

Часть III

Автоколебания

Примеры автоколебательных систем

Основные определения и понятия

Наряду с колебательными системами, в которых энергия с течением времени может только уменьшаться из-за диссипации, существуют и такие, в которых возможно пополнение энергии колебаний за счет неустойчивостей. Это может иметь место, когда система в состоянии обмениваться с окружающей средой энергией или веществом, т.е. является энергетически неизолированной (открытой). В открытых системах возникает множество принципиально новых явлений, в первую очередь — генерация автоколебаний. Термин «автоколебания» ввел А.А. Андронов в 1928 г. Он же заложил основы теории автоколебаний, впервые связав их с предельными циклами Пуанкаре.

Современное определение автоколебаний можно сформулировать следующим образом. Автоколебания — это незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе, вид и свойства которых определяются самой системой и не зависят от начальных условий (по крайней мере, в конечных пределах). Ключевым в этом определении является требование независимости от начальных условий. С течением времени фазовая траектория стремится к некоторому притягивающему множеству, называемому аттрактором. После переходного процесса в системе устанавливаются колебания, которым отвечает движение изображающей точки по аттрактору. Такие колебания, очевидно, будут зависеть только от параметров системы, а не от начальных условий. Слова «по крайней мере, в конечных пределах» означают, что, в принципе, могут существовать несколько аттракторов, каждый из которых имеет свой бассейн притяжения, т.е. область в фазовом пространстве, откуда фазовые траектории стремятся к данному аттрактору.

Аттракторами, соответствующими периодическим автоколебаниям, являются устойчивые *предельные циклы*. Под предельным циклом понимается замкнутая изолированная фазовая траектория. Термин «изолированная» означает, что в ее достаточно малой (кольцеобразной) окрестности не существует других замкнутых фазовых траекторий. Это отличает предельные циклы от замкнутых фазовых траекторий, соответствующих периодическим колебаниям консервативного нелинейного осциллятора. Предельный цикл является устойчивым, если все соседние траектории приближаются к не-

му при $t \rightarrow \infty$, и неустойчивым, если соседние траектории удаляются от него при $t \rightarrow \infty$.

Разумеется, автоколебания не обязательно должны быть периодическими. Различают также *квазипериодические*, т.е. содержащие несколько независимых спектральных компонент, находящихся в иррациональном соотношении, а также *хаотические* автоколебания, которые являются случайными, хотя совершаются под действием неслучайных источников энергии. Спектр хаотических автоколебаний сплошной. Математическим образом квазипериодических автоколебаний в фазовом пространстве является n -мерный тор, а стохастических — *странный аттрактор*, т.е. притягивающее множество, имеющее чрезвычайно сложную внутреннюю структуру, на котором все (или почти все) траектории неустойчивы. Здесь мы сосредоточимся в основном на изучении периодических автоколебаний.

Класс автоколебательных систем очень широк: механические часы, радиотехнические, электронные и квантовые генераторы электромагнитных колебаний, духовые и смычковые музыкальные инструменты и др. Автоколебательный характер носят некоторые химические реакции процессы в биологических популяциях и живых организмах.

Задача 11.1. В сосуд с поперечным сечением S_1 из крана с сечением S_2 поступает со скоростью V вода. Вода может выливаться через узкую сифонную трубку с поперечным сечением S_3 (рис. 11.1). Высота левого колена трубки равна h , а правого — H . Постройте график зависимости уровня воды в сосуде от времени и обоснуйте автоколебательный характер поведения системы. Найдите период установившихся автоколебаний. Считайте, что скорость вытекания воды через трубку определяется формулой Торричелли.

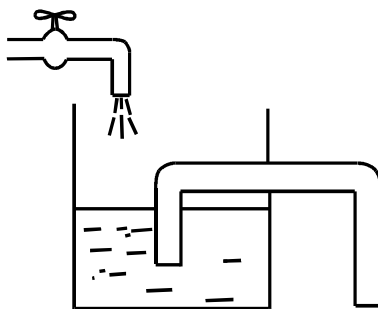


Рис. 11.1

В простейших автоколебательных системах можно, как правило, выделить следующие основные элементы:

- колебательную систему с затуханием;
- усилитель, содержащий источник энергии и преобразователь энергии источника в энергию колебаний;
- нелинейный ограничитель;
- звено обратной связи.

Рассмотрим эти элементы на классическом примере радиотехнического генератора, обобщенная схема которого приведена на рис. 11.2.

Обобщенная схема радиотехнического генератора.

