

## Асимптотические методы теории нелинейных колебаний

### *Разложение в ряд по параметру нелинейности.*

#### *Осциллятор с квадратичной нелинейностью*

Случаи, когда удастся найти точные решения в явной аналитической форме, которым была посвящена предыдущая лекция, представляют, скорее, исключение из правил. Поэтому в теории колебаний разработан богатый арсенал приближенных или *асимптотических* методов. Основные идеи наиболее важных из них будут рассмотрены в настоящей главе.

Начнем с осциллятора с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0. \quad (9.1)$$

Как было показано в лекции 8, это уравнение можно привести к универсальному виду, не содержащему параметров. Однако здесь для наших целей больше подходит несколько иная нормировка переменных. Пусть известен некоторый характерный масштаб колебаний  $A$ . Введем безразмерные время и координату следующим образом:

$$t' = \omega_0 t, \quad x' = x/A. \quad (9.2)$$

Уравнение (9.1) примет вид (штрихи у безразмерных переменных опускаем)

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0, \quad (9.3)$$

где  $\varepsilon = \alpha A/\omega_0^2$ . Рассмотрим случай *слабой нелинейности*, когда  $\varepsilon \ll 1$ , т.е. уравнение (9.3) содержит *малый параметр*. Вообще, следует отметить, что условием применимости любого асимптотического метода является присутствие в уравнении малого (или большого) параметра.

Уравнение (9.3) близко к уравнению линейного консервативного осциллятора, оно отличается от него малым слагаемым порядка  $\varepsilon$ . Поэтому интуитивно ясно, что решение будет иметь вид квазигармонических (т.е. почти гармонических, близких к гармоническим) колебаний. Попробуем построить приближенное решение уравнения (9.3). Наиболее простой способ, очевидно, состоит в том, чтобы искать решение в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots, \quad (9.4)$$

считая  $x_{1,2,\dots}$  величинами порядка единицы. В литературе подобный прием называют методом *разложения по малому параметру* или *прямым разложением*. Подставив ряд (9.4) в уравнение (9.3), получим

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon^2 \ddot{x}_3 + \dots + x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_1 x_2 + \dots = 0. \quad (9.5)$$

Приравнявая в (9.5) к нулю члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , приходим к системе «зацепляющихся» уравнений

$$\varepsilon^0: \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (9.6)$$

$$\varepsilon^1: \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^2 = 0, \quad (9.7)$$

$$\varepsilon^2: \ddot{x}_3 + x_3 + 2x_1 x_2 = 0, \quad (9.8)$$

...

Уравнение (9.6) есть уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид

$$x_1 = a \cos(t + \varphi), \quad (9.9)$$

где амплитуда  $a$  и начальная фаза  $\varphi$  — постоянные, определяемые из начальных условий. Далее подставим решение (9.9) в уравнение (9.7), чтобы найти  $x_2$ :

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^2 = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos 2(t + \varphi) \quad (9.10)$$

Это уравнение формально совпадает с уравнением линейного консервативного осциллятора под внешним воздействием. Его решение следует искать в виде

$$x_2 = x_2^{(o)} + x_2^{(n)}, \quad (9.11)$$

где

$$x_2^{(o)} = a_1 \cos(t + \varphi_1) \quad (9.12)$$

— решение однородного уравнения, описывающее собственные колебания осциллятора. Его амплитуда  $a_1$  и начальная фаза  $\varphi_1$  по-прежнему определяются из начальных условий. Второе слагаемое  $x_2^{(n)}$  есть частное решение неоднородного уравнения. Оно

представляет собой вынужденные колебания осциллятора, т.е. отклик на внешнее воздействие. Как мы знаем из теории линейных колебаний, в спектре вынужденных колебаний будут содержаться те частоты, которые присутствуют в спектре вынуждающей силы. В данном случае это нулевая (постоянная составляющая) и вторая гармоники. Нетрудно найти, что

$$x_2^{(n)} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi). \quad (9.13)$$

Итак

$$x_2 = a_1 \cos(t + \varphi_1) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi). \quad (9.14)$$

Отметим, что полученное нами решение содержит *четыре* независимых постоянных ( $a, \varphi, a_1, \varphi_1$ ), для определения которых имеются только *два* начальных условия. Поэтому можно две из этих постоянных выбрать произвольным образом. Наиболее удобно положить  $a_1 = 0$ . В дальнейшем для простоты условимся во всех высших порядках малости полагать составляющие, соответствующие собственным колебаниям, равными нулю.

Таким образом, окончательный вид решения с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$  таков:

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[ -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi) \right] + \dots \quad (9.15)$$

Как видно из выражения (9.15), в спектре колебаний появляются высшие гармоники: нулевая и вторая, амплитуды которых имеют порядок  $\varepsilon a^2$ , т.е. много меньше амплитуды основной составляющей. Можно продолжить описанную процедуру, продвигаясь во все более высокие порядки малости. В решении появятся и другие гармоники: третья, четвертая и т.д. Однако их амплитуды будут еще меньше (порядка  $\varepsilon^{n-1} a^n$ , где  $n$  — номер гармоники). Действительно, поскольку нелинейность является слабой, амплитуды высших гармоник должны быстро уменьшаться с ростом их номера.

