

---

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

---

Д. И. Трубецков, Е. С. Мчедлова, Л. В. Красичков

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ  
САМООРГАНИЗАЦИИ  
ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ**

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по физическим специальностям*



Москва  
Физматлит, 2002

ББК 22.193  
К 47  
УДК 519.6

*Издание осуществлено при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки»*

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор *Б. П. Безручко*  
доктор физико-математических наук, профессор *В. Д. Шалфеев*

**ТРУБЕЦКОВ Д. И., МЧЕДЛОВА Е. С., КРАСИЧКОВ Л. В.** Введение в теорию самоорганизации открытых систем.—М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002.—200 с.—ISBN 5-94052-052-9.

Книга представляет собой введение в теорию образования структур в далеких от равновесия системах. Читателю предлагается общий взгляд на самоорганизацию в открытых системах с точки зрения термодинамики и теории образования диссипативных структур. В книге содержится классификация структур, возникающих в открытых системах, и приводится большое количество примеров процессов самоорганизации в термодинамике, гидродинамике, биофизике, химии, экологии, социологии. Для каждого случая проводится теоретический анализ, результаты моделирования сопоставляются с динамикой реальных систем.

Для студентов и аспирантов физических, физико-технических, инженерно-физических и математических специальностей вузов; книга может быть полезна биологам, химикам, экологам и другим специалистам, интересующимся явлениями самоорганизации в нелинейных неравновесных системах.

ISBN 5-94052-052-9

© Центр «Интеграция», 2002  
© Коллектив авторов, 2002

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Введение . . . . .	8
<b>Глава 1. Физика открытых систем (вводные замечания) . . . .</b>	<b>9</b>
1.1. Немного истории: почему Больцман определил XIX век как век Дарвина, а Пуанкаре полностью отвергал теорию Больцмана . . . . .	9
1.2. Диссипативные структуры Пригожина. Сложность открытых систем и синергетика . . . . .	11
1.3. Роль энтропии в открытых системах . . . . .	12
1.4. Процесс эволюции в открытых системах. Самоорганизация и деградация . . . . .	24
1.5. Хаос и порядок. Неравновесные фазовые переходы и условия образования диссипативных структур . . . . .	25
<b>Глава 2. Эволюция и развитие науки и высшей школы как открытой системы . . . . .</b>	<b>28</b>
2.1. Нелинейная динамика и развитие науки . . . . .	28
2.2. Научное сообщество как диссипативная структура . . . .	31
2.3. Модель взаимодействия и эволюции двух научных направлений . . . . .	32
2.3.1. Анализ структуры фазового пространства. 2.3.2. Результаты моделирования и их сравнительный анализ. 2.3.3. Некоторые выводы	
2.4. Влияние временных запаздываний на динамику взаимодействующих научных направлений . . . . .	42
2.4.1. Влияние разномасштабного запаздывания на динамику двух развивающихся научных направлений в случае их сотрудничества. 2.4.2. Некоторые выводы	
2.5. Решетка связанных отображений с неоднородной диффузией как возможная модель интеграции высшей школы . . . . .	51
2.5.1. Математическая модель. 2.5.2. Схема интеграционного взаимодействия. 2.5.3. Результаты численного моделирования и их интерпретация	

Глава 3. Паттерны. Классификация. Определения и примеры	58
Глава 4. Колмогоров, Петровский, Пискунов, Фишер и нелинейное уравнение диффузии	62
Глава 5. Нелинейные температурные волны в веществе, выделяющем тепло	73
5.1. Вводные замечания	73
5.2. Распространение теплоты в среде. Существуют ли линейные температурные волны?	74
5.3. Нелинейная теплопроводность	76
5.4. Тепловые нелинейные волны и неоднородные стационарные состояния	78
Глава 6. О некоторых базовых моделях самоорганизации (Статические, стационарные автопаттерны и ансамбли автопаттернов)	86
6.1. Структуры Тьюринга. Отчего у леопарда пятна на шкуре?	86
6.2. Брюсселятор — важная методическая модель в теории самоорганизации	105
6.3. Редуцированный брюсселятор — точно решаемая модель	111
6.4. Реакция Белоусова–Жаботинского и орегонатор	116
6.5. Проблема морфогенеза и модели Гирера–Мейнхарта	121
6.6. Ячейки Бенара	123
Глава 7. Ансамбли автоструктур	143
7.1. Вместо введения: качественное описание вихрей Тейлора в круговом течении Куэтта	143
7.2. Ансамбли автоструктур в сыпучих средах	150
7.3. Сверхизлучение в цепочке сгустков, содержащих электроны-осцилляторы	153
Глава 8. Автоволновые процессы и системы	158
8.1. Решения типа бегущего фронта для реакции Белоусова–Жаботинского	159
8.2. Бегущий импульс	161
8.3. Аксиоматическая модель Винера–Розенблюта. Ревербатор и ведущий центр	169
8.4. О клеточных автоматах	177
Приложение. Компьютерный практикум по курсу «Самообразования в открытых системах»	180

П.1. Случайные (шумовые) процессы. Методы генерирования случайных (шумовых) последовательностей. Характеристики случайных последовательностей	180
П.2. Количественные и качественные характеристики последовательностей данных	182
П.3. Исследование динамики систем с запаздывающим аргументом	184
П.4. Решетки связанных отображений: классификация пространственно-временных состояний	186
П.5. Моделирование структур в решетках связанных отображений	187
Список литературы	190

«Самопроизвольное, не связанное с действием внешних организующих полей, регулярное поведение в сложной системе есть результат развития в ней определенного вида неустойчивостей. При этом процесс упорядочения, очевидно, связан с коллективным (кооперативным) поведением образующих систему подсистем. Именно благодаря «кооперативности» теорию самоорганизации часто называют синергетикой (от греческого «совместные действия»).

*А. В. Гапонов-Грезов, М. И. Рабинович.* Предисловие к книге «Нелинейные волны: Самоорганизация» (М.: Наука, 1983. С.3)

«Синергетику можно рассматривать как форум, на котором ученые разных дисциплин встретились друг с другом для того, чтобы обменяться своими идеями, как справиться с большими системами».

*Герман Хакен.* «Некоторые вводные замечания по синергетике» Международный симпозиум по синергетике. Берлин, 1984

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга завершает серию «Современная теория колебаний и волн», издаваемую в рамках программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 годы».

Второй эпиграф в значительной степени раскрывает характер и построение книги — это встреча и обмен идеями разных дисциплин. Здесь уместно привести еще одно высказывание Германа Хакена, близкое идеологии книги, в котором термин «синергетика» в нашем случае следует заменить на термин «самоорганизация» (см. второй эпиграф): «Данная конференция, как и все предыдущие, показала, что между поведением совершенно различных систем, изучаемых различными науками, существуют поистине удивительные аналоги. С этой точки зрения, данная конференция служит еще одним примером существования новой области науки — Синергетики. Разумеется, Синергетика существует не сама по себе, а связана с другими науками по крайней мере двояко. Во-первых, изучаемые Синергетикой системы относятся к компетенции различных наук. Во-вторых, другие науки привносят в Синергетику свои идеи...»<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Цитируется по статье Ю. А. Данилова и Б. Б. Кадомцева «Что такое синергетика?» из книги «Нелинейные волны: Самоорганизация» (М.: Наука, 1983. С.7).

Книга во многом соответствует содержанию курсов лекций, читаемых в Саратовском государственном университете по нелинейным процессам различной природы. Сначала раздел «Самоорганизация» входил в курс «Теория волновых процессов» для студентов четвертого курса радиофизического отделения физического факультета университета, который на протяжении многих лет читал член-корреспондент РАН, профессор Д. И. Трубецков. В основном его содержание соответствовало книге М. И. Рабиновича и Д. И. Трубецкова «Введение в теорию колебаний и волн» (М.: Наука, 1984 — первое издание, 1992 — второе издание)<sup>2)</sup>. Отдельные лекции по самоорганизации читались Д. И. Трубецковым в Самарском педагогическом институте, Санкт-Петербургском техническом университете, Поволжской академии государственной службы, Вайомингском университете (США). Затем им же были разработаны и прочитаны специальные курсы лекций «Хаос и структуры» для пятикурсников физического факультета и «Самоорганизация в открытых системах» для студентов четвертого курса факультета нелинейных процессов, в основу учебного плана которого положена нелинейная динамика. Данная книга почти полностью соответствует последнему спецкурсу.

Е. С. Мчедлова и Л. В. Красичков создали практикум (натурного и вычислительного эксперимента), соответствующий спецкурсу. Большинство оригинальных результатов, вошедших в книгу, принадлежат им.

*Авторы*

<sup>2)</sup> На английском языке книга имеет название: *Rabinovich M. I. and Trubetskov D. I. Oscillations and waves in linear and nonlinear systems.* — Kluwer Academic Publisher, 1989. 577 p.

«Чем сейчас владеет теория самоорганизации, каковы ее модели, образы, методы?... Модели теории самоорганизации — это модели нелинейных неравновесных систем... Исследование простейших моделей позволяет понять и выделить основные механизмы организации порядка...».

*А. В. Гапонов-Грегов, М. И. Рабинович.* Предисловие к книге «Нелинейные волны: Самоорганизация» (М.: Наука, 1983. С. 3–4)

## ВВЕДЕНИЕ

По-видимому, первыми книгами на русском языке, посвященными вопросам самоорганизации в открытых системах, были монографии [1–5]. Но настоящим введением в проблему была книга Вернера Эбелинга [4], поскольку в ней на примерах из физики, химии и биологии автор знакомил читателя с основными идеями и результатами теории возникновения структур в открытых системах.

В указанном смысле данная книга близка к монографии [4]: она тоже «введение», но содержит новый материал, накопившийся за прошедшие двадцать с лишним лет. Каждая глава по существу автономна для чтения и является законченным изложением описываемой задачи. Математический аппарат выбран щадящим читателя. Большое внимание уделяется моделям и образам теории самоорганизации. Во многих случаях приводятся и обсуждаются результаты компьютерного моделирования различных процессов самоорганизации.

В книге много иллюстраций, соответствующих натурным экспериментам и моделированию на ЭВМ.

Читатель, заинтересованный в более глубоком изучении современных аспектов физики открытых систем, может обратиться к источникам [6–12], а также к литературе, указанной в конце каждой из глав.

# Глава 1

## ФИЗИКА ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ (ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ)<sup>1)</sup>

Лишь в открытых системах происходят события,  
Не кончается время и возможны открытия.

*М. В. Волькенштейн*

### 1.1. Немного истории: почему Больцман определил XIX век как век Дарвина, а Пуанкаре полностью отвергал теорию Больцмана

Для дальнейшего изложения наиболее интересны и важны сложные макроскопические неравновесные системы, содержащие упорядоченные структуры, в которых порядок рождается из хаоса. Таких систем много и они разнообразны. К ним относятся конвективные и гидродинамические ячейки, вихри в атмосфере и океане, лазеры, химические реакции с временной и пространственной периодичностью, живые организмы и экосистемы.

Существование и эволюция таких систем, особенно живых, многим до недавнего времени казались противоречащими второму закону термодинамики. Напомним, что этот закон утверждает: развитие изолированной системы идет от порядка к хаосу. «Клаузиус и Дарвин не могут быть одновременно правы», — так недавно звучали некоторые утверждения.

Необходимость описывать подобные системы и прогнозировать их эволюцию привела к созданию основ теории самоорганизации. При этом используются различные подходы и названия:

теория самоорганизации или теория диссипативных структур, синергетика,  
теория открытых систем,  
информационная динамика,  
динамическая теория формообразования.

Теория далека от совершенства, но уже есть возможность рассказать о результатах, ставших классическими.

<sup>1)</sup> В этой главе мы используем идеи и подходы Ю. Л. Климонтовича, изложенные, например, в работах [1–3].

Все имеющиеся экспериментальные данные и результаты наблюдений показывают, что для существования в системе упорядоченных структур (исключая равновесные структуры типа кристалла) система должна быть открытой, т. е. обмениваться с окружающей средой энергией и энтропией, переносимыми средой и/или излучением, и, что не менее важно, информацией. При этом обмен должен быть столь велик, чтобы система находилась вдали от термодинамического равновесия, в области нелинейной зависимости обобщенных термодинамических потоков от термодинамических сил.

Возникновение физики открытых систем было подготовлено такими выдающимися учеными, как Людвиг Больцман, Анри Пуанкаре, Александр Ляпунов и, конечно, биолог Чарльз Дарвин.

Почему Л. Больцман назвал XIX век веком Дарвина? Он считал, что теория эволюции Дарвина, основанная на принципе естественного отбора, является наиболее значительным открытием прошлого века. И это на фоне Никола Леонарда Сади Карно, Рудольфа Клаузиуса, Вильяма Томсона (термодинамика), Майкла Фарадея и Джеймса Максвелла (электромагнитная теория) и самого Людвига Больцмана (молекулярно-кинетическая теория). Именно Больцман предложил первое кинетическое уравнение для описания необратимых процессов в газах (оно описывает, в частности, и установление равновесного состояния в газе); он ввел впервые статистическое определение энтропии; Больцман доказал знаменитую H-теорему (согласно этой теореме в процессе установления равновесного состояния энтропия монотонно возрастает и остается постоянной при его достижении). И, пожалуй, главное: Больцман понял, что в замкнутых системах энтропия может служить мерой относительной степени хаотичности. Казалось бы, XIX век — век физики, а Больцман все же определил этот век как век Дарвина. Таким образом, на первое место он поставил принцип биологической эволюции. Странно. Ведь во времена Больцмана не было математических моделей биологической эволюции. Скорее всего, Больцман был уверен, что его теория временной эволюции газа в замкнутой системе будет обобщена и на открытые системы, к которым относятся все биологические объекты. Видимо, он считал теорию Дарвина первым шагом на этом пути.

Мало кто разделял это мнение. Более того, среди оппонентов Больцмана был и великий Пуанкаре, который полностью отвергал его теорию. Вот, в частности, что пишет по этому поводу И. Пригожин в книге «От существующего к возникающему» [4]:

«Пуанкаре в одной из своих работ открыто не рекомендовал изучать труды Больцмана на том основании, что посылки в рассуждениях Больцмана противоречат его, Пуанкаре, выводам!»

Пуанкаре, основываясь на обратимых уравнениях механики, пришел к выводу, что теория необратимых процессов и механика

несовместимы. Основанием, в частности, служило то, что в механике нет функции, играющей роль энтропии.

И. Пригожин в одной из статей приводит и еще одно высказывание Пуанкаре: «В этой связи забавно вспомнить слова Пуанкаре о том, что рекомендовать кому-либо прочитать работу Больцмана он не может, так как не может рекомендовать изучение доказательств, в которых выводы противоречат предпосылкам».

Совсем иначе оценивал работы Больцмана Эрвин Шредингер:

«Его (Больцмана) направление мышления можно было бы назвать моей первой любовью. Никакие идеи не захватывали меня столь глубоко и вряд ли смогут захватить меня в будущем».

Таким образом, уже на пороге XX века стало ясно, что развитие теории неравновесных процессов в физических и биологических системах является одной из важнейших задач естествознания. Но от понимания важности проблемы до ее далеко еще не полного решения потребовалось почти сто лет.

Первым принципиальным шагом в этом направлении была развита Альбертом Эйнштейном, Марианом Смолуховским и Полем Ланжевеном теория броуновского движения. Поскольку хаотическое движение малых, но все же макроскопических частиц в жидкости вызвано толчками со стороны молекул жидкости, система броуновских частиц представляет собой пример открытой системы. Теория была создана в начале века и только через полвека в статистической теории открытых систем были сделаны последующие принципиальные шаги. Понадобились новые идеи, новые образы, новые понятия.

Среди тех, кто создавал теорию открытых систем, следует назвать А. М. Ляпунова, А. Н. Колмогорова, Л. И. Мандельштама, А. А. Андропова и его учеников разных поколений, Н. С. Крылова, Я. Б. Зельдовича, Ю. Л. Климонтовича и многих других. К основоположникам теории самоорганизации следует отнести и Владимира Ивановича Вернадского — создателя учения о ноосфере (сфере разума).

## 1.2. Диссипативные структуры Пригожина. Сложность открытых систем и синергетика

В книге будут рассматриваться макроскопические открытые системы, которые состоят из многих объектов, принимаемых за элементы структуры. Элементы могут быть микроскопическими (атомы или молекулы в физических и химических системах), но могут быть малыми, оставаясь все же макроскопическими (макромолекулы в полимерах, клетки в биологических структурах). Они могут быть и не малыми телами (например «элементарные» объекты в социологии).

Из-за сложности открытых систем в них возможно образование различного рода структур. Причем диссипация при образовании структур играет конструктивную роль. На первый взгляд это кажется странным: понятие диссипации ассоциируется с затуханием различного рода движений, с рассеянием энергии, с потерей информации. Однако, и это очень важно, диссипация необходима для образования структур в открытых системах (вспомним, что автоколебания возможны лишь в системах с диссипацией).

Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, Пригожин ввел термин «диссипативные структуры». Это чрезвычайно емкое и точное понятие объединяет все виды структур: временные (автоколебания в генераторе), пространственные (ячейки Бенара на поверхности жидкости), пространственно-временные структуры (автоволны на поверхности жидкости).

Сложность открытых систем предоставляет широкие возможности для существования в них коллективных явлений. Подчеркивая роль кооперации при образовании диссипативных структур, Герман Хакен ввел термин «синергетика», что означает коллективное действие.

По Ю. Л. Климонтовичу, «синергетика — не самостоятельная научная дисциплина, но новое междисциплинарное научное направление; цель синергетики — выявление общих идей, общих методов и общих закономерностей в самых разных областях естествознания, а также социологии и даже лингвистики; более того, в рамках синергетики происходит кооперирование различных специальных дисциплин» [3].

### 1.3. Роль энтропии в открытых системах

Если для рассмотрения и описания равновесных или близких к равновесию систем достаточно рассмотреть баланс массы, импульса и энергии, то при описании открытых систем определенную роль играет баланс энтропии [5, 8–11]. Это было отмечено уже в 1938 году Р. Эмденом, который, рассмотрев процесс отопления помещения, заключил, что «на фабрике природы энтропия — директор, определяющий направление и ход процессов, а энергия — лишь бухгалтер, подводящий баланс» [6].

Шредингер, заметив, что организм отдает столько же энергии и вещества, сколько получает, спросил, за счет чего же он живет, и сам же ответил: «Живые организмы питаются отрицательной энтропией» [7].

В любой реальной системе всегда идут необратимые диссипативные процессы (диффузия, вязкость, теплопроводность, химические реакции, фазовые переходы), в которых растет энтропия. Причина необратимости кроется в неустойчивости траекторий атомов и молекул при наличии их взаимодействий (столкновений).

Очевидно, играет роль и то, что атомы и молекулы не твердые шарики, как принимали в большинстве моделей, а сложные квантовые системы. Единственная функция состояния, которая различается в необратимых и обратимых процессах, — это энтропия: во-первых, она растет, а во-вторых, меняется.

Вспомним определение энтропии, начав со второго закона (начала) термодинамики, которое формулируется так: *процесс, единственным результатом которого было бы извлечение теплоты из некоего резервуара и превращение этой теплоты в работу, невозможен.*

Эквивалентным принципом является принцип Карно: *ни одна тепловая машина, поглощающая теплоту  $Q_1$  при температуре  $T_1$  и выделяющая теплоту  $Q_2$  при температуре  $T_2$ , не может производить больше работы, чем обратимая машина, работа которой равна*

$$Q_1 - Q_2 = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (1.1)$$

Перепишем уравнение (1.1) в виде  $Q_1 T_1 = Q_2 T_1 - Q_1 T_2 + Q_1 T_1$ ; тогда

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}. \quad (1.2)$$

Величина  $Q/T$  называется *энтропией*. Это понятие было введено Рудольфом Клаузиусом в 1865 году. Само слово «энтропия» было им произведено от древнегреческого слова *τροπή* — «обращение», «поворот». Глагол *επιτρέπω* означает превращать. Таким образом, по мысли Клаузиуса, энтропия характеризует превращение, превратимость.

Клаузиус рассуждал следующим образом. Если газ при температуре  $T$  получает порцию теплоты  $\Delta Q$ , то его энтропия возрастает на величину

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}, \quad (1.3)$$

или, в дифференциальных обозначениях,

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad (1.4)$$

Для того чтобы вычислить полное изменение энтропии при переходе газа из состояния 1 в состояние 2, нужно проинтегрировать выражение (1.4) от первого до второго состояния:

$$\Delta S = S(V_2, T_2) = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (1.5)$$

Так как энтропия есть функция состояния, полученная разность энтропий не зависит от пути интегрирования и определяется только начальной и конечной точками пути. Еще раз подчеркнем, что для теплоты  $Q$  такое интегрирование невозможно. Выражение

$$\int_1^2 dQ$$

неопределенно — интеграл зависит от пути интегрирования. В этом смысле  $dQ$  (а также дифференциал работы  $dW$ ) не настоящий, не полный дифференциал. Но стоит поделить  $dQ$  на  $T$ , как неполный дифференциал превращается в полный. Величина  $1/T$  играет роль интегрирующего множителя.

Чтобы вычислить энтропию в конкретном случае, вспомним цикл Карно<sup>2)</sup>. Вычислим энтропию идеального газа (рис. 1.1). На первой стадии цикла Карно газ производит работу вследствие своего изотермического расширения при температуре  $T_1$ . Эта работа совершается за счет тепловой энергии  $Q_1$ , полученной от нагревателя. Она равна

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p dV = Q_1. \quad (1.6)$$

Считая, что количество газа составляет один моль, воспользуемся уравнением состояния

$$pV = RT. \quad (1.7)$$

Подставляя  $p$  из равенства (1.7) в интеграл (1.6) и проводя интегрирование, находим:

$$W_1 = Q_1 = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (1.8)$$

<sup>2)</sup> Никола Леонард Сади Карно (1.06.1796–24.08.1832). В 1824 году в Париже вышла маленькая книга — всего 45 страниц — под названием «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развить эту силу». Она принадлежит перу Н. Карно — «бывшего ученика политехнической школы», как сказано на титульном листе. Карно было в ту пору 28 лет. Он был сыном Лазара Карно, носившего почетное прозвище «организатора победы», данное за его заслуги в войнах революционной Франции. Л. Карно — выдающийся военный и политический деятель, инженер и крупный математик. Но, пожалуй, маленький мемуар сына перевешивает труды отца. Больше Карно ничего не опубликовал. Он умер восемью годами позже, в 1832 г., в возрасте 36 лет. Труд Карно получил широкую известность в 1834 году благодаря Б. Клапейрону, который придал его идеям доступную математическую форму.

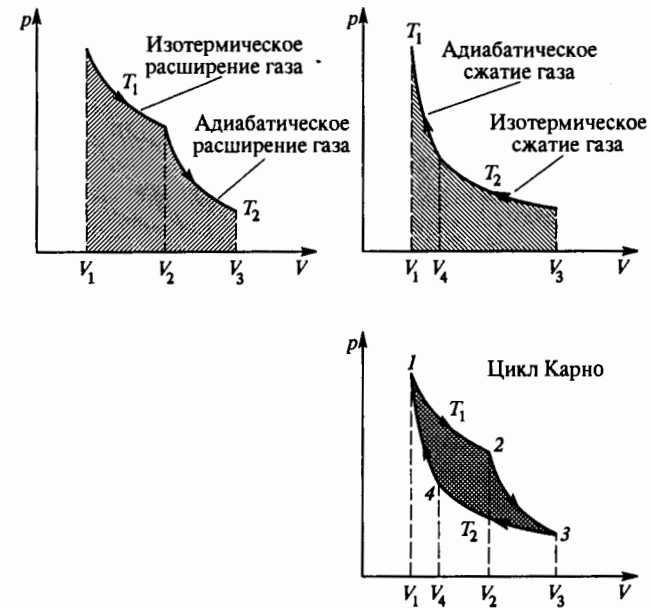


Рис. 1.1. К вычислению энтропии для цикла Карно

Изменение энтропии при изотермическом расширении газа от объема  $V_1$  до объема  $V_2$  в результате сообщения ему теплоты  $Q_1$  равно

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} = R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (1.9)$$

Так как объем  $V_2$  больше  $V_1$ , энтропия возрастает при изотермическом расширении газа.

При адиабатическом расширении от  $V_2$  к  $V_3$  имеет место равенство

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad (1.10)$$

а при адиабатическом сжатии от  $V_4$  до  $V_1$  —

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (1.11)$$

Поделив равенство (1.10) на (1.11), получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (1.12)$$

При изотермическом сжатии от  $V_3$  до  $V_4$  энтропия убывает на величину

$$\Delta S = R \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (1.13)$$



В силу (1.9) убыль энтропии на пути  $3 \rightarrow 4$  в точности компенсирует ее возрастание на пути  $1 \rightarrow 2$ . Обратимый цикл замыкается, и энтропия как функция состояния остается неизменной.

Задача. Выведите сами соотношения (1.10) и (1.11). Получите уравнение адиабаты в виде  $pV^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma = C_p/C_V$  ( $C_p$  и  $C_V$  — соответствующие теплоемкости).

Указание: используйте закон сохранения,  $\Delta Q = \Delta E + W$ , где  $\Delta Q$  — изменение количества теплоты,  $\Delta E$  — изменение внутренней энергии,  $W$  — работа.

Вернемся к открытым системам. Зададимся вопросом: «Из чего складывается изменение энтропии открытой системы?» Во-первых, внутри системы могут происходить различные процессы, в результате которых энтропия системы меняется на величину  $dS_i$ . Во-вторых, имеется поток энтропии в систему или из нее. Энтропия изменяется как в результате теплообмена с окружением, так и в результате обмена веществ. Ведь энтропия есть функция состояния вещества, вместе с веществом энтропия поступает в систему или выходит из нее. Обозначим изменение энтропии, связанное с ее притоком, или оттоком,  $dS_e$ . Тогда общее изменение энтропии открытой системы равно

$$dS = dS_i + dS_e. \quad (1.14)$$

Знак  $dS_i$  — энтропии, производимой внутри системы, — всегда положителен. Действительно, если окружить систему адиабатической оболочкой, то  $dS_e$  станет равным нулю, а  $dS_i$  сохранится. В соответствии со вторым началом термодинамики в этом случае

$$dS = dS_i > 0. \quad (1.15)$$

Равенство нулю будет иметь место, если система уже достигла равновесия.