Уравнение Ван-дер-Поля

Схема, приведенная на рис. 11.2 уже кратко обсуждалась ранее в лекции 3. Можно легко выделить те основные структурные элементы, о которых говорилось выше. Колебательной системой здесь служит RLC -контур. Напряжение с контура подается на вход активного элемента — усилителя. Будем считать, что известна нелинейная характеристика усилителя, т.е. зависимость тока на выходе усилителя i от напряжения на входе u , которую можно аппроксимировать кубическим полиномом

$$i(u) = g_0 u - g_2 u^3 + \dots \quad (11.1)$$

Коэффициенты g_n считаются положительными. Физическую природу усилителя мы пока не конкретизируем. Выход усилителя нагружен на катушку индуктивности L_1 , которая индуктивно связана с катушкой контура. Таким образом обеспечивается обратная связь.

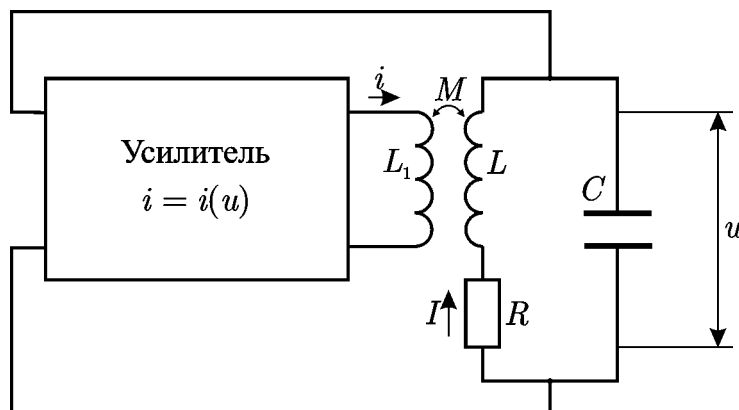


Рис. 11.2. Схема радиотехнического генератора автоколебаний.

Механизм возбуждения автоколебаний в генераторе можно качественно описать следующим образом. Даже при отсутствии напряжения на выходе усилителя напряже-

ние в контуре испытывает случайные флуктуации. Они усиливаются усилителем и вновь поступают в контур через цепь обратной связи. При этом из шумового спектра флуктуаций будет выделяться составляющая на собственной частоте высокодобротного контура. Если энергия, вносимая в контур таким образом, превосходит энергию потерь, амплитуда колебаний нарастает. Для этого необходимо, чтобы коэффициент усиления был достаточно велик. Однако, поскольку зависимость $i(u)$ (11.1) нелинейна, с ростом u коэффициент усиления падает, что приводит к установлению стационарных автоколебаний с постоянной амплитудой, в чем и состоит механизм нелинейного ограничения неустойчивости. Таким образом, нелинейность в автоколебательных системах играет принципиальную роль, регулируя поступление энергии из источника. В линейной системе (например, осциллятор с отрицательным трением) амплитуда колебаний нарастала бы до бесконечности.

Получим дифференциальное уравнение, описывающее колебания генератора. Запишем для контура уравнения Кирхгофа (обозначения показаны на рисунке):

$$\begin{aligned} L \frac{dI}{dt} + RI + u &= M \frac{di(u)}{dt}, \\ u &= \frac{1}{C} \int I dt. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Из этих уравнений с учетом выражения для нелинейной характеристики (11.1) можно получить

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \omega_0^2 (Mg_0 - RC - 3Mg_2u^2) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0. \quad (11.3)$$

Здесь $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота колебательного контура. Уравнение (11.3) носит название *уравнения Ван-дер-Поля* и является основной моделью при анализе периодических автоколебаний.

Определим условия самовозбуждения автоколебаний. Линеаризуя уравнение (11.3), получим

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{Mg_0 - RC}{LC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0. \quad (11.4)$$

При $RC > Mg_0$ это обычное уравнение линейного осциллятора с затуханием и состояние равновесия устойчиво. При

$$Mg_0 > RC \quad (11.5)$$

оно превращается в уравнение осциллятора с отрицательным трением и, следовательно, малые возмущения будут нарастать с течением времени.

Анализируя соотношение (11.5), можно сделать несколько важных выводов. Во-первых, коэффициент взаимоиндукции должен быть положительным. В этом случае колебания поступившие с выхода усилителя, синфазны с колебаниями в контуре и способствуют их усилению. Такая обратная связь называется *положительной*. Наоборот, при $M < 0$ колебания противофазны и взаимно подавляют друг друга. Обратная связь стабилизирует положение равновесия и называется *отрицательной*.

