

*Часть II*

# **Нелинейный осциллятор**

## Нелинейный осциллятор как обобщенная модель теории колебаний

Настоящая лекция начинает большой раздел нашего курса, посвященный изучению одного из важнейших объектов теории колебаний — *нелинейного осциллятора*. Это система, динамика которой описывается дифференциальным уравнением второго порядка, в консервативном случае  $\ddot{x} + f(x) = 0$ , а в диссипативном  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f(x) = 0$ . Здесь  $x$  — динамическая переменная, о которой говорят как об обобщенной координате,  $f(x)$  — некоторая нелинейная функция,  $\gamma$  — параметр диссипации. Эти уравнения выступают как естественное обобщение консервативного гармонического осциллятора и диссипативного линейного осциллятора.

На нелинейный осциллятор следует смотреть как на *обобщенную модель*, пригодную для описания колебательных явлений в системах разной физической природы (в смысле «колебательной общности» по Мандельштаму). Интерпретация смысла динамической переменной  $x$  и физического содержания колебательного процесса будет зависеть от того, какая конкретно система рассматривается. Соответствующие примеры будут обсуждаться по ходу дальнейшего изложения.

### **Механический осциллятор: частица в потенциальной яме**

Пусть мы имеем частицу массы  $m$ , которая может свободно двигаться вдоль оси  $x$ , причем трение отсутствует. Пусть на частицу действует сила, направленная вдоль оси  $x$ , и величина этой силы в каждый момент зависит от координаты частицы в этот момент как функция  $F(x)$ . Записывая второй закон Ньютона, получаем уравнение

$$m\ddot{x} = F(x) \quad (4.1)$$

или

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (4.2)$$

где  $f(x) = -F(x)/m$ .

Как известно, функцию одной переменной всегда можно представить в виде производной от некоторой другой функции. Введем определение

$$V(x) = -\int_0^x F(X)dX . \quad (4.3)$$

Тогда  $F(x) = -V'(x)$ , и уравнение (4.1) принимает вид

$$m\ddot{x} = -V'(x) . \quad (4.4)$$

Выясним физический смысл функции  $V(x)$ . Для этого умножим обе части уравнения (4.4) на  $\dot{x}$ . Перенеся оба члена в левую часть, получим  $m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}V'(x) = 0$ , что можно переписать как

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right) = 0 . \quad (4.5)$$

Поскольку производная по времени от выражения, стоящего в скобках, равна нулю, то оно должно в процессе динамики системы оставаться постоянным:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = \text{const} . \quad (4.6)$$

Ясно, что это соотношение представляет собой не что иное, как запись закона сохранения механической энергии. Первый член отвечает кинетической энергии частицы, а второй — потенциальной энергии в поле внешней силы. Соответственно, функцию  $V(x)$  называют *потенциальной функцией*. Согласно принятой в математике и механике терминологии, соотношение (4.6) называют *первым интегралом* дифференциального уравнения (4.4).

Если потенциальная функция имеет минимум, или, как выражаются на общепринятом научном жаргоне, присутствует *потенциальная яма*, то вблизи дна этой ямы система может совершать колебания. Пусть потенциальная функция гладкая, и минимум расположен в точке  $x = x_0$ . Тогда разложение в ряд Тейлора вблизи этой точки будет иметь вид

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots , \quad (4.7)$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости. Если ограничиться учетом квадратичного члена, то подстановка выражения (4.7) в (4.4) приводит к уравнению  $m\ddot{x} = -V''(x_0)(x - x_0)$  или

$$\ddot{\tilde{x}} + \omega_0^2\tilde{x} = 0 . \quad (4.8)$$

Это уравнение линейного гармонического осциллятора. Величина  $\tilde{x} = x - x_0$  отвечает отклонению от точки минимума потенциальной ямы, а  $\omega_0 = \sqrt{V''(x_0)/m}$  характеризует собственную частоту малых колебаний.

В задаче с одной пространственной координатой при любом заданном законе распределения силы можно ввести потенциальную функцию. В случае двух и более пространственных измерений это уже не так – далеко не всякое поле сил будет потенциальным.

