

## Синхронизация в фазовой модели трех связанных лазеров

А.П.Кузнецов, И.Р.Сатаев, Л.В.Тюрюкина, Н.Ю.Чернышов

*Рассматривается задача о синхронизации трех лазеров в фазовом приближении. Найдены области полной синхронизации, частичной синхронизации, резонансных двухчастотных режимов и трехчастотной квазипериодичности. Используются бифуркационный анализ, метод карт ляпуновских показателей и построение фазовых портретов. Обсуждаются отличия свойств цепочки и кольца из трех элементов, а также влияние типа связи.*

Ключевые слова: синхронизация лазеров, квазипериодические колебания, бифуркации

### 1. Введение

Задачи, связанные с синхронизацией, как небольшого числа лазеров, так и достаточно больших их массивов, весьма популярны в лазерной физике [1-11]. Синхронизация позволяет существенно увеличить интенсивность и качество излучения. Добиться синхронной генерации лазеров можно разными способами. Это может быть инжекция внешнего поля от одночастотного лазера, синхронизирующего ансамбль, использование пространственного фильтра, резонатора Гальбо, организация синхронизации с помощью фурье-связи и др. [1-11]. Например, в [2,3] оптическая связь между волноводными лазерами осуществляется с использованием пространственного фильтра. Для этого в линзовую систему помещают дифракционную решетку, играющую роль пространственного фильтра. Дифракция излучения на ней и обеспечивает оптическую связь. Задача о синхронизации уже трех лазеров [2,3,6], как и классическая задача о синхронизации трех осцилляторов [12-15], является сложной. В этом случае возможны такие эффекты, как полная синхронизация лазеров, частичная синхронизация пар лазеров, отвечающая двухчастотной квазипериодичности, и более сложные режимы трехчастотной квазипериодичности. Следует отметить, что отдельный лазер является,

фактически, автоколебательной системой, причем наличие отрицательного трения обеспечивает активная среда. Поэтому задачи о динамике лазеров являются фундаментальными, и для их решения могут привлекаться методы нелинейной динамики и теории бифуркаций, как это сделано, например, в [8,9,11]. В последнее время в нелинейной динамике развиты новые подходы и методы исследования подобных систем [13-19]. Они позволяют исследовать устройство пространства параметров и корректно выявить разные типы режимов и условия их появления (исчезновения). В настоящей работе такой подход будет применен к задачам, решавшимся в [2-3,6].

## 2. Уравнение Адлера-Хохлова и его обобщение

Сущность явления синхронизации в системах любой физической природы состоит во взаимной подстройке фаз взаимодействующих подсистем [12,20,21]. Поэтому принципиальным моментом в описании синхронизации является формулировка соответствующего фазового уравнения:

$$\dot{\theta} = \Delta - \mu \sin \theta. \quad (1)$$

Здесь  $\theta = \psi_1 - \psi_2$  – относительная фаза подсистем,  $\mu$  – величина связи,  $\Delta$  – частотная расстройка подсистем. Уравнение (1) описывает также и задачи вынужденной синхронизации, только в этом случае переменные и параметры определены относительно внешнего сигнала. Впервые уравнение (1) было получено Р. Адлером (R. Adler) в 1946 г. [22]. Адлер рассматривал радиотехническую задачу: триодный генератор, возбуждаемый внешним сигналом. Тем не менее, в его работе уже содержалось понимание универсальности уравнения (1) и была предложена также и механическая модель в виде маятника в сильно вязкой среде. В 1954 г. подобное уравнение получено Р.В. Хохловым [23], причем был сформулирован важный метод нелинейной теории, состоящий в переходе от исходной системы к укороченным уравнениям для медленных амплитуд с

последующим переходом к фазовым уравнениям<sup>1</sup>. С помощью этого подхода был решен ряд фундаментальных задач, а также рассмотрены практические приложения, в частности о синхронизации отражательных клистронов и молекулярных генераторов. Со временем уравнение Адлера-Хохлова и его обобщения были получены и для задач синхронизации различных типов лазеров и различных способах их связи (полупроводниковые лазеры, CO<sub>2</sub> лазеры и др.) [25,5,2,3,7-11].

Естественным обобщением уравнения Адлера-Хохлова является переход к системе из нескольких взаимодействующих элементов. Для трех связанных в цепочку с оптической связью лазеров обобщение уравнения Адлера-Хохлова можно найти в работе E. Ramponi, A. Lippucci [6]. Исходные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} E_i &= [G\delta_i - \Gamma_i - i(\omega_0 - \omega_i)]E_i + \sum_j m_{ij}E_j, \\ \dot{\delta}_i &= -\gamma(\delta_i - \delta_{0i}) - 4G\delta_i|E_i|^2. \end{aligned} \quad (2a)$$

Здесь  $E_i$  – комплексное поле, генерируемое  $i$ -м лазером в ансамбле,  $\delta_i$  – разность заселенности в этом лазере,  $\delta_{0i}$  – соответствующая ненасыщенная инверсная заселенность,  $G$  – константа связи,  $\gamma$  и  $\Gamma_i$  – скорости релаксации заселенности и поля в резонаторе  $i$ -ого лазера соответственно,  $\omega_i$  – собственная частота резонатора  $i$ -го лазера а  $\omega_0$  – частота лазерного перехода,  $m_{ij}$  – матрица коэффициентов связи.