Второй вывод, который можно сделать из (11.5), также достаточно очевиден: усиление, которое характеризуется коэффициентом g_0 , должно превосходить потери (за них отвечает сопротивление R). Вообще, как правило, для самовозбуждения генератора любого типа необходимо выполнение двух условий, которые обычно называют амплитудным и фазовым. Смысл этих условий вполне аналогичен описанным выше: а) энергия источника, которая преобразуется в энергию колебаний, должна превосходить потери; б) эта энергия должна поступать в колебательную систему в правильной фазе и способствовать усилению колебаний.

Удобно привести уравнение Ван-дер-Поля (11.3) к более простому виду, содержащему единственный управляющий параметр. Вводя безразмерные переменные $\tau = \omega_0 t$, $x = u\sqrt{3\omega_0 Mg_2}$, получим

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (11.6)$$

где $\lambda = (Mg_0 - RC)/\sqrt{LC}$ — единственный безразмерный параметр, а точки обозначают дифференцирование по τ . Наряду с уравнением Рэлея

$$\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + y = 0, \quad (11.7)$$

оно служит основной моделью для анализа периодических автоколебаний. Принципиальной разницы между этими уравнениями нет: заменой $y = x/\sqrt{3}$ уравнение (11.6) приводится к виду (11.7).