Знак  $dS_e$  может быть положительным или отрицательным в зависимости от конкретных условий. Приток энтропии в систему может быть больше или меньше ее оттока. Изменение энтропии открытой системы в целом, в соответствии с определением (1.14), может быть положительным или равняться нулю. Возможны следующие ситуации:

$$\begin{aligned} dS_e > 0, & & dS > 0; \\ dS_e < 0, \text{ но } |dS_e| < dS_i, & & dS > 0; \\ dS_e < 0 \text{ и } |dS_e| > dS_i, & & dS < 0; \\ dS_e < 0 \text{ и } |dS_e| = dS_i, & & dS = 0. \end{aligned}$$

Наибольший интерес представляют два последних случая. Это убывание энтропии открытой системы и точная компенсация производства энтропии ее оттоком.

Если в системе нет производства энтропии и имеется лишь теплообмен с окружающей средой, то

$$dS = dS_e = \frac{dQ}{T}. \quad (1.16)$$

Смысл потока энтропии здесь весьма прост — это поток количества теплоты. Если одновременно имеется производство энтропии внутри системы, то

$$dS = dS_i + dS_e = dS_i + \frac{dQ}{T}, \quad (1.17)$$

и получаем неравенство, справедливое для необратимых процессов,

$$dS \geq \frac{dQ}{T}. \quad (1.18)$$

Знак равенства имеет место лишь при  $dS_i = 0$ .

В системах, внутри которых протекают физические, химические, биологические процессы, всегда производится энтропия. Это производство происходит всегда с определенной скоростью (всегда положительной и равной нулю лишь в условиях равновесия):

$$\frac{dS_i}{dt} \geq 0. \quad (1.19)$$

Обозначив буквой  $\sigma$  производство энтропии в единицу времени в единице объема открытой системы (величина  $\sigma$  называется функцией диссипации), можно написать

$$\frac{dS_i}{dt} = \int \sigma dV \geq 0. \quad (1.20)$$

Формулы (1.19) и (1.20) содержат время! Скорость производства энтропии определяется как производная по времени. Эти формулы относятся к неравновесным процессам.

Если ввести энтропию с обратным знаком (отрицательную энтропию, «негэнтропию»), то можно сказать, что имеется приток отрицательной энтропии к системе, который расходуется в диссипативных процессах и поддерживает систему в неравновесном состоянии. В стационарном неравновесном состоянии приток негэнтропии равен производству энтропии и может служить мерой всех диссипативных процессов, происходящих в системе.

Как же поступать с началами термодинамики применительно к открытым системам? Ведь они справедливы лишь для изолированных систем. Следует рассматривать открытую систему вместе с ее окружением — с источниками вещества и энергии — и все

вместе отделить от окружающего мира адиабатической, изолирующей оболочкой.

К такой системе законы термодинамики можно применить.

Классический пример — космонавт в кабине космического корабля; прилагаются все усилия для того, чтобы изолировать внутренность корабля от окружающего космического пространства, а внутри корабля есть запасы пищи, воды, воздуха.

Поскольку космонавт — открытая система, то изменение его энтропии равно

$$dS^{(к)} = dS_i^{(к)} + dS_e.$$

Поток энтропии  $dS_e$  определяется обменом энтропией с окружающей средой — обменом тепловой энергией и веществами.

Изменение энтропии среды, окружающей космонавта,

$$dS^{(с)} = -dS_e,$$

и общее изменение энтропии принимает вид

$$dS = dS^{(к)} + dS^{(с)} = dS_i^{(к)} > 0. \quad (1.21)$$

В соответствии со вторым началом термодинамики энтропия изолированной системы возрастает на величину производства энтропии в организме космонавта. Космонавт — здоровый, как правило, молодой человек. Его состояние поддерживается во время полета на неизменном уровне. Оно стационарно, но неравновесно, т. е. энтропия космонавта (а также его масса и энергия) остается неизменной, ее изменение равно нулю:

$$dS^{(к)} = dS_i^{(к)} + dS_e = 0. \quad (1.22)$$

Так как  $dS_i^{(к)} > 0$ , величина  $dS_e$  отрицательна. В стационарном состоянии открытой системы производство энтропии внутри системы в точности компенсируется ее оттоком наружу. Можно показать, что энтропия веществ, выделяемых живым организмом, больше, чем энтропия веществ, им потребляемых.

Это понял еще Э. Шредингер. О его книге, опубликованной в 1945 году, мы упоминали (книга сыграла важную роль в современной биологии, поскольку в ней рассмотрены основные положения термодинамики живых, т. е. открытых систем).

Вот любопытная цитата из этой книги:

«Что же тогда составляет то драгоценное нечто, содержащееся в нашей пище, что предохраняет нас от смерти? На это легко ответить. Каждый процесс, явление, событие — назовите это как хотите, — короче говоря, все, что происходит в природе, означает увеличение энтропии в той части мира, где это происходит. Так и живой организм непрерывно увеличивает свою энтропию — или,

говоря иначе, производит положительную энтропию и таким образом приближается к опасному состоянию максимальной энтропии, которое представляет собой смерть. Он может избежать этого состояния, т. е. оставаться живым, только путем постоянного извлечения из окружающей среды отрицательной энтропии, которая представляет собой нечто весьма положительное, как мы сейчас увидим. Отрицательная энтропия — вот то, чем организм питается. Или, чтобы выразить это менее парадоксально, существенно в метаболизме то, что организму удается освободить себя от всей той энтропии, которую он вынужден производить, пока он жив!»

Питание отрицательной энтропией означает выделение большей энтропии, чем поступающая в организм, означает поддержание стационарного состояния посредством оттока энтропии.

Рассуждения, подобные изложенным Шредингером, содержатся и в упоминавшейся заметке немецкого геофизика Роберта Эмдена. Приведем ее полностью, поскольку она типична для «нобелевского» журнала «Nature». Крупнейшие физики-теоретики Арнольд Зоммерфельд и Риого Кубо включили в свою монографию эту заметку. «Зачем мы имеем зимнее отопление?»

На вопрос, почему мы топим зимой, неспециалист ответит: чтобы сделать комнату теплее; знаток термодинамики выразится, возможно, таким образом: чтобы подвести недостающую энергию. В таком случае правым окажется профан, а не ученый.

В соответствии с фактическим положением вещей предположим, что давление воздуха в комнате всегда равно атмосферному. Энергия единицы массы воздуха в комнате равна

$$E = c_v T.$$

Следовательно, энергия единицы объема равна

$$E_1 = c_v \rho T,$$

где  $\rho$  — плотность, или, учитывая уравнение состояния  $p/\rho = RT$ ,

$$E_1 = c_v \frac{p}{R}.$$

Для воздуха при атмосферном давлении

$$E_1 = 0,0604 \text{ кал/см}^3 = 2,5228 \cdot 10^5 \text{ Дж/м}^3.$$

Следовательно, количество энергии в комнате не зависит от температуры и целиком определяется показанием барометра. Вся энергия, которую мы вводим в комнату при отоплении, уходит через поры в стенах наружу.

Я приношу бутылку красного вина из холодного погреба, и она принимает температуру теплой комнаты. Она становится теплее, однако внутренняя энергия ее увеличивается за счет наружного, а не комнатного воздуха.

Почему же все-таки мы топим? — По той же самой причине, по которой жизнь на Земле была бы невозможна без солнечного излучения. При этом дело заключается не в падающей энергии. Последняя будет снова излучена вплоть до пренебрежимо малой доли, подобно тому, как человек не меняет своего веса, несмотря на принятие пищи. Условия нашего существования требуют известной температуры тела, и чтобы ее поддерживать, используется не увеличение энергии, а уменьшение энтропии.

Будучи студентом, я с пользой прочел небольшую книгу Ф. Вальда «Царица мира и ее тень». Имелись в виду энергия и энтропия. Достигнув более глубокого понимания, я пришел к выводу, что их надо поменять местами. В гигантской фабрике естественных процессов принцип энтропии занимает место директора, который предписывает вид и течение всех сделок. Закон сохранения энергии играет лишь роль бухгалтера, который приводит в равновесие дебет и кредит.

Зоммерфельд уточнил расчеты Эмдена и показал, что плотность энергии не остается постоянной, а даже уменьшается при нагревании. Тем более справедлив вывод о первенствующей роли энтропии по сравнению с энергией.

Поговорим немного о функции диссипации.

Пусть система (пока даже не важно, открытая или изолированная) содержит два тела при разных температурах, контактирующих друг с другом. Сразу после соприкосновения в системе возникнет поток теплоты от более нагретого тела к менее нагретому. Поток продолжается, пока сохраняется разность температур. Энтропия производится благодаря теплопроводности. В данном случае поток есть поток энергии  $dE/dt$ , а движущая сила, создающая этот поток, — разность температур. Однако характер зависимости энтропии от температуры таков, что следует пользоваться разностью обратных значений температуры. Суть дела от этого не меняется, так как

$$\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2}, \quad T_1 > T_2.$$

Для теплопроводности функцию диссипации можно представить в виде

$$\sigma = \frac{dE}{dt} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right). \quad (1.23)$$

Так как  $\sigma$  есть производство энтропии в единице объема, то  $E$  есть также энергия, приходящаяся на единицу объема.

Условие  $\sigma > 0$  выполняется:  $dE/dt$  — поток тепловой энергии от  $T_1$  к  $T_2$  положителен при  $T_1 > T_2$ , но при этом  $(1/T_2 - 1/T_1) > 0$ ; если  $T_1 < T_2$ ,  $(1/T_2 - 1/T_1) < 0$ , но при этом и  $dE/dt < 0$ .

Функция диссипации выражается произведением потока и силы, его вызывающей. Это — универсальное определение.

Пусть теперь речь идет об электропроводности, т. е. имеется поток зарядов, электронов, электрический ток. Движущей силой является электродвижущая сила, т. е. разность потенциалов. Функция диссипации

$$\sigma = I \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{T}, \quad (1.24)$$

где  $I = de/dt$  — ток, представляющий собой производную заряда по времени,  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  — разность потенциалов. Почему  $\sigma$  имеет такой вид?  $I(\varphi_1 - \varphi_2)$  — электрическая мощность, т. е. частное от деления энергии на время. Из соображений размерности следует, что в выражении для функции диссипации — для удельного производства энтропии — удельную электрическую мощность нужно поделить на температуру. Энтропия производится и в электрических процессах.

Элементарные соображения, относящиеся к термодинамике открытых систем, позволяют ответить, например, на вопрос: «Почему клетка делится?» Клетка — открытая система. Баланс энтропии выражается соотношением

$$\Delta S = \Delta S_i + \Delta S_e.$$

Будем для простоты считать клетку сферой радиуса  $r$ . Производство энтропии внутри клетки  $\Delta S_i$  пропорционально ее объему  $(4/3)\pi r^3$ , отток энтропии из клетки  $\Delta S_e$  пропорционален площади ее поверхности  $4\pi r^2$ , т. е.

$$\Delta S = A \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 - B \cdot 4\pi r^2,$$

где  $A$  и  $B$  — соответствующие размерные множители. Клетка растет,  $r$  увеличивается. При  $r = 3B/A$  достигается стационарное состояние,  $\Delta S = 0$ . При меньших значениях  $r$  величина  $\Delta S < 0$ , отток энтропии превышает ее производство и клетка может расти. Однако при  $r > 3B/A$  величина  $\Delta S > 0$ , т. е. в клетке накапливаются вещества с избыточной энтропией и она перегревается. Поэтому при  $r = 3B/A$  клетке нужно разделиться, иначе она погибнет. Объем при этом не меняется, а поверхность возрастает. Радиусы дочерних клеток, возникших в результате деления, равны

$$r' = \frac{r}{\sqrt[3]{2}},$$

так как  $r^3 = 2r'^3$ . Тогда

$$\Delta S = A \cdot \frac{8}{3}\pi r'^3 - 2B \cdot 4\pi r'^2,$$

а при  $r = 3B/A$  ( $r' = 3B/(A\sqrt[3]{2})$ ) получаем

$$\Delta S = 36\pi \frac{B^3}{A^2} (1 - \sqrt[3]{2}) < 0.$$

В результате деления отток энтропии превышает ее производство в

$$\frac{|\Delta S_e|}{\Delta S_i} = \sqrt[3]{2} = 1,26 \text{ раза.}$$

Заметим, что термодинамика объясняет необходимость деления клетки, но, конечно, не дает никаких сведений о механизме этого весьма сложного процесса. Термодинамика — наука феноменологическая.

Рост организмов, всегда состоящих из клеток, принципиально отличен от роста кристалла из расплава или раствора. В первом случае деление клеток и рост организма непосредственно связаны с оттоком энтропии в окружающую среду. Это неравновесные процессы. Рост кристалла — равновесный процесс, возникающий при равенстве свободных энергий кристалла и расплава, равновесный фазовый переход. Биологическое развитие, по-видимому, тоже фазовый переход, но неравновесный.

Для обратимых процессов в термостатике изменение внутренней энергии

$$dE = dQ - dW, \quad (1.25)$$

где  $dQ$  — теплота, сообщенная системе, и  $dW$  — работа, произведенная системой.

Но

$$dQ = TdS, \quad (1.26)$$

т. е.

$$dE = TdS - dW, \quad (1.27)$$

или

$$dW = -dF = -(dE - TdS). \quad (1.28)$$

Эта запись объединяет два начала и означает, что работа производится не за счет внутренней энергии системы, а за счет внутренней энергии за вычетом теплоты.

Величина

$$F = E - TS \quad (1.29)$$

называется свободной энергией.

В процессе, протекающем при постоянном давлении, совершается работа против постоянного давления — независимо от того, обратим этот процесс или нет. Эта работа равна  $p dV$ . Для практического применения остается лишь работа

$$dW = -dF - p dV. \quad (1.30)$$

При постоянном давлении полезная работа равна убыли величины  $G$ :

$$G = F + pV = E + pV - TS. \quad (1.31)$$

Функция  $G$  также называется свободной энергией:  $F$  — свободная энергия Гельмгольца,  $G$  — свободная энергия Гиббса, или термодинамический потенциал.

Рост ребенка и претшествующее эмбриональное развитие организма означают рост упорядоченности. Эмбрион возникает из одной оплодотворенной яйцеклетки, и при его развитии (онтогенезе) происходит морфогенез — образование определенных структур, т. е. тканей и органов. Другой пример структурообразования — возникновение галактик и звезд во Вселенной.

Подобные процессы означают уменьшение энтропии открытой системы, т. е. «уход» энтропии в окружающую среду, когда реализуются условия

$$dS_e < 0, \quad |dS_e| > dS_i > 0, \quad dS < 0. \quad (1.32)$$

Эти условия могут возникнуть лишь вдали от равновесия — вблизи равновесия доминирует  $dS_i$  — и, в крайнем случае, может возникнуть стационарное состояние.

Для того чтобы в открытой системе происходило структурообразование, т. е. возрастала упорядоченность, «уход» энтропии должен превысить некоторое критическое значение.

Изменение свободной энергии открытой системы при постоянных температуре и объеме равно

$$dF = dF_i + dF_e = dE - TdS = dE_i + dE_e - TdS_i - TdS_e.$$

Но  $dE_i = 0$ , так как энергия системы может измениться только за счет обмена с окружающей средой. Следовательно,

$$dF_e = dE_e - TdS_e = dE - TdS_e,$$

и из условий (1.32) получаем

$$dF_e > dE + TdS_i. \quad (1.33)$$

Для того чтобы происходил отток энтропии из системы, нужна «прибыль» свободной энергии в количестве, перекрывающем изменение внутренней энергии, и вклад, определяемый продукцией энтропии. Если рассматривается процесс не при постоянном объеме, а при постоянном давлении, нужно воспользоваться свободной энергией Гиббса, а не свободной энергией Гельмгольца. Тогда

$$dG_e > dH + TdS_i. \quad (1.34)$$

В стационарных условиях, когда внутренняя энергия или энтальпия системы не меняется,

$$dE = dH = 0,$$

получаем

$$dF_e = dG_e > TdS_i > 0. \quad (1.35)$$

Нужно вводить в систему свободную энергию для поддержания стационарного состояния.

#### 1.4. Процесс эволюции в открытых системах. Самоорганизация и деградация

В очень широком смысле эволюция — это процесс изменения, развития в природе и обществе. Мы уже вспоминали, что в замкнутых физических системах эволюция во времени приводит к равновесному состоянию, которому, как показал Больцман для разреженного газа, соответствует максимальная степень хаотичности. Открытым системам соответствуют два типа эволюционных процессов:

1) временная эволюция к равновесному (неравновесному, но стационарному состоянию);

2) эволюция через последовательность неравновесных стационарных состояний открытой системы (смена стационарных состояний происходит благодаря медленному изменению так называемых управляющих параметров).

Известно, что теория эволюции Дарвина, основанная на принципе естественного отбора, может вести либо к деградации, либо представлять собой процесс самоорганизации, когда возникают более сложные и более совершенные структуры. Самоорганизация — не единственный процесс эволюции. Более того, ни в физических, ни в биологических системах не заложено «обязательное стремление» к самоорганизации. Пример деградации в физике — временная эволюция замкнутой системы к равновесному состоянию.

Таким образом, самоорганизация — лишь один из возможных путей эволюции. В качестве критерия самоорганизации можно (разумно) использовать результаты анализа относительной степени упорядоченности (или хаотичности) различных состояний рассматриваемой открытой системы. Именно на этом пути можно ответить на вопрос, является ли данный процесс в открытой системе самоорганизацией или деградацией. Нужны количественные критерии относительной степени упорядоченности (хаотичности) различных состояний открытых систем. И здесь не все так просто: нужен объективный анализ, дающий дополнительную информацию. Представляют интерес в этом плане замечания Ю. Л. Климонтовича, которые приведены ниже [3]:

«Основная информация состоит в установлении некоторой «нормы хаотичности», а также в установлении отклонений от нормы (в ту или иную сторону) под влиянием тех или иных воздействий. В биологии это могут быть различные стрессы, которые и

вызывают отклонения степени хаотичности от нормы. При этом отклонения в ту или иную сторону могут означать «болезнь» и, следовательно, представлять собой процесс деградации.

Таким образом, далеко не всегда констатация (по выбранному критерию) уменьшения степени хаотичности означает наличие самоорганизации и, наоборот, констатация увеличения степени хаотичности означает наличие деградации. Такие выводы правомерны только в тех открытых физических системах, когда за начало отсчета степени хаотичности можно принять состояние теплового равновесия. В такой открытой системе, как, например, генератор электрических колебаний, равновесному состоянию, т. е. состоянию при нулевой обратной связи, отвечают тепловые колебания в электрическом контуре. Поскольку нормальное функционирование организма возможно лишь при некоторой норме хаотичности, которая отвечает существенно неравновесному состоянию, то указанной выше точки отсчета здесь не существует. По этой причине в биологии, а также, конечно, в экономике и социологии объективная информация об изменении степени хаотичности еще недостаточна, чтобы делать вывод о наличии процесса самоорганизации или деградации.

Здесь целесообразна другая классификация. Если удастся установить для данной системы норму хаотичности, то отклонения в обе стороны можно рассматривать как «болезнь» и, следовательно, как деградацию. Далее можно контролировать выбор методики «лечения». Здесь снова вступает в игру критерий относительной степени упорядоченности. Если по этому критерию «лечение» приближает состояние открытой системы к норме, то имеет место процесс самоорганизации. В противном случае «лечение» вызывает дальнейшую деградацию...

Трудности введения относительной меры упорядоченности (или, напротив, хаотичности) открытых систем связаны, в первую очередь, с отсутствием четких определений самих исходных понятий: хаос, порядок, деградация, самоорганизация».

#### 1.5. Хаос и порядок. Неравновесные фазовые переходы и условия образования диссипативных структур

По представлениям ученых-философов древности хаос — состояние материи, которое остается по мере устранения возможностей проявления ее свойств. С другой стороны, из хаоса может родиться порядок. В физике понятия «хаос» и «хаотическое движение» являются фундаментальными, но четких определений нет.

Согласно Больцману, наиболее хаотическим следует считать движение в состоянии равновесия. Но хаотическими оказываются и движения, далекие от состояния равновесия, например, «движения» в генераторах шума, предназначенных для подавления сиг-

налов. Хаотическими часто называют и турбулентные движения в жидкостях и газах, хотя правильнее говорить о сложном движении. В 1963 году Эдвард Лоренц открыл так называемый динамический хаос, исследуя решения уравнений, которые служат математической моделью конвективного движения в жидкостях и газах. Конвективное движение возникает благодаря совместному действию поля тяжести и градиента температуры, создаваемого внешним источником тепла (т. е. речь идет об открытой системе). При конвекции возможно и возникновение диссипативных структур.

Представим себе слой жидкости, который подогревается снизу. Конвективное движение выражается в том, что более нагретые элементы жидкости перемещаются вверх, а более холодные — вниз, т. е. передача тепла идет снизу вверх. Если градиент температуры достаточно мал, то перенос тепла осуществляется за счет теплопроводности, иными словами, имеет место молекулярный (неорганизованный) процесс.

При превышении градиентом температуры некоторого критического значения ситуация кардинально меняется: в жидкости возникает упорядоченное макроскопическое движение, называемое конвективным. При конвективном движении имеет место процесс самоорганизации, внешне проявляющийся в том, что на поверхности жидкости возникает диссипативная структура — ячейки Бенара. Внутри ячеек более теплая жидкость поднимается вверх, а по краям более холодная опускается вниз, таким образом, распределение встречных тепловых потоков становится упорядоченным. Появление подобной структуры можно рассматривать как неравновесный фазовый переход. Еще один пример неравновесного фазового перехода — возникновение когерентного электромагнитного излучения в лазерах и сложная динамика в виркаторах — релятивистских генераторах с виртуальным катодом.

Сформулируем, следуя [3], условия, необходимые для возникновения неравновесных фазовых переходов, которые проявляют себя в образовании новых диссипативных структур (ДС).

1. ДС могут образовываться только в открытых системах. Только в них возможен приток энергии, компенсирующий потери за счет диссипации и обеспечивающий существование более упорядоченных состояний.

2. ДС возникают в макроскопических системах, т. е. в системах, состоящих из большого числа элементов (атомов, молекул, макромолекул, клеток и т. д.). Благодаря этому возможны коллективные — синергетические взаимодействия, необходимые для перестройки системы.

3. ДС возникают лишь в системах, описываемых нелинейными уравнениями для макроскопических функций. Примерами могут служить кинетические уравнения, например, уравнение Больц-

мана, уравнения газовой динамики и гидродинамики, уравнения Максвелла в электродинамике для напряженностей электромагнитных полей и т. д.

4. Для возникновения ДС нелинейные уравнения должны при определенных значениях управляющих параметров допускать изменение симметрии решения. Такое изменение выражается, например, в переходе от молекулярного теплопереноса к конвективному теплопереносу по ячейкам Бенара.

Следует отметить, что неравновесные фазовые переходы более разнообразны, чем равновесные. Они имеют определяющее значение не только в физических, химических, биологических процессах, но и в экономике, социальных системах.

Рассмотрим на качественном, описательном уровне математическую модель, предложенную Лоренцем для описания конвекции в атмосфере для метеорологических прогнозов [12, 13].

Известно, что конвективное движение в газах описывается весьма сложными уравнениями механики сплошных сред. Лоренц же использовал упрощенную модель — систему трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, связывающих макроскопические характеристики среды: фурье-компонент локальной скорости и температуры. Ввиду нелинейности система допускает только численное решение с использованием ЭВМ.

Вид решения системы при относительно больших градиентах температуры оказался настолько сложным, что соответствующие ему изменения переменных кажутся хаотическими. Это послужило причиной появления термина «динамический хаос».

Было также установлено, что малые изменения начальных условий приводят к изменению вида решения, что означает динамическую неустойчивость движения. Если теперь принять во внимание, что степень точности при задании начальных условий — конечная величина, то мы приходим к выводу о практической невозможности предсказания вида движения по заданным начальным условиям. Именно по этой причине, из-за наличия динамической неустойчивости движения в атмосфере, задача долгосрочных прогнозов погоды чрезвычайно трудна.

## Глава 2

### ЭВОЛЮЦИЯ И РАЗВИТИЕ НАУКИ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ КАК ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ

«Честно говоря, вначале казалось, что наша задача будет значительно проще. Можно посмотреть зарубежные модели, выяснить, что в них не подходит для описания нашей реальности, внести коррективы. Потом уже дело за компьютерами, разумной постановкой вопросов и определением параметров, входящих в модель. Но не тут то было. Оказалось, что таких моделей практически нет.»

*С. П. Капица, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий. Синергетика и прогнозы будущего (М.: Наука, 1997. С. 120)*

И в самой совершенной иерархии, и в самой безупречной организации мы видим вовсе не механизм, составленный из мертвых и в отдельности безразличных частей, а живое тело, образуемое частями и живущее органами, каждый из которых, обладая своей самобытностью и свободой, участвует в чуде жизни.

*Г. Гессе. «Игра в бисер»*

В последнее время математические модели и методы, являющиеся достоянием точных наук, все в большей степени находят применение в науках социальных. Этот процесс во многом обязан синергетике как междисциплинарному научному направлению, выявляющему и объединяющему общее в разном [1–3]. Так, сложную социальную систему, состоящую из множества элементов и обладающую всевозможными связями, можно рассматривать с позиций физики открытых систем и нелинейной динамики. Представляется интересным изучать науку ее методами.

#### 2.1. Нелинейная динамика и развитие науки

Еще в середине 80-х годов автор известной монографии [4], посвященной математическому моделированию науки, писал: «Определение закономерностей функционирования науки во вре-

мени является одной из основных проблем не только в теоретическом исследовании науки, но и при решении практических задач научной политики, ибо прогнозирование и планирование науки должны в первую очередь опираться на представления о ее динамике. Поэтому вполне естествен интерес, проявляемый учеными как к построению как чисто качественных концептуальных, так и формализованных математических моделей развития науки».

Действительно, обоснованное управление процессом развития науки нуждается в применении математического формализма. Следуя [4], рассмотрим проблему развития науки с точки зрения нелинейной динамики необратимых процессов, разработанную известным бельгийским ученым, нобелевским лауреатом И. Пригожиным и его школой [5, 6].