**Задача 4.1.** Найдите период возможных малых колебаний материальной точки массы  $m$ , движущейся вдоль оси  $x$ , если зависимость потенциальной энергии от координаты дается следующими формулами:

$$\text{а) } U(x) = U_0 \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{l} \right) \right];$$

$$\text{б) } U(x) = 4a \left[ \left( \frac{b}{x} \right)^{12} - \left( \frac{b}{x} \right)^6 \right].$$

**Задача 4.2.** Из жести изготовлена пластинка, имеющая вертикальный профиль в виде синусоиды. В одной из образовавшихся «ямок» колеблется шарик массы  $m$ . Определите период малых колебаний.

**Задача 4.3.** Определите период малых колебаний маятника из задачи 3.10 в случае бистабильного потенциала.

### Фазовая плоскость

К уравнению вида

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{4.9}$$

сводятся многие задачи о консервативных колебаниях в системах разной физической природы, некоторые из них будут специально обсуждаться в последующих лекциях. В духе основной методологии теории колебаний, мы вправе отвлечься от конкретной физической природы системы и полагать, что уравнение (4.9) относится к абстрактному объекту, который носит название *нелинейный осциллятор*. Вводя потенциальную функцию  $U(x) = \int_0^x f(X) dX$ , это уравнение можно представить в виде

$$\ddot{x} = -U'(x) \tag{4.10}$$

В частности, для механической системы, обсуждавшейся выше,  $U(x) = m^{-1}V(x)$ .

Обозначив первую производную  $dx/dt = v$  (в механической интерпретации это скорость частицы), можно свести описание динамики нелинейного осциллятора к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -f(x).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Из математики известно, что в соответствии с теоремой о существовании и единственности, решение этой системы однозначно определяется, если в качестве начальных условий в некоторый момент времени заданы значения *двух* динамических переменных, и  $v = \dot{x}$ . Раз состояние системы характеризуется парой величин  $(x, \dot{x})$ , то ее фазовое пространство *двумерное*. О двумерном фазовом пространстве принято говорить как о *фазовой плоскости*. Динамику системы удобно представлять, используя *фазовые портреты* — картинки на фазовой плоскости, где изображены существенные для понимания поведения системы объекты — состояния равновесия, характерные траектории.

### **Период колебаний нелинейного осциллятора**

Замкнутая фазовая траектория соответствует, очевидно, периодически повторяющемуся движению. Следовательно, такая траектория представляет собой не что иное, как фазовый портрет периодического колебательного процесса. Для уравнения нелинейного осциллятора в виде (4.9) закон сохранения энергии (4.6) можно записать следующим образом

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.\tag{4.12}$$

Константа интегрирования  $E$  называется *полной энергией* колебаний. Из уравнения (4.12) имеем

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - U(x))}.\tag{4.13}$$

Знак «+» в этом уравнении соответствует участкам фазовых траекторий, лежащим в верхней полуплоскости, знак «-» — в нижней. Разделяя переменные в (4.13), получим

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}.\tag{4.14}$$

Движение будет периодическим, если оно происходит в такой области  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ , что в ней  $U(x) \leq E$ , причем равенство достигается на краях интервала, т.е.  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  представляют собой корни уравнения  $E = U(x)$ ; их называют *точками поворота*. В этом случае мы можем проинтегрировать выражение (4.14) по всей замкнутой фазовой траектории и определить тем самым *период колебаний*  $T$ :

$$T = \oint \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}. \quad (4.15)$$

Этот интеграл можно также представить в виде

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}. \quad (4.16)$$

Для линейного осциллятора (4.8)  $U = \omega_0^2 x^2/2$ , и уравнение (4.16) дает

$$T = 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{2E - \omega_0^2 x^2}} = \frac{2}{\omega_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (4.17)$$

где  $a = \sqrt{2E}/\omega_0$ . Интеграл в этом случае легко вычисляется, и мы получаем

$$T = \frac{2}{\omega_0} \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (4.18)$$

т.е. известный результат для периода гармонических колебаний. Поскольку зависимость от энергии  $E$  в формуле (4.18) отсутствует, колебания являются *изохронными*.

В общем случае, однако, период колебаний может зависеть от энергии. Это *неизохронность* — один из фундаментальных нелинейных эффектов, который обсуждался в лекции 3.

**Задача 4.4.** Найти зависимость периода колебаний от энергии для осциллятора с потенциальной энергией  $U(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$ .

*Ответ:*  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+E}}$ .

**Задача 4.5.** Найти зависимость периода колебаний от энергии для осциллятора с потенциальной энергией  $U(x) = \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 x$ .

*Ответ:*  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1-E}}$ .