Остается только вычислить константы  $a$  и  $\varphi$ . Пусть начальные условия имеют вид

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0. \quad (9.16)$$

Тогда, используя выражение (9.15), легко найти, что

$$\begin{aligned} a \cos \varphi - \varepsilon \left[ \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos 2\varphi \right] &= x_0, \\ a \sin \varphi + \frac{\varepsilon a^2}{3} \sin 2\varphi &= -y_0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Это система трансцендентных уравнений, получить точное решение которой в общем случае не удастся. Однако, учитывая, что в (9.17) содержится малый параметр, можно представить решение в виде рядов

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \varepsilon a_1 + \dots, \\ \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots \end{aligned} \quad (9.18)$$

В разложениях (9.18) нужно учитывать то же число членов, что и в решении (9.15). Пытаться найти  $a$  и  $\varphi$  с более высокой степенью точности, очевидно, просто не имеет смысла.

Итак, подставим (9.18) в систему (9.17) и выделим члены одинаковых порядков малости. В нулевом порядке по  $\varepsilon$  будем иметь

$$\begin{aligned} a_0 \cos \varphi_0 &= x_0, \\ a_0 \sin \varphi_0 &= -y_0, \end{aligned} \quad (9.19)$$

откуда нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \\ \varphi_0 &= \arg(x - iy) = -2 \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Члены порядка  $\varepsilon$  в (9.17) дают

$$\begin{aligned} a_1 \cos \varphi_0 - a_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 - \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{6} \cos 2\varphi_0 &= 0, \\ a_1 \sin \varphi_0 + a_0 \varphi_1 \cos \varphi_0 + \frac{a_0^2}{3} \sin 2\varphi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Это система линейных уравнений относительно  $a_1$ ,  $\varphi_1$ , найти решение которой не представляет труда. Мы предлагаем читателю проделать это самостоятельно.

**Разложение по степеням параметра нелинейности.****Осциллятор Дуффинга**

Столь простой подход, как прямое разложение по степеням малого параметра, не всегда приводит к успеху. Чтобы показать это, рассмотрим осциллятор Дуффинга (осциллятор с кубической нелинейностью)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \quad (9.22)$$

Вновь используем замену переменных (9.2). Тогда уравнение (9.22) примет вид

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (9.23)$$

где теперь  $\varepsilon = \beta A^2 / \omega_0^2$ . Как и прежде, будем рассматривать случай слабой нелинейности, т.е.  $\varepsilon \ll 1$ . Отыскивая решение в виде (9.4), вместо уравнений (9.6)-(9.8) будем иметь

$$\varepsilon^0 : \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (9.24)$$

$$\varepsilon^1 : \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 = 0. \quad (9.25)$$

В нулевом порядке по  $\varepsilon$ , естественно, по-прежнему получаем уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид (9.9). Попробуем найти  $x_2$ . После подстановки выражения для  $x_1$  (9.9) уравнение (9.7) приводится к виду

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^3 = -a^3 \cos^3(t + \varphi) = -\frac{a^3}{4} [3 \cos(t + \varphi) + \cos 3(t + \varphi)]. \quad (9.26)$$

Нужно найти решение этого уравнения, соответствующее вынужденным колебаниям в членах высшего порядка. Поскольку нелинейность кубичная, в данном случае в спектре внешнего воздействия содержатся первая и третья гармоники. Решение будем искать в виде суперпозиции откликов на эти воздействия:

$$x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(3)}, \quad (9.27)$$

где  $x_2^{(1)}$  и  $x_2^{(3)}$  удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{x}_2^{(1)} + x_2^{(1)} = -\frac{3a^3}{4} \cos(t + \varphi), \quad (9.28)$$

$$\ddot{x}_2^{(3)} + x_2^{(3)} = -\frac{a^3}{4} \cos 3(t + \varphi). \quad (9.29)$$

Решение уравнения (9.29) находится без труда и имеет вид гармонических колебаний на частоте вынуждающей силы:

$$x_2^{(3)} = \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi). \quad (9.30)$$

Что же касается уравнения (9.28), то в нем внешнее воздействие имеет частоту, равную частоте собственных колебаний осциллятора. Как известно из теории линейных колебаний, в этом случае возникает *резонанс*, выражающийся в неограниченном нарастании амплитуды колебаний по линейному закону. Соответствующее решение имеет вид

$$x_2^{(1)} = -\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi). \quad (9.30)$$

Это так называемый *секулярный* или вековой член. (Термин берет свое начало из небесной механики.) Окончательный вид решения с точностью до членов второго порядка малости таков:

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[ -\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi) + \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi) \right] + \dots \quad (9.31)$$

Обратим внимание, что, как бы ни был мал параметр  $\varepsilon$ , с течением времени второй член в решении (9.31), неограниченно нарастая, становится больше первого. Таким образом, справедливость разложения (9.4) на больших временах нарушается, или, как говорят математики, *разложение не является равномерно пригодным по  $t$* . Это явно нефизический результат. Действительно, как мы показали в лекции 8, решения уравнения Дуффинга имеют вид периодических нелинейных колебаний, и никакого нарастания амплитуды со временем нет.

В чем же причина неудачного результата? Дело в том, что колебания осциллятора Дуффинга являются неизохронными, т.е. их период зависит от амплитуды. Разложение (9.4) принципиально не учитывает неизохронность: в спектре колебаний могут появиться только собственная частота линейных колебаний и её гармоники.

Для осциллятора с квадратичной нелинейностью (9.3) мы на самом деле пришли бы к аналогичному результату, если бы продвинулись в вычислениях ещё на один порядок. Как видно из уравнения (9.8), при попытке найти решение для  $x_3$  в правой части появится произведение  $x_1 x_2$ . Поскольку выражение для  $x_1$  (9.9) содержит первую гармонику, а выражение для  $x_2$  (9.13) — вторую, их произведение будет содержать первую и третью гармоники. Следовательно, в решении для  $x_3$  мы также получим секулярно растущее слагаемое.