И. Пригожин рассматривал развитие открытой термодинамической системы как ряд последовательных переходов в состоянии с уменьшающейся энтропией, соответствующий возрастанию организации в системе; при этом исходное состояние должно отстоять достаточно далеко от равновесного. Вблизи от термодинамического равновесия можно ограничиться линейным приближением для потоков и сил, определяющих стационарное состояние системы, и тогда справедлива теорема Пригожина о минимуме производства энтропии в таких состояниях [7]. Состояния, близкие к равновесному, являются глобально устойчивыми, и возмущенная система возвращается в них. Именно излишняя стабильность открытой системы вблизи от равновесия делает ее неспособной к прогрессивным изменениям, приводящим к развитию. Для систем, далеких от равновесия, ввиду недостаточности линейного приближения, требуется учитывать нелинейные эффекты, что приводит к необходимости обратиться к нелинейной термодинамике необратимых процессов.

При построении нелинейной термодинамики Пригожин показал, что системы, далекие от равновесного состояния, при изменении соответствующих параметров могут становиться неустойчивыми. Эти системы уже способны к эволюционному развитию, так как, становясь неустойчивыми, они вследствие флуктуаций или иных процессов получают возможность переходить в новые стационарные состояния с меньшей энтропией и, соответственно, большей структурной сложностью. При этом следует представлять, что «сложность в природе невозможно свести к некоторому принципу глобальной оптимальности. ...В своей погоне за сложностью природа занимает более «прагматическую» позицию, в которой существенную роль играет поиск устойчивости» [8, с. 88].

Таким образом, развитие, по Пригожину, возможно только в стационарных состояниях, далеких от равновесного, когда линейные приближения недопустимы и уже нельзя утверждать с уве-

ренностью об обязательной, абсолютной устойчивости стационарных состояний. В таких случаях существуют критические значения параметров, при которых в системе возникает неустойчивость как потенциальный источник развития. Неустойчивость в результате нелинейных процессов приводит к усилению флуктуаций, присутствующих в любой системе, и затухающих в системах устойчивых. Флуктуации достигают макроскопического уровня и вызывают скачкообразный переход системы в новое устойчивое состояние с меньшей энтропией. Происходит развитие системы, называемое Пригожиным «порядок через флуктуации».

Возникающая неустойчивость носит несимметричный характер, в силу того, что для открытых систем, далеких от равновесия, движение в сторону возрастания энтропии запрещается наличием внешних сил и негэнтропийных потоков, удерживающих систему от деградации. Поэтому остается возможность только одностороннего процесса в сторону уменьшения энтропии: появляется направленный перенос развития как последовательность возникновения неустойчивостей и соответствующих им переходов в сторону возрастания организации системы.

В качестве правдоподобной гипотезы научного развития рассмотрим теорию научных революций Т. Куна [9] в контексте пригожинской модели развития открытых систем, далеких от равновесия. По Т. Куну, развитие науки происходит путем так называемых «научных революций», которые разделяют равномерные и длительные этапы «нормальной науки». В периоды нормальной науки ученые получают результаты исходя из единой концепции, или парадигмы<sup>1)</sup>. Накопление случайных открытий, не объясняемых в рамках действующей парадигмы, вызывает кризис, когда данная система представляет ограничения, происходящее в этот период, приводит к появлению множества конкурирующих гипотез. Среди гипотез отбирается новая парадигма, что означает конец кризиса и переход к периоду нормальной науки в результате научной революции.

Полагая науку открытой системой, находящуюся в существенно неравновесном состоянии по причине своей сложной организации, можно интерпретировать периоды нормальной науки как стационарные состояния в смысле И. Пригожина, а парадигмы при этом определяют устойчивость научного знания в период нормальной науки. Смена парадигм соответствует переходу системы из одного стационарного состояния в другое в результате флуктуационной неустойчивости. По существу, речь идет о возрастании

<sup>1)</sup> Термин *парадигма* Томас Кун заимствовал из грамматики (там он означал совокупность элементов, которые образуют единое правило: например, личных окончаний глагола при склонении) и назвал так классическую научную разработку, принятую научным сообществом за образец и основу научной традиции.

роли флуктуаций в окрестности точки бифуркации. Новое состояние характеризуется парадигмой с большими объяснительными возможностями и более удалено от равновесного, что соответствует уменьшению энтропии и возрастанию организации по Пригожину.

Изложенная аналогия хорошо подтверждается следующим высказыванием И. Пригожина: «Новая структура или организация всегда являются результатом неустойчивости... в точке образования новой структуры флуктуации усиливаются, достигают макроскопического уровня и, наконец, делают устойчивым новый режим, представляющий структуру, возникающую вслед за неустойчивостью» [10].

## 2.2. Научное сообщество как диссипативная структура

Для того чтобы открытая система находилась в стационарном неравновесном состоянии и не перешла в состояние термодинамического равновесия, необходимо, учитывая производство энтропии самой системой, питать ее извне потоком вещества, энергии или информации. Если же существует необходимость в эволюции системы, ее структурной самоорганизации и перехода на более высокие уровни развития, то в этом случае должны быть организованы внешние негэнтропийные потоки (энергетические или информационные), не только удерживающие систему далеко от равновесия, но и обеспечивающие ее самоорганизацию и развитие. Ввиду постоянного наличия потоков вещества и энергии могут образовываться состояния с пространственной и временной структурой.

В качестве характеристики подобных состояний самоорганизации Пригожин выбрал термин «диссипативная структура», показывающий, что эти состояния существуют только в связи с их окружением: если связь исчезнет, система приблизится к равновесному состоянию и ее организация в целом разрушится. С другой стороны, именно то, что диссипативная структура является открытой системой и тесно связана со средой, делает ее способной к развитию. Взаимодействие со средой создает условия для возникновения неустойчивости соответствующих состояний, и, как следствие этого, появляется новая, более упорядоченная структура с меньшей энтропией. Существенную роль при этом играет понятие потока, которое связано с двумя сопряженными процессами — негэнтропийным, удерживающим систему от вырождения, и энтропийным, создающим необходимое разнообразие как потенциальный источник нового.

Рассматривая научное сообщество как диссипативную структуру, поддерживаемую внешними потоками ассигнований, кадров, информации, можно заметить, что ее основная компонента — научная деятельность — носит двойственный характер. С одной стороны, ставятся задачи и генерируются проблемы, которые при



условии их неразрешимости приводят к аномалиям и появлению новых гипотез, что, в свою очередь, ведет к увеличению энтропии. С другой стороны, научная деятельность характеризуется наличием негэнтропийных процессов, в ходе которых решаются проблемы, уменьшается их общее число, и, в некотором смысле, энтропия. Возрастание энтропийного потока в сочетании с негэнтропийными процессами обеспечивают возможность перехода к новому знанию или к состоянию с более высоким уровнем организации.

### 2.3. Модель взаимодействия и эволюции двух научных направлений

Известно, что большинство формализованных моделей развития науки строится в предположении экспоненциального роста научных достижений. Это справедливо, поскольку полученные результаты и достижения становятся, в свою очередь, источником новой информации и результатов, за счет чего поддерживается непрерывный процесс генерации знания. Такие модели, как правило, могут служить начальным приближением при рассмотрении некоторых типов реальных систем (см., например, [11]). С физической точки зрения подобная модель может быть интерпретирована как система с положительной обратной связью, которая, как известно, порождает неустойчивые решения, неограниченно возрастающие во времени. Применяя модели с экспоненциально возрастающими решениями для описания эволюции того или иного научного направления, следует учесть, что на практике за этапом лавинного роста научной информации в некоторой области наступает период относительного насыщения и стабилизации. Тогда для дальнейшего роста научных достижений требуется смена парадигмы или научная революция, после которой область знания развивается на качественно новом уровне.

Таким образом, корректная математическая интерпретация описанного механизма эволюции науки требует внести в модель фактор, ограничивающий экспоненциальный рост достижений, например, нелинейность. Это становится более актуальным, если учесть, что подавляющее большинство процессов в природе и обществе носят нелинейный характер.

Все перечисленное приводит к выводу, что на этапе построения моделей невозможно обойтись без математического формализма. Помимо прочего, можно выделить две основные причины такой необходимости: накопление большого фактического материала по кругу исследуемых явлений и относительная сложность связей между явлениями. Вследствие этого описательный и чисто содержательный подходы в соответствующих областях становятся затруднительными в силу своей громоздкости и нерезультативности, что приводит к поиску более компактного и эффективного

способа описания, основанном на языке математики и нелинейной динамики.

Как оказалось, применение математических моделей и подходов для изучения науки как сложной системы исследований выражает не только общую тенденцию современного знания, но и принципиально необходимо для выработки обоснованных решений в области научной политики. Поэтому методы науковедения, основанные на математическом описании, давно утратили характер единичных попыток и все увереннее становятся в один ряд с более традиционным содержательным анализом науки как системы научного знания и как социального института. Этот процесс затрудняется тем, что, в отличие от естественных и технических систем, наука прежде всего является общественным институтом и социальной системой. По этой причине существуют сложности математического описания в науковедении, во многом близкие к общим трудностям применения математики в социальных науках.

Прежде всего это отсутствие точных количественных характеристик, отражающих содержание таких понятий, как научное знание, продуктивность научного труда, ценность научного результата. Так, например, не представляется возможным однозначно и четко определить связь между количеством научных публикаций и качеством научной деятельности.

В силу перечисленных обстоятельств обоснованное описание развития науки должно опираться не столько на количественный анализ, сколько на исследование и качественную интерпретацию внутренних механизмов функционирования науки.

В данной главе мы предлагаем одну из возможных качественных моделей взаимодействий в науке — модель эволюции двух научных направлений с учетом ограничения экспоненциального роста переменных нелинейностью.

Для того чтобы охарактеризовать развитие той или иной области знания, в науковедении, как правило, используются три основных показателя: число публикаций, количество научных сотрудников и число эффективных связей между учеными в различных областях науки. Объединяя эти характеристики в одну, введем обобщенные макропеременную  $x$ , описывающую состояние научной деятельности в области  $X$ , и макропеременную  $y$ , описывающую состояние научной деятельности в области  $Y$ . Будем моделировать динамику взаимодействующих научных направлений  $X$  и  $Y$  следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений [12]:

$$\begin{cases} \dot{x} = c_1xy - c_2x - b_1x^2, \\ \dot{y} = c_3xy - c_4y - b_2y^2, \end{cases} \quad (2.1)$$

где коэффициенты  $c_2$  и  $c_4$  определяют собственный характер развития направлений  $X$  и  $Y$ ,  $c_1$  и  $c_3$  задают тип воздействия направ-

вления  $Y$  на  $X$  и  $X$  на  $Y$ , а величины  $b_1$  и  $b_2$  определяют скорость старения информации или исчерпания результатов данного научного направления ( $b_1, b_2 > 0$ ). Отметим, что аналогичная математическая постановка задачи содержится в [4], где в обзорном порядке рассмотрено информационное взаимодействие двух близких математических дисциплин (в качестве переменных выбрано число теорем) и проблема конкуренции гипотез, претендующих на объяснение эмпирического материала и последующее признание их научным сообществом. В последнем случае в качестве характеристических переменных рассматривается совокупность информационных данных в пользу каждой из теорий.

Модели такого типа классифицируются в литературе как модели взаимодействия с горизонтальной структурой. Они, в отличие от моделей типа «хищник-жертва» (уравнения Вольтерра), описывают взаимодействия равноправных элементов, конкурирующих либо кооперирующихся, находясь на одной иерархической ступени.

**2.3.1. Анализ структуры фазового пространства.** Обратимся к качественному исследованию фазового пространства системы (2.1). Приравнивая нулю правые части уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} c_1xy - c_2x - b_1x^2 &= 0, \\ c_3xy - c_4y - b_2y^2 &= 0, \end{aligned}$$

легко получить координаты особых точек. Их четыре:

$$\begin{aligned} 1) \quad x^* &= 0, \quad y^* = 0; \\ 2) \quad x^* &= 0, \quad y^* = -\frac{c_4}{b_2}; \\ 3) \quad x^* &= -\frac{c_2}{b_1}, \quad y^* = 0; \\ 4) \quad x^* &= \frac{1}{b_1} \left( c_1 \frac{c_4b_1 + c_2c_3}{c_1c_3 - b_1b_2} - c_2 \right), \quad y^* = \frac{c_4b_1 + c_2c_3}{c_1c_3 - b_1b_2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для исследования типов состояний равновесия выведем характеристическое уравнение системы (2.1) в общем виде, как это было сделано в [11]. Обозначим  $c_1xy - c_2x - b_1x^2 = \varphi(x, y)$ ,  $c_3xy - c_4y - b_2y^2 = \xi(x, y)$ , и запишем определитель

$$\Delta(x^*, y^*) = \begin{vmatrix} \varphi'_x(x^*, y^*) & \varphi'_y(x^*, y^*) \\ \xi'_x(x^*, y^*) & \xi'_y(x^*, y^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1y^* - c_2 - 2b_1x^* & c_1x^* \\ c_3y^* & c_3x^* - c_4 - 2b_2y^* \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta(x^*, y^*) &= (2b_1c_4 - c_2c_3)x^* - (2b_2c_2 - c_1c_4)y^* - \\ &\quad - 2b_1c_3(x^*)^2 - 2b_2c_1(y^*)^2 + 4b_1b_2x^*y^* + c_2c_4 \end{aligned}$$

и величину

$$\sigma = \varphi'_x(x^*, y^*) + \xi'_y(x^*, y^*) = (c_3 - 2b_1)x^* + (c_1 - 2b_2)y^* - c_2 - c_4.$$

Значения  $\Delta(x^*, y^*)$  и  $\sigma$  определяют вид характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0. \quad (2.3)$$

### 2.3.2. Результаты моделирования и их сравнительный анализ

Случай I

Оба направления развивающиеся,  $X$  отрицательно влияет на  $Y$ ,  $Y$  положительно влияет на  $X$ :  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = c_3 = c_4 = -1$ .

В этом случае координаты особых точек системы следующие:

$$\begin{aligned} 1) \quad x^* &= 0, \quad y^* = 0; \\ 2) \quad x^* &= 0, \quad y^* = \frac{1}{b_2}; \\ 3) \quad x^* &= \frac{1}{b_1}, \quad y^* = 0; \\ 4) \quad x^* &= \frac{1 + b_2}{1 + b_1b_2}, \quad y^* = \frac{b_1 - 1}{1 + b_1b_2}. \end{aligned}$$

При  $b_1 < 1$  только три точки могут иметь положительные значения координат (изначально предполагается, что переменная, характеризующая состояние научного направления или области, не может быть отрицательной величиной). При  $b_1 > 1$  все четыре положения равновесия принимаются к рассмотрению.

На рис. 2.1 представлена структура фазового пространства системы уравнений (1) для двух значений параметров  $b_1, b_2$ . Анализ устойчивости показывает, что при  $x^* = 0, y^* = 0$  корни характеристического уравнения (3), записанного для этого случая, вещественны, положительны и одинаковы:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , поэтому особая точка — неустойчивый узел. Для второй особой точки, с координатами  $x^* = 0, y^* = 1/b_2$  корни уравнения действительные, разных знаков,  $\lambda_1 = 1 + 1/b_2, \lambda_2 = -1$ , из чего следует, что это неустойчивая седловая особая точка. Тип третьей особой точки  $x^* = 1/b_1, y^* = 0$  всецело зависит от величины  $b_1$  ( $\lambda_1 = 1 - 1/b_1, \lambda_2 = -1$ ): при  $b_1 < 1$  мы имеем устойчивый узел (величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и отрицательны), а при  $b_1 > 1$  — особую точку типа седло ( $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ). Тип четвертого из перечисленных

выше положения равновесия легко определить, записав уравнение (2.3) для данного случая:

$$\lambda^2 - \left(2 - \frac{3(b_1 + b_2)}{1 + b_1 b_2}\right) \lambda + 1 - \frac{3(b_1 + b_2)}{1 + b_1 b_2} + 2 \frac{b_1(1 + b_2)^2 - b_1(b_1 - 1)^2 + 2b_1 b_2(1 + b_2)(b_1 - 1)}{(1 + b_1 b_2)^2} = 0.$$

При  $b_1 < 1$  особая точка имеет отрицательные координаты, а в случае  $b_1 = 5, b_2 = 0,5$ , изображенном на рис. 2.1б, величины

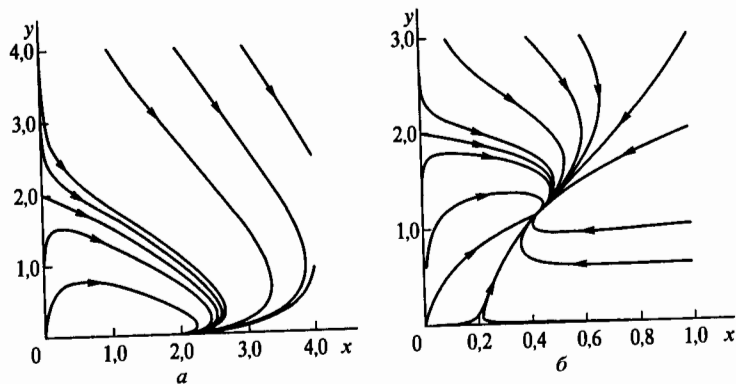


Рис. 2.1. Структура фазового пространства системы уравнений (2.1) для случая I при разных значениях нелинейности: а)  $b_1 = b_2 = 0,5$ ; б)  $b_1 = 5, b_2 = 0,5$

$\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и отрицательны, из чего следует, что данное положение равновесия является устойчивым узлом.

Можно заметить, что при  $b_{1,2} \neq 0$  в фазовом пространстве системы (2.1) появляется устойчивая особая точка, координаты которой зависят от соотношения величин  $b_1, b_2$ . В этом случае наблюдается насыщение решения  $x(t)$ . Для процесса, изображенного на рис. 2.2а, это означает, что развивающееся научное направление  $X$ , поддерживаемое направлением  $Y$  (обладающим значительно лучшим, по сравнению с  $X$ , начальным состоянием), после стадии экспоненциального роста научных показателей достигает их максимального уровня, после чего показатели несколько снижаются и выходят на стационарный уровень. Наличие некоторого спада перед выходом в состояние насыщения направления  $X$  можно трактовать как следствие того, что в этот период кооперативное влияние другого направления ослабляется и спадает до нуля.

Качественно иная ситуация реализуется в случае, когда при  $b_1 > 1$  в фазовом пространстве системы появляется устойчивый узел с отличными от нуля координатами (рис. 2.1б). Это означает,

что научные показатели направления  $Y$  не снижаются до нуля и могут даже превосходить показатели направления  $X$  (рис. 2.2б). Для этого необходимо, чтобы нелинейность, которой характеризуется  $X$ , превосходила некоторую критическую величину (в данном случае — единицу, вообще же эта величина зависит от значений

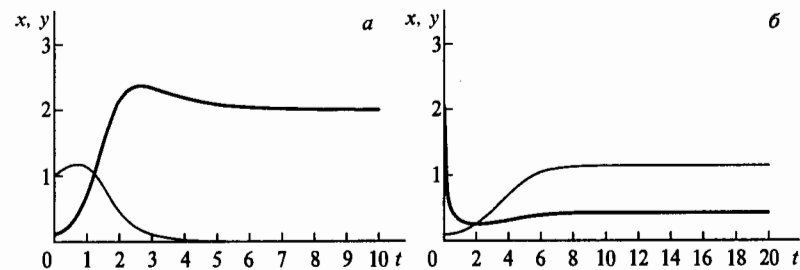


Рис. 2.2. Решения системы уравнений (2.1) для случая I: а)  $b_1 = b_2 = 0,5, x_0 = 0,1, y_0 = 1,0$ ; б)  $b_1 = 5, b_2 = 0,5, x_0 = 2,0, y_0 = 0,1$ . Здесь и далее жирной линией обозначена зависимость  $x(t)$ , тонкой —  $y(t)$

$c_i$ ), т.е. скорость потери актуальности научных результатов направления  $X$  была бы относительно велика.

Следует отметить, что взаимодействие научных направлений в рассмотренных случаях можно интерпретировать как систематическое поглощение направления  $Y$  со всеми его результатами и достижениями направления  $X$ .

### Случай II

Развивающиеся направления  $X$  и  $Y$  конкурируют, взаимное влияние отрицательно:  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = -1$ .

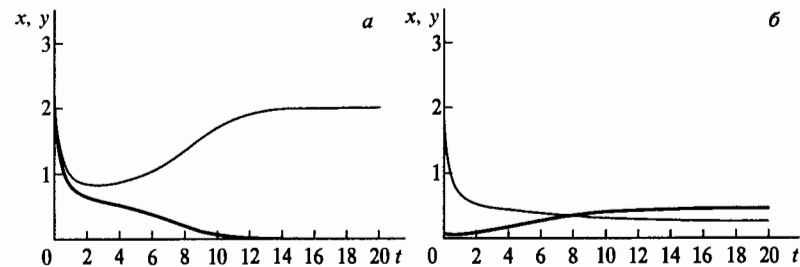


Рис. 2.3. Решения системы уравнений (2.1) для случая II: а)  $b_1 = b_2 = 0,5, x_0 = 1,9, y_0 = 2,1$ ; б)  $b_1 = 1,5, b_2 = 1,9, x_0 = 0,1, y_0 = 2,0$

Опуская анализ фазового пространства, обратимся к интерпретации результатов. В случае  $b_1 < 1, b_2 < 1$  (рис. 2.3а, направления

идентичны) непосредственная конкуренция как тип взаимодействия, заложенный в модели, приводит к тому, что результат взаимодействия полностью предопределен соотношением начальных условий: направление с лучшим начальным состоянием или проявляет положительную динамику и испытывает насыщение, когда объем научной продукции перестает изменяться во времени.

Совершенно другая ситуация имеет место при  $b_1 > 1, b_2 > 1$ . Оказывается, что в условиях взаимной конкуренции нелинейность (или скорость истощения научной информации направлений) дает возможность направлениям сосуществовать (рис. 2.3б). Устойчивая особая точка с ненулевыми координатами в фазовом пространстве свидетельствует о том, что с течением времени обобщенные переменные  $x$  и  $y$  примут стационарные значения. При этом величина стационарного значения больше для направления с меньшей нелинейностью из допустимых.

### Случай III

Оба направления «затухающие», взаимное влияние положительно:  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ .

Если не принимать во внимание стационарное решение, являющееся сильной идеализацией с практической точки зрения, возможно два варианта результата взаимодействия: либо развитие обоих направлений, либо спад научной активности до полной деградации каждого из них (рис. 2.4). Идентичные тенденции в эволюции направлений независимо от их начальных состояний

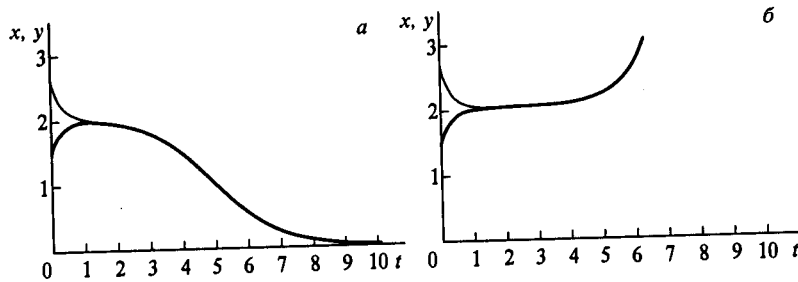


Рис. 2.4. Решения системы уравнений (2.1) для случая III;  $b_1 = b_2 = 0,5$ : а)  $x_0 = 1,5, y_0 = 2,6$ ; б)  $x_0 = 1,525, y_0 = 2,6$

(совместный рост или совместная деградация) объясняются кооперативным характером взаимодействия. Тип эволюции полностью определяется начальным состоянием, и малое изменение начальных условий является в данном случае критичным. Это хорошо заметно из сравнения рис. 2.4а, б.

### Случай IV

Направления противоположных типов с положительной обратной связью:  $c_1 = c_2 = c_3 = 1, c_4 = -1$ .

В этом случае система имеет три положения равновесия с отрицательными значениями координат:

- 1)  $x^* = 0, y^* = 0$ ;
- 2)  $x^* = 0, y^* = \frac{1}{b_2}$ ;
- 3)  $x^* = \frac{b_2 - 1}{1 - b_1 b_2}, y^* = \frac{1 - b_1}{1 - b_1 b_2}$ .

Положение равновесия, находящееся в начале координат — седловая особая точка. Вторая особая точка представляет собой «седло» при  $b_2 < 1$  и устойчивый узел при  $b_2 > 1$ . Третья особая

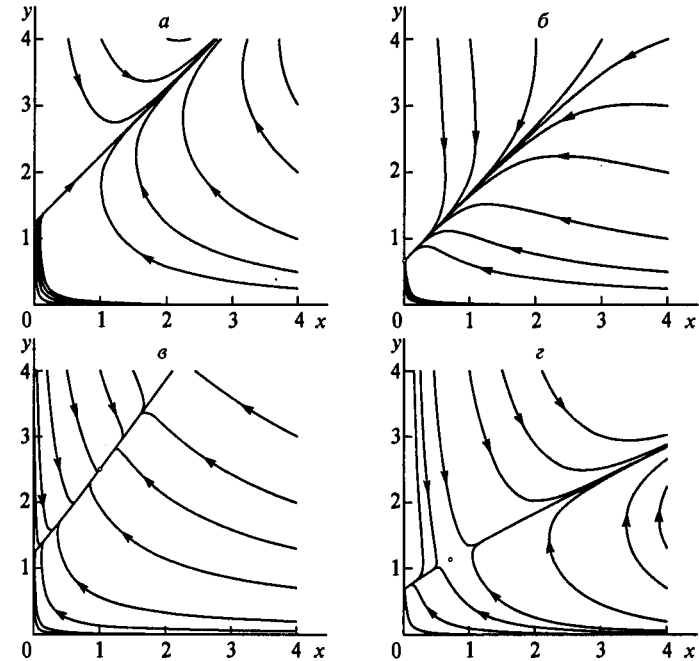


Рис. 2.5. Структура фазового пространства системы уравнений (2.1) для случая IV: а)  $b_1 = b_2 = 0,8$ ; б)  $b_1 = b_2 = 1,5$ ; в)  $b_1 = 1,5, b_2 = 0,8$ ; г)  $b_1 = 0,2, b_2 = 1,5$

точка имеет положительные координаты в двух случаях:  $b_1 > 1, b_2 < 1, b_1 b_2 > 1$  и  $b_1 < 1, b_2 > 1, b_1 b_2 < 1$ , являясь устойчивым узлом и «седлом» соответственно. Возможные сочетания особых точек на фазовой плоскости представлены на рис. 2.5.