Для действительных амплитуд  $A$  и фаз  $\psi$  запишем аналогично [6]:

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= -\Gamma_i A_i + G\delta_i A_i + \sum_j m_{ij} A_j \cos(\psi_i - \psi_j), \\ \dot{\psi}_i &= (\omega_i - \omega_0) + \sum_j m_{ij} \frac{A_j}{A_i} \sin(\psi_i - \psi_j). \end{aligned} \quad (2b)$$

Действуя далее стандартным образом, можно получить следующие уравнения для фаз в случае трех связанных в цепочку лазеров [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \Delta_{21} - \mu_1 \sin \theta + \mu_2 \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta_{23} - \mu_1 \sin \varphi + \mu_2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

---

<sup>1</sup> В обзоре С.А. Ахманова [24] 1986 г. имеется даже специальный раздел: «Метод поэтапного упрощения укороченных уравнений – метод Хохлова».

Здесь  $\theta = \psi_1 - \psi_2$ ,  $\varphi = \psi_2 - \psi_3$  – относительные фазы первого-второго и второго-третьего лазеров,  $\mu_1, \mu_2$  – соответствующие коэффициенты связи. Параметры  $\Delta_{21}, \Delta_{23}$  представляют собой частотные расстройки первого-второго и второго-третьего лазеров. Детали вывода можно найти в [6].

Как было показано в [6], система (3) допускает определенное аналитическое рассмотрение, в рамках которого может быть найдено условие *полной синхронизации* всех трех лазеров. В этом случае все три лазера захвачены, так что их фазы  $\psi_i$  являются константами. Тогда производные от относительных фаз равны нулю, так что уравнения (3) имеют состояния равновесия:

$$\begin{aligned} \Delta_{21} - \mu_1 \sin \theta + \mu_2 \sin \varphi - m \sin(\theta + \varphi) &= 0, \\ -\Delta_{23} - \mu_1 \sin \varphi + \mu_2 \sin \theta - m \sin(\theta + \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти уравнения можно разрешить относительно синусов фаз:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\mu_1 \Delta_{21} - \mu_2 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}, \\ \sin \varphi &= \frac{\mu_2 \Delta_{21} - \mu_1 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (5) решаются аналитически, причем решения появляются парами:  $\theta_1$  и  $\theta_2$  для первого уравнения, и  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – для второго:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arcsin\left(\frac{\mu_1 \Delta_{21} - \mu_2 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\right), \quad \theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{\mu_1 \Delta_{21} - \mu_2 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\right), \\ \varphi_1 &= \arcsin\left(\frac{\mu_2 \Delta_{21} - \mu_1 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\right), \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{\mu_2 \Delta_{21} - \mu_1 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

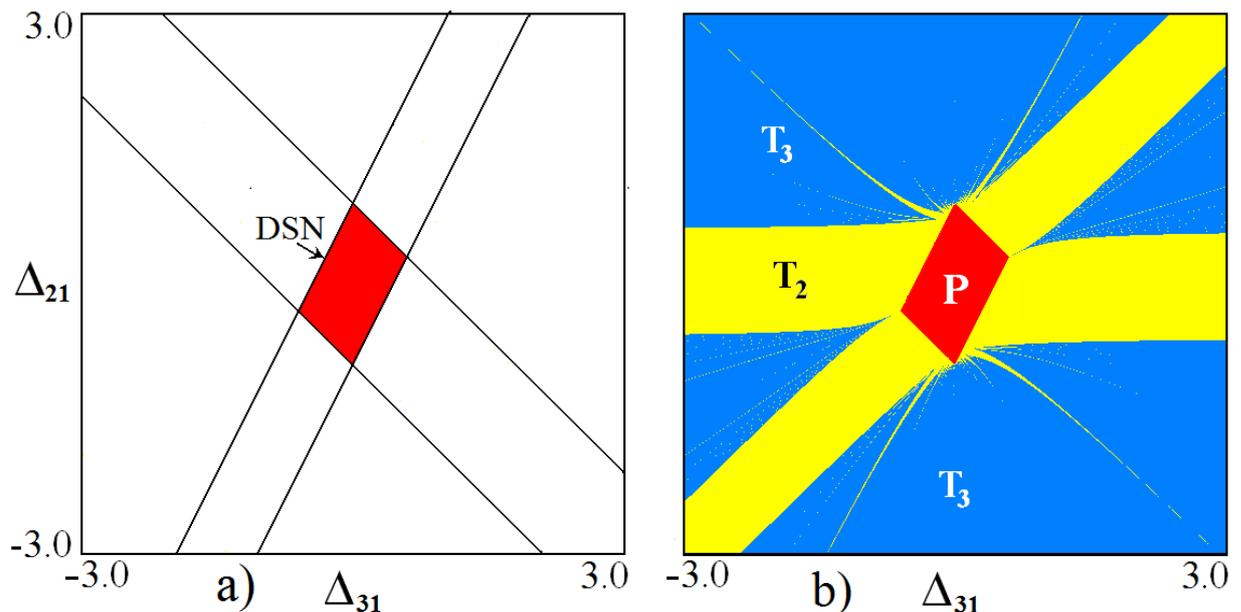
Таким образом, на фазовой плоскости состояния равновесия лежат в вершинах прямоугольника  $(\theta_1, \varphi_1)$ ,  $(\theta_1, \varphi_2)$ ,  $(\theta_2, \varphi_1)$ ,  $(\theta_2, \varphi_2)$ , как показано на рис.2а.