**Метод Линшtedта — Пуанкаре**

Итак, необходимо модифицировать схему решения таким образом, чтобы можно было учесть неизохронность. Наиболее простой способ был предложен А. Линшtedтом (1883) и А. Пуанкаре (1892). Введем в уравнении (9.23) новую временную переменную  $\tau = \omega t$ . Поскольку  $d/dt = \omega d/d\tau$ , получим

$$\omega^2 x'' + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (9.32)$$

Здесь штрихами обозначены производные по  $\tau$ . Будем искать решение уравнения (9.32) в виде разложений в степенной ряд как для переменной  $x$ , так и для частоты  $\omega$ :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots, \\ \omega &= 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (9.33)$$

Первый член в разложении для  $\omega$  должен представлять собой частоту линейных колебаний, которая в принятой нормировке равна единице. Последующие поправки  $\omega_1, \omega_2, \dots$  будут описывать эффекты неизохронности.

Подставим разложения (9.33) в уравнение (9.32). Получим

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + 2\varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 (\omega_1^2 + 2\omega_2) + \dots \right] [x_1'' + \varepsilon x_2'' + \dots] + \\ & + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Преобразуем уравнение (9.34). После несложных вычислений приведем его к виду

$$x_1'' + x_1 + \varepsilon (x_2'' + x_2 + 2\omega_1 x_1'' + x_1^3) + \dots = 0. \quad (9.35)$$

Приравнявая к нулю члены нулевого и первого порядков малости, будем иметь

$$x_1'' + x_1 = 0, \quad (9.36)$$

$$x_2'' + x_2 = -2\omega_1 x_1'' - x_1^3. \quad (9.37)$$

Решение уравнения (9.36) запишем в виде

$$x_1 = a \cos(\tau + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (9.38)$$

Подставив это соотношение в правую часть (9.37), найдем, что

$$x_2'' + x_2 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) - \frac{a^3}{4} [3 \cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi)]. \quad (9.39)$$

Теперь необходимо выбрать  $\omega_1$  таким образом, чтобы устранить члены, пропорциональные  $\cos(\tau + \varphi)$ , которые приводят к секулярному росту решения для  $x_2$ . Для этого, очевидно, следует положить

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8}. \quad (9.40)$$

Теперь уравнение (9.39) принимает вид

$$x_2'' + x_2 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(\tau + \varphi). \quad (9.41)$$

Его решение

$$x_2 = \frac{a^3}{32} \cos 3(\tau + \varphi) \quad (9.42)$$

не содержит секулярных составляющих и разложение остается равномерно пригодным при всех  $t$ .

Окончательный вид найденного нами решения с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$  таков (ср. (9.31)):

$$x \approx a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos 3(\omega t + \varphi), \quad (9.43)$$

$$\omega \approx 1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8}. \quad (9.44)$$

Если параметр  $\varepsilon$  считается положительным, то частота колебаний растет с ростом амплитуды, при  $\varepsilon < 0$  частота, наоборот, уменьшается.

Отметим, что в отличие от осциллятора с квадратичной нелинейностью в спектре колебаний в первую очередь появляется не вторая, а третья гармоника. Если продолжать разложения далее, то можно убедиться, что спектр будет содержать *только нечетные гармоники*. Это является следствием симметрии уравнения Дуффинга относительно замены  $x \rightarrow -x$ . Аналогичный результат мы получили при анализе колебаний математического маятника (лекция 7).

**Задача 9.1.** Получите оценку для частоты слабонелинейных колебаний (9.44) из точного решения, найденного в лекции 8.

*Решение.* В случае  $\varepsilon > 0$  для периода справедливо соотношение (8.34). Заменяя в этой формуле  $x_0^2$  приближенно на величину  $\varepsilon a^2$ , найдем, что

$$T = \frac{4K(m)}{\sqrt{1+\varepsilon a^2}}, \quad m^2 = \frac{\varepsilon a^2}{2(1+\varepsilon a^2)}, \quad (9.45)$$

где  $K(m)$  — полный эллиптический интеграл первого рода. С учетом малости  $\varepsilon$  имеем  $m^2 \approx \varepsilon a^2/2$ .

Получим приближенное выражение для  $K(m)$  при малых значениях  $m$ . В этом случае

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi}} \approx \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \sin^2 \psi\right) d\psi \quad (9.46)$$

Интеграл (9.46) легко вычисляется:

$$K(m) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{m^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon a^2}{8}\right). \quad (9.47)$$

Подставив это выражение в формулу (9.45) и ограничиваясь членами порядка  $\varepsilon$ , будем иметь

$$T \approx 2\pi \left(1 + \frac{\varepsilon a^2}{8}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon a^2}{2}\right) \approx 2\pi \left(1 - \frac{3\varepsilon a^2}{8}\right). \quad (9.48)$$

Тогда видно, что частота  $\omega = 2\pi/T$  совпадает с формулой (9.44).