Отметим случай, когда  $b_1 > 1$ ,  $1/b_1 < b_2 < 1$  (рис. 2.5в). Это единственный вариант, когда показатели деградирующего направления  $X$  выходят на некоторый стационарный уровень. При этом начальные условия могут быть таковы (рис. 2.6), что эволюция во времени развивающегося направления  $Y$  отчасти согласуется с теорией «научных революций» Т. Куна [9], в частности, с тем,

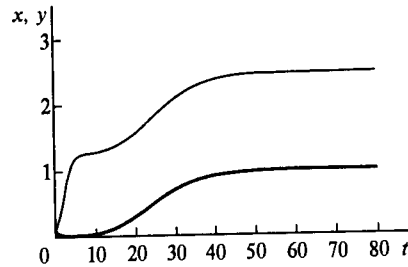


Рис. 2.6. Решение системы уравнений (2.1) для случая IV;  $x_0 = 0, 1$ ,  $y_0 = 0, 1$ ;  $b_1 = 1, 5$ ,  $b_2 = 0, 8$

что развитие науки носит скачкообразный характер, когда относительно продолжительные периоды «нормальной науки» чередуются с периодами экспоненциального роста знания и смены парадигм.

#### Случай V

«Затухающее» направление  $X$  отрицательно воздействует на  $Y$ , развивающееся позитивно и положительно влияющее на  $X$ :  $c_1 = c_2 = 1$ ,  $c_3 = c_4 = -1$ .

На фазовой плоскости системы (2.1) в этом случае может присутствовать от двух до трех особых точек с неотрицательными значениями координат. Наибольший интерес представляет особая точка с координатами

$$x^* = \frac{1 - b_2}{1 + b_1 b_2}, \quad y^* = \frac{1 + b_1}{1 + b_1 b_2},$$

которая является устойчивым фокусом и имеет положительные координаты. По этой причине обобщенные переменные  $x(t)$  и  $y(t)$  испытывают осцилляции, прежде чем достигнут стационарных значений (рис. 2.7). Осцилляции являются быстро затухающими и не синфазны друг другу. Начальная амплитуда осцилляций и их количество тем больше, чем дальше начальные условия от равновесия.

Отметим также, что существует разница амплитуд обобщенных переменных, характеризующих динамику направлений.

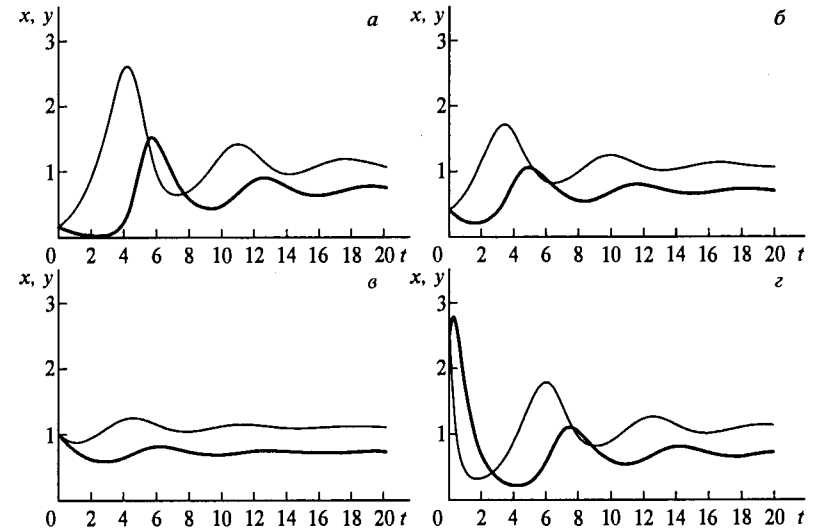


Рис. 2.7. Решение системы уравнений (2.1) для случая V;  $b_1 = b_2 = 0, 2$ : а)  $x_0 = y_0 = 0, 2$ ; б)  $x_0 = y_0 = 0, 5$ ; в)  $x_0 = y_0 = 1$ ; г)  $x_0 = y_0 = 2, 5$

Ввиду различий собственной динамики направлений  $X$  и  $Y$  величина  $y(t)$  всегда превосходит  $x(t)$ , и эта разница зависит от величин нелинейности.

**2.3.3. Некоторые выводы.** Прежде чем приступить к обобщению результатов моделирования, полученных для случаев I-V, в пределах исследуемой проблемы, проклассифицируем рассмотренные типы взаимодействия. Всего их три: взаимное влияние научных направлений друг на друга положительно — сотрудничество, взаимное влияние отрицательно — конкуренция и взаимное влияние различно — одно из направлений подавляет другое, которое поддерживает его развитие; в этом случае будем говорить, что имеет место подавление одного научного направления другим.

Принимая во внимание данную классификацию и то, что каждое направление характеризуется, помимо начальных условий, ростом научных достижений за счет внутренних ресурсов, с одной стороны, и величиной нелинейного ограничения этого роста за счет исчерпания информации, с другой, обратимся к рассмотренным ранее случаям.

Оказалось, что при взаимодействии по типу подавления двух научных направлений, в каждом из которых заложена тенденция к развитию (случай I), результат взаимодействия в значительной степени определяется величиной нелинейного ограничения — скоростью исчерпания результатов направления, со стороны которого

осуществляется отрицательное влияние. Развитие подавляемого направления становится возможным только тогда, когда скорость исчерпания результатов превосходит некоторое критическое значение. Из этого также следует, что научное направление с сильной «диссипацией» научных результатов (высокой скоростью их исчерпания) не в состоянии полностью включить в себя направление, поддерживающее его развитие.

В случае конкуренции двух развивающихся научных направлений (случай II) учет ограничения роста достижений нелинейностью позволил понять, что данное ограничение является существенным фактором, позволяющим обоим направлениям «выжить» в условиях конкуренции вне зависимости от начальных условий. Так, если скорость исчерпания результатов, в частности, за счет быстрого старения информации или вхождения ее в другие теории, больше некоторой критической, развитие направлений принимает стационарный характер.

Для того чтобы развитие стало возможным в условиях сотрудничества направлений с изначально отрицательной динамикой (случай III), увеличение «диссипации» результатов требует улучшения начального состояния. Возможность роста научных показателей обоих направлений, несмотря на их изначально деградирующий характер, лишней раз подтверждает преимущества кооперативного типа взаимодействия в исследовательских работах.

Сотрудничество развивающегося и деградирующего научных направлений (случай IV) при определенных величинах нелинейных ограничений роста достижений может оказаться плодотворным для направления с изначально отрицательной динамикой. Так, в случае, когда скорость исчерпания результатов направления с изначальной тенденцией к развитию превосходит некоторое критическое значение, а скорость исчерпания результатов деградирующего направления несколько меньше критической, научные показатели последнего достигают стационарного значения, не зависящего от начальных условий.

В последнем случае нелинейные ограничения роста научных достижений приводят к тому, что колебания показателей, характеризующих каждое направление, затухают, переходя в стационарное состояние. При этом существует разница показателей, зависящая от скорости исчерпания достижений для обоих научных направлений.

#### 2.4. Влияние временных запаздываний на динамику взаимодействующих научных направлений

Известно, что учет конечности времени распространения сигналов и информации при моделировании процессов в реальных системах представляется немаловажным. Данный подход стано-

вится особенно актуальным в тех случаях, когда это время соизмеримо с какими-либо характерными временными масштабами исследуемой системы, или если есть принципиальная необходимость сконструировать систему, управляемую временными задержками.

Когда в центре внимания находится моделирование систем, возникающих и эволюционирующих по законам природы и самоорганизации, являющихся по отношению к исследователю объективной реальностью, вопрос об управлении такими системами или о «конструировании» новых остается открытым до тех пор, пока не проанализированы основные закономерности и не выяснены факторы, влиянием которых можно либо нельзя пренебречь.

Очевидно, тем фактом, что скорость протекания процессов в научном сообществе как социальной системе является конечной величиной, зачастую значительной и соизмеримой с временными масштабами взаимодействий и эволюции самой системы, в большинстве случаев пренебречь нельзя. Основываясь на уравнениях из пункта 2.3, рассмотрим, каким образом можно учесть указанный эффект при взаимодействии двух научных направлений, а затем обратимся к результатам численного моделирования и их качественной интерпретации [13].

Сохраняя концепцию экспоненциального роста научных достижений, ограниченного нелинейностью, остановимся на возможных способах учесть инерцию процессов при взаимодействии двух научных школ или направлений.

Классифицируя возможные запаздывания в подобной системе, приходим к выводу, что по своему происхождению они могут быть двух типов: так называемое запаздывание в связях и собственное запаздывание — в каждом из взаимодействующих направлений. Первое происходит за счет того, что информация между направлениями распространяется не мгновенно, а за конечный интервал времени, который и определяет величину запаздывания. То, что информация спустя некоторое время достигла системы — «адресата», совсем не означает, что она будет принята во внимание немедленно, как и все, на текущий момент времени происходящее в самой системе. Именно этим обусловлены запаздывания второго типа. Их изначальные причины, по всей видимости, имеют глубокие социальные и психологические корни.

Структура уравнений, используемых нами для описания взаимодействия двух научных направлений, позволяет на формальной основе разделить факторы экспоненциального роста достижений, нелинейных ограничений и взаимного влияния, что дает возможность непосредственно учесть оба типа запаздываний. Таким образом, приходим к следующей системе обыкновенных диффе-

ренциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c_1 x y_{\tau_{yc}} - c_2 x - b_1 x x_{\tau_x}, \\ \dot{y} &= c_3 y x_{\tau_{xc}} - c_4 y - b_2 y y_{\tau_y}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\tau_{xc}$  и  $\tau_{yc}$  — величины запаздываний в связях,  $\tau_x$  и  $\tau_y$  — собственные запаздывания каждого направления. Вводя запаздывания таким образом, мы полагаем их постоянными во времени, так как скорость хождения информации между двумя научными направлениями в среднем одинакова и мало изменяется с течением времени, а направления не изменяются по своей организации в ходе взаимодействия.

Обратим внимание, что только данный способ учесть запаздывания в системе (2.4) не нарушает формальной структуры системы уравнений. В противоположность этому можно, например, все переменные в правой части системы снабдить запаздывающим аргументом. Такая система теряет смысл, поскольку дифференциальные уравнения вырождаются в некие функциональные зависимости, и с точки зрения моделирования система никак не будет связана с текущим моментом: в правой части уравнений будут фигурировать только значения  $x$  и  $y$ , зависящие от  $(t - \tau)$ , и не останется переменных, зависящих от  $t$ .

**2.4.1. Влияние разномасштабного запаздывания на динамику двух развивающихся научных направлений в случае их сотрудничества.** Рассмотрим научные направления с изначально положительной динамикой (собственной тенденцией к развитию), оказывающие друг на друга положительное воздействие. Этот случай не рассматривался нами ранее из-за относительной тривиальности по сравнению с остальными типами взаимодействия, но сейчас он представляет полезный тестовый материал для изучения влияния запаздываний. Следует также отметить, что именно такой тип взаимодействия лежит в основе систем интеграции, о которых мы будем говорить несколько позже.

В отсутствие запаздываний в системе (2.4) ее решения через некоторый интервал времени достигают стационарного значения, величина которого зависит от параметра нелинейности (скорости потери актуальности научных результатов), величины коэффициентов связи и не зависит от начального состояния каждого из направлений. Система имеет четыре особые точки с неотрицательными координатами:

$$\begin{aligned} 1) \quad x^* &= y^* = 0; & 3) \quad y^* &= 0, \quad x^* = \frac{1}{b_2}; \\ 2) \quad x^* &= 0, \quad y^* = \frac{1}{b_2}; & 4) \quad x^* &= \frac{1 + b_2}{b_1 b_2 - 1}, \quad y^* = \frac{1 + b_1}{b_1 b_2 - 1}, \end{aligned}$$

из которых первые три являются неустойчивыми, а последняя соответствует стационарному решению.

Решения системы (2.4) при наличии собственного запаздывания в каждом из научных направлений и в отсутствие запаздывания в связях, представлены на рис. 2.8. Из сравнения серии графиков 1–7 (рис. 2.8) видно, что по мере увеличения запаздывания  $\tau_x = \tau_y$  стационарное решение сменяется синхронными колебаниями; затем полный синхронизм нарушается, но колебания макрорепериментов во времени остаются синфазными, с существенно разной амплитудой; и, наконец, при  $\tau_x = \tau_y = 1,6$  поведение решений  $x(t)$ ,  $y(t)$  носит нерегулярный, хаотический характер. Дальнейшее увеличение  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  при данных значениях нелинейностей  $b_1 = b_2 = 5$  приводит к потере системой устойчивости и является некорректным в контексте рассматриваемой модели.

Чтобы представлять, при каких соотношениях нелинейности и собственных запаздываний решения системы (2.4) остаются устойчивыми, а также определять их тип, была построена карта режимов системы в пространстве параметров  $b - \tau$ , изображенная на рис. 2.9. По данной карте можно не только судить о характере решений в зависимости от «управляющих параметров», но и произвести условную классификацию собственных запаздываний по их относительной величине. По причине отсутствия нормировки модели по конкретным числовым данным (что вообще весьма затруднительно для социальных систем) представляется необходимым определить количественную меру «много-мало» в отношении величин запаздываний. Следуя границам режимов, построенным на карте, относительно малыми будем считать значения  $\tau$ , при которых в системе еще реализуется стационарное решение либо синхронные колебания. Верхняя граница значений запаздывания  $\tau$  соответствует границе, разделяющей области устойчивых и неустойчивых решений и поэтому, если  $\tau$  близко к граничному, будем считать, что оно относительно велико. Следуя данным рассуждениям и обращаясь к карте рис. 2.9, нетрудно объяснить, почему решения системы, представленные на рис. 2.8, были построены при  $b_1 = b_2 = 5$ . Так, например, в достаточно большом диапазоне нелинейностей  $b$  при малых изменениях  $\tau$  система быстро выходит в режим неустойчивых решений; богатство динамики системы может наблюдаться только при существенно больших значениях параметров нелинейности ( $b > 4 \div 5$ ).

В случае, если начальные условия одинаковы и вносится малая расстройка собственных запаздываний (рис. 2.8, графики 10–12), возникает существенная десинхронизация решений, которые имеют сильно нерегулярный характер. В совокупности с результатами, приведенными на рис. 2.8, графики 1–7, это приводит к выводу о том, что сравнительно небольшая разница в собственных запаздываниях научных направлений при одинаковых начальных

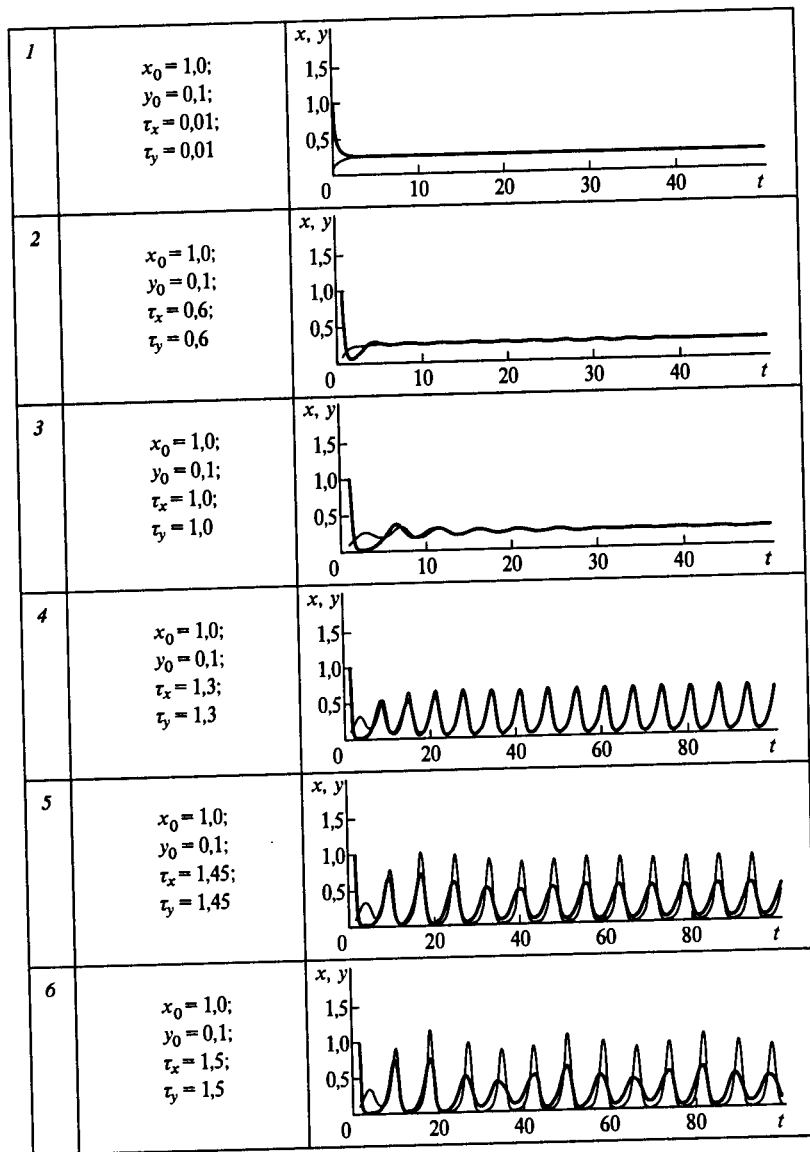


Рис. 2.8. Зависимости переменных  $x$  и  $y$  (жирная и тонкая линии) от времени для случая  $c_1 = c_3 = 1$ ,  $c_2 = c_4 = -1$ ,  $b_1 = b_2 = 5$  при наличии запаздывания в каждой из взаимодействующих систем, в отсутствие запаздывания в связях  $\tau_{xc} = 0,01$ ,  $\tau_{yc} = 0,01$  для разных значений начальных условий  $x_0$ ,  $y_0$

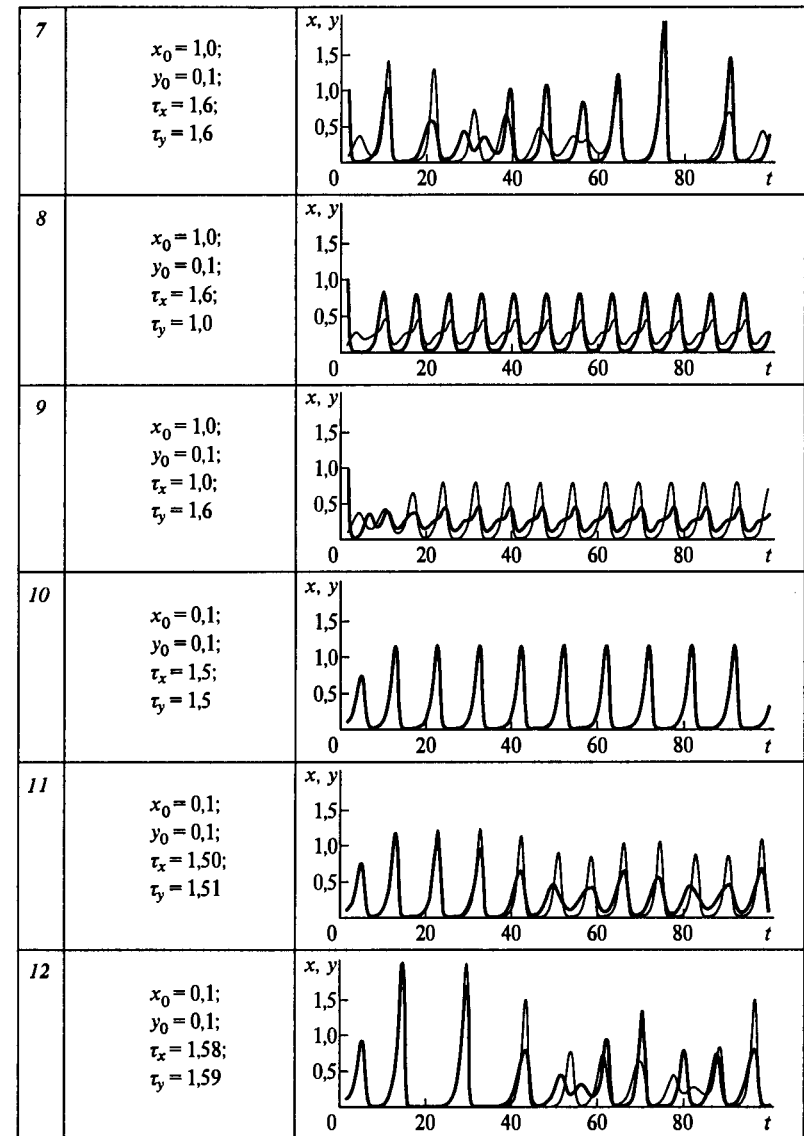


Рис. 2.8 (продолжение)



состояниях оказывает не меньший эффект, чем достаточно большие, но идентичные запаздывания при относительно большой разнице в начальных условиях.

Большая разница в масштабах запаздывания в направлениях  $X$  и  $Y$  при разных начальных условиях приводит к установлению

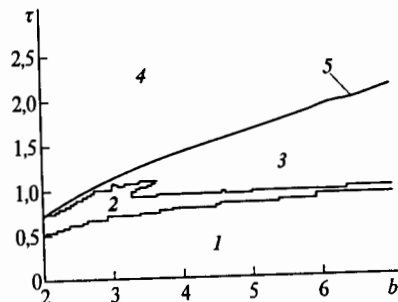


Рис. 2.9. Карта режимов системы (2.4) в пространстве параметров  $\tau - b$ , где  $\tau = \tau_x = \tau_y$ ,  $b = b_1 = b_2$ , запаздывание в связях отсутствует,  $c_1 = c_3 = 1$ ,  $c_2 = c_4 = -1$ ,  $x_0 = 0, 2$ ,  $y_0 = 0, 1$ . Цифрами обозначены различные режимы колебаний, реализующиеся в системе при указанных значениях параметров: 1 — стационарный режим; 2 — синхронные колебания; 3 — периодические и сложные несинхронные колебания; 4 — решения системы неустойчивы; 5 — граница, разделяющая области устойчивых и неустойчивых решений

в системах периодических колебаний с разной амплитудой, причем колебания в системе с большим запаздыванием имеют большую амплитуду (рис. 2.8, графики 8, 9).

Если в системе двух взаимодействующих научных направлений присутствует только запаздывание в связях и нет других временных задержек, то с течением времени решения  $x(t)$ ,  $y(t)$  обязательно примут синхронный и стационарный характер, с той лишь разницей, что при увеличении запаздывания в связях время переходного процесса увеличивается.

И, наконец, на рис. 2.10 представлены зависимости переменных  $x(t)$ ,  $y(t)$  при наличии запаздывания как в самих системах, так и в связях. Из сравнения рис. 2.8, график 4 и рис. 2.10, графики 1, 2 следует, что при  $\tau_x = \tau_y = 1$ , 3 добавление одностороннего запаздывания в связь приводит к тому, что колебания переменных, оставаясь регулярными, оказываются сдвинутыми по фазе друг относительно друга. Относительно большие одинаковые запаздывания в связях при наличии собственных запаздываний  $\tau_x = \tau_y = 1, 3$  при разнице в начальных условиях приводят к противофазным колебаниям  $x(t)$ ,  $y(t)$  (рис. 2.10, графики 3–5). Малая расстройка запаздываний в связи при одинаковых начальных условиях и  $\tau_x = \tau_y = 1, 5$  приводит к десинхронизации решений с течением времени и установлению достаточно сложного режима колебаний, когда изменения переменных нерегулярно и противофазно.

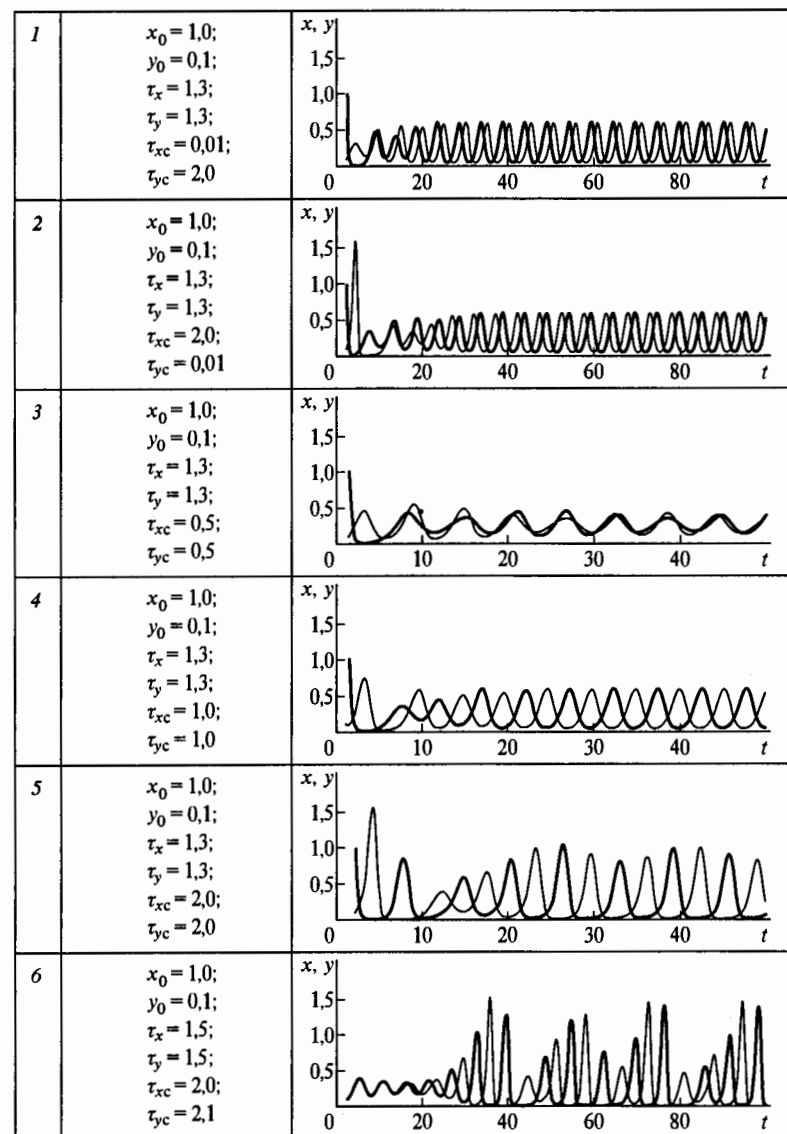


Рис. 2.10. Зависимости  $x(t)$  и  $y(t)$  для случаев различных величин запаздывания как в связях, так и в самих системах;  $c_1 = c_3 = 1$ ,  $c_2 = c_4 = -1$ ,  $b_1 = b_2 = 5, 0$

**2.4.2. Некоторые выводы.** Обращаясь к исследованиям модельных систем, проанализируем полученные результаты в контексте тенденций объединения и взаимодействия — интеграционных процессов в науке и высшей школе.