Будем теперь варьировать частотные расстройки, так что комбинация параметров в правой части первого уравнения (5) увеличивается по абсолютной величине. В тот момент, когда она обращается в единицу, пара решений сливается, и все четыре

равновесия *одновременно* исчезают. Аналогичная ситуация имеет место и для второго уравнения (5). Таким образом, условием исчезновения решений является обращение правых частей (5) в  $\pm 1$ :

$$\begin{aligned} \mu_1 \Delta_{21} - \mu_2 \Delta_{23} &= \pm(\mu_1^2 - \mu_2^2), \\ \mu_2 \Delta_{21} - \mu_1 \Delta_{23} &= \pm(\mu_1^2 - \mu_2^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения (7) задают на плоскости частотных расстройок две пары взаимно параллельных линий, пересечение которых образует параллелограмм, который и дает область полной синхронизации. Этот результат получен в работе [6] и обсуждается также в [2,3]. Отметим, однако, что в теории колебаний аналогичный результат был описан в книге П.С. Ланды [12] еще в 1980 году<sup>2</sup>. Поэтому полученную область полной синхронизации можно назвать «параллелограммом Ланды», рис.1а.



**Рис.1.** а) Линии (7) и область полной синхронизации системы (3), DSN – один из четырех отрезков линии вырожденной седло-узловой бифуркации; б) соответствующая ляпуновская карта, P – область полной синхронизации, T<sub>2</sub> и T<sub>3</sub> – области двух- и трехчастотной квазипериодичности. По оси абсцисс отложена частотная расстройка третьего и первого лазеров  $\Delta_{31} = \Delta_{21} - \Delta_{23}$ ,  $\mu_1 = 0.6$ ,  $\mu_2 = 0.3$

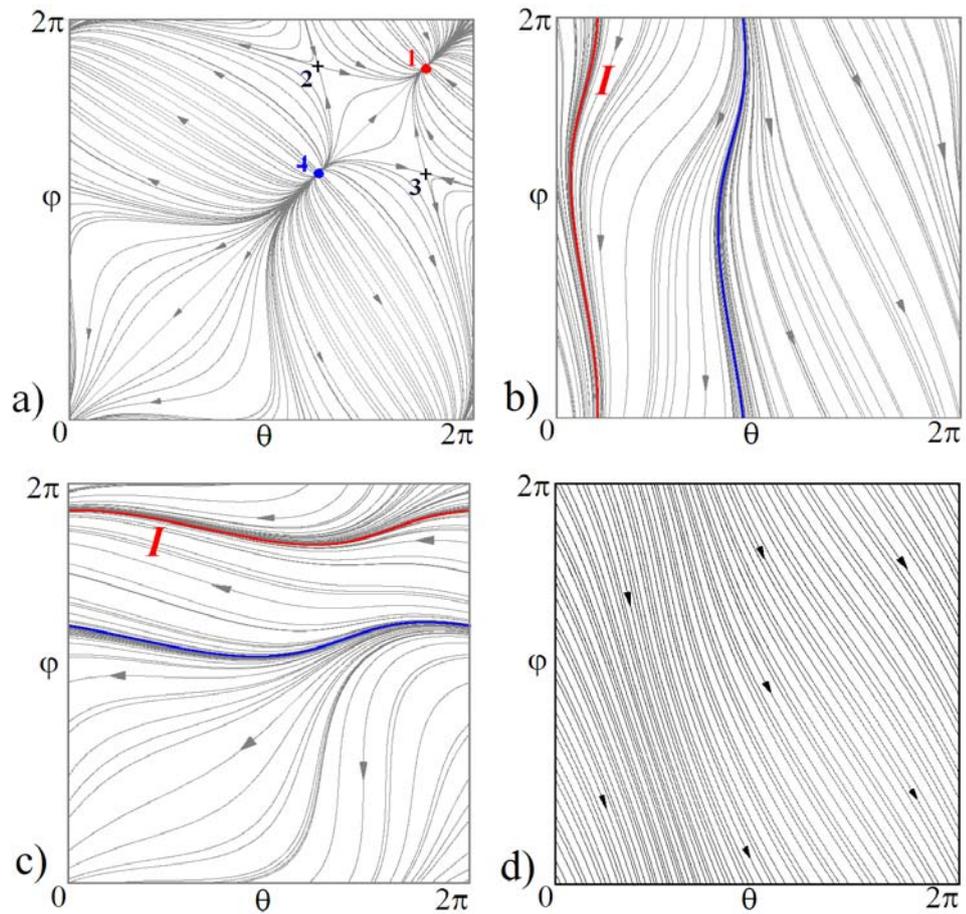
<sup>2</sup> Правда, английский перевод этой книги появился гораздо позже, в 1996 году [26].

Оказывается, однако, что, казалось бы, незначительное усложнение системы от (1) к (3) приводит к очень существенному обогащению картины возможных колебательных режимов. Они требуют для своего анализа численного исследования и привлечения методов теории динамических систем и нелинейной динамики.

Прежде всего, представим несколько фазовых портретов системы (3) на плоскости относительных фаз  $(\theta, \varphi)$ , иллюстрирующих основные типы поведения. Благодаря свойству  $2\pi$ -периодичности фаз, их динамику можно рассматривать в диапазонах  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ . При этом, если фазовая траектория уходит, например, через правую сторону этого квадрата, то она появляется в соответствующей точке на его левой стороне. Аналогично, для верхней и нижней границ.