Однако колебания нелинейных осцилляторов не всегда являются *неизохронными*! Простейший пример такого рода — осциллятор в потенциальной яме, составленной из половинок двух различных парабол:

$$U(x) = \begin{cases} \omega_1^2 x^2 / 2, & x > 0 \\ \omega_2^2 x^2 / 2, & x < 0 \end{cases}$$

причем  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Очевидно, что период равен  $T = \pi/\omega_1 + \pi/\omega_2 = \text{const}$ . Вместе с тем, колебания такого осциллятора будут нелинейными и ангармоничными (попробуйте самостоятельно найти спектр колебаний).

В качестве нетривиального примера решите следующую задачу:

**Задача 4.6.** Найти период колебаний осциллятора с потенциальной энергией  $U(x) = ax^2 + b/x^2$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  считаются положительными.

*Ответ:*  $T = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}$ . Как видим, период колебаний от энергии не зависит. В свою очередь, малые колебания могут быть неизохронными (см. задачу 3.3).

### **Динамическая система общего вида на фазовой плоскости. Особые точки и их классификация**

Отвлечемся на время от нелинейного осциллятора и обсудим более формальную и общую постановку задачи. Рассмотрим динамическую систему, которая описывается системой двух дифференциальных уравнений первого порядка общего вида,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Мгновенное состояние такой системы определяется заданием двух переменных,  $x = x_0$  и  $y = y_0$ . (В самом деле, используя их в качестве начальных условий, в принципе можно построить решение дифференциального уравнения и найти значения тех же переменных в любой последующий момент времени  $t$ ).

Геометрически мгновенное состояние представляется точкой на фазовой плоскости  $(x, y)$ , а эволюция состояния во времени соответствует движению этой изображающей точки по некоторой кривой – *фазовой траектории*. Когда говорят о динамической системе с двумерным фазовым пространством, ее часто обозначают для краткости терминами *двумерная система* или *динамическая система на плоскости*.

Заметим, что фазовые траектории не могут пересекаться. Если бы такое случилось, то это означало бы, что отправляясь от одного и того же состояния, т.е. из одной и той же точки на фазовой плоскости, система могла бы эволюционировать во времени по-разному. Это противоречило бы положенному в основу теории представлению о динамической системе. В самом деле, задание определенного начального состояния должно подразумевать *однозначное* предсказание последующего изменения состояния во времени, и это условие было бы нарушено при выборе точки пересечения траекторий в качестве начального

состояния. С формально математической точки зрения, присутствие пересечения фазовых траекторий противоречило бы теореме единственности решения.

Вычислив правые части уравнений (4.19) в некоторой точке фазовой плоскости  $(x, y)$ , получаем два числа,  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ . В силу уравнений (4.19), это не что иное, как компоненты вектора скорости движения изображающей точки по фазовой плоскости в тот момент, когда она имеет соответствующие координаты  $(x, y)$ . Поскольку *каждой* точке фазовой плоскости отвечает определенный вектор скорости, то можно утверждать, что с нашей динамической системой ассоциируется определенное *векторное поле* на плоскости.

Вектор, отвечающий каждой точке, задает в этой точке определенное направление. Поэтому говорят также о *поле направлений* на плоскости, ассоциирующемся с данной динамической системой. В старых курсах теории колебаний для графического построения фазового портрета двумерной системы рекомендовалось сначала изобразить поле направлений штрихами, а затем провести семейство кривых, представляющих собой огибающие для данного поля направлений. Удобнее всего это было делать, выделив на фазовой плоскости вспомогательные кривые, каждая из которых соответствовала определенному фиксированному направлению векторного поля. Это так называемые *изоклины*, а вся процедура известна как *метод изоклин*. Разумеется, в настоящее время вряд ли стоит прибегать к такого рода приемам, гораздо проще и эффективнее использовать компьютер.

Зададимся вопросом, может ли система дифференциальных уравнений (4.19) иметь решения, не зависящие от времени? Если да, то производные  $dx/dt$  и  $dy/dt$  должны обращаться в нуль. Поэтому постоянные во времени значения  $x$  и  $y$  должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Это алгебраическая система двух уравнений с двумя неизвестными, и она в типичном случае может иметь некоторое количество корней. Каждая пара  $(x_0, y_0)$ , удовлетворяющая этой системе уравнений, соответствует некоторой *особой точке* на фазовой плоскости.