Как было показано, учет конечности времени распространения информации между научными направлениями дает возможность увидеть совершенно новые аспекты взаимодействий в научном сообществе. Так, величина запаздывания в связях может служить показателем «объединенности» (разобщенности) научных школ или направлений: малое запаздывание, как правило, характерно для научных направлений, локализованных в рамках одной организации.

Запаздывания, учтенные в модели, позволили уйти от стационарных решений, когда показатели научных направлений оставались постоянными с течением времени. Отдавая себе отчет в том, что такое постоянство есть следствие идеализации, мы внесли в модель фактор, который позволил перейти к колебательным процессам, гораздо в большей степени соответствующим природе моделируемых взаимодействий. Выяснилось, что относительно небольшие временные запаздывания приводят к колебаниям макропеременных, характеризующих состояние научных направлений.

Так, при рассмотрении сотрудничества развивающихся направлений увеличение времен запаздываний приводит к изменению динамики системы от синхронных периодических до нерегулярных и хаотических несинхронных колебаний научных показателей. Нерегулярный, сложный характер изменения макропеременных во времени при больших временных задержках делает практически невозможным поиск закономерностей в поведении реальной системы, процессы становятся непредсказуемыми. Возникают проблемы с управлением и прогнозированием поведения таких систем.

В противоположность этому, периодические и синхронные изменения макропеременных, характеризующих уровень развития взаимодействующих научных направлений, позволяют делать прогнозы и представляются выгодными с точки зрения управления. Для класса моделируемых нами систем синхронные процессы хороши прежде всего тем, что взаимодействующие системы ведут себя как одна, а это означает интеграцию двух направлений в полном смысле этого слова. Синхронизированные системы ведут себя как единое целое и в дальнейшем могут рассматриваться как элементарные структуры систем более высокого уровня иерархии. Время, за которое достигается синхронное состояние, является, по сути, показателем эффективности взаимодействия и, как выяснилось, зависит от запаздываний (как в связях, так и в самих системах). Тогда общая тенденция такова: чем больше запаздывание при взаимодействии научных направлений, тем дольше в

такой системе не устанавливается синхронный режим (либо он не установится вообще), что отдаляет ее от систем интеграции. Поскольку запаздывание в связях напрямую зависит от скорости распространения информации между научными направлениями или школами, то можно заключить, что данное запаздывание есть эквивалент расстояния между системами. Обобщая сказанное, приходим к выводу, что взаимодействие будет более эффективным, если интегрируемые системы локализованы в одном месте (например, в научно-исследовательском комплексе).

Практическое подтверждение выводов, сделанных на основании моделирования системы взаимодействующих научных направлений, представлено в работах [13, 14], в которых наглядно демонстрируются преимущества объединения исследовательских коллективов и учебных заведений в рамках крупных университетских центров с большим числом научных лидеров, сформировавшихся школ и эффективных научных связей.

### 2.5. Решетка связанных отображений с неоднородной диффузией как возможная модель интеграции высшей школы

Несомненно, высшая школа (вместе с ее неотъемлемой научной компонентой) является открытой системой, в которой существуют информационные, финансовые, кадровые потоки, а также она является системой неравновесной, поскольку процессы самоорганизации изнутри и управления извне со всей очевидностью отдаляют ее от равновесного состояния.

Обращаясь к моделированию процессов самоорганизации и интеграции в системе вузов, отметим сразу, что не ставится задача количественных оценок и прогнозов. Речь идет лишь о качественной интерпретации результатов моделирования и их сопоставлении с реальностью.

Подобный качественный анализ оправдан тем, что, во-первых, позволяет проанализировать возможные пути развития и, возможно, скорректировать модельные представления. Во-вторых, количественные характеристики и параметры высшей школы как социальной системы носят специфический характер. Так, например, легко определить численность сотрудников и объемы финансирования и достаточно трудно определить уровень развития научной компоненты, степень инноваций или, наконец, установить соответствие между количеством публикаций и качеством научного продукта. И в-третьих, на данном этапе специфика исследуемой проблемы позволяет проводить только качественный анализ: процесс интеграции начался относительно недавно, в различных регионах протекает по-разному [14, 15] и на текущий момент не может считаться завершенным.

**2.5.1. Математическая модель.** Решетки связанных отображений оказались весьма продуктивны как при описании сложной пространственно-временной динамики систем различной природы, так и с феноменологической точки зрения [16–20]. В ряде случаев решеточные модели используют как дискретные аналоги непрерывных распределенных систем хотя бы по той причине, что они достаточно хорошо описывают характерные явления в них и позволяют видеть основные закономерности. В нашем случае применение решетки оправдано еще и тем, что исследуемая система территориально распределенных и взаимодействующих между собой узлов изначально имеет дискретную пространственную организацию. Согласно принципам синергетики, описание динамики отдельного элемента системы должно быть нелинейным, что закладывает основы коллективных эффектов при взаимодействии с остальными элементами.

Обратимся к двумерной решетке логистических отображений с линейными аддитивными связями как к упрощенному аналогу системы территориально распределенных элементов высшей школы, каждый из которых явным образом взаимодействует с ближайшими соседями [21]:

$$x_{i,j}^{n+1} = \lambda x_{i,j}^n (1 - x_{i,j}^n) + 0,25\varepsilon(x_{i-1,j}^n + x_{i+1,j}^n + x_{i,j-1}^n + x_{i,j+1}^n), \quad (2.5)$$

где  $i, j$  — пространственные координаты,  $n$  — дискретное время,  $x_{i,j}^n$  — безразмерная переменная, характеризующая состояние элемента решетки с координатами  $(i, j)$  в момент времени  $n$ ,  $\lambda$  — параметр нелинейности,  $\varepsilon$  — величина связи. Граничные условия полагались периодическими, начальные задавались в интервале  $[0; 1]$  случайно с равномерным распределением.

Известно, что в системе (2.5) при определенных сочетаниях параметров связи и нелинейности с течением времени возникают пространственно локализованные состояния — структуры, также называемые доменами, которые представляют собой группы осцилляторов решетки, колеблющихся синфазно. На рис. 2.11 представлены пространственные диаграммы состояния решетки в  $n$ -е моменты времени. Градациями серого цвета отмечены величины безразмерных переменных  $x_{i,j}$ .

Отметим сразу, что при данном способе организации решетки, если имеют место структуры, то они появляются во время весьма длительного переходного процесса, который предшествует установлению синфазных колебаний по всему пространству решетки.

В контексте сравнения модели с реальной системой интересны именно эти переходные процессы, так как реальная система лишь гипотетически может прийти к абсолютно однородному состоянию, но практически этого не происходит, что на модельном уровне можно объяснить появлением в системе новых факторов, элементов, связей и внешних воздействий. Открытая система допускает

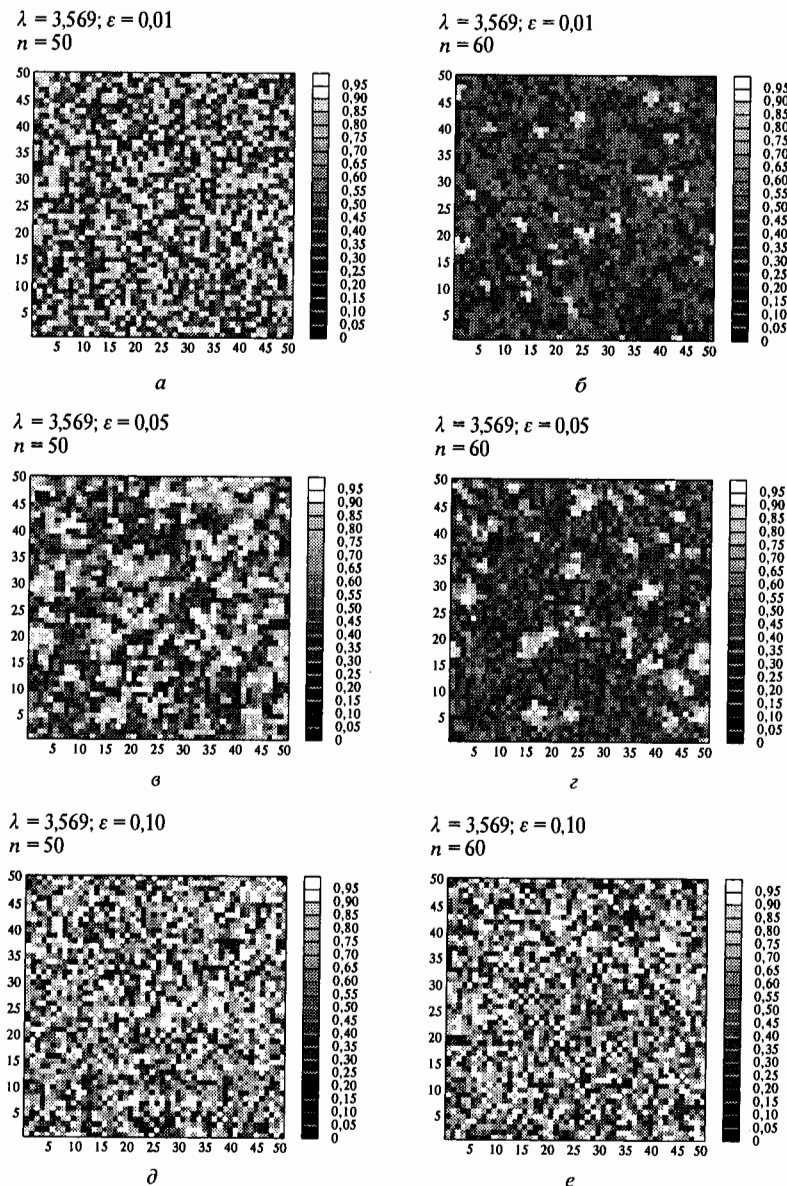


Рис. 2.11. Пространственные диаграммы состояния решетки (2.5) при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$ . Параметр нелинейности  $\lambda = 3,569$ . Левая колонка — результат эволюции автономной решетки, правая — решетки с интеграционными преобразованиями в интервале времени  $20 \leq n \leq 30$ : а, б —  $\varepsilon = 0,01$ ; в, г —  $\varepsilon = 0,05$ ; д, е —  $\varepsilon = 0,10$

подобное многообразие, но учесть все факторы, определяющие эволюцию открытой системы на относительно большом интервале времени в рамках одной модели, пусть даже качественной, вряд ли возможно. В особенности сказанное относится к социальным системам, когда трудно провести формализацию и сделать количественные оценки.

Поэтому мы ставим реальную задачу качественного анализа эволюции модельной системы на конечном временном интервале в зависимости от ограниченного набора интересующих нас факторов.

**2.5.2. Схема интеграционного взаимодействия.** Моделирование интеграционных процессов проводилось на основе системы уравнений (2.5) с применением следующего алгоритма. По всему пространству взаимодействия осуществлялся поиск локальных максимумов  $x_{i,j_{\max}}$  по отношению к ближайшим соседним элементам, проводилось усреднение значений пяти соответствующих элементов

$$\bar{x} = 0,2(x_{i,j} + x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1})$$

и каждому из пяти указанных элементов присваивалось значение  $\bar{x}$ . В известном приближении такую процедуру можно считать аналогом интеграции территориально близких элементов системы образования — субъектов интеграции вокруг элемента с наилучшими показателями в данной локальной области (рис. 2.12). Следует отметить, что по отношению ко всей системе подобное преобразование не является простым усреднением, когда целое есть

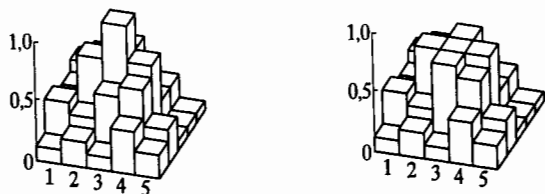


Рис. 2.12. Схематичное изображение интеграционного преобразования

сумма частей (другими словами, когда выполняется принцип суперпозиции), поскольку решетка имеет собственную динамику, которая существенно нелинейна: каждый элемент описывается нелинейным разностным уравнением и присутствуют связи. С физической точки зрения преобразование можно интерпретировать как внесение в систему дополнительного диффузионного механизма.

Описанную процедуру, которую в дальнейшем будем называть интеграционным преобразованием, можно выполнять на каждом шаге численного счета в течение конечного интервала времени. Под воздействием преобразования решетка сравнительно быстро

(порядка десяти шагов дискретного времени) приходит к некоторому пространственно структурированному стационарному состоянию. Применение описанного алгоритма интеграционного преобразования в последующие моменты времени не представляет интереса, так как не приводит к каким-либо изменениям состояния решетки.

**2.5.3. Результаты численного моделирования и их интерпретация.** Прежде чем изучать влияние на систему интеграционных преобразований, обратимся к закономерностям динамики автономной решетки. Численный эксперимент показывает, что чем больше значение параметра  $\lambda^2$ ), т.е. чем сложнее динамика отдельного элемента и чем в больших пределах изменяется амплитуда колебаний, тем при меньших величинах связи  $\epsilon$  в системе образуются структуры, тем сложнее их форма и больше их количество. По мере увеличения  $\lambda$  пространственный масштаб структуры становится более мелким по сравнению с характерным геометрическим размером самой решетки.

При сравнительно малых или сравнительно больших значениях параметра связи образования структур не происходит, так как в первом случае коллективные воздействия недостаточны для установления синфазных колебаний элементов решетки, а во втором — решетка демонстрирует пространственно-временной хаос.

Не вызывает сомнения, что перечисленные особенности носят характер универсальных закономерностей для большого класса реальных распределенных систем, в том числе социальных.

Рассмотрим, что же происходит, когда к исследуемой системе (2.5) применяется описанный выше механизм интеграционных преобразований. Оговоримся сразу, что проводимые ниже рассуждения и аналогии следует расценивать как предположения о возможных путях развития распределенной социальной системы на основе модельных представлений весьма общего свойства.

В случае, когда динамика отдельного элемента в решетке относительно проста ( $\lambda = 3, 3$ ), интеграционные преобразования, внесенные в систему в интервале дискретного времени  $20 \leq n < 30$ , приводят к образованию четко выраженных пространственно локализованных участков с синфазными колебаниями. Пространственная конфигурация полученных структур существенно проще той, что возникает в результате самоорганизации.

По мере усложнения колебаний отдельных элементов решетки ( $\lambda = 3, 5$ ) происходит увеличение числа образовавшихся структур, а границы самих структур становятся менее четкими. Как уже было сказано ранее, структуры в решетке носят переходный ха-

<sup>2</sup>) Параметр нелинейности выбирался от  $\lambda = 3, 3$ , что соответствует колебаниям с периодом 2, до  $\lambda = 3, 569$ , что немного меньше критического значения, когда колебания могут носить хаотический характер.

рактер и, если интересоваться предельным случаем, когда система придет к однородному состоянию, то при наличии интеграционных преобразований это состояние будет достигнуто существенно быстрее.

Следует также отметить, что внесение интеграционных преобразований в систему с уже образовавшимися в результате самоорганизации структурами не вызывает в системе существенных изменений.

При дальнейшем увеличении параметра  $\lambda$ , вплоть до критического, соответствующего точке накопления логистического отображения (рис. 2.11), тенденция к увеличению числа структур и «размыванию» их границ, сохраняется (рис. 2.11z). Пространственные конфигурации (структуры, их форма и взаимное расположение) в такой решетке становятся более сложными, что в большей степени соответствует представлениям о реальной системе территориально распределенных элементов высшей школы, когда динамика отдельного элемента является достаточно сложной, поэтому остановимся на этом случае более подробно.

Когда связь между элементами решетки мала, образования структур не происходит (рис. 2.11a), но если систему подвергнуть интеграционным преобразованиям, в ней впоследствии образуются пространственно локализованные участки с синфазными колебаниями, причем количество участков с четко выраженными противofазными колебаниями мало (рис. 2.11b).

Применительно к реальной системе вузов элементы системы, колеблющиеся противofазно по отношению к ее большей части, можно интерпретировать как элементы, отличающиеся от большинства, как носители закономерного разнообразия в социальной системе; это не означает, что они хуже или лучше — они другие. Автономная система со случайными начальными условиями в процессе самоорганизации демонстрирует приблизительно равные по площади участки, колебания в которых противоположны по фазе (рис. 2.11, левый столбец), поэтому для нее не имеет значения интерпретация соотношения фаз.

Возвращаясь к случаю малой связи, отметим также, что образующиеся в результате интеграции структуры имеют малый пространственный масштаб; практически они включают в себя только ближайших по пространству соседей субъекта интеграции, с которыми он непосредственно граничит. Этот эффект объясняется тем, что при малых связях или в пределе при их отсутствии решетка вырождается в совокупность разрозненных элементов, собственная динамика решетки как распределенной системы фактически отсутствует. Механизм интеграционного преобразования сам по себе ни в коей мере не заменяет связи в системе, лишь в некоторой степени компенсируя недостаток пространственной организации. Таким образом, наблюдаемые в системе мелкие струк-

туры есть следствие неоднородной диффузии, лежащей в основе интеграционного механизма, и не имеют отношения к эффектам самоорганизации.

При тех значениях связи, которые соответствуют образованию структур в автономной системе, после применения интеграционных преобразований остаются структуры, но их количество существенно меньше (рис. 2.11z). В отличие от структур, являющихся продуктом самоорганизации (рис. 2.11e), «интеграционные» структуры расположены относительно далеко друг от друга, не соединены в пространстве «интерфейсами» (тонкими областями синфазных колебаний) и редко объединяют большое число элементов. Численный эксперимент показывает, что применение интеграционного преобразования в данном случае существенно ускоряет процесс установления в решетке пространственно однородного состояния с синфазными колебаниями по всему пространству взаимодействия.

Если связь между элементами относительно велика (рис. 2.11d, e), в решетке реализуется существенно неоднородное пространственное состояние, изменяющееся во времени. В этом случае интеграционные преобразования не оказывают сколь-либо заметного влияния на дальнейшую эволюцию, за исключением очень короткого интервала времени после окончания их воздействия на систему, в течение которого в системе снова восстанавливается сложная пространственно-временная динамика.

В заключение отметим, что идентичность элементов решетки и однородность связи между элементами в пространстве взаимодействия являются одними из наиболее существенных упрощений, которые могут быть учтены при дальнейшем исследовании, но в то же время являются полезными на этапе предварительного анализа и построения качественных соответствий.

## Глава 3

### ПАТТЕРНЫ. КЛАССИФИКАЦИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

pattern ['pætn] — 1.п. 1) образец, пример; 2) модель, шаблон; 3) образчик; 4) выкройка; 5) рисунок, узор; 6) система, структура.

Англо-русский словарь

Любопытно, что в нелинейной динамике можно использовать в разных ситуациях практически все приведенные в эпиграфе значения слова *pattern*. По-видимому, термин *паттерн* пришел в нелинейную динамику от исследователей, изучающих мозг. Вот что пишут Спрингер и Дейч в своей книге «Левый мозг, правый мозг» [1]: «Саган характеризует правое полушарие как опознающее устройство, предназначенное для поиска паттернов (иногда реальных, а иногда воображаемых) в поведении людей, а также в природных событиях. Эмоциональный тонус правого полушария таков, что оно подозревает существование тайны не только там, где она есть, но и там, где ее нет. Для критического анализа создаваемых им паттернов и для проверки их соответствия реальности ему необходимо левое полушарие ... Поиск паттернов без критического анализа и жесткий скептицизм без поиска паттернов — это антиподы несовершенной науки. Эффективный поиск знания нуждается в обеих функциях».

Как определить паттерн? Грегу Уолтеру [2] принадлежит такое определение: «Понятие паттерн подразумевает любую последовательность явлений во времени или любое расположение предметов в пространстве, которые можно отличить от другой последовательности или другого расположения или сравнить с ними... Вообще говоря, можно считать, что науки возникают в результате поиска паттернов, а искусства — в результате создания паттерна, хотя между поисками и созданием паттерна существует более тесная связь, чем обычно полагают».

Из сказанного следует, что паттерн — очень широкое понятие. В отечественной литературе чаще используется термин структура,

которым можно было бы обойтись в этой главе. Но, во-первых, знание широкого термина обогатит читателя, во-вторых, в англоязычной литературе по нелинейной динамике употребляется только термин *pattern*.

По аналогии с колебаниями паттерны можно разделить на свободные, вынужденные и автопаттерны (см., например, [3]). Примером свободных структур могут служить вихри за вращающимся винтом, вихревые кольца при истечении из сопла, обычные дымовые кольца. Круговые конвективные ячейки, создаваемые круговой границей, — пример вынужденных паттернов. В эксперименте силиконовое масло, содержащее алюминиевый порошок, подогревается снизу; контейнер покрыт охлаждаемой стеклянной пластинкой, что исключает поверхностное натяжение и образование шестигранных ячеек Бенара. Много уникальных фотографий описанных выше паттернов и ряда других можно найти в альбоме [4]; некоторые из них приведены на рис. 7.1–7.4, 7.9, 7.10.

Под автопаттернами будем понимать локализованные пространственные образования, устойчиво существующие в диссипативных неравновесных средах и не зависящие (в конечных пределах) от граничных и начальных условий [3].

Самое главное в этом определении и раскрывающее смысл добавки «авто» к слову паттерн — независимость от конечного изменения граничных и начальных условий. Так же, как и в случае автоколебаний, подобная независимость может быть только в средах с диссипацией, которая понимается весьма обще [3]: например, она может возникнуть за счет излучения волн автоструктурой, возникшей в невязком течении с локализованной в пространстве областью подвода энергии. Глобальный пример такой структуры — автосолитон Россби — Большое Красное Пятно Юпитера в Южном полушарии планеты.

Автопаттерны делают, в свою очередь, на статические, в которых нет никаких движений, стационарные — с постоянными движениями (они могут, например, вращаться) и динамические, регулярно или хаотически изменяющиеся во времени.

Далее речь пойдет только об автопаттернах — о статических автопаттернах Тьюринга, позволяющих, например, ответить на вопрос: «Отчего у леопарда пятна на шкуре?»; о стационарных автопаттернах — шестигранных призматических ячеек Бенара, возникающих в подогреваемом снизу слое жидкости; об ансамблях стационарных паттернов типа цепочки вихрей Тейлора в течении Куэтта между вращающимися цилиндрами и др.

Заметим, что стационарные автопаттерны, которые типичны для гидродинамических течений, возникают, как правило, не изолированно, а в виде ансамблей таких структур.

У динамических автопаттернов могут проявляться и собственные (внутренние) степени свободы. Если возбуждается несколько

собственных степеней свободы, то даже одиночный динамический автопаттерн может демонстрировать сложную временную динамику, включая хаотическое поведение (пример — вихрь Тэйлора в круговом течении Куэтта, на котором возбуждена азимутальная волна).

Как уже упоминалось, в диссипативных средах при достаточно большой степени неравновесности возникают ансамбли паттернов. Примером однородного ансамбля динамических паттернов может служить цепочка связанных между собой вихрей Тэйлора. Наличие границ, действие внешних полей, неоднородность неравновесной среды порождают неоднородные ансамбли паттернов, среди которых как типичные можно выделить ансамбли автопаттернов, невязанно связанных друг с другом. Невязанная связь характерна для потоковых систем, таких как сдвиговые течения в гидродинамике, электронные потоки в плазме, автокаталитические химические реакции в реакторах с протоком. Из-за наличия потока сложные изменения в ансамбле, в том числе и хаотические, развиваются и во времени, и в пространстве. Красивый пример — спиральные вихри на конусе, вращающемся в потоке. По мере развития спиральных вихрей они приобретают изящную кружевную структуру.

Наиболее эффектные примеры паттернов можно найти в биологии и биофизике. Канонический пример — самоорганизация в ансамбле амебоподобных клеток («социальные амебы»), которая заканчивается агрегацией (появляются споры, способные выжить в экстремальных условиях).

Пожалуй, достаточно примеров автопаттернов, чтобы вновь вернуться к их определению и снова осмыслить его. Поскольку образование автопаттернов — результат развития пространственно неоднородных неустойчивостей с их последующей стабилизацией за счет баланса между диссипативными расходами и поступлением энергии от источника неравновесности, то процесс образования похож на установление колебаний в распределенных автоколебательных системах (РАС) [5, 6].

Для последних определение звучит так: РАС — неконсервативная система, в которой в результате развития неустойчивости возможно установление волновых или колебательных движений, параметры которых (амплитуда и форма колебаний и волн, частота, а в более общем случае спектр колебаний) определяются самой системой и не зависят от конечного изменения начальных условий [5]. Определения автопаттернов и РАС, конечно же, похожи. Поэтому неслучайно генерация импульсов в оптическом квантовом генераторе — пример автоколебаний в распределенной системе и одновременно пример образования автопаттернов. Именно этот пример привел Германа Хакена — немецкого физика, специалиста по лазерам к созданию синергетики.

В чем же отличия паттернов и автоколебаний? Уже указывалось, что паттерны могут быть статическими. Кроме того, они могут иметь, например, форму распространяющихся фронтов, т. е. могут быть неколебательными. Далее для образования паттернов условия на периферии неравновесной диссипативной среды не столь существенны, как для автоколебаний. Поэтому самым широким является определение самоорганизации как установления в диссипативной неравновесной среде пространственных паттернов (вообще говоря, эволюционирующих во времени), параметры которых определяются свойствами самой среды и слабо зависят от пространственной структуры источников неравновесности (энергии, массы и т. д.), начального состояния среды и условий на границах. Даже в рамках этого широкого определения явления самоорганизации весьма разнообразны, поскольку они разворачиваются и во времени, и в пространстве, а богатство их форм чрезвычайно велико. Это — диссипативные структуры Пригожина, уединенные фронты (волны горения и популяций), импульсы (в нервных волокнах и автокаталитических реакциях), ведущие центры (концентрические волны) и ревербераторы (спиральные волны) (сердечная ткань, кооперация амеб, волны депрессии в тканях мозга и сетчатке глаза) и др.