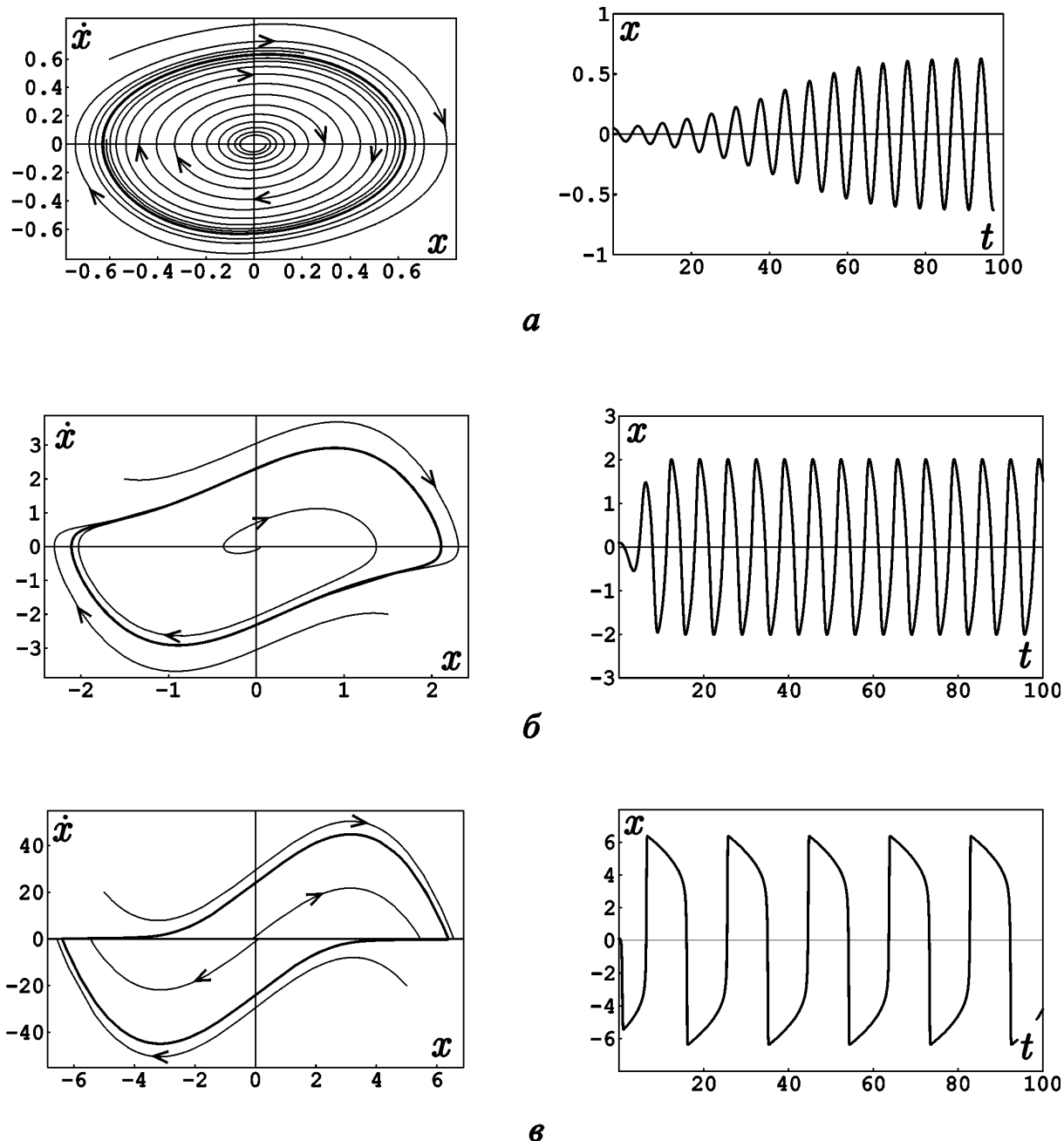


Рис. 11.3. Фазовые портреты (слева) и временные реализации колебаний (справа) осциллятора Ван-дер-Поля: а — $\lambda = 0.1$; б — $\lambda = 1.1$; в — $\lambda = 10.0$.

Уравнение Ван-дер-Поля имеет единственную особую точку $x = \dot{x} = 0$, которая является устойчивым узлом при $\lambda < -2$, устойчивым фокусом при $-2 < \lambda < 0$, неустойчивым фокусом при $0 < \lambda < 2$ и неустойчивым узлом при $\lambda > 2$. Если выполнено условие самовозбуждения $\lambda > 0$, на фазовой плоскости имеется также предельный цикл, отвечающий режиму периодических автоколебаний. В «докомпьютерную» эпоху теории колебаний был разработан целый ряд методов приближенного графического построения фазовых портретов нелинейных систем. Однако проще и удобнее прибегнуть непо-

средственно к численному интегрированию уравнения (11.6). Результаты представлены на рис. 11.3, где изображены фазовые портреты (слева) и временные реализации (справа) колебаний при различных значениях параметра λ .

При $\lambda \ll 1$ (рис. 11.3а) автоколебания являются квазигармоническими. Выходу на предельный цикл предшествует длительный (по сравнению с периодом колебаний) переходный процесс. Хотя установившиеся колебания не являются строго гармоническими, а Фурье-спектр содержит высшие гармонические составляющие, их амплитуда мала. При $\lambda \sim 1$ (рис. 11.3б) колебания уже существенно негармонические. Наконец, при $\lambda \gg 1$ (рис. 11.3в) на осциллограмме отчетливо можно выделить участки быстрого и медленного изменения переменной x . Такие колебания называются *релаксационными*. Режимы квазигармонических и релаксационных автоколебаний будут подробно рассмотрены в лекции 12.

Задача 11.2. Простое механическое устройство, способное генерировать автоколебания [Н.Л. Кайдановский, С.Э. Хайкин, 1933], представляет собой груз массы m , находящийся на ленте транспортера, которая движется равномерно со скоростью V . Тело прикреплено к стене пружиной с жесткостью k (см. рис. 1.8). Сила трения между грузом и лентой зависит от относительной скорости движения v по закону

$$F(v) = F_1 + \frac{F_2}{1 + v^2/u^2},$$

где $F_{1,2}$, u — параметры. Покажите, что при определенной скорости ленты V уравнение движения груза может быть приведено к уравнению Рэлея (11.7). Оцените амплитуду колебаний, при которой справедливо уравнение Рэлея.

Автогенератор на активном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью

Рассмотрим еще одну схему генератора электрических колебаний, представленную на рис. 11.4а. Параллельно колебательному контуру с потерями включен нелинейный элемент, вольтамперная характеристика которого имеет *падающий участок*. Такими характеристиками обладают, например, туннельный диод, вакуумная четырехэлектродная лампа (тетрод) и другие приборы (для туннельного диода физический механизм, ответственный за возникновение падающего участка вольтамперной характеристики, кратко пояснялся в лекции 2). На падающем участке *дифференциальная проводимость* $g_d = dI/du$ отрицательна. Будем считать, что вольтамперную характеристику в окрестности рабочей точки можно аппроксимировать кубическим полиномом (рис. 11.4б)

$$I(u) = -g_0u + g_2u^3. \quad (11.8)$$

Покажем, что элемент с отрицательной дифференциальной проводимостью является активным и его включение в контур может приводить к возбуждению автоколебаний.