На рис.2 представлены фазовые портреты, отвечающие основным типам режимов системы (3). В случае рис.2а система имеет четыре состояния равновесия, что отвечает аналитическому рассмотрению. При этом равновесие 1 является устойчивым узлом, обозначенные крестиками равновесия 2 и 3 – седлами и 4 – неустойчивым узлом. Относительные фазы осцилляторов с течением времени будут стремиться к устойчивому равновесию. При этом скорости изменения фаз каждого осциллятора становятся постоянными и равными друг другу величинами. Это режим *полной синхронизации* всех трех лазеров.

При приближении к границам параллелограмма на рис.1а равновесия попарно сближаются (например, 1 и 3, а также 2 и 4) и одновременно сливаются и исчезают. Это своего рода *вырожденная седло-узловая бифуркация*, когда одновременно сливаются устойчивое равновесие и седло, а также неустойчивое равновесие и седло.



**Рис.2.** Фазовые портреты системы (3): а) режим полной синхронизации всех осцилляторов,  $\Delta_{21} = -0.25$ ,  $\mu_1 = 0.75$ ,  $\mu_2 = 0.375$ ; б) режим частичного захвата первого и второго осцилляторов,  $\Delta_{21} = 0.125$ ,  $\mu_1 = 0.25$ ,  $\mu_2 = 0.125$ ; в) режим частичного захвата второго и третьего осцилляторов,  $\Delta_{21} = -0.375$ ,  $\mu_1 = 0.25$ ,  $\mu_2 = 0.125$ ; г) трехчастотный квазипериодический режим,  $\Delta_1 = -1$ ,  $\mu = 0.25$ . Значение  $\Delta_{31} = -0.5$ .

Перейдем теперь к рис.2б. На этом рисунке имеются два новых объекта: притягивающая и отталкивающая *инвариантные кривые*. Устойчивая кривая обозначена буквой *I*. Теперь фаза  $\theta$  в режиме, отвечающем устойчивой инвариантной кривой, не постоянна, а осциллирует около некоторого среднего значения. Поскольку, по определению  $\theta = \psi_1 - \psi_2$ , то это значит, что фазы первого и второго осцилляторов близки, а их разность не нарастает. Этот режим можно охарактеризовать, как *захват* первого и второго лазеров. Этот захват, однако, не точный, а *частичный* – относительная фаза не

постоянна во времени. Отметим, что на рис.2b относительная фаза  $\theta$  колеблется вблизи нулевого значения. Поэтому лазеры синхронизованы «почти» синфазно.

На рис.2c можно видеть другой вариант расположения притягивающей инвариантной кривой. В этом случае около стационарного значения колеблется уже фаза  $\varphi = \psi_2 - \psi_3$ , а фаза  $\theta$  изменяется во всем возможном диапазоне. Таким образом, это режим частичного захвата второго и третьего лазеров.

На рис.2d можно видеть еще одну разновидность режима колебаний системы. В этом случае наблюдается «поток» фазовых траекторий, всюду плотно покрывающих фазовый квадрат. При этом обе фазы меняются во всем возможном диапазоне  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ .

Как описанные режимы проявляются с точки зрения динамики исходной системы? Количество базовых частот в этом случае складывается из их числа для фазовых уравнений (3) и дополнительной основной оптической частоты  $\omega_0$ . Поэтому случай устойчивого равновесия отвечает предельному циклу. Инвариантная кривая будет отвечать режиму *двухчастотной квазипериодичности* и двухчастотному инвариантному тору. Случай потока траекторий рис.2d будет отвечать уже *трехчастотной квазипериодичности* и инвариантному тору более высокой размерности.

Теперь возникает вопрос, как эти типы режимов представлены на плоскости частотных расстроек. Для ответа на него используем численный метод нелинейной динамики – *метод карт ляпуновских показателей* [13,14,18,19]. Ляпуновские показатели характеризуют сжимаемость (расширение) фазового объема динамической системы [27]. Система (3) имеет второй порядок и поэтому характеризуется двумя ляпуновскими показателями  $\Lambda_1, \Lambda_2$ . Будем вычислять, используя стандартную «технология» [27], оба ляпуновских показателя в каждой точке плоскости параметров  $(\Delta_{31}, \Delta_{21})$ . Затем эту плоскость окрасим в разные цвета в соответствии с величиной показателей так, чтобы визуализировать следующие режимы:

а)  $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0$ , наличие устойчивого состояния равновесия  $P$ ;

б)  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$ , устойчивая инвариантная кривая, двухчастотный квазипериодический режим  $T_2$ ;

в)  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$ , поток фазовых траекторий, трехчастотный квазипериодический режим  $T_3$ .

Полученная таким образом карта ляпуновских показателей показана на рис.1б. На ней можно видеть область полной синхронизации, которая отвечает аналитическому рассмотрению. Далее имеют место обширные области (полосы) двухчастотных режимов. Они обусловлены двумя возможными резонансными условиями в системе:

$$\Delta_{21} = 0, \quad \Delta_{21} = \Delta_{31}. \quad (8)$$

В первом случае совпадают собственные частоты первого-второго лазеров, а во втором – второго-третьего. Соответственно, на рис.1а имеется две полосы двухчастотных режимов, которые занимают конечный диапазон в окрестности значений (8). Эти полосы примыкают к границам «параллелограмма Ланды». Таким образом, выход за границы параллелограмм приводит к разрушению полной синхронизации лазеров с переходом к частичной синхронизации той или иной пары.