В случае  $\varepsilon < 0$  период колебаний определяется формулой (8.42), которую можно приближенно записать в виде

$$T = \frac{4K(m)}{\sqrt{1-|\varepsilon|a^2/2}}, \quad m^2 = \frac{|\varepsilon|a^2}{2(1-|\varepsilon|a^2/2)} \approx \frac{|\varepsilon|a^2}{2}. \quad (9.49)$$

С учетом выражения (9.47) получаем

$$T \approx 2\pi \left(1 + \frac{|\varepsilon|a^2}{8}\right) \left(1 + \frac{|\varepsilon|a^2}{4}\right) \approx 2\pi \left(1 + \frac{3|\varepsilon|a^2}{8}\right) = 2\pi \left(1 - \frac{3\varepsilon a^2}{8}\right). \quad (9.50)$$

Следовательно, для частоты снова приходим к формуле (9.44).

На рис. 9.1 для сравнения приведены зависимости  $x(t)$ , полученные по различными приближенным методикам, и точное решение (8.36). Параметр  $a$  выбран равным 0.5, т.е. нелинейность, вообще говоря, достаточно сильная. Тем не менее, решение (9.43), полученное методом Линштедта — Пуанкаре, достаточно хорошо согласуется с точным решением. В то же время зависимость  $x(t)$ , построенная согласно формуле (9.31), демонстрирует очевидный рост амплитуды по линейному закону, и уже на временах порядка периода колебаний расхождение становится существенным.

**Задача 9.2** Приведите приближенно задачу о движении частицы в потенциальной яме вида  $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$  к модели осциллятора с кубической нелинейностью. В рамках этой модели найдите зависимость периода колебаний от частоты. Сравните полученный результат с точным (задача 4.6), построив соответствующую таблицу.

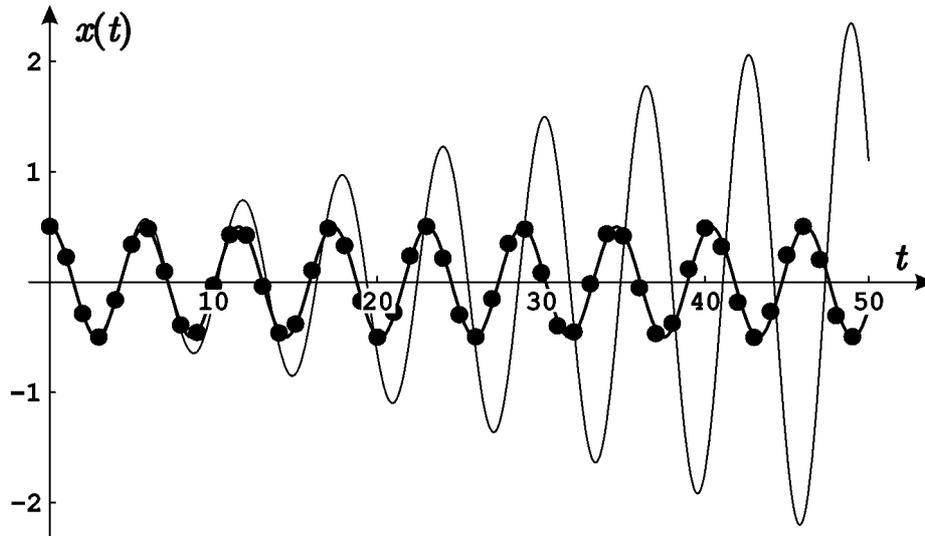


Рис. 9.1. Решения уравнения Дуффинга: жирная сплошная линия — точное решение (8.36); тонкая линия — метод прямого разложения по малому параметру; кружки — метод Линштедта — Пуанкаре.

**Задача 9.3.** Представьте математический маятник в виде модели осциллятора с кубической нелинейностью. С ее помощью оцените угловую амплитуду колебаний математического маятника, для которой период на 1% отличается от значения, предсказанного линейной теорией.

**Задача 9.4.** С помощью модели осциллятора с кубической нелинейностью оцените отношение первой и третьей гармоник в спектре математического маятника, совершающего колебания с угловыми амплитудами  $\pi/6$  и  $\pi/2$ .

**Задача 9.5.** Найдите поправку к частоте линейных колебаний для математического маятника. Покажите, что в первом порядке по квадрату амплитуды полученная оценка согласуется с известным результатом, отвечающим аппроксимации математического маятника осциллятором с кубической нелинейностью. Оцените период колебаний с угловой амплитудой  $\pi/2$ . Сравните найденное значение с точным и с оценкой для осциллятора с кубической нелинейностью. (Указание. Используйте формулу для разложения функции  $\sin(x \sin \theta)$  в ряд по функциям Бесселя.)

**Задача 9.6.** Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Ленарда-Джонса

$$U(r) = 4a \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^{12} - \left( \frac{b}{r} \right)^6 \right],$$

где  $a$  и  $b$  — положительные константы. Используя представление системы для слабонелинейных колебаний в виде уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью (задача 8.5), получите приближенное решение с точностью до членов первого порядка малости. На основании полученных результатов дайте объяснение механизма теплового расширения твердых тел.

**Задача 9.7.** Найти поправку первого порядка к частоте слабонелинейных колебаний для нелинейного осциллятора

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^5 = 0.$$

**Задача 9.8.** Найти поправку первого порядка к частоте слабонелинейных колебаний для осциллятора с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0.$$

Сравнить полученное приближенное решение с точным (лекция 8).