Напомним некоторые определения из радиотехники. Пусть при колебательном процессе напряжение на некотором элементе изменяется по закону $u = u(t)$, а ток через него — по закону $i = i(t)$. Величина $p(t) = i(t)u(t)$ называется *мгновенной мощностью*, выделяемой на этом элементе. Если колебательный процесс *периодический*, то можно усреднить мгновенную мощность по периоду колебаний. Результат усреднения

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (11.9)$$

называется *активной мощностью*. Если на элемент, вольтамперная характеристика которого имеет падающий участок, подано напряжение $u = U_0 \sin \omega t$, причем амплитуда U_0 настолько мала, что можно ограничиться линейной аппроксимацией падающего участка, т.е. учесть только первое слагаемое в (11.8), то нетрудно показать, что активная мощность будет отрицательна, $P_a = -g_0U_0^2/2$. Это означает, что при протекании тока через такой элемент в среднем энергия на нем выделяется, а не поглощается. Элементы, обладающие характеристиками с отрицательной дифференциальной проводимостью (или сопротивлением) называются *активными* и используются для усиления и генерации электромагнитных колебаний.

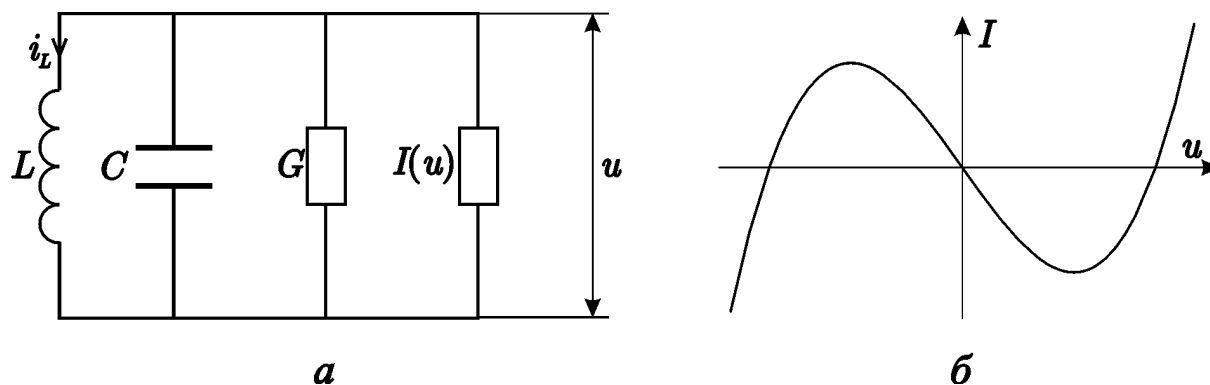


Рис. 11.4. Принципиальная схема генератора на активном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью (а) и вольтамперная характеристика активного элемента, аппроксимированная кубическим полиномом (б).

Запишем для генератора Кирхгофа

$$C \frac{du}{dt} + Gu + i_L - g_0u + g_2u^3 = 0, \quad (11.10)$$

$$u = L \frac{di_L}{dt}. \quad (11.11)$$

Дифференцируя уравнение (11.10) и подставляя (11.11), снова приходим к уравнению Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{C}(g_0 - G - 3g_2u^2)\frac{du}{dt} + \omega_0^2u = 0. \quad (11.12)$$

Условие самовозбуждения имеет простой вид $g_0 > G$.

Ламповый генератор Ван-дер-Поля.

Наконец, рассмотрим ламповый генератор Ван-дер-Поля, который традиционно служит классической моделью для изучения автоколебательных систем. На рис. 11.5 приведены схемы генераторов Ван-дер-Поля с колебательным контуром в цепи анода (а) и в цепи сетки (б). Принципиальной разницы между этими схемами нет, так что в дальнейшем мы будем для определенности рассматривать первый вариант. Здесь также можно легко выделить основные структурные элементы автоколебательной системы: роль колебательной системы с потерями выполняет колебательный контур, обратная связь осуществляется посредством взаимной индуктивности катушек L и L_1 , источником питания служит анодная батарея, а активным элементом, преобразующим энергию источника в энергию колебаний является трехэлектродная лампа — триод (впрочем, не имеет принципиального значения, выполнен генератор на основе вакуумной электронной лампы или полупроводникового транзистора). При некотором постоянном значении анодного напряжения u_a зависимость анодного тока лампы i_a от напряжения на сетке u_g (анодно-сеточная характеристика) имеет вид, изображенный на рис. 11.5в. На сетку лампы подается постоянное напряжение смещения u_0 , обеспечивающее выбор *рабочей точки* на анодно-сеточной характеристике.