В свою очередь, на границах полос двухчастотных режимов сливаются устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые. В терминах исходной системы можно сказать, что происходит *седло-узловая бифуркация инвариантных торов*. После этого торы исчезают, и возникает режим трехчастотной квазипериодичности. Отметим, что разрушение синхронизации пар лазеров в результате этой бифуркации не отвечает линиям (7), как могло бы показаться на первый взгляд, т.е. появление пары решений для одной из относительных фаз не связано с разрушением синхронизации для соответствующей пары осцилляторов.

Еще одна особенность картины на рис.1а – наличие большого числа тонких языков двухчастотных режимов, устройство которых наиболее сложно в окрестности вершин

параллелограмма. Эти области отвечают наличию *резонансных двухчастотных режимов* разных типов. Для них инвариантные кривые имеют более сложную конфигурацию и разное (причем и большое) число пересечений инвариантных кривых со сторонами фазового квадрата по сравнению с простейшими типами на рис.2b и 2c. (Детали см. в [14,18].)

Скажем несколько слов о характере связи. Положительные значения коэффициента связи в (1) и (3) отвечают, в терминах теории колебаний, *диссипативной связи* [12,20]. Однако связь может иметь и отрицательный знак, что достаточно распространено в задачах лазерной физики [2,3]. Этот случай можно назвать *активной связью*. Нетрудно видеть, что изменение знака коэффициента связи в уравнениях (3) эквивалентно замене фаз:

$$\theta \rightarrow \theta + \pi, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \pi. \quad (9)$$

Таким образом, отрицательный коэффициент связи будет отвечать *противофазной синхронизации* лазеров. В тоже время для цепочки лазеров картина режимов на плоскости параметров для диссипативной и активной связи точно совпадает, благодаря свойству (9).

### 3. Фазовая динамика трех глобально связанных лазеров

Фазовые уравнения для более общего случая, когда возможна связь также третьего и первого лазеров, т.е. когда все три лазера оптически связаны, можно найти в [2,3].

Обобщение уравнения Адлера-Хохлова в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \Delta_{21} - \mu_1 \sin \theta + \mu_2 \sin \varphi - m \sin(\theta + \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\Delta_{23} - \mu_1 \sin \varphi + \mu_2 \sin \theta - m \sin(\theta + \varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициент  $m$  учитывает возможность связи третьего и первого лазеров. При этом обращаем внимание, что величины  $\mu_1, \mu_2$  выражаются через использованные в [3]

параметры  $c$  с помощью соотношений:  $\mu_1 = (c + \frac{1}{c})M$ ,  $\mu_2 = \frac{M}{c}$ . В свою очередь,

коэффициенты  $M$  и  $c$  могут быть рассчитаны оптическими методами для исходной

системы. Детали и связь с параметрами исходной лазерной системы см. в [2,3].

Обсудим сначала влияние характера связи на структуру уравнений. Изменим знак всех коэффициентов в (10). Теперь замена (9) в чистом виде не проходит: необходимо еще дополнительно изменить знак константы  $m$ , отвечающей за связь крайних лазеров:

$$\theta \rightarrow \theta + \pi, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \pi, \quad m \rightarrow -m. \quad (11)$$

Таким образом, мы получаем вывод о том, что устройство плоскости параметров в случае глобальной связи всех лазеров будет разным для разных знаков параметра связи. В то же время система (10) со всеми отрицательными коэффициентами будет эквивалента случаю, когда коэффициенты  $\mu_1, \mu_2$  положительны, а коэффициент  $m$  отрицательный<sup>3</sup>.

Теперь необходимо найти условие полной синхронизации всех трех лазеров. Система (10) может иметь состояния равновесия  $(\theta, \varphi)$ , которые ищем, приравнявая скорости изменения относительных фаз нулю:

$$\begin{aligned} \Delta_{21} - \mu_1 \sin \theta + \mu_2 \sin \varphi - m \sin(\theta + \varphi) &= 0, \\ -\Delta_{23} - \mu_1 \sin \varphi + \mu_2 \sin \theta - m \sin(\theta + \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

К сожалению, в этом случае подход [6] неприменим: условие обращения синусов в единицу не дает правильное решение. Требуется более корректный поиск условий бифуркаций. В случае  $m \neq 0$  условием на искомые бифуркации является обращение в ноль якобиана матрицы возмущений (10) [21,28], что приводит к достаточно громоздким аналитическим выражениям. Поэтому далее мы представим результаты численного определения области полной синхронизации<sup>4</sup>.

Картина бифуркационных линий системы (11) на плоскости частотных расстроек лазеров  $(\Delta_{23}, \Delta_{21})$  представлена на рис.3. Она найдено численно с помощью стандартной

---

<sup>3</sup> Именно такой случай рассмотрен в [2,3].

<sup>4</sup> Мы акцентируем внимание на этом моменте, поскольку в [3] условия  $\theta = \pm\pi/2$  и  $\varphi = \pm\pi/2$ , (т.е.  $\sin\theta = \pm 1$  и  $\sin\varphi = \pm 1$ ) интерпретированы, как условия на границу области синхронизации в общем случае, что не верно. В этом можно убедиться, сравнивая полученную ниже картину бифуркационных линий с рис.2 из [3], который воспроизведен и в [2].