*Решение.* Перейдем к новой переменной  $\tau = \omega t$  и будем искать решение в виде (9.33). В первом порядке малости, очевидно, по-прежнему будем иметь уравнение гармонического осциллятора

$$x_1'' + x_1 = 0,$$

решение которого выберем в виде  $x_1 = a \cos(\tau + \varphi)$ . Во втором порядке малости получим

$$x_2'' + x_2 = -2\omega_1 x_1'' - x_1^2,$$

что после подстановки решения для  $x_1$  дает

$$x_2'' + x_2 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) - \frac{a^2}{2} [1 + \cos 2(\tau + \varphi)].$$

Отсюда следует, что  $\omega_1 = 0$ , т.е. нелинейная поправка к частоте будет иметь порядок  $\varepsilon^2$ . Это согласуется с результатами, полученными на основе метода прямого разложения. Решение для  $x_2$  будет содержать нулевую и вторую гармоники (ср. с формулой (9.15)):

$$x_2 = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(\tau + \varphi).$$

Теперь запишем уравнение для членов порядка  $\varepsilon^2$ :

$$x_3'' + x_3 = -2\omega_2 x_1'' + 2x_1 x_2 = 2\omega_2 a \cos(\tau + \varphi) - a^3 \cos(\tau + \varphi) \left[ 1 - \frac{1}{3} \cos 2(\tau + \varphi) \right].$$

Нетрудно видеть, что в правой части этого уравнения содержатся первая и третья гармоники. Приравнявая к нулю секулярные слагаемые, пропорциональные  $\cos(\tau + \varphi)$ , находим, что  $\omega_2 = -5a^2/12$ . Итак,

$$\omega \approx 1 - \frac{5\varepsilon^2 a^2}{12}.$$

Таким образом, с ростом амплитуды частота колебаний осциллятора с квадратичной нелинейностью уменьшается, а период увеличивается. Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что полученное выражение полностью согласуется с точной формулой (8.25), если в ней положить  $x_0 \approx \varepsilon a/2$ ,  $x_1 \approx -\varepsilon a/2$ ,  $x_2 \approx -3/2$  и разложить ее с точностью до членов второго порядка малости.

**Задача 9.9.** Найти поправку первого порядка к частоте слабонелинейных колебаний вблизи устойчивого положения равновесия для осциллятора с кубичной нелинейностью вида

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0.$$

Сравнить полученное приближенное решение с точным (лекция 8).

### Метод многих масштабов

Приближенное решение (9.43), полученное при помощи метода Линштедта — Пуанкаре, можно представить в виде

$$x \approx a \cos\left(t + \frac{3a^2 \varepsilon t}{8} + \varphi\right) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos\left(3t + \frac{9a^2 \varepsilon t}{8} + 3\varphi\right). \quad (9.51)$$

Зависимость от времени входит в это выражение двояким образом:  $x = x(t, \varepsilon t)$ . Поскольку  $\varepsilon$  является малым параметром, зависимость от  $\varepsilon t$  можно интерпретировать как *медленное изменение параметров колебания*. Продолжая разложение до более высоких порядков малости, мы приходим к представлению решения в виде  $x = x(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t, \dots)$ . Введем обозначения

$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots \quad (9.52)$$

Зависимость от каждого очередного аргумента  $T_n$  характеризует изменения, которые проявляются на последовательно возрастающих масштабах времени.

Идея перехода от единственного времени  $t$  к набору переменных  $T_n$  (9.52) лежит в основе *метода многих масштабов* (или метода многомасштабных разложений), позволяющего получать решения широкого класса задач теории колебаний. Продемонстрируем его применение на примере уравнения Дуффинга (9.23). Для большей общности включим в него слабое затухание

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\gamma\dot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (9.53)$$

Здесь  $\gamma$  считается величиной порядка единицы. Отметим, что метод Линштедта — Пуанкаре неприменим в случае, когда учитывается затухание, так как в нем изначально предполагается, что амплитуда и частота колебаний являются постоянными, и эффекты уменьшения амплитуды описать не удастся.

При переходе к новым переменным  $T_n$  операторы дифференцирования преобразуются следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \equiv \hat{D}_0 + \varepsilon \hat{D}_1 + \varepsilon^2 \hat{D}_2 + \dots, \quad (9.54)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \hat{D}_0^2 + 2\varepsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 + \varepsilon^2 (\hat{D}_1^2 + 2\hat{D}_0 \hat{D}_2) + \dots, \quad (9.55)$$

где для сокращения записи введены обозначения  $\hat{D}_n \equiv \partial/\partial T_n$ . Решение для переменной  $x$  по-прежнему будем искать в виде степенного ряда

$$x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots \quad (9.56)$$

Подставляя разложения (9.54)-(9.56) в уравнение (9.53), получим

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x_1 + 2\varepsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 + \dots + \varepsilon \hat{D}_0^2 x_2 + \dots + 2\varepsilon \gamma \hat{D}_0 x_1 + \dots + \\ + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Приравняв к нулю члены порядка  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ , приходим, соответственно, к следующим уравнениям

$$\hat{D}_0^2 x_1 + x_1 = 0, \quad (9.58)$$

$$\hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -2\hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 - 2\gamma \hat{D}_0 x_1 - x_1^3. \quad (9.59)$$

Решение уравнения гармонического осциллятора (9.58) по-прежнему запишем в виде

$$x_1 = a \cos(T_0 + \varphi), \quad (9.60)$$

но теперь будем считать  $a$  и  $\varphi$  не постоянными, а *функциями, зависящими от медленных переменных*:

$$a = a(T_1, T_2, \dots), \quad \varphi = \varphi(T_1, T_2, \dots). \quad (9.61)$$

Действительно, уравнение (9.53) в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходит в уравнение гармонического осциллятора, поэтому неудивительно, что решение в нулевом порядке по  $\varepsilon$  представляет собой квазигармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой и фазой.

