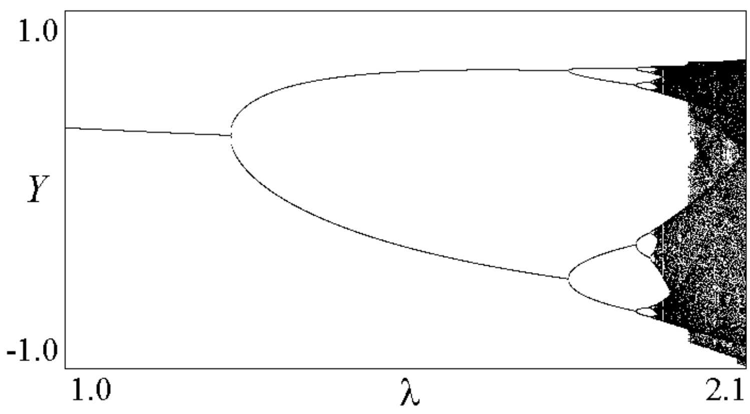


Рис. 104

Надо сказать, что мы описали лишь простейшие свойства отображения Эно. На самом деле его динамика столь многообразна, что ему можно посвятить целую монографию. Более того, многие современные исследователи по-прежнему используют отображения Эно в своих работах.

Задачи

1. Нарисуйте на плоскости b, λ область существования устойчивой неподвижной точки. Параметр $-1<b<1$.
2. Создайте программу, рисующую бифуркационное дерево для отображения Эно. Постройте его для случаев b=0,3, b=0,6, b=0,9. Что происходит с деревом при приближении b к единице?

6. Фазовое пространство и аттракторы

Как проследить за эволюцией динамической системы при заданных начальных условиях? Для этого нужно «увидеть», что происходит с задающими динамическую систему переменными *x, y,...* в по мере эволюции во времени. Введем некоторое пространство, по осям координат которого отложим эти переменные. Его принято называть ***фазовым пространством***. Фраза «задано начальное состояние динамической системы», теперь означает, что задана точка в фазовом пространстве. «Включим» время. Если система определена дискретным отображением, например, отображением Эно или прыгающего шарика, то изображающая точка при каждой итерации будет совершать «прыжки» в фазовом пространстве.

Динамическая система полностью задает закон эволюции во времени, однако, чтобы получить полную информацию о характере такой эволюции надо провести исследование для различных начальных условий. Современные компьютеры делают эту задачу не умозрительной, а вполне реальной и позволяют получать наглядные геометрические образы такого процесса.

Итак, рассмотрим множество начальных состояний системы. В фазовом пространстве в этом случае будем иметь уже не одну изображающую точку, а целое облако. При «включении» времени они все двинутся по своим траекториям (в случае дифференциальных уравнений), либо начнут совершать «прыжки» (в случае дискретных отображений). При компьютерном моделировании разумно создать мгновенные «снимки» облака через определенные промежутки времени (число итераций). Тогда можно следить за эволюцией облака на экране дисплея.

Перейдем к компьютерному моделированию. В качестве исследуемой системы выберем отображение Эно.

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - b y_n$$
$$y_{n+1} = x_n$$

Здесь λ и b – параметры. На рисунке 105 показаны мгновенные «снимки» облака изображающих точек на фазовой плоскости для отображения Эно, сделанные через одну итерацию.