программы Matcont. На рис.4 даны примеры фазовых портретов в точках, отмеченных соответствующими буквами на плоскости параметров. При этом выбраны значения  $\mu_1 = 0.351$ ,  $\mu_2 = 0.108$ ,  $m = -0.139$ , что отвечает использованному в [2,3] набору параметров  $M=0.162$ ,  $c=1.5$ ,  $m = -0.139$  [2,3]. В соответствии со сделанным выше замечанием, этот случай эквивалентен ситуации, когда все коэффициенты связи отрицательные («активная» связь).

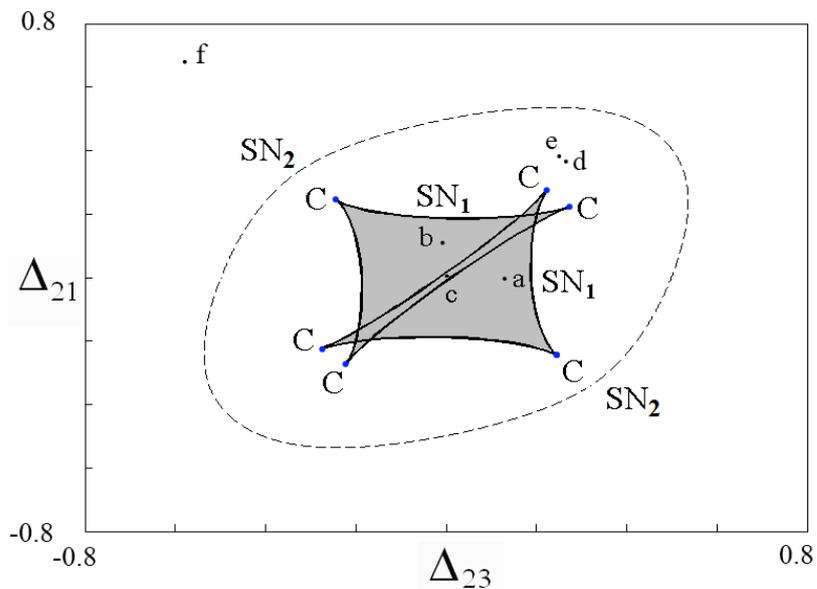


Рис.3. Бифуркационные линии состояний равновесия системы (10);  $SN_1$  – линии седло-узловых бифуркаций для устойчивых узлов,  $SN_2$  – для неустойчивых узлов,  $C$  – точки сборки. Серым цветом выделена область, в которой возможно хотя бы одно устойчивое состояние равновесия.

Три фазовых портрета на рис.4а,б,с иллюстрируют возможность устойчивых положений равновесия в системе  $P$ , отвечающих полной синхронизации всех трех лазеров. В точках а) и б) система имеет четыре равновесия, из которых одно является устойчивым узлом, второе – неустойчивым узлом, а оставшиеся два – седлами. В точке с) имеется шесть равновесий, из которых два являются устойчивыми узлами, три – седлами, и еще

одна – неустойчивым узлом. Таким образом, в отличие от случая цепочки система характеризуется *бистабильностью*, т.е. сосуществованием двух устойчивых равновесий.