Особая точка называется так потому, что она существенно отличается по своим свойствам от прочих точек фазовой плоскости, составляющих обычно подавляющее большинство (за исключением, может быть, каких-то очень специальных, “патологических” систем). Во-первых, в особой точке не определено направление векторного поля, ассоциирующегося с нашей динамической системой, так как модуль вектора равен нулю. Во-вторых, говоря формально, мы обязаны признать особую точку отдельной фазовой траекторией: множество состояний, посещаемых системой в процессе временной эволюции с начальным условием, отвечающем особой точке, состоит из одной этой точки.



С физической точки зрения, особые точки соответствуют стационарным режимам динамики или состояниям равновесия системы. Их называют также *неподвижными точками*.

Предположим, что мы исследуем некоторую динамическую систему на плоскости, имеющую одну или несколько особых точек. Оказывается, что при помощи достаточно простого анализа можно изучить поведение фазовых траекторий в малой окрестности особой точки, и это приводит к определенной классификации особых точек. Имея представление о свойствах каждого выделенного типа особых точек и о том, какие из них присутствуют на фазовой плоскости интересующей нас динамической системы, зачастую можно делать весьма нетривиальные и далеко идущие выводы об устройстве фазового пространства и о характере возможных в этой системе колебательных процессов.

Пусть  $(x_0, y_0)$  — особая точка системы (4.19). Будем искать близкое к особой точке, зависящее от времени решение в виде

$$x(t) = x_0 + \tilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \tilde{y}(t). \quad (4.21)$$

Подставим эти выражения в (4.19) и разложим функции в правых частях обоих уравнений в ряды Тейлора по малым добавкам  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ , пренебрегая членами второго и высших порядков малости. Следует принять во внимание, что  $f(x_0, y_0) = 0$  и  $g(x_0, y_0) = 0$ , поскольку  $(x_0, y_0)$  — особая точка. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= f_x(x_0, y_0)\tilde{x} + f_y(x_0, y_0)\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= g_x(x_0, y_0)\tilde{x} + g_y(x_0, y_0)\tilde{y}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где нижние индексы обозначают частные производные функций  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  по соответствующему аргументу. В матричном виде уравнение можно переписать как

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Фигурирующую здесь матрицу, элементами которой служат частные производные функций, называют *матрицей Якоби*.

Мы пришли к системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, для решения которой традиционно рекоменду-

ется применять экспоненциальную подстановку. Предполагаем, что зависимость добавок от времени имеет вид  $\tilde{x}, \tilde{y} \propto e^{\lambda t}$ . Тогда уравнение (4.23) приводит к задаче на собственные векторы и собственные значения матрицы  $2 \times 2$ :

$$\lambda \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Для вычисления собственных чисел матрицы  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  можно воспользоваться тем обстоятельством, что след матрицы  $S = a_{11} + a_{22}$  (сумма диагональных элементов) равен сумме собственных чисел, а детерминант  $J = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  — их произведению. Поэтому из теоремы Виета следует, что собственные числа удовлетворяют квадратному уравнению:

$$\lambda^2 - S\lambda + J = 0, \quad (4.25)$$

Его называют *характеристическим уравнением*. В интересующем нас случае

$$S = f_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0) \quad (4.26)$$

и

$$J = f_x(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0) \quad (4.27)$$

Решая квадратное уравнение, получаем два корня,

$$\lambda_1 = S/2 + \sqrt{S^2/4 - J} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = S/2 - \sqrt{S^2/4 - J}. \quad (4.28)$$

Предположим сначала, что число под знаком квадратного корня положительное. Тогда оба собственных числа действительные и различные. Общее решение дифференциального уравнения (4.23), описывающего эволюцию во времени малых возмущений особой точки, записывается в виде линейной комбинации двух членов, пропорциональных, соответственно,  $e^{\lambda_1 t}$  и  $e^{\lambda_2 t}$ . Если оба собственных числа отрицательны, то возмущение с течением времени затухает и стремится к нулю, т.е. система приближается к особой точке. Это *устойчивая* особая точка. Если хотя бы одно собственное больше нуля, то соответствующая составляющая возмущение будет нарастать, т.е. система будет уходить от особой точки. Следовательно, это *неустойчивая* особая точка.