## Глава 4

КОЛМОГОРОВ, ПЕТРОВСКИЙ, ПИСКУНОВ, ФИШЕР  
И НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ<sup>1)</sup>

«Если оглянуться назад, то окажется, что математики упустили прекрасную возможность получить важные научные результаты только потому, что они игнорировали изучение нелинейного уравнения диффузии. Исключением была работа А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского и Н.С. Пискунова «Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества...» Они показали, что любое начальное возмущение в виде перепада стремится к одному и тому же уединенному стационарному решению типа бегущей волны. Авторы изучили это решение с помощью фазовой плоскости и получили в явном виде выражение для скорости.

... То, что математики не сумели своевременно изучить уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова, не может быть объяснено слабостью их техники перед лицом огромных математических трудностей... препятствие вероятно заключалось в том, что математики автоматически перенесли вывод о неволновом поведении решений линейного диффузионного уравнения на нелинейный случай.»

*Элвис Скотт.* «Электрофизика нервного волокна», в книге «Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике» (М.: Сов. радио, 1977. С. 288–289)

Уравнение, о котором пойдет речь, было впервые исследовано в 1937 году А.Н. Колмогоровым, И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым [1] и независимо Р.Э. Фишером [2]. Уравнение часто называют уравнением КПП.

Работа [1] была задумана авторами применительно к следующей биологической задаче. В экологической среде внезапно в некотором очаге (локально) возникает новый тип организмов, обладающих, например, лучшей приспособленностью к условиям дан-

ной среды, большей плодовитостью (повышенный биологический потенциал) по сравнению с ранее существовавшим. Новый тип расселяется по всему пространству и вытесняет старый тип организмов. Предполагается, что в любой точке среды организмы начинают размножаться немедленно после возникновения (среда является активной), а вне очага активные организмы появляются за счет диффузии. В одномерном случае задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad D > 0, \quad (4.1)$$

где  $x$  — координата точки на плоскости;  $t$  — время;  $u$  — плотность организмов в точке  $x$  в момент времени  $t$ ;  $D$  — коэффициент диффузии. Кроме диффузии, как указано выше, имеет место возрастание плотности организмов, скорость которого в данной точке и в данный момент времени зависит от уже существующей, причем представляют интерес значения  $F(u)$  при  $u \geq 0$ . Предполагается, что  $F(u)$  — непрерывная и необходимая для раз дифференцируемая функция  $u$ , удовлетворяющая условиям

$$F(0) = F(1) = 0; \quad (4.2)$$

$$F(u) > 0, \quad 0 < u < 1; \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial F(0)}{\partial u} = \alpha > 0, \quad \frac{\partial F(u)}{\partial u} < \alpha, \quad 0 < u \leq 1. \quad (4.4)$$

Из условия (4.4) следует, что при достаточно малых  $u$  скорость возрастания  $F(u)$  пропорциональна  $u$  (с коэффициентом пропорциональности  $\alpha$ ). Кроме того, при приближении  $u$  к единице возрастание  $u$  прекращается. Поэтому рассматриваются только решения уравнения (41), удовлетворяющие условию

$$0 \leq u \leq 1. \quad (4.5)$$

Статья [1] оригинально построена: во введении изложены все основные результаты, а доказательства даны в основном тексте. Поступим так же и мы, приведя здесь часть введения к [1].

«Предположим теперь, что в начальный момент  $t = 0$  при  $x < 0$  плотность  $u = 0$ , а при  $x > b \geq a$  плотность достигает своего максимально возможного значения  $u = 1$ . Естественно, что область плотностей, близких к единице, будет с возрастанием  $t$  распространяться справа налево, оттесняя область малых плотностей влево.

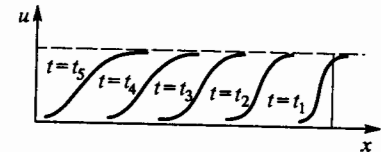


Рис. 4.1. Качественный вид решения уравнения КПП

<sup>1)</sup> Содержание этой главы соответствует статье Д. И. Трубецкого с таким же названием, опубликованной в журнале Изв. вузов — ПНД. 1997. № 6. С. 85.



В частном случае  $a = b$  картина будет приблизительно такова, как изображено на рис. 4.1.

Тот участок кривой плотности (как функция  $x$ ), на который приходится основная часть падения плотности от единицы до нуля, с течением времени перемещается справа налево. По форме кривая плотности при  $t \rightarrow \infty$  приближается к определенной предельной кривой. Задача заключается в том, чтобы определить эту предельную форму кривой плотности и предельную скорость ее перемещения справа налево. Оказывается, что искомая предельная скорость равна

$$\lambda_0 = 2\sqrt{D\alpha}, \quad (4.6)$$

а предельная форма кривой плотности дается решением уравнения

$$\lambda_0 \frac{du}{dx} = D \frac{d^2u}{dx^2} + F(u), \quad (4.7)$$

обращающимся в нуль при  $x = -\infty$  и в единицу при  $x = +\infty$ . Такое решение всегда существует и единственно, с точностью до преобразования  $x' = x + C$ , не меняющего форму кривой.

Заметим, что уравнение (4.7) может быть получено следующим образом. Будем искать решение уравнения (4.1), обладающее тем свойством, что при изменении  $t$  форма кривой, изображающей зависимость  $u$  от  $x$ , не меняется, а сама эта кривая перемещается справа налево со скоростью  $\lambda$ . Такое решение имеет вид

$$u(x < t) = U(x + \lambda t). \quad (4.8)$$

Рассматривая теперь  $u$  как функцию одного переменного  $z = x + \lambda t$ , получим уравнение

$$\lambda \frac{du}{dz} = D \frac{d^2u}{dz^2} + F(u).$$

Уравнение это, оказывается, имеет решения, удовлетворяющие условиям, поставленным выше для уравнения (4.7), при всевозможных  $\lambda \geq \lambda_0$ . Но только при  $\lambda = \lambda_0$  мы получим интересующую нас предельную форму кривой плотности при указанных выше начальных условиях.

Немного о двух авторах работы [1].

Андрей Николаевич Колмогоров — один из величайших математиков XX века, один из крупнейших ученых в истории русской науки, гениальный человек и великий просветитель. В интересной статье [3], посвященной девяностолетию со дня рождения А. Н. Колмогорова, есть раздел «Вехи творческого пути», где указано, что список его трудов насчитывает около 500 работ. «Одно

лишь перечисление математических разделов («сюжетов»), в которые Колмогоров внес фундаментальный вклад, необычайно велико. Назовем некоторые: метрическая теория функций, дескриптивная теория множеств, математическая логика, теория вероятностей, геометрия, случайные процессы, математическая статистика, функциональный анализ, теория приближений, теоретико-множественная топология, алгебраическая топология, дифференциальные уравнения, теория турбулентности, теория стрельбы, теория алгоритмов и автоматов, динамические системы, классическая механика, теория суперпозиций функций, теория информации, алгоритмическая теория вероятностей.

Существенную долю в его научных исследованиях составляют работы в области приложений к физике, биологии, геологии, океанологии, метеорологии, кристаллографии и т. п. И помимо всего этого Андрей Николаевич имел труды по вопросам педагогики, методики, стиховедения, философии, истории, естествознания, написал множество статей в различные энциклопедии» [3, с. 7–8].

Широко известны спектр Колмогорова–Обухова в теории турбулентности, колмогоровская энтропия как мера хаоса, теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ-теория), эргодическая теория динамических систем и, конечно, уравнение КПП, о котором идет речь в этой главе.

Второй автор статьи [1] — академик Иван Георгиевич Петровский. Его работы относятся к теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и другим областям математики. Он заложил основы общей теории систем дифференциальных уравнений с частными производными. В области алгебраической геометрии им решена задача о расположении овалов алгебраической кривой шестого порядка, поставленная Давидом Гильбертом. И. Г. Петровский — автор неоднократно издававшихся учебников «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», «Лекции по теории интегральных уравнений» и «Лекции об уравнениях с частными производными». В замечательных воспоминаниях И. С. Шкловского «Эшелон» есть рассказ, посвященный Петровскому — ректору МГУ (он возглавлял университет с 1951 года). Вот небольшие отрывки из этого рассказа [4].

«22 года Иван Георгиевич руководил самым крупным университетом страны. У него ничего не было более близкого, чем университет, бывшим ему родным домом и семьей. Ради университета он забросил даже любимую математику. Вместе с тем Иван Георгиевич — человек высочайшей порядочности и чести никогда не был полным хозяином в своем доме. Могущественные «удельные князья» на факультетах гнули свою линию, и очень часто Иван Георгиевич ничего тут не мог поделать... Он всегда любил повторять: «Поймите, моя власть далеко не безгранична!» На ветер обещаний бесчисленным «ходакам» он никогда не давал. Но если

говорил: «Попробую что-нибудь для вас сделать», — можно было не сомневаться, что все, что в человеческих силах, будет сделано... Судьба ректора Московского университета академика Ивана Георгиевича Петровского была глубоко трагична. Это ведь древний сюжет — хороший человек на трудном месте в тяжелые времена. Надо понять, как было ему тяжело. Я был свидетелем многих десятков добрых дел, сделанных этим замечательным человеком. Отсюда, будучи достаточно хорошо знакомым со статистикой, я с полной ответственностью могу утверждать, что количество добрых дел, сделанных им за все время пребывания на посту ректора, должно быть порядка  $10^4!$  Много ли найдется у нас людей с таким жизненным итогом? Некий поэт по фамилии Куняев написал такие туманные строчки: «... Добро должно быть с кулаками...» Это ложь! Добро должно быть прежде всего конкретно. Нет ничего хуже абстрактной доброты. Эту простую истину следовало бы усвоить нашим «радикалам». И было бы справедливо, если бы на надгробии Ивана Георгиевича, что на Новодевичьем, была высечена простая надпись: «Здесь покоится человек, совершивший 10000 добрых поступков».

Покажем теперь, как получаются результаты решения уравнения КПП, приведенные выше. Будем следовать работе Фишера в изложении Дж. Марри [2]. Несколько слов о Фишере.

Ромальд Эйmlер Фишер родился в Лондоне в 1890 году. Он окончил в 1912 году Кембриджский университет, изучая физику и математику. В 1919 году он стал сотрудником Ротамстедской экспериментальной станции (до этого он преподавал и занимался статистикой), где столкнулся с проблемой статистической обработки массовых опытов по селекции сельскохозяйственных культур и генетике. Именно тогда он написал свою известную книгу «Методы статистики для научных работников». На протяжении всей своей жизни Фишер занимался разработкой, пропагандированием и внедрением методов математической статистики в биологию и другие области экспериментальных исследований. Он занимал гальтоновскую кафедру в Лондоне, затем — кафедру генетики в Кембридже. После своей отставки в 1957 году Фишер переехал в Австралию; он умер в Аделаиде в 1962 году.

Фишер сформулировал основные концепции популяционной генетики, что было важно для объяснения механизма эволюционного процесса. Его книга «Генетическая теория естественного отбора» (1930) стала классическим сочинением, с которого началось развитие популяционной генетики.

Предпошлем непосредственному изложению работы Фишера простой иллюстративный пример, имеющий методическое значение.

Пусть скалярная функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{du}{dt} = u(1 - u), \quad (4.9)$$

причем  $u(0, x) = 1/(1 + e^{-sx})$ ,  $s = \text{const} > 0$ , а пространственная переменная  $x$  рассматривается как параметр. Уравнение (4.9), как известно, называется логистическим уравнением и описывает, например, рост популяции бактерий, мушек и т. д. Стационарные состояния получаются из условия  $du/dt = 0$  и, следовательно,  $u_{ст} = 0$  и  $u_{ст} = 1$ . Исследуем каждое из них на устойчивость, полагая  $u = u_{ст} + \tilde{u}$ , где  $\tilde{u} \ll u_{ст}$ . Тогда для  $u_{ст} = 0$  имеем

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = \tilde{u}, \quad \tilde{u} \sim e^{pt} \text{ и } p = 1,$$

т. е. состояние  $u_{ст} = 0$  является неустойчивым. Для  $u_{ст} = 1$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = -\tilde{u}, \quad p = -1$$

и состояние устойчиво.

Уравнение (4.9) допускает аналитическое решение. Действительно,

$$\frac{du}{u(1-u)} = dt, \quad t = \int \frac{du}{u(1-u)} + F(x).$$

Проводя интегрирование и полагая  $F(x) = \ln f(x)$ , находим:

$$u = \frac{1}{1 - f(x)e^{-t}}.$$

Используя выражение для  $u(0, x)$  и вводя обозначение  $z = t + sx$ , окончательно имеем:

$$u(x, t) = \frac{1}{1 + e^{-z}}. \quad (4.10)$$

Нетрудно видеть, что при  $z = 0$   $u(x, t) = 1/2$ , при  $z \rightarrow -\infty$   $u(x, t) \rightarrow 0$ , при  $z \rightarrow +\infty$   $u(x, t) \rightarrow 1$ . Таким образом, решение (4.10) представляет собой волну, которая движется влево с постоянной скоростью, и имеет вид, представленный на рис. 4.2. Понятно, что такое решение структурно неустойчиво, потому что его форма и скорость полностью зависят от начального условия. Могут ли решения, подобные изображенному на рис. 4.2, быть устойчивыми? Может ли, например, стабилизировать такую волну диффузия? Наверное,

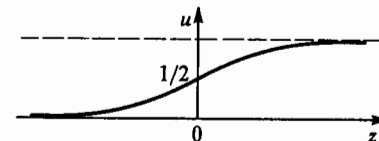


Рис. 4.2. Вид решения логистического уравнения (4.9)

хотя возможна и диффузионная неустойчивость, которая может породить пространственные структуры конечной амплитуды.

Фишер исследовал частный случай уравнения КПП (4.1) с квадратичной нелинейностью, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku(1-u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.11)$$

$k$  и  $D$  — положительные постоянные. Уравнение (4.11) можно рассматривать как простейшую диффузионную модель логистического роста популяции.

Исследуем существование и форму решений уравнения (4.11) типа бегущей волны, для которых  $0 \leq u \leq 1$ , и найдем скорость распространения таких волн. Будем искать решение в виде

$$u(x, t) = f(z), \quad z = x + ct, \quad (4.12)$$

где  $c$  — скорость волны, которая может быть и положительной, и отрицательной, поскольку уравнение (4.11) инвариантно относительно замены  $x$  на  $-x$ . Пусть для определенности  $c > 0$ , т. е. волна, описываемая соотношениями (4.12), движется в отрицательном направлении  $x$ .

Очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial z},$$

и, следовательно, уравнение (4.11) принимает вид

$$D \frac{d^2 f}{dz^2} - c \frac{df}{dz} + kf(1-f) = 0. \quad (4.13)$$

Мы хотим найти значения  $c$  (или одно значение), такие, что у уравнения (4.13) существует решение, удовлетворяющее условиям

$$0 \leq f \leq 1, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 1. \quad (4.14)$$

Перепишем уравнение (4.13) следующим образом:

$$\frac{df}{dz} = F, \quad D \frac{dF}{dz} = cF - kf(1-f).$$

Тогда траектории на фазовой плоскости подчиняются уравнению

$$\frac{dF}{df} = \frac{cF - kf(1-f)}{DF}, \quad (4.15)$$

которое имеет две особые точки на плоскости  $(F, f)$ :  $(0, 0)$  и  $(0, 1)$ . Это следует из уравнений  $F(z) = 0$  и  $cF(z) - kf(z)[1 - f(z)] = 0$ .

Исследуем характер этих особых точек. Вблизи особой точки  $(0, 0)$  уравнение (4.13) для малого возмущения  $\tilde{f}$  ( $f = f_0 + \tilde{f}$ ) становится таким:

$$D \frac{d^2 \tilde{f}}{dz^2} - c \frac{d\tilde{f}}{dz} + k\tilde{f} = 0.$$

Тогда  $\tilde{f} \sim e^{pt}$  и характеристическое уравнение

$$p^2 - \frac{c}{D}p + \frac{k}{D} = 0$$

имеет решение

$$p_{1,2} = \frac{c}{2D} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2D}\right)^2 - \frac{k}{D}}.$$

Поскольку  $k$  и  $D > 0$ , при  $c^2 > 4kD$ , т. е. при  $c \geq c_{\min} = 2\sqrt{kD}$ , оба корня характеристического уравнения положительны, и особая точка  $(0, 0)$  — неустойчивый узел. Если  $0 < c < c_{\min}$ , то  $p_{1,2} = \frac{c}{2D} \pm j\sqrt{\frac{k}{D} - \left(\frac{c}{2D}\right)^2}$ ,  $j = \sqrt{-1}$ , и особая точка — неустойчивый фокус. При  $c = 0$  особая точка — центр.

В двух последних случаях вблизи точки  $(0, 0)$  на любой траектории найдутся точки, для которых  $f < 0$ , т. е. решений, удовлетворяющих требуемым условиям (4.14), быть не может.

Уравнение (4.15) вблизи точки  $(0, 0)$  приближенно можно записать следующим образом:

$$\frac{dF}{df} \approx \frac{cF - kf}{DF}.$$

Вблизи особой точки  $(0, 1)$   $f = 1 + \tilde{f}$ ; уравнение (4.13) выглядит так:

$$D \frac{d^2 \tilde{f}}{dz^2} - c \frac{d\tilde{f}}{dz} - k\tilde{f} = 0$$

и, соответственно,

$$p_{1,2} = \frac{c}{2D} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2D}\right)^2 + \frac{k}{D}}.$$

Поскольку для любых  $c \geq 0$ , и  $p_1 \geq 0$ , и  $p_2 < 0$ , особая точка  $(0, 1)$  — седло, вблизи которого

$$\frac{dF}{df} \approx \frac{cF + kf}{DF}.$$

На рис. 4.3, взятом из книги Марри, качественно представлены траектории волновых решений уравнения (4.13) на фазовой плоскости при  $c > 2\sqrt{kD}$ .

Таким образом, из приведенного анализа и рис. 4.3 следует, что для каждого  $c > c_{\min}$  есть единственная траектория, начинающаяся в точке  $f = 0$  и движущаяся к  $f = 1$  в полосе  $0 \leq f \leq 1$ , у которой  $F > 0$ , за исключением точек  $f = 0$  и  $f = 1$ , где

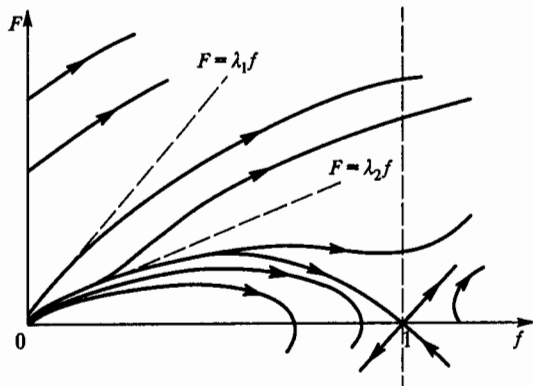


Рис. 4.3. Траектории волновых решений уравнения (4.13) на фазовой плоскости при  $c > 2\sqrt{kD}$

$F = 0$  <sup>2</sup>). При  $c = c_{\min}$  узел в точке  $(0, 0)$  вырожденный, с двумя наклонами  $\lambda_{1,2} = 1/(2D) (c \pm \sqrt{c^2 - 4kD})$ , сливающимися в  $c_{\min}/(2D) = \sqrt{kD}$ .

Фишер предложил простое доказательство того, что начальные данные, выражаемые, например, условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

приводят к решению, которое будет эволюционировать в волновое со скоростью  $c = c_{\min}$ . Идея доказательства в том, что по предположению решение эволюционирует в волновое решение постоянной формы, подобное представленному на рис. 4.2. Общая площадь под кривой в любой момент времени  $t$  слева от точки  $x = -R < 0$  равна

$$U = \int_{-\infty}^{-R} u(x, t) dx, \quad R > 0. \quad (4.17)$$

<sup>2</sup> Строгое доказательство этого есть как в работе [1], так и в монографии [5] в разделе «Задача А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, Н. С. Пискунова».

В анализируемой задаче  $U$  означает общее число особей слева от  $x = -R$ . Для достаточно большого  $R$  и конечного  $t$  значения  $u$  слева от  $x = -R$  малы, а при выполнении (4.16) вообще  $u = 0$ .

Фишер предложил зафиксировать некоторое произвольно малое значение  $U$  и найти из интеграла (4.17)  $R$  как функцию времени так, чтобы  $U$  оставалось равным выбранному значению. Если определена функция  $R(t)$ , то можно найти и скорость распространения  $dR/dt$ . Случай малых  $u$  и больших  $R$  соответствуют области  $0 < u \ll 1$ , поэтому в уравнении можно пренебречь слагаемым  $ku^2$  по сравнению с  $ku$ . В результате получаем линейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.18)$$

Для упрощения выкладок Фишер рассмотрел двумерную симметричную задачу с радиальной координатой  $r \geq 0$  и функцией  $u = u(r, t)$ , которая вместо уравнения (4.18) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku + D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad u(r, 0) = \delta(r), \quad (4.19)$$

где  $\delta(r)$  — дельта-функция Дирака. В такой постановке задачи вместо (4.17) требуем, чтобы площадь под  $u$  вне круга  $r = R$  была постоянной, т. е.

$$2\pi \int_{r=R(t)}^{\infty} u(r, t) r dr = U = \text{const}. \quad (4.20)$$

Пусть  $u(r, t) = e^{kt} \varphi$ . Тогда из уравнения (4.19) следует, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad \varphi(r, 0) = \delta(r). \quad (4.21)$$

Решение задачи (4.21) известно (см., например, [6]) и имеет вид

$$u(r, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{(kt-r^2)/4Dt}. \quad (4.22)$$

Подставляя уравнение (4.22) в уравнение (4.20) и проводя интегрирование, после простых преобразований находим, что

$$R(t) = \sqrt{4kDt^2 - 4D(\ln u)t} \approx 2\sqrt{kD} \cdot t,$$

поскольку второе слагаемое под корнем мало. Следовательно, скорость распространения волны  $dR/dt = c_{\min} = 2\sqrt{kD}$ .

Так как уравнение (4.11) инвариантно относительно изменения знака  $x$ , имеется решение волны, бегущей направо:

$$u(x, t) = u(x - ct), \quad c > 0, \quad f(-\infty) = 1, \quad f(+\infty) = 0.$$

Типичная картина развития во времени решения уравнения (4.11), демонстрирующая постоянство волновых фронтов, показана на рис. 4.4, взятом из книги Марри.

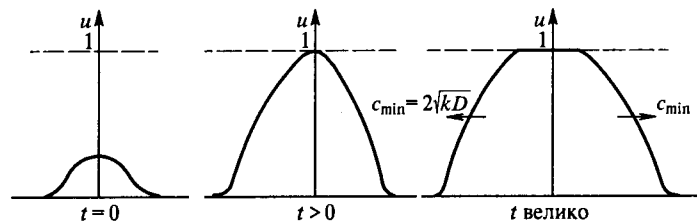


Рис. 4.4. Развитие во времени типичного решения уравнения Фишера

Годом позже работы [1] появилась статья Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого [7]. В ней была описана нелинейная температурная волна в веществе, выделяющем тепло. Рассматривалась среда, в которой при высокой температуре происходят необратимые химические реакции, сопровождающиеся выделением энергии. В этом случае оказывается возможным эстафетный механизм передачи тепла, когда тепло, выделившееся в некотором слое

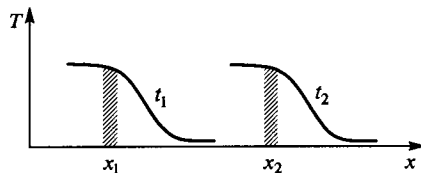


Рис. 4.5. Иллюстрация к объяснению механизма передачи тепла при распространении нелинейной температурной волны

$x_1$  передается в следующий слой  $x_2$  (см. рис. 4.5, где  $T$  — температура). При этом нелинейная температурная волна (достигаемая температура определяется теплотворной способностью и теплоемкостью вещества) распространяется без затухания и с постоянной скоростью. Нелинейные тепловые волны обсуждаются в следующей главе [8, 9].

## Глава 5

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ВОЛНЫ В ВЕЩЕСТВЕ, ВЫДЕЛЯЮЩЕМ ТЕПЛО<sup>1)</sup>

«...пламя, воспламенение, детонация — явления очень важные сами по себе. Объект интереса всех людей, начиная с доисторических времен — достаточно напомнить легенду о Прометее. Создание теории этих процессов — дело непреходящей важности... Теоретические подходы к этим явлениям, развитые в трудах ЯБ (в ряде случаев с коллегами и учениками)<sup>2)</sup> в 30–40-е годы и продолжавшиеся им до конца, стали важным элементом сегодняшнего теоретического естествознания в целом. Для сравнения уместно вспомнить: в свое время Рэлей в Англии, Л. И. Мандельштам и его школа в нашей стране создали общее учение о колебаниях. Возникла даже полезная концепция «колебательной взаимопомощи», когда трудности, возникающие в исследовании колебаний одной физической природы, понимались и преодолевались анализом более понятных, по тем или иным причинам, колебаний другой природы. То же произошло с физической самоорганизующихся нелинейных волн, произошло при определяющем участии ЯБ. Сегодня эти концепции успешно работают в десятках областей, в том числе весьма далеких от породившей их теории горения.»

*Г. И. Баренблатт.* Яков Борисович Зельдович, каким я его знал. В кн. «Знакомый незнакомый Зельдович» (М.: Наука, 1993. С. 200–201)

#### 5.1. Вводные замечания

Поток тепловой энергии возникает в среде из-за наличия градиента температуры. При малых градиентах плотность потока теплоты

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (\text{закон Фурье}), \quad (5.1)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $T$  — температура. Это следует просто из соображений разложения в ряд Тейлора —  $q$

<sup>1)</sup> В этой главе мы широко используем оценки, предложенные в уникальной в своем роде книге В. П. Крайнова «Качественные методы в физической кинетике и гидрогазодинамике» (М.: Высшая школа, 1989).

<sup>2)</sup> ЯБ — Яков Борисович Зельдович.

пропорциональна первой степени градиента температуры  $dT/dx$  в направлении  $x$  ее изменения.