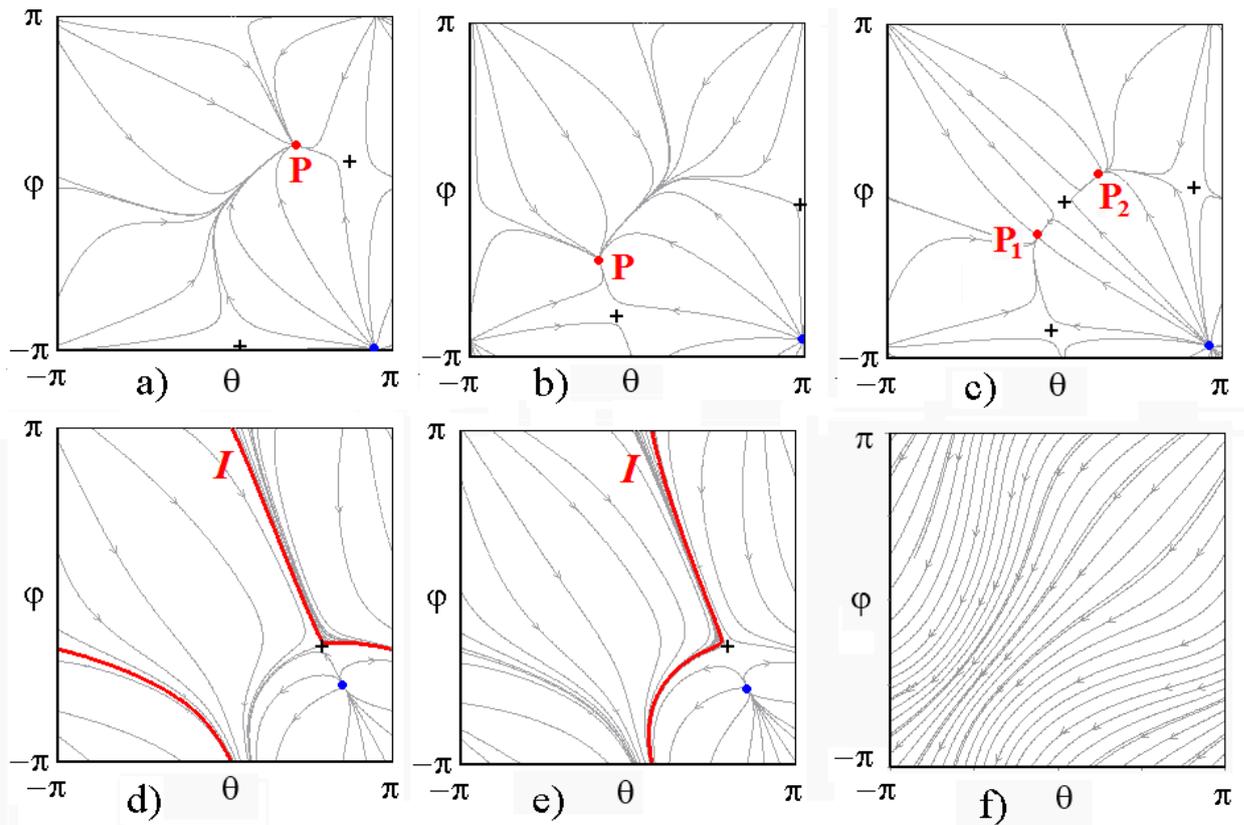


Рис.4. Характерные фазовые портреты, построенные в различных точках плоскости параметров  $(\Delta_{23}, \Delta_{21})$  в соответствии с рис.3. Буквой  $P$  обозначены устойчивые равновесия, седла обозначены крестиком, устойчивые инвариантные кривые  $I$  показаны жирными линиями.

Линии седло-узлов бифуркаций попарно сходятся в *точках сборки*  $S$  [29], где имеют характерные острия с полукубической особенностью. Область полной синхронизации на рис.3 лежит внутри овала, показанного пунктиром и представляющего собой линию седло-узловой бифуркации  $SN_2$ , на которой сливаются уже неустойчивый узел и седло.

Таким образом, принципиальное отличие от случая цепочки лазеров состоит в том, что при связи каждого с каждым бифуркации устойчивого и неустойчивого узлов происходят не одновременно.

Фазовые портреты на рис.4d,e демонстрируют возможность режимов двухчастотной квазипериодичности. Для рис.4f фазовые траектории всюду плотно заполняют фазовый квадрат, что отвечает трехчастотной квазипериодичности.

Для выявления общей картины режимов системы (11) построим карту ляпуновских показателей, рис.5. На ней можно видеть область полной синхронизации, которая отвечает проведенному бифуркационному анализу. При этом, однако, оба перекрывающихся листа на рис.3 проецируются на одну плоскость параметров, поэтому визуализируются на рис.5, как единая область.

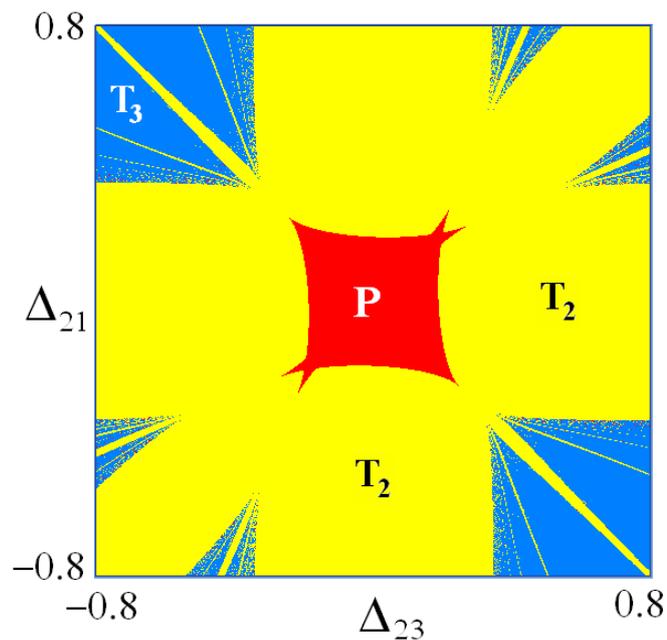


Рис.5. Карта ляпуновских показателей системы (10),  $\mu_1 = 0.351$ ,  $\mu_2 = 0.108$ ,  $m = -0.139$ .

На рис.5 можно видеть целую систему сложно организованных областей двухчастотной квазипериодичности. Три наиболее широких полосы таких режимов располагаются вблизи линий резонансных условий:

$$\Delta_{21} = 0, \Delta_{23} = 0, \Delta_{21} = \Delta_{23}. \quad (13)$$

Условия (13) отвечают трем основным резонансам в системе. В первом случае имеет место совпадение собственных частот первого и второго лазеров, во втором – совпадение частот второго и третьего лазеров, и в третьем – совпадение частот первого и третьего. Так рис.4е отвечает первому случаю, и относительная фаза первого и второго осцилляторов  $\theta = \psi_1 - \psi_2$  совершает осцилляции около некоторого равновесного положения. Соответственно, вдоль вертикальной полосы двухчастотной квазипериодичности на рис.3 возникает режим, когда частично захвачены второй и третий осцилляторы. Наконец, вдоль диагонали наблюдается режим частичного захвата первого и третьего осцилляторов. Фазовый портрет в этом случае показан на рис.4d. Область полной синхронизации лежит на пересечении этих трех полос, отвечающих трем вариантам частичной синхронизации в системе.