Получим дифференциальное уравнение, описывающее колебания в генераторе. Обозначая токи в индуктивной и емкостной ветвях контура как i_L и i_C , соответственно, запишем уравнения Кирхгофа:

$$i_a = i_L + i_C, \quad (11.13)$$

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = \frac{1}{C} \int i_C dt. \quad (11.14)$$

Дифференцируя уравнение (11.13) и подставляя (11.14), получаем

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{C} = \frac{i_a}{C}. \quad (11.15)$$

Сеточное напряжение, очевидно, можно представить в виде $u_g = u_0 + u$, где $u = M di_L/dt$, M — коэффициент взаимной индукции. Продифференцируем уравнение (11.15) еще раз и перепишем его относительно u :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{R}{LC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = \frac{MS(u)}{LC} \frac{du}{dt}. \quad (11.16)$$

Здесь $S(u) = di_a/du \Big|_{u_a = \text{const}}$ — крутизна анодно-сеточной характеристики. Следуя Ван-дер-Полю, аппроксимируем ее в окрестности рабочей точки кубическим полиномом

$$i_a = i_0 + S_0 u - S_2 u^3, \quad (11.17)$$

что можно сделать в случае слабой нелинейности. Тогда уравнение (11.16) принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \omega_0^2 (MS_0 - RC - 3MS_2 u^2) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0. \quad (11.18)$$

Мы вновь получили уравнение Ван-дер-Поля, полностью аналогичное (11.3) и (11.12).

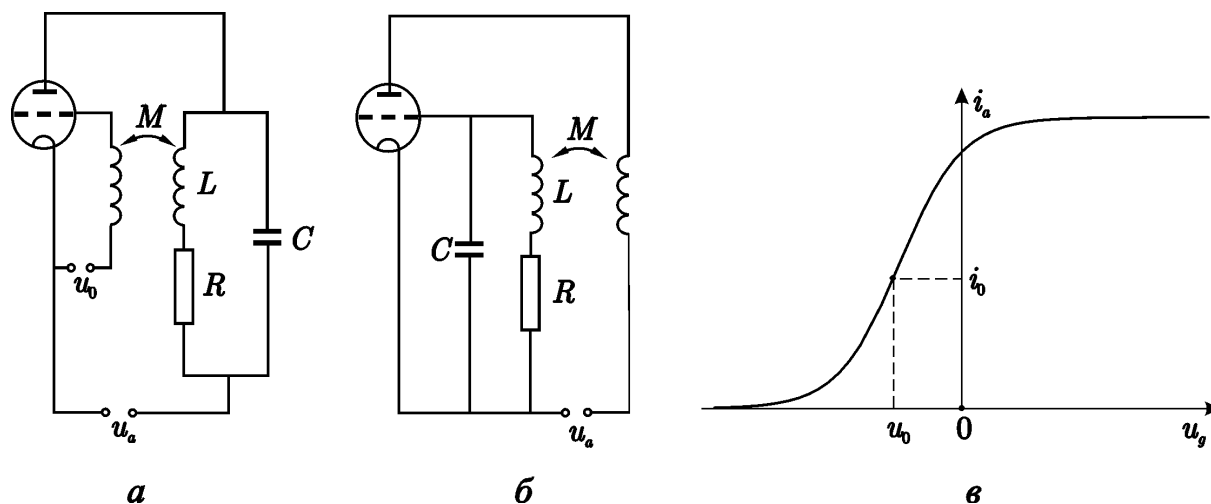


Рис. 11.5. Схемы лампового генератора Ван-дер-Поля с колебательным контуром в цепи анода (а) и в цепи сетки (б) и анодно-сеточная характеристика триода (в).

Задача 11.3. Если провести по струне скрипки смычком, то она зазвучит. Почему? (Указание. Необходимо учесть зависимость силы трения от скорости).

Задача 11.4. На рис. 11.6 изображена полученная экспериментально вольтамперная характеристика туннельного диода. В эксперименте измерены максимальное и минимальное значения тока I_1 , I_2 и соответствующие значения напряжения V_1 и V_2 . На этом диоде собран автогенератор по схеме, приведённой на рис. 11.4а. Параметры схемы L , C и g считайте известными. Найдите величину амплитуды напряжения установившихся квазигармонических автоколебаний на туннельном диоде. При каком условии автоколебания будут квазигармоническими? Пусть величина проводимости G может регулироваться. При каком значении G возникнут автоколебания? Чему равна максимально возможная амплитуда автоколебаний?