В газах изменение температуры приводит также к изменению плотности газа (например, для разреженного газа согласно уравнению Клапейрона). Такой процесс является изобарным, так как выравнивание давления происходит гораздо быстрее, чем передача тепловой энергии: выравнивание давления происходит путем макроскопического движения газа; скорости такого движения, как правило, велики по сравнению с дрейфовыми скоростями молекул в процессе теплопроводности. Тепловая энергия единичного объема газа (или жидкости) равна  $\rho c_p T$ , где  $c_p$  — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении,  $\rho$  — плотность вещества (постоянная Больцмана полагается равной единице,  $T$  измеряется в энергетических единицах).

Изменение тепловой энергии за единицу времени равно отношению  $\partial(\rho c_p T)/\partial t$ . С другой стороны, оно определяется разностью  $(q_2 - q_1)$  тепловых потоков, втекающего  $q_2$  и вытекающего  $q_1$  из рассматриваемого единичного объема через граничные стенки этого объема в плоскости  $yz$ , противоположные друг другу. Так как расстояние вдоль оси  $x$  в единичном объеме между стенками равно единице, то из (5.1) получаем

$$q_2 - q_1 = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Тогда уравнение сохранения тепловой энергии имеет вид

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \left( \frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T \text{ в трехмерной постановке} \right), \quad (5.2)$$

где  $a = \lambda/\rho c_p$  — температуропроводность,  $\Delta$  — лапласиан.

## 5.2. Распространение теплоты в среде.

### Существуют ли линейные температурные волны?

Пусть в начальный момент времени некоторое количество тепловой энергии  $Q$  выделилось в определенной точке жидкости. Оценим, как со временем расширяется область нагрева и как падает со временем температура в этой области.

Пусть  $t$  — характерное время, за которое теплота распространяется из источника на область с характерным размером  $R$ . Тогда из уравнения (5.2) имеем

$$\frac{T}{t} \sim \frac{aT}{R^2}, \quad (5.3)$$

откуда

$$R \sim (at)^{1/2}. \quad (5.4)$$

Таким образом, область нагрева расширяется пропорционально  $\sqrt{t}$ .

Можно сказать и по-другому. Если вещество в объеме с характерным радиусом  $R$  нагрето неравномерно, то вследствие переноса теплоты температура выравнивается за характерное время

$$\tau \sim \frac{R^2}{a},$$

называемое временем релаксации.

Обозначим  $Q$  — количество теплоты, выделившееся в жидкости в начальный момент времени. Из закона его сохранения в объеме  $R^3$  с учетом, что тепловая энергия единичного объема равна  $\rho c_p T$ , получим

$$Q \sim \rho c_p T R^3.$$

Отсюда с учетом оценки (5.4) находим

$$T \sim \frac{Q}{\rho c_p} (at)^{-3/2}. \quad (5.5)$$

В трехмерной задаче теплопроводности температура падает со временем как  $t^{-3/2}$ .

В одномерном случае аналогично

$$T \sim \frac{Q}{\rho c_p} (at)^{-1/2},$$

где  $Q$  — количество теплоты с единичной площади источника, представляющего собой плоскость  $yz$ .

Все приведенные выше оценки справедливы не только для жидкостей и газов, но и для твердых тел (в жидкостях и твердых телах несущественно различие между теплоемкостями при постоянном давлении и постоянном объеме вследствие малой сжимаемости вещества).

Рассмотрим теперь типичную нестационарную задачу теплопроводности. Пусть плоский источник теплоты имеет температуру  $T_0(t)$ , которая колеблется со временем с частотой  $\omega$ :

$$T_0(t) = T_0 \sin \omega t.$$

На каком расстоянии затухает тепловая волна, возникающая от источника теплоты?

Подставим в уравнение (5.2) осциллирующее решение в виде монохроматической плоской волны

$$T(x, t) = T_0 e^{j(\omega t - kx)}.$$

Тогда  $j\omega T_0 = -k^2 a T_0$  и для волнового числа получаем

$$-k^2 = \frac{j\omega}{a}. \quad (5.6)$$

Из дисперсионного уравнения (5.6) видно, что значение  $k$  — комплексное, причем мнимая и вещественная части одинаковы. Таким образом, длина волны

$$\lambda \sim (\operatorname{Re} k)^{-1}$$

и длина

$$x_0 \sim (\operatorname{Im} k)^{-1},$$

на которой имеет место существенное затухание волны в данном случае одинаковы. Итак, распространение тепловой волны представляет собой аperiодический процесс, при котором осцилляции и затухание происходят на одной и той же длине

$$x_0 \sim \left(\frac{a}{\omega}\right)^{1/2}. \quad (5.7)$$

Линейных тепловых волн как таковых нет. Очевидно, что в случае, если среда ограничена, мы придем к аperiодическим колебаниям.

### 5.3. Нелинейная теплопроводность

Предположим, что температуропроводность является степенной функцией температуры с заданным показателем степени  $n$ , т.е.  $a = \alpha T^n$ , где коэффициент  $\alpha$  характеризует среду (для газов во всяком случае теплопроводность и температуропроводность зависят от температуры степенным образом).

Пусть плоский источник выделяет в полупространство  $x > 0$  количество теплоты  $Q$ , отнесенное к единичной площади плоскости в момент времени  $t = 0$ .

Обозначим  $x_0$  координату границы распространения теплоты в заданный момент времени  $t$ . Рассмотрим, от каких параметров, помимо  $t$ , зависит  $x_0$ . Одним из них, несомненно, является постоянная  $\alpha$  в зависимости  $a$  от  $T$ . Температура выражается в энергетических единицах — Дж, размерность  $a = \lambda/\rho c_p [\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}]$ ,  $[\alpha] = [\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Дж}^{-n}]$ . Было бы неверно рассматривать  $Q$  в качестве параметра, от которого зависит  $x_0$ , и составлять размерность длины из параметров  $t$ ,  $\alpha$  и  $Q$ . Дело в том, что коль скоро мы имеем дело с уравнением теплопроводности (5.2) для температуры среды  $T$ , то и начальные условия нужно писать также для  $T$ . Распределение тепловой энергии в пространстве в начальный момент времени  $t = 0$  имеет вид  $Q\delta(x)$ , где  $\delta(x)$  — одномерная  $\delta$ -функция.

Так как  $Q$  имеет размерность  $\text{Дж} \cdot \text{м}^{-2}$ , т.е.  $Q\delta(x)$  имеет размерность плотности тепловой энергии  $\text{Дж} \cdot \text{м}^{-3}$ , то для определения распределения температуры в начальный момент времени нужно приравнять  $Q\delta(x)$  плотности тепловой энергии  $\rho c_p T$ , выраженной через температуру  $T$ . Итак, в начальное условие для температуры  $T$  входит комбинация  $Q/(\rho c_p)$ , от которой и будет зависеть  $x_0$ . Эта комбинация имеет размерность  $[Q/(\rho c_p)] = \text{Дж} \cdot \text{м}$ , так как  $[c_p] = \text{кг}^{-1}$ .

Для оценки  $x_0$  составляем размерность длины из  $t$ ,  $\alpha$  и  $Q/(\rho c_p)$ . Сначала заметим, что

$$\left[\alpha \left(\frac{Q}{\rho c_p}\right)^n\right] = \left[\frac{a}{T^n} \left(\frac{Q}{\rho c_p}\right)^n\right] = \text{м}^{n+2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Следовательно,

$$x_0^{n+2} \sim \alpha t \left(\frac{Q}{\rho c_p}\right)^n$$

и

$$x_0 \sim \left(\frac{Q}{\rho c_p}\right)^{n/(n+2)} (\alpha t)^{1/(n+2)}. \quad (5.8)$$

При  $n = 0$  (линейная теплопроводность) приходим к оценке (5.4), так как  $a = \alpha$ . При  $n > 0$  рост области нагрева, как видно из соотношения (5.8), оказывается более медленным.

Модифицированное уравнение теплопроводности на случай, когда  $a = \alpha T^n$  ( $\rho$  и  $c_p$  не зависят от  $T$ ) из тех же рассуждений, что и при выводе уравнения (5.2), получается таким:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (5.9)$$

Обозначим  $\delta x$  расстояние от границы  $x_0$  в сторону источника теплоты, причем  $\delta x \ll x_0$ . Пусть  $v_0$  — скорость перемещения границы  $x_0$ . Ее можно оценить как  $v_0 \sim x_0 t^{-1}$ . Так как  $\delta x \ll x_0$ , то скорость перемещения теплоты в точке  $(x_0 - \delta x)$  практически равна скорости перемещения теплоты в точке  $x_0$  границы. Следовательно,  $\delta x = v_0 \delta t$ , где  $\delta t$  — время, за которое температура изменяется от нуля на границе до  $\delta T$ , когда границей станет точка  $(x_0 + \delta x)$ .

Из уравнения (5.9) следует

$$\frac{\partial T}{\partial t} \sim \alpha \frac{(\delta T)^{n+1}}{(\delta x)^2}. \quad (5.10)$$

Подставляя в соотношение (5.10)  $\delta t = \delta x/v_0$  и  $v_0 \sim x_0/t$ , находим

$$\delta T^n \sim \frac{(\delta x)^2 \alpha^{-1} x_0}{\delta x t}, \quad \delta T \sim \left( \frac{x_0 \delta x}{\alpha t} \right)^{1/n}, \quad (5.11)$$

$x_0$  определяется оценкой (5.8). Подставим (5.8) в (5.11), что дает

$$\delta T \sim \left( \frac{Q}{\rho c_p} \right)^{1/(n+2)} (\delta x)^{1/n} (\alpha t)^{-\frac{n+1}{n(n+2)}}. \quad (5.12)$$

Из соотношения (5.12) видно, что при  $n > 0$  граница распространения тепла является четко фиксированной и на ней температура строго равна нулю. Если же  $n = 0$ , то теплота мгновенно распространяется на бесконечность и температура отлична от нуля во всех точках пространства при  $t > 0$ . В соответствии с формулой (5.12) рост температуры при фиксированном времени  $t$  по мере увеличения  $\delta x$  определяется фактором  $(\delta x)^{1/n}$ . Если положить  $\delta x \sim x_0$ , то мы получим характерную температуру  $T$  в области нагрева в этот момент времени. Из (5.8) и (5.12) следует, что

$$T \sim \left( \frac{Q}{\rho c_p} \right)^{2/(n+2)} (\alpha t)^{-1/(n+2)}. \quad (5.13)$$

При  $n = 0$  получаем выведенную выше формулу

$$T \sim \frac{Q}{\rho c_p} (\alpha t)^{-1/2}.$$

Из оценки (5.13) следует, что нелинейность замедляет уменьшение температуры со временем при  $n > 0$  и убыстряет его при  $n < 0$ . Очевидно, все полученное (см. (5.13)) справедливо при  $n > -2$ .

В каких же случаях могут все-таки возникать тепловые волны?

#### 5.4. Тепловые нелинейные волны и неоднородные стационарные состояния

Рассмотрим следующую абстрактную модель [1]. Некоторая каким-то способом нагреваемая среда I находится в другой среде II. Условия теплообмена среды I со средой II однородны по всей ее длине. Характерный поперечный размер среды I —  $d$ , а распределением температуры по поперечному сечению  $d$  можно пренебречь. В этих условиях уравнение теплового баланса среды I можно записать в виде

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Phi(T), \quad (5.14)$$

где  $\Phi(t) = Q_+ - Q_-$ ,  $Q_+$  — интенсивность тепловыделения,  $Q_-$  — интенсивность теплоотвода. Будем считать, что среда I нагревается регулируемым источником, который характеризуется варьируемым параметром задачи; обозначим его через  $\varepsilon$ . Причем  $Q_+ = \varepsilon^2 f(T)$ , где  $f(T)$  — нелинейная функция, имеющая S-образный вид;  $Q_- = \alpha_1 \cdot d^{-1}(T - T_0)$ ,  $T$  — температура среды I,  $T_0$  — среды II,  $\alpha_1$  — коэффициент теплопередачи, не зависящий от температуры. В точечной системе (уравнение (5.14) без слагаемого  $\lambda(\partial^2 T/\partial x^2)$ ) возможно появление области параметров  $\varepsilon$ , в которой среда I может существовать в двух устойчивых состояниях, различающихся температурой. Это можно проиллюстрировать качественным графическим решением уравнения

$$\Phi(T) = 0$$

или

$$Q_+ = Q_-,$$

$$\varepsilon^2 f(T) = \alpha_1 d^{-1}(T - T_0).$$

Из рис. 5.1 видно, что в интервале изменения параметра  $\varepsilon_+ < \varepsilon < \varepsilon_-$  (при фиксированных  $\alpha$  и  $T_0$ ) стационарное и устойчивое состояние среды I может соответствовать температурам  $T_1$  и  $T_2$ . Неустойчивому состоянию по отношению к малым однородным возмущениям соответствует температура  $T_*$ . Если, начиная при

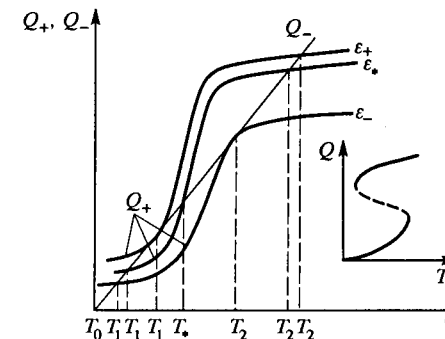


Рис. 5.1. Зависимость скоростей тепловыделения и теплоотвода от температуры: однозначная и неоднозначная функции температуры

температуре  $T_1$ , плавно увеличивать  $\varepsilon$ , то при  $\varepsilon = \varepsilon_+$  система скачком (одновременно по всей длине среды) перейдет в режим  $T_2$ , при обратном движении скачок из  $T_2$  в  $T_1$  произойдет при  $\varepsilon = \varepsilon_-$ . Таким образом, переходы имеют гистерезисный характер.

В распределенной системе типа (5.14) переход между стационарными состояниями может осуществляться за счет распространения температурной волны, вытесняющей режим с высокой или



низкой температурой, что зависит от значений параметров. В качестве начальных условий зададим

$$T(+\infty) = T_1 \quad \text{и} \quad T(-\infty) = T_2.$$

Будем искать решение уравнения (5.14) в виде стационарной волны, полагая

$$\xi = x + Vt.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = V \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = V \frac{\partial}{\partial x}.$$

Следовательно, из (5.14) получается уравнение

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} - V \rho c_p \frac{dT}{dx} + \Phi(T) = 0. \quad (5.15)$$

Стандартным образом понизим порядок этого уравнения. Тогда

$$\frac{dT}{dx} = p(T), \quad \frac{d}{dx} = p \frac{d}{dT}, \quad \lambda p \frac{dp}{dT} - V \rho c_p p + \Phi(T) = 0.$$

Граничные условия  $T(+\infty) = T_1$  и  $T(-\infty) = T_2$  включают  $dT/dx = 0$  при  $x = \pm\infty$ . Следовательно, на уравнение первого порядка для  $p(T)$  наложены два условия  $p(T_1) = 0$  и  $p(T_2) = 0$ .

Интегрируя уравнение первого порядка, находим

$$-\lambda \int_{T_1}^{T_2} p \frac{dp}{dT} dT = -V \rho c_p \int_{T_1}^{T_2} p dT + \int_{T_1}^{T_2} \Phi dT,$$

$$\frac{p^2}{2} \Big|_{T_1}^{T_2} = \frac{1}{2} (p^2(T_2) - p^2(T_1)) = 0.$$

Выражение для скорости волны имеет вид

$$V = \frac{\int_{T_1}^{T_2} \Phi(T) dT}{\rho c_p \int_{T_1}^{T_2} p(T) dT}. \quad (5.16)$$

Соотношение (5.16) не дает явного значения  $V$ , пока не решено уравнение (5.15) и неизвестна функция  $p(T)$ . Важно, что  $p(T)$  имеет по всей ширине фронта волны один знак, поэтому (5.16) определяет направление движения волны (знак  $V$ ) и условие, при котором происходит изменение направления этого движения.

Если интеграл

$$I = \int_{T_1}^{T_2} \Phi(T) dT > 0,$$

то волна движется в сторону заполнения среды I высокотемпературным режимом  $T_2$ , если  $I < 0$ , низкотемпературный режим вытесняет высокотемпературный.

При  $I = 0$  и  $V = 0$ : это — критическое условие смены направления фронта волны. Оно означает, что может иметь место стационарное состояние системы, при котором в среде I могут устойчиво и стационарно сосуществовать зоны высокотемпературного и низкотемпературного режимов. Иными словами, существует критическое значение  $\varepsilon_*$ , соответствующее заданным  $\alpha$  и  $T_0$ , при котором скорость движения волны обращается в нуль.

Аппроксимируем  $f(T)$  разрывной функцией вида

$$f(T) = \begin{cases} k(T - T_1), & T < T_*, \\ k(T - T_2), & T \geq T_*, \end{cases}$$

$k$  имеет смысл температурного коэффициента. Тогда

$$Q_+ = \begin{cases} \varepsilon^2 k(T - T_1), & T < T_*, \\ \varepsilon^2 k(T - T_2), & T \geq T_*, \end{cases}$$

и функция теплопроводности будет иметь вид

$$\Phi(T) = Q_+ - Q_- = \begin{cases} \varepsilon^2 k(T - T_1) - \frac{\alpha_1}{d}(T - T_1), & T < T_*, \\ \varepsilon^2 k(T - T_2) - \frac{\alpha_1}{d}(T - T_2), & T \geq T_*. \end{cases} \quad (5.17)$$

После элементарных преобразований (5.17) можно записать так:

$$\Phi(T) = \frac{\alpha}{d} \begin{cases} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 k d}{\alpha_1}\right) (T_1 - T), & T < T_*, \\ \left(1 - \frac{\varepsilon^2 k d}{\alpha_1}\right) (T_2 - T), & T \geq T_*. \end{cases} \quad (5.18)$$

Из совместного решения уравнений (5.15) и (5.18) можно получить выражение для скорости движения фронта.

Рассмотрим еще один способ решения (5.14), известный в теории горения (там решается уравнение  $\partial T / \partial t = D(\partial^2 T / \partial x^2) + W(T)$  с граничными условиями  $T = T_0$  при  $x = +\infty$ ,  $T = T_b$  при  $x = -\infty$  и  $W(T_b) = 0$ ,  $D$  — коэффициент диффузии).

В нашем случае имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W(T) = 0, \quad W(T) = \frac{a}{\lambda} \Phi(T)$$

с граничными условиями  $T = T_1$  при  $x = -\infty$  и  $T = T_2$  при  $x = +\infty$ .

Следуя [1], перейдем в последнем уравнении к безразмерным параметрам:

$$T = T_1 + (T_2 - T_1)\theta, \quad \theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad w = \frac{W(T)}{T_2 - T_1}.$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + w(\theta). \quad (5.19)$$

Ищем решение вида

$$\theta = \theta(y - vt) = \theta(\xi), \quad \xi = y - vt, \quad y = \frac{x}{\sqrt{a}}. \quad (5.20)$$

Подставляя решение (5.20) в уравнение (5.19), находим:

$$-v \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + w(\theta).$$

Понижая порядок уравнения известным образом, получим

$$-v \frac{d\theta}{d\xi} = p, \quad \frac{d}{d\xi} = -\frac{p}{v} \frac{d}{d\theta}, \quad \frac{d^2\theta}{d\xi^2} = \frac{p}{v^2} \frac{dp}{d\theta};$$

$$p = \frac{p}{v^2} \frac{dp}{d\theta} + w(\theta), \quad \frac{dp}{d\theta} = \frac{v^2}{p} [p - w(\theta)]. \quad (5.21)$$

Граничное условие  $\theta = 0$  и  $\theta = 1$  при  $\xi = \pm\infty$  включает  $d\theta/d\xi = 0$  при  $\xi = \pm\infty$  и, следовательно,  $p(0) = 0$  и  $p(1) = 0$ . Пусть  $w(\theta)$  имеет вид, приведенный на рис. 5.2. Я. Б. Зельдович и Д. А. Франк-Каменецкий предложили следующий изящный способ решения.

Пренебрегаем в квадратной скобке в уравнении (5.21)  $p$  по сравнению с  $w$ . Получаем в области  $\theta$  от 1 до максимума

$$p dp \approx -v^2 w(\theta) d\theta,$$

$$p_1 = v \left( 2 \int_{\theta_1}^1 w(\theta) d\theta \right)^{1/2}.$$

При этом уже при  $(1 - \theta_{\max}) < (1 - \theta_1) \ll 1$  достигается максимальное значение

$$p_{\max} = v \left( 2 \int_0^1 w(\theta) d\theta \right)^{1/2}.$$

В области, где  $w$ , пройдя максимум, стало малым, пренебрегаем  $w$  по сравнению с  $p$ . Получим

$$\frac{dp}{d\theta} = v^2, \quad p = p_1 - v^2(\theta_1 - \theta) \approx p_{\max} - v^2(1 - \theta).$$

Это решение удовлетворяет условию  $\theta = 1, p = 0$ . Продолжим его до  $\theta = 0$ . Имеем  $p(0) = p_{\max} - v^2$ , и условие  $p(0) = 0$  дает искомую величину

$$v^2 = p_{\max}, \quad v = \left( 2 \int_0^1 w(\theta) d\theta \right)^{1/2}.$$

В размерном виде имеем

$$v = \left[ \frac{2}{T_1 - T_2} \int_{T_1}^{T_2} W(T) dT \right]^{1/2}.$$

Весь вопрос теперь в том, когда реализуются такие  $\Phi(T)$  и реализуются ли они в задачах теплофизики.

Реально тепловые волны и неоднородные стационарные состояния имеют место в системе Fe + H<sub>2</sub>. Система железо-водород

интересна для гетерогенного катализа, поскольку взаимодействие между железом и водородом является одной из элементарных стадий реакции синтеза NH<sub>3</sub> на железном катализаторе. Система Fe + H<sub>2</sub> является важным объектом не только в области гетерогенного катализа. Способность железной проволоки, нагреваемой током в среде H<sub>2</sub> и подключенной последовательно к рабочему сопротивлению стабилизировать ток в этой электрической цепи давно используется в технике и называется бареттированием. Приведенная выше зависимость  $Q_+, Q_- =$

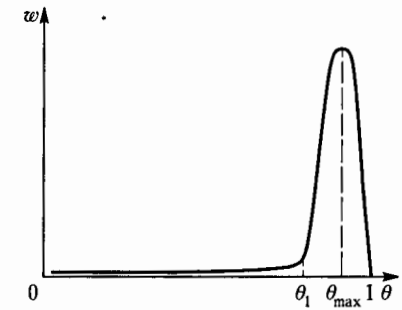


Рис. 5.2. Вид функции  $w(\theta)$

$= f(T)$  как раз соответствует процессу распространения нелинейных температурных волн, разделяющих области с высокой и низкой температурой, по нагреваемой электрическим током железной нити.

Подобные волновые процессы наблюдаются на тепловыделяющих поверхностях при кипении жидкостей. Это — переходные волновые процессы между режимами пузырькового и пленочного кипения на проволочных тепловыделяющих поверхностях, возникающие в ответ на внесение локальных тепловых возмущений. Имеются области существования волн перехода от пузырькового к пленочному режиму; есть и «область безразличного равновесия», в которой оба режима стационарно сосуществуют (область нулевых скоростей движения волны — стоячих волн).

Определение скорости распространения и структуры переходной зоны есть предмет теории равномерного распространения пламени как части теории горения.

В настоящее время параболическое уравнение типа уравнения КПП является базовой моделью, используемой для описания однокомпонентных активных сред, в которых энергия, расходуемая на поддержание автоволн (АВ)<sup>3)</sup>, не восстанавливается. В такой среде АВ представляет собой волну переключения из состояния с высокой энергией в низкоэнергетическое состояние.

Для анализа автоволновых процессов в средах с диффузией в настоящее время чаще всего используются квазинелинейные параболические уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + D\Delta \mathbf{u}, \quad (5.22)$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{f}$  — векторы,  $D$  — диагональная матрица,  $\Delta$  — лапласиан.

«Уравнение (5.22) весьма общего вида, и такого типа уравнениями описываются самые разнообразные активные среды в физике, химии, биологии; распределенные химические системы, физические системы с инверсной населенностью (активные тела лазеров), цепочки мультивибраторов, линии туннельных диодов, биологические распределенные системы (нейронные структуры, нервные и мышечные волокна, сердечный синцитий, популяции организмов)» [2, с.6–7]. Вот такое богатство. А началось все с уравнения КПП, полученного и решенного для частной задачи.

В заключение немного о Якове Борисовиче Зельдовиче и Давиде Альбертовиче Франк-Каменецком.

Я. Б. Зельдович (8.03.1914–2.12.1987) был уникален в своем творчестве, поскольку ему принадлежат блестящие работы от

<sup>3)</sup> Напомним, что АВ называют самоподдерживающиеся волны в активных средах, сохраняющие свои характеристики (период, длина волны, амплитуда, форма) постоянными за счет распределенного в среде источника энергии.

физики горения и взрыва до астрофизики и космологии. Это его называл А. Д. Сахаров человеком универсальных интересов, а И. В. Курчатов восклицал: «а все-таки Яшка — гений!» Достаточно полное впечатление о его жизни и творчестве дает книга воспоминаний, из которой взят эпиграф к этой главе. Для нас представляет интерес его отношение к вопросам, кратко изложенным в данной главе.

Обратимся вновь к воспоминаниям Г. И. Баренблатта. Вот, что он пишет:

«Мне довелось участвовать в представлении ЯБ на наиболее престижную международную премию. Сейчас об этом сказать можно, такая премия не присуждается умершим. Там требуется формула представления. После долгого обсуждения она прозвучала так: за определяющий вклад в новую область физики — физику самоорганизующихся систем в активных средах. Дело щепетильное. Как полагается, очень осторожно, обиняком, было выяснено мнение самого ЯБ: «Как Вы считаете, что было самым значительным вашим вкладом в науку? Правильно ли думать так?..» — «Зачем Вам это?» — «Так просто. Для интеркалибрации». ЯБ после некоторого размышления согласился с предложенной формулировкой. Тогда я спросил прямо: «А как же астрофизика, космология, «блины», частицы и т. д.?» Ответ был очень определенным: эти результаты — более переходящие, и в них он разделяет успех с другими».

А далее у Г. И. Баренблатта следует текст, взятый нами эпиграфом к главе.