Подставим решение (9.60) в правую часть уравнения (9.59). При этом надо учитывать, что оператор  $\hat{D}_0$  действует только на аргумент тригонометрических функций  $T_0$ , а оператор  $\hat{D}_1$  — на медленно меняющиеся переменные  $a, \varphi$ . Получим

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 &= 2\left(\hat{D}_1 a \cdot \sin(T_0 + \varphi) + a \hat{D}_1 \varphi \cdot \cos(T_0 + \varphi)\right) + 2\gamma a \sin(T_0 + \varphi) - a^3 \cos^3(T_0 + \varphi) = \\ &= 2\left(\hat{D}_1 a + \gamma a\right) \sin(T_0 + \varphi) + \left(2a \hat{D}_1 \varphi - \frac{3a^3}{4}\right) \cos(T_0 + \varphi) - \frac{a^3}{4} \cos 3(T_0 + \varphi). \end{aligned} \quad (9.62)$$

В правой части уравнения (9.62) следует приравнять к нулю секулярные члены, пропорциональные  $\sin(T_0 + \varphi)$ ,  $\cos(T_0 + \varphi)$ . Это приводит к уравнениям

$$\hat{D}_1 a + \gamma a = 0, \quad (9.63)$$

$$\hat{D}_1 \varphi - \frac{3a^2}{8} = 0. \quad (9.64)$$

Таким образом, мы получили дифференциальные уравнения, которые позволяют описать динамику медленно меняющихся переменных  $a(T_1)$ ,  $\varphi(T_1)$ . Такие уравнения называют *укороченными*.

В случае консервативного осциллятора ( $\gamma = 0$ ) уравнения (9.63), (9.64) приводят к результату, в точности совпадающему с методом Линштедта — Пуанкаре

$$\begin{aligned} a &= a_0, \\ \varphi &= \frac{3a_0^2 T_1}{8} + \varphi_0, \end{aligned} \quad (9.65)$$

где  $a_0, \varphi_0$  — постоянные, определяемые из начальных условий. Величина  $\hat{D}_1 \varphi$ , очевидно, есть поправка к частоте, появляющаяся из-за нелинейных эффектов. Для нее мы получаем значение, совпадающее с (9.40).

При  $\gamma > 0$  найти решение укороченных уравнений также не составляет труда:

$$\begin{aligned} a &= a_0 \exp(-\gamma T_1), \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{3a_0^2}{16\gamma} (1 - \exp(-2\gamma T_1)). \end{aligned} \quad (9.66)$$

Эти соотношения описывают экспоненциальное затухание амплитуды; при этом поправка к частоте также уменьшается. В пределе  $\gamma \rightarrow 0$  они переходят в (9.65).

После исключения секулярных членов уравнение (9.62) принимает вид

$$\hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(T_0 + \varphi). \quad (9.67)$$

Оно, очевидно, совпадает с уравнением (9.41), которое анализировалось в предыдущем разделе. Поэтому сразу запишем окончательный вид решения:

$$x \approx a(T_1) \cos[T_0 + \varphi(T_1)] + \frac{\varepsilon a^3(T_1)}{32} \cos 3[T_0 + \varphi(T_1)]. \quad (9.68)$$

Зависимость амплитуды и фазы от медленного времени дается соотношениями (9.66).

При использовании метода многих масштабов более удобно оперировать комплексной формой записи. Представим решение (9.60) для  $x_1$  в виде

$$x_1 = A(T_1) e^{iT_0} + \text{к.с.}, \quad (9.69)$$

где к.с. — комплексно сопряженное выражение,  $A$  — медленно меняющаяся комплексная амплитуда, модуль и аргумент которой описывают медленные изменения, соответственно, амплитуды и фазы колебаний. Тогда уравнение (9.59) примет вид

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 &= -\left(2i\hat{D}_1 A e^{iT_0} + 2i\gamma A e^{iT_0} + \text{к.с.}\right) - \left(A e^{iT_0} + \text{к.с.}\right)^3 = \\ &= -\left(2i\hat{D}_1 A e^{iT_0} + 2i\gamma A e^{iT_0} + \text{к.с.}\right) - \left(A^3 e^{3iT_0} + 3A^2 A^* + \text{к.с.}\right). \end{aligned} \quad (9.70)$$

Здесь звездочка также означает операцию комплексного сопряжения.

В правой части (9.70) следует потребовать уничтожения секулярных членов, пропорциональных  $\exp(iT_0)$ . Это приводит к одному комплексному уравнению

$$\hat{D}_1 A + \gamma A - \frac{3i|A|^2 A}{2} = 0. \quad (9.71)$$

Вводя вещественные амплитуду и фазу  $A = \frac{1}{2} a e^{i\varphi}$ , и разделяя в (9.61) вещественную и мнимую части, приходим к уравнениям (9.63), (9.64). Оперировать комплексными экспонентами более удобно, чем тригонометрическими функциями, поэтому в дальнейшем мы, как правило, будем пользоваться именно таким представлением.

**Задача 9.10.** Получите укороченное уравнение для осциллятора с квадратичной нелинейностью и слабым затуханием

$$\ddot{x} + 2\varepsilon^2 \gamma \dot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0.$$

Сравнить с результатами, полученными при решении задачи 9.8.

**Задача 9.11.** Получите укороченное для колебательного контура, состоящего из последовательно соединенных индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и нелинейного резистора, характеризующегося вольт-амперной характеристикой  $U = IR + kI^3$ . Проанализируйте динамику амплитуды колебаний.