Пусть теперь  $S^2/4 - J < 0$ . Тогда оба собственных числа комплексные,  $\lambda_{1,2} = S/2 \pm i\sqrt{J - S^2/4}$ , причем одно получается из другого посредством операции комплексного сопряжения. Зависимость возмущений от времени в этом случае определяет-

ся выражением вида  $e^{\lambda' t} \cos(\lambda'' t + \varphi)$ , где  $\lambda'$  – действительная, а  $\lambda''$  – мнимая часть собственного числа. Особая точка устойчива, если действительная часть  $\lambda' < 0$ , и неустойчива, если  $\lambda' > 0$ .

Таким образом, характер поведения фазовых траекторий и, следовательно, вид фазового портрета в окрестности особой точки, определяется собственными числами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а они выражаются через след и детерминант матрицы Якоби,  $S$  и  $J$ . Полное представление о ситуациях, которые могут реализоваться, дает диаграмма на рис. 4.1. Основным интерес представляют только *типичные* ситуации, которым отвечают внутренние точки показанных на рис. 4.1 областей.

Что касается ситуаций, реализующихся на границах областей, то они на данном этапе рассмотрения игнорируются как *атипичные* или *негрубые*. В самом деле, чуть-чуть изменив («пошевелив») функции, фигурирующие в правых частях системы дифференциальных уравнений, мы уходим с границы, если первоначально на ней оказались. К исследованию негрубых ситуаций приходится обращаться в том случае, если мы интересуемся *бифуркациями* – качественными изменениями динамических режимов и топологического устройства фазовой плоскости при изменении параметров системы. Классификация и анализ негрубых ситуаций – одна из центральных проблем специального раздела нелинейной динамики, теории бифуркаций.

В отличие от прочих границ областей, особую роль на диаграмме рис.4.1 играет линия  $S = 0$ . Дело в том, что на ней «живут» консервативные системы, представляющие фундаментальный интерес для физики и других дисциплин. По этой причине им всегда уделяется специальное внимание, хотя, если рассуждать о динамических системах общего вида чисто формально, консервативные системы следовало бы признать очень специальным частным классом, ассоциирующимся с негрубой ситуацией.

Подчеркнем, что особая точка типа центр, в окрестности которой фазовые траектории имеют вид вложенных друг в друга замкнутых кривых, встречается в консервативных системах. Указанное свойство сохраняется и при учете нелинейности. Для диссипативных систем это не характерно. Даже в том негрубом случае, когда след матрицы Якоби нулевой, а корни характеристического уравнения чисто мнимые, фазовые кривые в малой окрестности особой точки диссипативной системы при учете нелинейных эффектов, вообще говоря, замкнутыми не будут.

В таблице дана сводка типов особых точек, классифицируемых по собственным числам матрицы Якоби. Чтобы эта классификация сразу ассоциировалась с определенными наглядными образами – фазовыми портретами в окрестности особых точек, мы приводим по периферии рис. 4.1 соответствующие диаграммы, но опускаем подробные объяснения. (Читателю рекомендуется самостоятельно проработать вопрос, как связан вид фазовых портретов со свойствами корней характеристического уравнения.) В последующих лекциях применительно к нелинейному осциллятору вид фазовых портретов будет подробно обсуждаться.

**Таблица.** Классификация особых точек, основанная на свойствах корней характеристического уравнения

Условие на собственные числа	Тип особой точки
Действительные, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ .	Неустойчивый узел
Действительные, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ .	Седло
Действительные, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ .	Устойчивый узел
Чисто мнимые, $\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega$	Центр (в консервативных системах)
Комплексно сопряженные, $\text{Re } \lambda > 0$	Неустойчивый фокус
Комплексно сопряженные, $\text{Re } \lambda < 0$	Устойчивый фокус