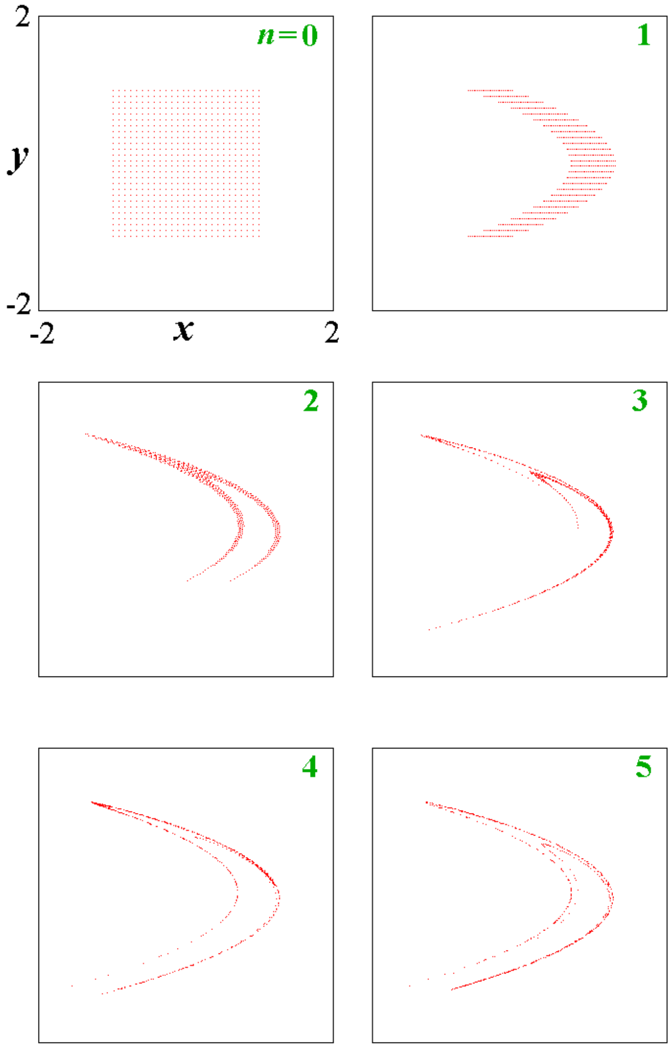


Рис. 105

Заметим, что при работе за компьютером весьма удобно и увлекательно наблюдать эволюцию облака изображающих точек в режиме «компьютерной мультипликации».

Наиболее существенный результат, который вытекает из компьютерного моделирования (рис.105), состоит в том, что облако изображающих точек «конденсируется» на некоторые предельные объекты. Их называют аттракторами (от английского to attract – притягивать). Динамические системы, которые обладают аттракторами, называют ***диссипативными***.

Существование аттракторов приводит к весьма важным выводам о поведении системы. В этом случае исследование установившихся режимов, т.е. режимов, которые наблюдаются по истечении достаточно большого времени, эквивалентно изучению геометрической структуры аттрактора. (Соответствующий подход в теории колебаний был высказан А. А. Андроновым и лежит в основе понятий об ***автоколебаниях***. За примерами автоколебательных систем в реальной жизни далеко ходить не надо, например, часы – это автоколебательная система.)

Процесс «конденсации» изображающих точек на аттрактор занимает некоторое время. Как видно из рисунке 105 в результате изображающие точки притягиваются к некоторой сложной слоистой структуре. Если просмотреть с помощью компьютера как «микроскопа» отдельные фрагменты такого аттрактора, то обнаруживается, что он весь состоит из отдельных «нитей» и областей пустого пространства, причем каждая нить в свою очередь имеет аналогичную тонкую структуру. Как говорят, аттрактор в этом случае обладает ***фрактальными свойствами***. Подобные аттракторы были обнаружены в семидесятые годы нашего века и получили название ***странных***. А колебательные режимы, которым не отвечает определенный период, назвали ***динамическим хаосом***. Обнаружение динамического хаоса явилось своего рода революцией в науке, так как оказалось, что простые предсказуемые системы могут демонстрировать в установившимся режиме нерегулярную непериодическую динамику.

Итак, если исследуемая система диссипативна, то можно изучать лишь ее аттракторы. Это упрощает компьютерное моделирование - не надо следить за всеми изображающими точками. Достаточно выбрать одну из них, выполнить определенное (не очень маленькое) число итераций, чтобы эта точка «вышла» на аттрактор, а затем вывести ее движение на экран компьютера. Тогда мы и получим портрет аттрактора.

Задачи

1. Напишите программу, которая реализует конденсацию изображающих точек на аттрактор Эно.
2. Напишите программу, которая строит на экране аттрактор отображения Эно. (Для этого необходимо предварительно выполнить несколько сот итерация без вывода на экран для выхода изображающей точки на аттрактор.
3. Найдите примеры значений параметров, которые отвечают устойчивой неподвижной точке, циклу периода 2, циклу периода 4.
4. Создайте программу, которая позволяет просматривать фрагменты аттрактора с

некоторым увеличением. (Можно, например, с помощью мыши выделять фрагмент аттрактора.) С ее помощью убедитесь, что аттрактор Эно обладает фрактальной структурой.