### Метод Ван-дер-Поля

Метод Ван-дер-Поля представляет собой простейший вариант *метода усреднения*. Он был разработан Б. Ван-дер-Подем (1920) для исследования различных автоколебательных процессов в ламповом генераторе. Математическое обоснование этого метода было дано Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси (1934). Дальнейшее развитие метод ус-

реднения получил в работах Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и др.

Рассмотрим вновь уравнение Дуффинга, которое запишем в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + \beta x^3 = 0. \quad (9.72)$$

Формально малый параметр здесь мы не вводим, однако будем считать, что  $\gamma, \beta \ll 1$ , т.е. система близка к уравнению линейного консервативного осциллятора. Вообще, близость к линейной консервативной системе является условием применимости метода Ван-дер-Поля. Это позволяет представить решение в виде

$$x = A(t)e^{it} + \text{к.с.}, \quad (9.73)$$

где  $A(t)$  — медленно меняющаяся по сравнению с  $\exp(it)$  комплексная амплитуда (в связи с чем этот метод называют также *методом медленно меняющихся амплитуд*). Нетрудно подсчитать, что

$$\dot{x} = \dot{A}e^{it} + iAe^{it} + \dot{A}^*e^{-it} - iA^*e^{-it}. \quad (9.74)$$

Отметим, что вместо одной зависимой переменной  $x$  по сути введены две:  $A$  и  $A^*$ . Поэтому можно наложить между этими величинами дополнительную связь. Удобно потребовать, чтобы

$$\dot{A}e^{it} + \dot{A}^*e^{-it} = 0. \quad (9.75)$$

Тогда уравнение (9.74) упрощается:

$$\dot{x} = iAe^{it} - iA^*e^{-it}. \quad (9.76)$$

Продифференцируем это уравнение ещё раз. Получим

$$\ddot{x} = i\dot{A}e^{it} - Ae^{it} - i\dot{A}^*e^{-it} + A^*e^{-it}. \quad (9.77)$$

С учетом соотношения (9.75) уравнение (9.77) принимает вид

$$\ddot{x} = 2i\dot{A}e^{it} - Ae^{it} + A^*e^{-it}. \quad (9.78)$$

Подставляя выражения (9.76), (9.78) в исходное уравнение (9.72), после ряда вычислений приходим к следующему уравнению:

$$2i\dot{A}e^{it} + 2i\gamma(Ae^{it} - A^*e^{-it}) + \beta(A^3e^{3it} + 3|A|^2Ae^{it} + 3|A|^2A^*e^{-it} + (A^*)^3e^{-3it}) = 0. \quad (9.79)$$

Отметим, что в уравнении (9.79) все члены одного порядка малости: они либо содержат производные от медленно меняющейся амплитуды  $A$ , либо пропорциональны малым параметрам  $\gamma, \beta$ .

Разделим уравнение (9.79) на  $\exp(it)$

$$2i\dot{A} + 2i\gamma A - 2i\gamma A^* e^{-2it} + \beta \left( A^3 e^{2it} + 3|A|^2 A + 3|A|^2 A^* e^{-2it} + (A^*)^3 e^{-4it} \right) = 0. \quad (9.80)$$

Теперь усредним уравнение (9.80) по периоду основной частоты. Операция усреднения осуществляется следующим образом:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (9.81)$$

где  $T$  — период колебаний (в данном случае  $T = 2\pi$ ). Поскольку  $A(t)$  — медленно меняющаяся функция, при усреднении ее можно вынести за знак интеграла. Тогда, как нетрудно заметить, быстро осциллирующие члены (т.е. все члены содержащие комплексные экспоненты) в уравнении (9.80) дают нуль, и в результате мы приходим к укороченному уравнению

$$\dot{A} + \gamma A - \frac{3i\beta |A|^2 A}{2} = 0. \quad (9.82)$$

Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением (9.71), полученным методом многих масштабов.

Отметим, что метод многих масштабов позволяет, вообще говоря, продвинуться дальше, поскольку с его помощью мы не только определили эволюцию медленно меняющихся амплитуды и фазы, но и нашли компоненту на частоте третьей гармоники. Кроме того мы могли бы продолжать разложения до более высоких порядков малости, каждый раз все больше и больше уточняя решение. Впрочем, метод усреднения также допускает соответствующее обобщение (так называемый метод Крылова — Боголюбова). Этот метод имеет много общего с методом многих масштабов; подробно останавливаться на нем мы не будем.

**Задача 9.12.** Осциллятор представляет собой груз массы  $m$ , прикрепленный к стене пружиной с жесткостью  $k$  (рис. 9.2). Груз может двигаться вдоль горизонтальной поверхности, причем сила «сухого» трения между грузом и поверхностью подчиняется закону Кулона — Амонтона (см. лекцию 2)

$$f_{mp} = \mu mg \operatorname{sgn}(v),$$

где  $\mu$  — коэффициент трения,  $v$  — скорость движения. Получить укороченное уравнение для амплитуды колебаний и исследовать характер затухания.