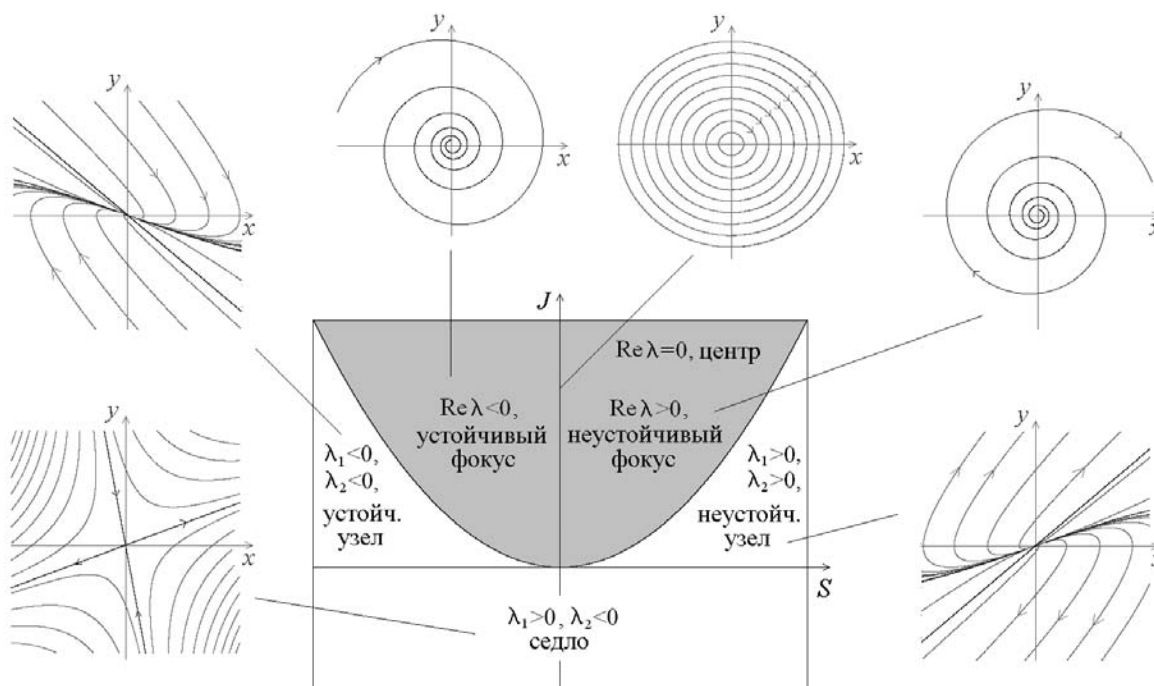


Рис. 4.1. В центре рисунка диаграмма на плоскости параметров след – детерминант матрицы Якоби, на которой показаны области, соответствующие различным типам особых точек. Серым цветом обозначена область, в которой корни характеристического уравнения являются комплексными. По периферии рисунка показан качественно вид фазовых портретов в окрестности особых точек.

**Задача 4.7.** Представьте уравнение линейного осциллятора с затуханием в “стандартной” форме, отвечающей определению двумерной динамической системы (4.19). Покажите, что рассматриваемая система является диссипативной, для чего вычислите дивергенцию соответствующего векторного поля на фазовой плоскости.

**Задача 4.8.** Простейший генератор электромагнитных колебаний, содержащий электронную лампу, описывается уравнением Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Представьте это уравнение в “стандартной” форме (4.19).

**Задача 4.9.** Определите возможные типы особых точек линейного диссипативного осциллятора из задачи 4.7.

**Задача 4.10.** Для уравнения Ван-дер-Поля из задачи 4.8 найдите матрицу Якоби и укажите возможный тип особых точек. При каком значении параметра  $\lambda$  происходят изменения их типа?

**Задача 4.11.** Укажите физические примеры систем с особыми точками типа седло.

### Численное решение дифференциальных уравнений

Как мы уже говорили, революционные изменения в содержании и методическом инструментарии теории нелинейных колебаний связаны с появлением и широким распространением компьютеров. В частности, компьютер позволяет эффективно применять численное решение дифференциальных уравнений для анализа динамики колебательных систем, наглядно и быстро представлять результатов посредством компьютерной графики.

Как было указано в предыдущем параграфе, динамическая система общего вида на плоскости задается уравнениями

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \quad (4.29)$$

Рассмотрим основную идею численного решения такого рода уравнений. Для общности, однако, будем считать, что фигурирующие в правых частях функции могут зависеть не только от динамических переменных, но и от времени

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = g(x, y, t). \quad (4.30)$$

Будем представлять искомые функции времени  $x(t)$  и  $y(t)$  их значениями на дискретном множестве точек  $t_n = nh$ , как говорят, в узлах сетки с шагом  $h$  по времени:

$$x_n = x(nh), \quad y_n = y(nh). \quad (4.31)$$

Величина шага должна быть достаточно малой, от нее будет зависеть точность решения.