5. Постройте на плоскости двух переменных аттрактор, отвечающий предельному переходу от отображения Эно к логистическому отображению. Выберите значения параметров, отвечающих как периодическим, так и хаотическим режимам.
6. Пронаблюдайте конденсацию изображающих точек на аттрактор для отображения прыгающего шарика.
7. Постройте примеры аттракторов для отображения прыгающего шарика. Постарайтесь, чтобы Ваша коллекция была достаточно полной.

7. Карты динамических режимов

Иллюстрации в виде бифуркационных деревьев демонстрируют возможность нетривиальной эволюции аттракторов и, соответственно, колебательных режимов динамических систем при вариации одного параметра. Еще более удивительное разнообразие режимов можно наблюдать, если система характеризуется двумя параметрами. На первый взгляд кажется, что исследование такой системы требует кропотливой работы, и это действительно так. Однако, сейчас в нелинейной динамике стал популярным весьма простой, наглядный и информативный прием, который позволяет быстро получать существенную информацию о системе. Продемонстрируем его на примере ***кубического*** отображения

$$x_{n+1}=a-bx_n+x_n^3 ,$$

Компьютерная «технология» двухпараметрического исследования состоит в следующем. Выбираются какие-либо значения параметров a и b. Затем выполняется несколько сотен итераций отображения, для того, чтобы система вышла на аттрактор, а затем - еще несколько сотен итераций уже непосредственно на аттракторе. По мере итераций на аттракторе производится сравнение начального значения со всеми последующими. Если они совпадают с высокой (наперед заданной) точностью, то число итераций принимается за период движения. На плоскости параметров (на экране дисплея) точка отмечается некоторым цветом, причем цветовая палитра выбрана заранее, так что движениям с определенными периодами отвечают определенные цвета. После этого процедура повторяется при слегка измененных значениях параметров, так что в конечном итоге выполняется полное «сканирование» плоскости параметров. В результате плоскость оказывается окрашенной в разные цвета в соответствии с периодом движения на аттракторе. Области хаоса (непериодические режимы) также обозначаются специальным образом. По аналогии с географией такую «раскрашенную» плоскость называют ***картой динамических режимов***. На рисунке 106 показана карта динамических режимов кубического отображения.

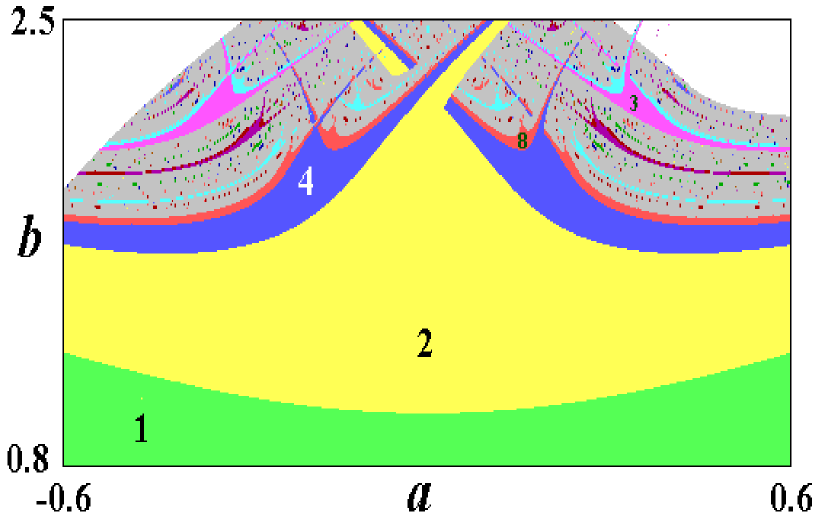


Рис. 106

Как видим, столь простая модель демонстрирует очень большое разнообразие режимов и бифуркаций. В нижней части рисунка видна граница между областями устойчивости неподвижной точки и цикла периода 2, представляющая собой линию бифуркации удвоения периода. Линий рождения 4-цикла в результате аналогичной бифуркации уже две, причем область устойчивости 2-цикла имеет характерный вид с уходящим «вверх» пересекающимися «отростками». Таким образом, область устойчивости 2-цикла ограничена этими линиями удвоений, а также двумя линиями ***складок*** (термин теории катастроф), образующими нижнюю границу «отростков». Отметим, что линии складок продолжаются внутрь области устойчивости 2-цикла и сходятся в точке, которую в теории катастроф называют точкой ***сборки*** (a=0, b=2), которая, однако, на рисунке не видна. Описанная совокупность бифуркационных линий демонстрирует весьма типичную структуру на картах, названную французским специалистом в области нелинейной динамики К.Мира «crossroad area» – «перепутье». На карте можно видеть две аналогичные конфигурации на базе 8-циклов. Самые широкие окна устойчивости реализуются на основе 3-циклов, внутри них можно идентифицировать конфигурации «crossroad area», отвечающие областям устойчивости 6-циклов и т. д.