Обсудим, как может происходить переход от режима частичной синхронизации первый-третий лазеры к захвату первый-второй лазеры в случае глобальной связи. Этот переход может осуществляться в результате седло-узловой бифуркации инвариантных кривых, как и в случае цепочки лазеров. Однако возможен и другой сценарий. А именно, если маршрут на плоскости частотных расстроек располагается вблизи области полной синхронизации, то наблюдается следующая *нелокальная бифуркация*. Инвариантная кривая проходит сквозь седло на фазовой плоскости, сливаясь с его сепаратрисами, причем направление следования инвариантной кривой задается неустойчивым многообразием седла. Этот механизм иллюстрирует переход от рис.4d к рис.4е. На рис.4d инвариантная кривая, обходя седло, поворачивает налево (относительно направления фазовой траектории), а на рисунке 2е инвариантная кривая поворачивает направо.

#### **4. Заключение**

Таким образом, картина режимов трех взаимодействующих лазеров даже в фазовом приближении является сложной. Она выявляется совместным применением

бифуркационного анализа, метода ляпуновских карт и построением фазовых портретов. Основными режимами являются полная синхронизация лазеров, частичная синхронизация пар лазеров, резонансные двухчастотные режимы разных типов и трехчастотные режимы. Картина включает бифуркации состояний равновесия, седло-узловые бифуркации инвариантных кривых, нелокальные бифуркации инвариантных кривых. Динамика цепочки и сети из трех элементов имеют заметные отличия. Так отличаются типы бифуркаций, отвечающих за разрушение полной синхронизации. Кроме того, для глобальной связи характерна бистабильность в виде сосуществования двух устойчивых равновесий, отвечающих за полную синхронизацию трех лазеров. Еще один момент состоит в том, что для сети из лазеров картина режимов в пространстве параметров зависит от знака коэффициента связи, а для цепочки – нет.

Авторы выражают благодарность Мельникову Л.А. за полезное обсуждение.

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-02-91334-НННОа.

1. Лиханский В.А., Напартович А.П. Успехи физических наук, **160** (4), 101 (1990).
2. Глова А.Ф. Квантовая Электроника, **33**, 283 (2003).
3. Глова А.Ф., Лысиков А.Ю. Квантовая Электроника, **32**, 315 (2002).
4. Глова А.Ф. и др. Квантовая Электроника, **24**, 318 (1997).
5. Глова А.Ф. и др. Квантовая Электроника, **23**, 515 (1996).
6. Ramaplioni E., Lapucci A. Opt. Lett., **18**, 1881 (1993).
7. Braimanc Y., Kennedyd T.A.B., Wiesenfeldd K., Khibnik A.I. Entrainment of solid-state laser arrays // Phys. Rev. A 52, 1995, p. 1500–1506.
8. Khibnik A.I., Braimanc Y., Protopopescu V., Kennedyd T.A.B., Wiesenfeldd K. Phys. Rev. A, **62**, 063815 (2000).
9. Khibnik A.I., Braimanc Y., Kennedyd T.A.B., Wiesenfeldd K. Physica D, **111**, 295 (1998).
10. Высоцкий Д.В., Напартович А.П., Трощиева В.Н. Квантовая электроника, **37**, 345

(2007).

11. Владимирова А.Г. Нелинейная динамика и бифуркации в многомодовых и пространственно распределенных лазерных системах. Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук.

12. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы (М.: Наука, 1980).

13. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Нелинейная динамика, **6**, 693, (2010).

14. Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V. Physica D, **244**, 36 (2013).

15. Maistrenko Y., Popovych O., Burylko O., Tass P.A. Phys. Rev. Lett. **93**, 084102 (2004).

16. Anishchenko V, Astakhov S., Vadivasova T. Europhysics Letters, **86**, 30003 (2009).

17. Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **16**, 2371 (2011).

18. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Нелинейная динамика, **7**, 411 (2011).

19. Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, **19 (7)**, 76 (2011).

20. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление (М.: Техносфера, 2003).

21. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. (М.: Физматлит, 2002).

22. [Adler R. Proceedings of the I.R.E. and Waves and Electrons, 34 \(6\), 351 \(1946\)](#)

23. Хохлов Р.В. ДАН СССР, **97**, 411 (1954).

24. Ахманов С. А. УФН, **149** 361 (1986)

25. Spencer M.B., Lamb W. E. Phys. Rev. A**5**, 893 (1972).

26. Landa P.S. Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996).

27. Кузнецов С.П. Динамический хаос (М.: Физматлит, 2001).

28. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей (Москва-Ижевск: ИКИ, 2002)ю

29. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения (М.: Физматлит, 1980).

А.П.Кузнецов, И.Р.Сатаев, Л.В.Тюрюкина,

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН

Saratov Branch of Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of Russian Academy

410019, г. Саратов, ул. Зеленая, 38.

Н.Ю. Чернышов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky.

410012, г. Саратов ул. Астраханская, 83.

## **Synchronization in the phase model of three coupled lasers**

A.P.Kuznetsov, I.R.Sataev, L.V.Turukina, N.Yu.Chernyshov

The problem of synchronization of three lasers is considered in the phase approximation. The domains of complete synchronization, partial synchronization, two-frequency resonant modes and three-frequency quasi-periodicity are revealed. Bifurcation analysis is used, the method of Lyapunov exponents charts and construction of phase portraits. We discuss the differences in the properties of the chain and a ring of three elements, as well as the influence of the type of coupling.

Keywords: synchronization of lasers, quasi-periodic oscillation, bifurcation