Самый простой способ аппроксимировать производные по времени  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  состоит в том, чтобы положить

$$\dot{x}_n \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h}, \quad \dot{y}_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}. \quad (4.32)$$

Подставляя эти выражения в (4.30), приходим к записи уравнений в виде *разностной схемы*

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = f(x_n, y_n, t_n), \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = g(x_n, y_n, t_n). \quad (4.33)$$

Отсюда нетрудно выразить в явном виде  $x_{n+1}$  и  $y_{n+1}$  через  $x_n$  и  $y_n$ :

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n, t_n), \quad y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n, t_n) .$$

Используя эти соотношения и задавшись начальными условиями  $(x_0, y_0)$ , мы можем шаг за шагом вычислять на компьютере значения переменных в узлах сетки  $n=1,2,3,\dots$

Полученные результаты можно

- вывести на печать и получить таблицу функций, представляющих решение (такой способ широко применялся в эпоху первых электронно-вычислительных машин, не снабженных дисплеем);
- вывести на дисплей в виде графика временной зависимости, откладывая по оси абсцисс время  $t_n = nh$ , а по оси ординат значения  $x_n$  и  $y_n$ ;
- вывести на дисплей в виде фазового портрета, откладывая по оси абсцисс значения  $x_n$ , а по оси ординат  $y_n$ .

Как известно из курса математического анализа, при аппроксимации производных выражениями (4.33) мы допускаем на каждом шаге ошибку порядка  $h^2$ . Поскольку число шагов при построении решения порядка  $h^{-1}$ , а ошибка имеет тенденцию накапливаться от шага к шагу, результирующая погрешность будет порядка  $h$ , т.е. шаг в первой степени. Поэтому в данном случае мы имеем *разностный метод первого порядка*. Его называют *методом Эйлера*. В принципе этот метод позволяет достичь любой желаемой точности, но ценой существенного уменьшения шага, а, значит, увеличения числа шагов и объема вычислений.

Как можно усовершенствовать метод и добиться большей точности? Один простой способ состоит в следующем. Выполним сначала, используя метод Эйлера, *половину шага* и найдем

$$x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n, t_n), \quad y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{1}{2}hg(x_n, y_n, t_n) .$$

Затем, отправляясь *от исходной точки*, сделаем *полный шаг*, но с использованием поправленных величин  $x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})h$  при вычислении функций. Имеем:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}), \quad y_{n+1} = y_n + hg(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}) .$$

Можно показать, что этот метод дает на одном шаге погрешность порядка  $h^3$ , а на конечном фиксированном временном интервале ошибка будет порядка  $h^2$ . Таким образом, это *метод второго порядка*. Использование алгоритма более сложного по сравнению с методом Эйлера первого порядка обычно оправдывает себя, так как для получения нужной точности число шагов можно взять существенно меньшим.

Можно построить и разностные схемы более высокого порядка. Одна из них, весьма удобная и употребительная, известна как *метод Рунге-Кутты четвертого порядка*. Применительно к системе уравнений (4.30) алгоритм выполнения одного шага по времени задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n, t_n), \quad l_1 = g(x_n, y_n, t_n), \\ k_2 &= f(x_n + \frac{1}{2}hk_1, y_n + \frac{1}{2}hl_1, t_n + \frac{1}{2}h), \quad l_2 = g(x_n + \frac{1}{2}hk_1, y_n + \frac{1}{2}hl_1, t_n + \frac{1}{2}h), \\ k_3 &= f(x_n + \frac{1}{2}hk_2, y_n + \frac{1}{2}hl_2, t_n + \frac{1}{2}h), \quad l_3 = g(x_n + \frac{1}{2}hk_2, y_n + \frac{1}{2}hl_2, t_n + \frac{1}{2}h), \\ k_4 &= f(x_n + hk_3, y_n + hl_3, t_n + h), \quad l_4 = g(x_n + hk_3, y_n + hl_3, t_n + h), \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4). \end{aligned}$$

Наука о численном решении дифференциальных уравнений превратилась в настоящее время в самостоятельный обширный раздел вычислительной математики. Наряду с перечисленными здесь методами существует множество других, которые в каких-то случаях могут оказаться удобными (например, многошаговые схемы Адамса). Для подробного ознакомления с тонкостями численного решения дифференциальных

уравнений, различными алгоритмами, техническими приемами (такими как автоматический контроль точности), «подводными камнями», которые могут встретиться при решении конкретных задач, читателю следует обратиться к соответствующей специальной литературе.