Правда, карты динамических режимов обладают одним недостатком. Если провести сканирование карты различными способами (например снизу вверх, или слева направо), то отдельные фрагменты карт получаются отличающимися. Это связано со свойством ***мультистабильности*** динамических систем. Оно состоит в том, что при заданных значениях параметров могут сосуществовать одновременно несколько (иногда мало, иногда много) аттракторов. Соответственно, в зависимости от начальных условий траектория может выйти на тот или иной аттрактор. Поэтому, построив карту, полезно попробовать сделать тоже самое, но при других начальных условиях. Полезным также является прием, когда, сделав маленький шаг по параметру, в качестве начальной в фазовом пространстве берут точку аттрактора, получившегося на предыдущем шаге. Иногда об этом способе говоря, что карту строят *с* ***наследованием начальных условий***.

Интересно, что карты режимов можно строить не только для отображений, но и для дифференциальных систем, если использовать ***метод сечений Пуанкаре***. Суть метода состоит в том, что в фазовом пространстве выбирается некоторая поверхность. После этого мы следим не за всей фазовой траекторией дифференциальной системы, а лишь за точками ее пересечения с этой поверхностью. Таким образом, мы приходим к дискретному отображению, которые исследовать уже умеем. Удивительно то, что карты режимов дифференциальных систем оказываются очень похожими на карты отображений и содержат элементы, совершенно аналогичные показанным на рисунке 106.

В современной нелинейной динамике достаточно много существенных для теории (иногда говорят ***эталонных***) динамических систем. Среди них и уже знакомое Вам отображение Эно. Набор карт для них образует своеобразный атлас, с некоторыми «страничками» этого атласа можно познакомиться здесь http://www.sgtnd.narod.ru/science/atlas/rus/index.htm .

Итак, большинство нелинейных систем характеризуются сложной топографией карт динамических режимов. Степень сложности полученных изображений такова, что их можно назвать «фрактальными пейзажами». Как правило, карты содержат детали, неоднократно повторяющиеся во все меньших и меньших масштабах. Можно установить определенные законы самоподобия или, как говорят, ***скейлинга***. Но это уже отдельная тема.

Задачи

1. Создайте программу, которая строит карты динамических режимов одномерных отображений. С ее помощью постройте карту кубического отображения.
2. Создайте программу, которая строит карты динамических режимов двумерных

отображений. С ее помощью постройте карты отображения Эно и отображения прыгающего шарика.

3. Напишите программу, которая при щелчке мыши на карте строит портрет аттрактора в соответствующей точке. С ее помощью пронаблюдайте эволюцию аттракторов при путешествии по карте отображения Эно. Тоже самое для отображения прыгающего шарика.
4. Модифицируйте предыдущую программу так, чтобы визуализировался не один аттрактор, а одновременно все (или почти все) притягивающие множества, для чего при щелчке мыши в избранной точке плоскости параметров используйте конденсацию облака изображающих точек на фазовой плоскости. Дополните эту программу анализом периода высвеченных аттракторов и обозначьте их разными цветами. Продемонстрируйте возможность сосуществования различных аттракторов в фиксированных точках плоскости параметров. Какие области плоскости параметров отображения Эно и прыгающего шарика более богаты мультистабильными состояниями?

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть III. Физики тоже любят математику

1. Числовые последовательности
2. Производная в математике и физике
3. Задачи на максимум и минимум
4. Экспонента
5. Интеграл
6. Дифференциальные уравнения
7. Математический кругозор

Часть IV. Нелинейный минимум.

1. Нелинейный мир
2. Отображения на примере школьной задачи
3. Логистическое отображение и бифуркационное дерево
4. Прыгающий шарик
5. Отображение Эно
6. Фазовое пространство и аттракторы
7. Карты динамических режимов