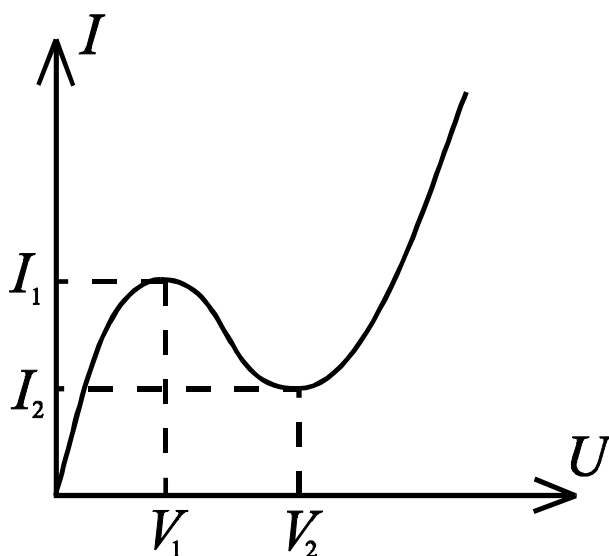


Рис. 11.6

Химические колебания. Брюсселятор

Важным и нетривиальным примером автоколебательных процессов служат некоторые химические реакции. Химические колебания — это колебания концентраций реагирующих веществ. К настоящему времени известно достаточно много колебательных реакций. Наиболее знаменитая них была открыта Б.П. Белоусовым в 1950 г. и позднее детально изучена А.М. Жаботинским. Реакция Белоусова — Жаботинского (БЖ) представляет собой процесс окисления малоновой кислоты при взаимодействии с BrO_3^- в присутствии ионов Ce_4^+ в качестве катализатора. В ходе реакции раствор периодически изменяет свой цвет: голубой — красный — голубой — красный и т.д. Кроме простых периодических колебаний реакция БЖ демонстрирует (в зависимости от условий эксперимента) множество различных типов пространственно-временной динамики, которые окончательно еще не исследованы. Предложены различные математические модели реакции БЖ (например, модель Филда, Кереса и Нойеса — «орегонатор»), однако ни одна из них не описывает полностью все детали, наблюдаемые в эксперименте.

Здесь мы рассмотрим более простой модельный пример: гипотетическую химическую реакцию, которая получила название *брюсселятор* [И. Пригожин, Р. Лефевр, 1968]. Уравнения этой реакции имеют вид



Предполагается, что реагенты A и B имеются в избытке, так что их концентрации можно считать постоянными, а D и E ни в какие реакции не вступают.

Составим *кинетические уравнения*, соответствующие реакции (11.19), которые описывают динамику концентраций реагирующих веществ. Поскольку число актов химической реакции в единицу времени определяется вероятностью столкновения молекул реагентов, скорости изменения концентраций продуктов реакции пропорциональны произведению концентраций соответствующих реагентов с коэффициентами пропорциональности k_n , называемыми *константами скоростей реакций*. Тогда кинетические уравнения можно записать в виде¹

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= k_1 A - k_2 BX + k_3 X^2 Y - k_4 X, \\ \frac{dY}{dt} &= k_2 BX - k_3 X^2 Y. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Символами X, Y, \dots будем теперь обозначать соответствующие концентрации. Отметим, что из третьего уравнения системы (11.19) следует, что скорость образования вещества X зависит от его концентрации, т.е. эта стадия реакции носит *автокаталитический* характер.

Приведем уравнения (11.20) к безразмерному виду, содержащему минимальное число управляющих параметров. Для этого перейдем к новым переменным $\tau = k_4 t$, $x = (k_3/k_4)^{1/2} X$, $y = (k_3/k_4)^{1/2} Y$. Тогда уравнения (11.20) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - (b+1)x + x^2 y, \\ \dot{y} &= bx - x^2 y, \end{aligned} \quad (11.21)$$

¹ Мы рассматриваем пространственно-однородные уравнения, что справедливо, например, в случае полного перемешивания. В отсутствие перемешивания в (11.20) следует учесть члены, отвечающие за диффузию. При этом возникают новые нетривиальные эффекты, такие как неустойчивость Тьюринга и образование диссипативных структур.

где $a = (k_1^2 k_3 / k_4^3)^{1/2} A$, $b = (k_2 / k_4) B$. Отметим, что по смыслу задачи переменные x, y и параметры a, b могут принимать только положительные значения.