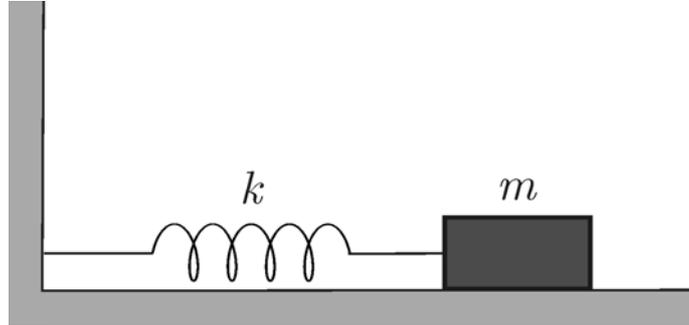


Рис. 9.2. Пружинный маятник с «сухим» трением

*Решение.* Нетрудно показать, что колебания осциллятора подчиняются уравнению

$$\ddot{x} + \gamma \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \omega_0^2 x = 0, \quad (9.83)$$

где  $\gamma = \mu g$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Далее будем предполагать коэффициент  $\gamma$  малым, чтобы можно было считать амплитуду колебаний медленно меняющейся. Прежде чем перейти к решению задачи, рекомендуем читателю самостоятельно построить фазовый портрет системы.

Получим укороченное уравнение. Используя метод Ван-дер-Поля, представим решение в виде квазигармонического колебания с медленно меняющимися амплитудой и фазой

$$x = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (9.84)$$

Дифференцируя соотношение (9.84), получаем

$$\dot{x} = -\omega_0 a \cos(\omega_0 t + \varphi) + \dot{a} \cos(\omega_0 t + \varphi) - a \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (9.85)$$

Наложим на  $a$  и  $\varphi$  дополнительное условие

$$\dot{a} \cos(\omega_0 t + \varphi) - a \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0, \quad (9.86)$$

тогда

$$\dot{x} = -\omega_0 a \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (9.87)$$

Дифференцируя соотношение (9.87) еще раз, находим

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 a \cos(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 \dot{a} \sin(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 a \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (9.88)$$

Подставив (9.87), (9.88) в уравнение (9.83), получим

$$\dot{a} \sin(\omega_0 t + \varphi) + a \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{\gamma}{\omega_0} \operatorname{sgn}(\sin(\omega_0 t + \varphi)). \quad (9.89)$$

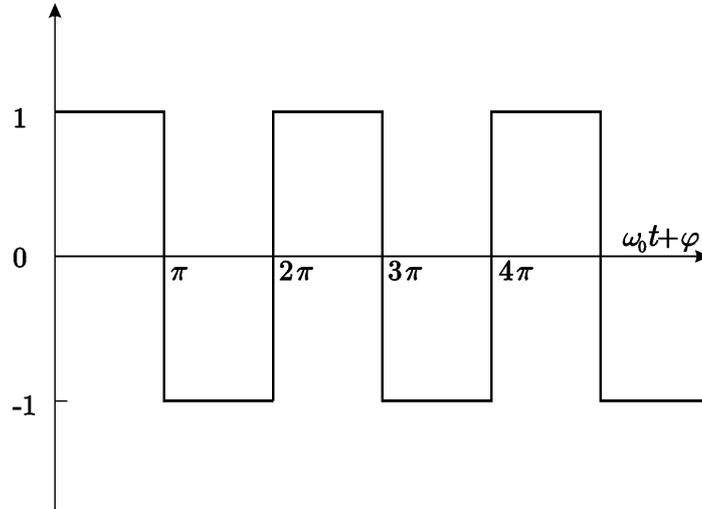


Рис. 9.3. Функция  $\text{sgn}(\sin(\omega_0 t + \varphi))$ .

Правая часть уравнения (9.89) представляет собой последовательность прямоугольных импульсов (рис. 9.3). Ее можно разложить в ряд Фурье

$$\text{sgn}(\sin(\omega_0 t + \varphi)) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k(\omega_0 t + \varphi), \quad (9.90)$$

где

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{sgn}(\sin \theta) \sin k\theta \, d\theta, \quad (9.91)$$

где  $\theta = \omega_0 t + \varphi$ . При вычислении интеграла в (9.91) будем пренебрегать медленным изменением фазы  $\varphi$ .

Получим

$$b_k = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ 4/\pi k, & k = 2n + 1 \end{cases} \quad (9.92)$$

Итак, уравнение (9.89) принимает вид

$$\dot{a} \sin(\omega_0 t + \varphi) + a \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{4\gamma}{\pi\omega_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin[(2n+1)(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (9.93)$$

Домножив уравнение (9.92) на  $\sin(\omega_0 t + \varphi)$  и используя (9.86), получаем

$$\dot{a} = -\frac{4\gamma}{\pi\omega_0} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin[(2n+1)(\omega_0 t + \varphi)] \right) \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (9.94)$$

Усредним уравнение (9.94) по периоду  $T = 2\pi/\omega_0$ . Очевидно, что все члены суммы, кроме члена с  $n = 0$ , при усреднении дадут нуль. В результате получим уравнение

$$\dot{a} = -\frac{2\gamma}{\pi\omega_0}. \quad (9.95)$$

Таким образом, амплитуда колебаний затухает по линейному закону

$$a = a_0 - \frac{2\gamma t}{\pi\omega_0} \quad (9.96)$$

и обращается в нуль за конечное время порядка  $t^* = \pi a_0 \omega_0 / 2\gamma$ . Здесь  $a_0$  — начальное смещение груза. Понятно, что это выражение является приближенным и справедливо лишь если затухание происходит достаточно медленно, т.е. за время, значительно большее периода колебаний. (Заметим, что если  $a_0 < a^* \equiv \mu mg/k = \gamma/\omega_0^2$ , то колебания вообще не начнутся. Таким образом, условие  $t^* \gg T$  можно переписать в виде  $a_0 \gg 4a^*$ ).

Аналогично можно получить из (9.93) уравнение для  $\dot{\phi}$ . Оно будет иметь вид

$$\dot{\phi} = 0, \quad (9.97)$$

т.е. частота колебаний остается постоянной.