Итак, мы имеем динамическую систему второго порядка с двумя управляющими параметрами a и b . Состояние равновесия

$$x_0 = a, \quad y_0 = b/a \quad (11.22)$$

отвечает стационарному протеканию химической реакции, когда концентрации реагирующих веществ постоянны. Определим условия его неустойчивости, т.е. условия самовозбуждения автоколебаний. Зададим малые возмущения состояния равновесия (11.22)

$$x_0 = a + \xi, \quad y_0 = b/a + \eta \quad (11.23)$$

и линеаризуем систему (11.21). Получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (b-1)\xi + a^2\eta, \\ \dot{\eta} &= -b\xi + a^2\eta. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Полагая $\xi, \eta \sim \exp(pt)$, находим характеристическое уравнение

$$(p-b+1)(p+a^2) = -a^2b. \quad (11.25)$$

Раскрывая скобки, получаем квадратное уравнение

$$p^2 + p(a^2 + 1 - b) + a^2 = 0, \quad (11.26)$$

корни которого есть

$$p = -\frac{a^2 - b + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 - b + 1)^2}{4} - a^2}. \quad (11.27)$$

Анализ этих выражений показывает, что в критической точке

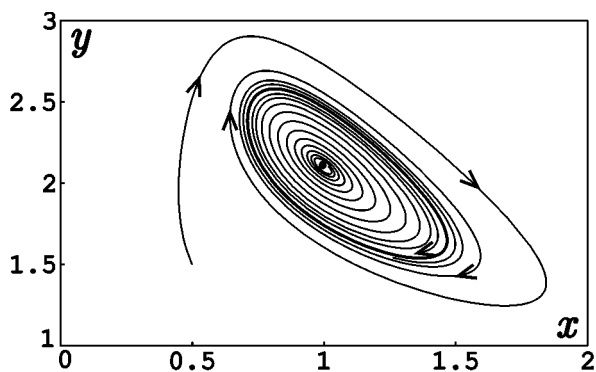
$$b_c = a^2 + 1 \quad (11.28)$$

состояние равновесия становится неустойчивым. Это и есть условие самовозбуждения автоколебаний.

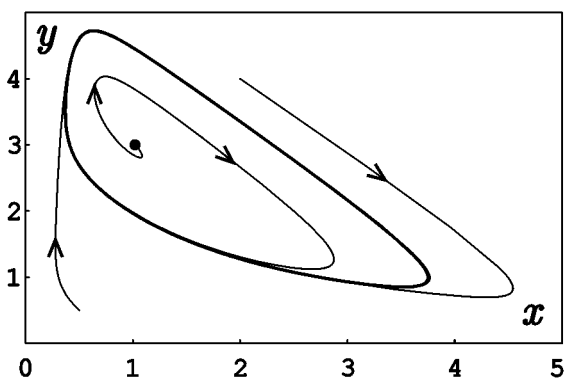
Задача 11.5. Проведите анализ корней характеристического уравнения (11.27) и определите, каков тип состояния равновесия при различных значениях параметров.

Продвинуться дальше и выяснить, как ведет себя система в нелинейном режиме, можно, решая уравнения (11.21) численно. Решение показывает, что при $b > b_c$ состояние равновесия теряет устойчивость и на фазовой плоскости появляется предельный цикл, причем частота колебаний, как видно из (11.26), равна a . При b , слегка превы-

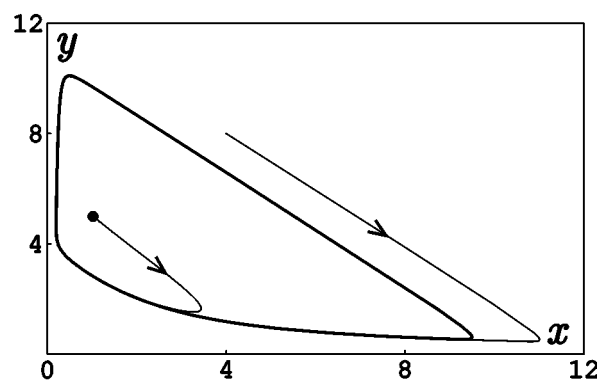
шающих критическое значение, колебания являются квазигармоническими, с ростом b они становятся релаксационными. Примеры фазовых портретов приведены на рис. 11.7. Таким образом, химический осциллятор демонстрирует поведение, типичное для автоколебательных систем и вполне аналогичное, например, осциллятору Ван-дер-Поля.



а



б



в

Рис. 11.7. Примеры фазовых портретов брюсселятора при $a = 1.0$:
 а — $b = 2.1$; б — $b = 3.0$; в — $b = 5.0$.