Работы Д. А. Франк-Каменецкого (3.08.1910–2.06.1970) посвящены физике горения и взрыва, химической кинетике, основам химической технологии, астрофизике, физике плазмы.

Он был талантливым ученым-универсалом и педагогом, человеком светлого мироощущения, любившим природу и искусство. Во вводной статье к замечательной книге Д. А. Франк-Каменецкого «Диффузия и теплопередача в химической кинетике», (М.: Наука, 1987) Я. Б. Зельдович так вспоминает о нем.

«Хочу поделиться одним глубоко личным, дорогим для меня воспоминанием. В марте 1970 года под действием какого-то внутреннего импульса, без конкретного повода и приглашения я с женой приехал в гости к Давиду Альбертовичу. После беседы о науке (главным образом, об астрономии) мы пошли ужинать на кухню. К нам присоединилась жена Давида Альбертовича Елена Ефимовна, его дети и друзья его детей. Зашла речь о поэзии, и Давид Альбертович вдохновенно прочел «Равенну», стихотворение Блока, начинающееся словами: «Все что минутно, все что бrenно, похоронила ты в веках...»

Навсегда запомнилось восхищение молодежи.»

## Глава 6

### О НЕКОТОРЫХ БАЗОВЫХ МОДЕЛЯХ САМООРГАНИЗАЦИИ (СТАТИЧЕСКИЕ, СТАЦИОНАРНЫЕ АУТОПАТТЕРНЫ И АНСАМБЛИ АУТОПАТТЕРНОВ)

«Основное оружие нелинейно мыслящего физика — математические модели..., эти математические модели представительны, или массовы, — они описывают целые классы явлений, объединенных по какому-то признаку... Современные математические модели представляют собой нелинейные уравнения или системы нелинейных уравнений различных типов. Хотя нелинейные уравнения несколько утратили былой ореол неприступности, все же найти аналитически замкнутое решение удается лишь в исключительных случаях. Точные модели обычно не находят, а специально конструируют, чтобы отработать на них стратегию и тактику штурма нерешаемых точно моделей. Обычно успеха удается добиться, комбинируя численные и аналитические методы.»

Данилов Ю. А. Нелинейность (Знание—сила. 1982, ноябрь. С. 35.)

#### 6.1. Структуры Тьюринга. Отчего у леопарда пятна на шкуре?

Многие животные, например кишечнополостные, черви, многоножки и другие, имеют почти периодическое строение. Аллан Тьюринг в одной из наиболее важных в теоретической биологии работ «Химические основы морфогенеза», вышедшей в 1952 году, ввел химический механизм образования такой периодичности<sup>1)</sup>. Он предположил, что периодичность образуется неравномерным распределением (концентрацией) химических веществ, которые он назвал морфогенами. Существование морфогенов до сих пор окончательно не установлено, за исключением некоторых косвенных предположений.

Тем не менее модель Тьюринга до сих пор представляет интерес, поскольку она позволяет объяснить множество экспериментальных результатов с помощью одной или двух простых идей.

Тьюринг начал с предположения о том, что морфогены могут реагировать друг с другом и диффундировать через клетки. Исследование математической модели, основанной на этой идее, показало, что из первоначально однородного распределения в скоплении клеток могут возникнуть пространственные структуры в распределении морфогенов. Модель Тьюринга породила целый ряд моделей, которые теперь относят к реакционно-диффузионным (модель типа реакция с диффузией). Эти модели применимы в тех случаях, когда размер пространственной структуры велик по сравнению с размером отдельных клеток.

В типичной реакционно-диффузионной модели начинают с того, что вводят два морфогена, которые реагируют друг с другом и диффундируют с различными скоростями. В отсутствие диффузии (например, в случае идеального перемешивания) в результате реакции между двумя морфогенами система должна достигнуть однородного стационарного состояния. Если теперь позволить морфогенам диффундировать с одинаковыми скоростями, то любое пространственное отклонение от этого устойчивого состояния будет сглаживаться. Однако если скорости диффузии не равны, диффузия может оказывать дестабилизирующее влияние: скорости реакции в любой заданной точке могут не успеть достаточно быстро «подстроиться», чтобы система достигла равновесия. Если условия выбраны правильно, то малое пространственное возмущение может стать неустойчивым и начинает расти пространственная структура. Говорят, что такая неустойчивость обусловлена диффузией (диффузионная неустойчивость).

Подобная пространственная неоднородность известна в экологии как «пятнистость».

Начнем с рассмотрения скалярного уравнения реакции с диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Линеаризуем его около решения уравнения  $f(u) = 0$ . Если стационарное состояние  $u = u_0$  устойчиво при  $D = 0$ , то, обозначив  $\tilde{u} = u - u_0$  и линеаризуя около  $u_0$ , получим

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial f(u_0)}{\partial u} \tilde{u} + D \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2},$$

где  $\partial f(u_0)/\partial u < 0$ . Поэтому при  $D \neq 0$  решения  $\tilde{u} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, с практической точки зрения, чтобы продемонстрировать диффузионную неустойчивость, нужно иметь, по меньшей мере, двухкомпонентную систему реакций с диффузией.

<sup>1)</sup> Turing A. M. // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1952. V. 237. P. 37–72.

Рассмотрим двухкомпонентную одномерную систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= f_1(u, v) + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= f_2(u, v) + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Нас интересует существование неотрицательных решений  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  в ограниченной области  $0 \leq x \leq L$  с нулевым потоком на границе, т. е.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0 \text{ для всех } x = 0, L. \quad (6.2)$$

Предположим, что существует положительное решение  $\bar{u} > 0$ ,  $\bar{v} > 0$  системы уравнений

$$f_1(\bar{u}, \bar{v}) = f_2(\bar{u}, \bar{v}) = 0. \quad (6.3)$$

В линейном приближении  $\tilde{u} = u - \bar{u}$ ,  $\tilde{v} = v - \bar{v}$ ,

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= f_1(\bar{u}, \bar{v}) + \frac{\partial f_1(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} \tilde{u} + \frac{\partial f_1(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} \tilde{v}, \\ f_2(u, v) &= f_2(\bar{u}, \bar{v}) + \frac{\partial f_2(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} \tilde{u} + \frac{\partial f_2(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} \tilde{v}, \end{aligned}$$

и система уравнений (6.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial u} \tilde{u} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \tilde{v} + D_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} &= \frac{\partial f_2}{\partial u} \tilde{u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \tilde{v} + D_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Пусть

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} e^{-\lambda t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} D_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda U + \frac{\partial f_1}{\partial u} U + \frac{\partial f_1}{\partial v} V &= 0, \\ D_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \lambda V + \frac{\partial f_2}{\partial u} U + \frac{\partial f_2}{\partial v} V &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Если искать решения  $U(x)$  и  $V(x)$  в виде рядов Фурье, то граничные условия (6.2) выполняются автоматически. Действительно, если

$$\begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(U, V)} \cos(\sigma x), \quad \sigma = \frac{n\pi}{L}, \quad (6.6)$$

то  $\partial U(x)/\partial x = \partial V(x)/\partial x = 0$  при  $x = 0$  и  $L$ . Подставляя ряд (6.6) в дифференциальные уравнения (6.5), получаем, что собственные значения  $\lambda$  служат решениями уравнения

$$\begin{vmatrix} D_1 \sigma^2 - \frac{\partial f_1}{\partial u} - \lambda & -\frac{\partial f_1}{\partial v} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial u} & D_2 \sigma^2 - \frac{\partial f_2}{\partial v} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda \left[ \left( D_1 \sigma^2 - \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \left( D_2 \sigma^2 - \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) \right] + \\ + \left( D_1 \sigma^2 - \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) \left( D_2 \sigma^2 - \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) - \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Нас интересует случай, когда  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  — устойчивое решение при  $D_1 = D_2 = 0$ , т. е., когда собственные значения, определенные из уравнения (6.7), имеют при этих  $D$  положительные действительные части, так что в системе уравнений (6.5)  $\begin{Bmatrix} U(x, t) \\ V(x, t) \end{Bmatrix} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Согласно (6.7) это означает, что решения уравнения

$$\lambda^2 + \lambda \left( \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$

при  $u = \bar{u}$ ,  $v = \bar{v}$  должны иметь положительные действительные части и, следовательно, должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \right]_{u=\bar{u}, v=\bar{v}} < 0, \\ \left[ \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial f_2}{\partial u} \right]_{u=\bar{u}, v=\bar{v}} > 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Если  $f_1$  и  $f_2$  удовлетворяют условиям (6.8), но при  $D_1, D_2 \neq 0$  существует, по крайней мере, одно положительное целое число  $N$ , такое, что соответствующее  $\sigma^2 = N^2 \pi^2 / L^2$  в (6.7) приводит к существованию решения  $\lambda$  с отрицательной действительной частью, то из вида решения ( $\sim e^{-\lambda t}$ ) следует, что решение  $\begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{Bmatrix}$  при  $u = \bar{u}$ ,  $v = \bar{v}$  неустойчиво в линейном приближении. Очевидно, что такая неустойчивость связана исключительно с ненулевой диффузией.

Мы уже упоминали о «пятнистости» в экологии. Прежде чем привести количественный пример, остановимся на качественной

картине. Любая популяция характеризуется пространственным ареалом своего распространения, т.е. площадью, занимаемой популяцией. Особи, составляющие популяцию, перемещаются по этой площади; это и перемещения хищника в поисках жертвы, и случайный поиск некоторого ресурса, и стремление занять свою экологическую нишу.

Наиболее распространенный способ перемещения особей — случайное блуждание, который очень похож на диффузию в физических системах. Поэтому при описании пространственно распределенных экосистем обычно пользуются уравнениями, аналогичными диффузионным уравнениям в физике. Однако содержательную роль здесь играют не коэффициенты диффузии, а так называемые радиусы индивидуальной активности. Самое главное достоинство последних — это то, что их можно измерить экспериментально. Радиус индивидуальной активности  $i$ -го вида ( $\rho_i$ ) — это среднеквадратичная оценка расстояния, на которое может переместиться особь данного вида за единицу времени (чаще всего за одно поколение; однако в сообществе, состоящем из разных видов и в котором, естественно, виды имеют различную продолжительность жизни, в качестве временного масштаба выбирается какая-либо одна единица).

Наиболее элементарное и наиболее ожидаемое (с позиций здравого смысла) состояние равновесия на однородном ареале — это равновесие, одинаковое по всему пространству, т.е. равновесные численности входящих в сообщество видов одни и те же во всех

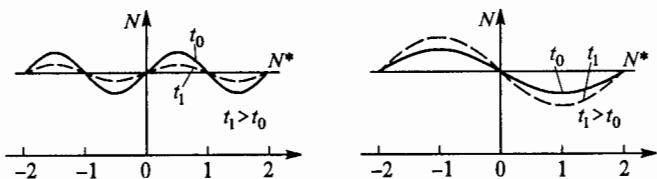


Рис. 6.1. К объяснению возникновения диффузионной неустойчивости; а —  $L = 2$ ,  $L < L_{кр}$ , возмущения гасятся; б —  $L = 4$ ,  $L > L_{кр}$ , амплитуда возмущений растет.  $N^*$  — однородная по пространству равновесная численность,  $L_{кр} = 2\pi/k_{кр} = 3$

точках ареала. Когда это однородное по пространству равновесие будет устойчивым? Рассмотрим лишь один тип возмущений: периодические по пространству возмущения с волновым числом  $k$ , и соответственно, с пространственным периодом  $L = 2\pi/k$ . Оказывается, что при  $k < k_{кр}$  ( $L > L_{кр}$ ) возможна диффузионная неустойчивость, существование которой мы показали выше из уравнений. Рис. 6.1 качественно иллюстрирует возможные ситуации.

Любые случайные возмущения можно представить как суперпозицию большого числа периодических возмущений с широким спектром периодов. Естественно, что в природе чаще всего мы имеем случайные возмущения. Тогда пространственно распределенная экосистема с локально неустойчивыми равновесиями выступает как своеобразный фильтр, отбирающий и усиливающий из широкого спектра случайных пространственных возмущений лишь широкомасштабные пространственные возмущения. Такую селекцию возмущений большого масштаба можно рассматривать в качестве начальной стадии (или своеобразного пускового механизма) формирования пространственно-неоднородных распределений. Приведет ли это к возникновению пространственно-неоднородной устойчивой структуры, сказать заранее нельзя. Но то, что для возникновения диссипативной структуры необходима диффузионная неустойчивость, очевидно.

В живой природе эти экологические диссипативные структуры существуют, и на них давно обратили внимание экологи.

Известен любопытный факт: на, казалось бы, однородном ареале, внутри которого ничего не препятствует перемещению особей и нет никаких «привлекательных» (характерных обилием ресурсов или лучшими условиями среды) точек, особи распределены крайне неравномерно — наряду с тесно заселенными местами буквально рядом расположены места почти пустынные. Налицо своеобразная «пятнистость» ареала, что соответствует диссипативной экологической структуре. Почему возникает такое распределение, за счет каких механизмов? Эти вопросы и составляют так называемую проблему пятнистости. В качестве примера возникновения подобной структуры обычно называют пятна фитопланктона в океане.

Перейдем к построению количественной модели, считая, что она соответствует сообществу из двух взаимодействующих популяций типа «хищник-жертва» или «ресурс-потребитель». Если в качестве точечной модели взять классическую вольтерровскую модель «хищник-жертва», то никакой диссипативной структуры не возникает. Но если считать, что в популяции жертвы закон прироста численности в отсутствие хищника отличен от мальтузианского (экспоненциального), то численность жертвы при малых и умеренных плотностях возрастает быстрее, чем экспонента. Кроме того, пусть хищник гораздо более подвижен, чем жертва. Тогда система локально неустойчива, т.е. в каждой точке пространства состояния равновесия неустойчивы, но пространственные перемещения особей приводят к тому, что из бесконечного числа локально неустойчивых равновесий возникает устойчивая пространственно-неоднородная (на однородном ареале) структура.

Рассмотрим как пример модель хищник-жертва [1], которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= (f(u) - v)u + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= (u - g(v))v + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Сравнивая с системой уравнений (6.1), видим, что здесь  $f_1(u, v) = u(f(u) - v)$ ,  $f_2(u, v) = v(u - g(v))$ . Эта конкретная форма является реалистической моделью хищник-жертва, которая отражает то, что известно в экологии как эффект аллеи, если  $f(u)$  имеет общий вид, показанный на рис. 6.2. Тот факт, что  $f(u)$  имеет определенный максимум при конечном  $u > 0$ , является типичным эффектом перенаселения. Отметим, что точка  $A$  пересечения кривых  $u = g(v)$  и  $v = f(u)$  находится слева от максимума  $f(u)$ . Стационарные решения системы уравнений (6.9) — это решения системы

$$(f(u) - v)u = 0, \quad (u - g(v))v = 0,$$

Рис. 6.2. Качественные особенности функций, входящих в уравнения (6.9)

они обозначены буквами  $A$ ,  $B$  и  $C$  на рис. 6.2. Интересна точка равновесия  $A$ , так как она соответствует решению  $(\bar{u}, \bar{v})$  системы (6.5). Когда  $D_1 = D_2 = 0$ , мы требуем, чтобы состояние  $A$  было устойчивым, а это, согласно условиям (6.8), означает, что  $f(u)$  и  $g(v)$  в (6.9) удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \bar{u} - \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} \bar{v} < 0, \quad 1 - \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} > 0. \quad (6.10)$$

Собственные значения  $\lambda$  для анализа устойчивости в линейном приближении удовлетворяют уравнению (6.7), которое для системы уравнений (6.9) принимает вид:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda \left[ \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \bar{u} - \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} \bar{v} - (D_1 + D_2)\sigma^2 \right] + \\ \left[ D_1 D_2 \sigma^4 - \sigma^2 \left( D_2 \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \bar{u} - D_1 \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} \bar{v} \right) + \right. \\ \left. + \bar{u}\bar{v} \left( 1 - \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Из первого условия (6.10) ясно, что коэффициент при  $\lambda$  всегда отрицателен. Поэтому для того чтобы  $\lambda$  могло иметь отрицательную действительную часть, последняя квадратная скобка в уравнении (6.11) должна быть для некоторого  $\sigma^2 = n^2\pi^2/L^2$  отрицательна. Единственное слагаемое, с помощью которого можно добиться этого, — коэффициент при  $\sigma^2$ , т.е.  $D_1$  и  $D_2$  должны быть такими, чтобы

$$D_1 \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} \bar{v} < D_2 \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \bar{u}.$$

В силу первого условия (6.10) последнее неравенство требует неравных коэффициентов диффузии, точнее  $D_1 < D_2$ . Поскольку  $\partial f(\bar{u})/\partial u > 0$ , очевидно, существуют  $D_1 > 0$ ,  $D_2 > 0$  и наименьшее положительное  $N$ , такие, что слагаемое с  $\sigma^2 = n^2\pi^2/L^2$  делает последнюю квадратную скобку в уравнении (6.11) отрицательной. Отсюда, в свою очередь, следует, что одно из решений  $\lambda$  уравнения (6.11) имеет отрицательную действительную часть и, следовательно, стационарное состояние  $(\bar{u}, \bar{v})$  неустойчиво в линейном приближении; это и есть диффузионная неустойчивость.

Как бы ни был мал коэффициент  $D_1 > 0$ , в спектре Фурье существует только конечный диапазон значений  $n$  (так как член с  $D_1 D_2 \sigma^4$  доминирует), минимальное из которых  $N$ , делающих последнюю квадратную скобку в уравнении (6.11) отрицательной.

Возможность появления в модели, описываемой системой уравнений (6.9), диффузионной неустойчивости существенно зависит от стационарного состояния  $(\bar{u}, \bar{v})$ , а именно, от расположения точки  $A$  на рис. 6.2 слева от максимума  $f(u)$ , так что  $\partial f(\bar{u})/\partial u > 0$ . Если бы точка  $A$  лежала справа от максимума, то  $\partial f(\bar{u})/\partial u$  была бы меньше нуля и последняя квадратная скобка в уравнении (6.11) никогда не могла бы быть отрицательной для любых  $D_1 \geq 0$  и  $D_2 \geq 0$ , а следовательно, состояние  $(\bar{u}, \bar{v})$  было бы устойчиво.

Может ли изученная система порождать устойчивые пространственные структуры?

Приведем пример, принадлежащий Марри [1], где

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{35 + 16u - u^2}{9}, \quad g(v) = 1 + \frac{2v}{5}, \\ L &= 2,5; \quad D_2 = 1; \quad D_1 = 0,0125. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Результаты численного решения системы уравнений (6.9) с учетом функций (6.12) и при граничных условиях (6.2) приведены на рис. 6.3. Показано, что в замкнутой области с нулевым потоком на границах для больших  $t$  имеют место устойчивые пространственные структуры (пятнистость) конечной амплитуды. Такая модель имеет непосредственное отношение к некоторым ситуациям типа хищник-жертва для планктона; при этом жертва ( $u$ ),

т. е. фитопланктон, по существу, статична с малым коэффициентом диффузии, а хищник ( $v$ ), зоопланктон, имеет намного больший эффективный коэффициент диффузии. Число волн связано с наименьшим значением  $n = N$ , придающим собственному значе-

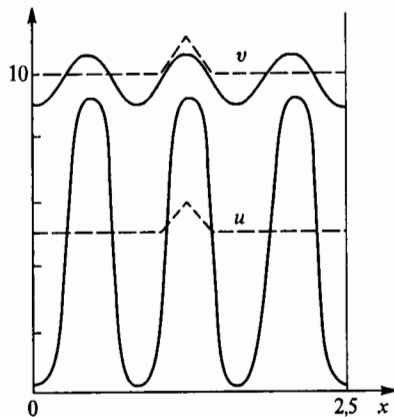


Рис. 6.3. Пространственные структуры в замкнутой области с нулевым потоком на границе для системы «хищник-жертва»

нию  $\lambda$  из уравнения (6.11) отрицательную действительную часть. Характер волн зависит от относительной величины коэффициента диффузии.

Закончим обсуждение приведенной выше элементарной теории словами из книги Дж. Марри [1, с. 261]:

«Пространственные структуры возникают также в случаях большого числа пространственных измерений и многокомпонентных систем; несомненно их важность в биологии развития и экологии — эти системы математически подобны. Математические задачи, связанные с ними, представляют захватывающее поле исследований. ...наиболее волнующим аспектом этих исследований были бы подлинно междисциплинарные попытки, в которых модельные системы основывались бы на экспериментально обоснованной кинетике реакций и предсказанных или наблюдаемых пространственных структурах.»

Рассмотрим, следуя [1, 2], некоторые результаты приложения реакционно-диффузионных моделей.

Млекопитающие демонстрируют исключительное разнообразие структур раскраски шкуры. Было предложено много объяснений, но большинство из них столь же убедительны, как и чудесная сказка Редьярда Киплинга «Отчего у леопарда пятна на шкуре».

В реакционно-диффузионных моделях для ответа на этот вопрос предполагается, что один из морфогенов является активатором, который заставляет меланоциты (специализированные пиг-

ментные клетки) производить меланин (пигмент, который затем переходит в волосы) какого-либо вида, например черного, а другой — ингибитором, дающим команду пигментным клеткам не вырабатывать меланин. У млекопитающих есть в основном только два меланина: эумеланин (от греческих слов «эу» — хороший и «мелас» — черный), окрашивающий волосы в черный или коричневый цвет, и феомеланин (от «феос» — пыльный), который делает волосы желтыми или рыжими. Предположим, что в этих реакциях активатор локально увеличивает свою концентрацию и одновременно производит ингибитор. Если ингибитор диффундирует быстрее активатора, то образуется «остров» высокой концентрации активатора в области высокой концентрации ингибитора.

Для того чтобы представить, как такой активаторно-ингибиторный механизм может создать пространственные структуры, Марри приводит следующую красивую аналогию [2].

Пусть существует очень сухой лес, иными словами, есть все условия для лесного пожара. Чтобы свести к минимуму возможный урон, по всему лесу рассредоточены пожарные с противопожарным снаряжением и вертолеты. Теперь представим, что вспыхивает пожар (активатор). От места воспламенения начинает двигаться фронт огня. Первоначально у места пожара недостаточно пожарных (ингибитора), чтобы погасить огонь. Однако с помощью вертолетов пожарные могут обогнать фронт огня и обработать деревья реактивами, которые не позволяют им загореться. Когда огонь достигнет обработанных деревьев, он погаснет; фронт пламени остановится.

Если пожары спонтанно возникают в разных местах леса, то через какое-то время формируются несколько распространяющихся фронтов огня (волн активации). В свою очередь, это заставит пожарных на вертолетах (волны ингибирования) обогнать каждый фронт и остановить его на некотором расстоянии от места воспламенения. Конечным результатом такого сценария будет лес с черными пятнами сгоревших деревьев, перемежающимися с пятнами зеленых нетронутых деревьев. В принципе полученная картина имитирует результат, даваемый реакционно-диффузионными механизмами, обусловленными диффузией. Тип образующейся структуры зависит от различных параметров модели и может быть получен из математического анализа.

Как подчеркивает Марри [2], предложено много конкретных реакционно-диффузионных моделей, основанных на гипотетических или реальных биохимических реакциях, и исследованы их возможности давать пространственные структуры. Эти механизмы включают несколько параметров: скорости реакций, скорости диффузии реагентов и (что особенно важно) геометрию и размеры живой ткани. Поразительное свойство реакционно-диффузионных моделей заключается в тех конечных результатах, которые получа-



ются из первоначально однородного состояния при условиях, когда меняется только один параметр, а остальные фиксированы. Например, предположим, что меняется размер живой ткани. Тогда в какой-то момент времени будет достигнута критическая величина, (ее можно назвать бифуркационной), при которой однородное стационарное состояние морфогенов становится неустойчивым, и начинает формироваться пространственная структура.

Реакционно-диффузионная модель, в которой могут развиваться пространственные структуры, обусловленные диффузией является также достойным кандидатом для универсального механизма, генерирующего предструктуру раскраски шкуры у млекопитающих. Такие структуры существенно зависят от геометрии и размеров области, в которой протекает соответствующая химическая реакция. Последующий рост млекопитающего может исказить первоначальную структуру раскраски.

Интересно, что математическая задача описания начальных стадий формирования пространственной структуры с помощью реакционно-диффузионных механизмов (когда отклонение от однородного состояния невелико) аналогична математической задаче описания колебаний тонких пластинок или поверхности барабана. Таким образом, характер зависимости роста структуры от ее геометрии и размеров можно понять, рассматривая аналогичные вибрирующие поверхности. Если поверхность очень мала, она не сможет поддерживать колебания и возмущения быстро затухнут. Следовательно, чтобы возбудить незатухающее колебание, необходима поверхность определенного размера.

Для того чтобы получить количественные результаты, иллюстрирующие формирование предструктур различных окрасок, Марри [1, 2] рассмотрел следующий механизм реакции с диффузией с ингибированием субстратом, предложенный Томасом [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= g(u, v) + \nabla^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= f(u, v) + \beta \nabla^2 v, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где  $u$  и  $v$  — безразмерные концентрации реагентов,  $\beta$  — отношение коэффициентов диффузии на поверхности, где протекает реакция,  $g$  и  $f$  — безразмерные суммарные скорости реакции:

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \gamma(u_0 - u - \rho F(u, v)), \\ f(u, v) &= \gamma(\alpha(v_0 - v) - \rho F(u, v)), \\ F(u, v) &= \frac{uv}{1 + u + Ku^2}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $K$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  — положительные постоянные. Отметим, что уравнения (6.13) получены из (6.1) при  $f_1(u, v) = g(u, v)$ ,

$f_2(u, v) = f(u, v)$  и при замене производной по координате  $\partial^2/\partial x^2$  на  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ . Решение проводилось численно с помощью метода конечных элементов, примененного к системам (6.13), (6.14) с нулевым потоком концентраций  $u$  и  $v$  через границу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} = 0; & x = 0, x = a, y \in [0, b], \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0; & y = 0, y = b, x \in [0, a]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

В качестве начальных условий использовались случайные возмущения относительно однородного стационарного состояния  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ . Вычисления прекращались, когда неоднородная пространственная структура на последовательных шагах по времени удовлетворяла предписанному условию сходимости:  $10^{-3}$  или меньше. На рисунках при получении численных результатов черным цветом отмечены области, где  $u > \tilde{u}$ . Для иллюстрации решений системы (6.13)–(6.15) выберем параметры  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $K$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  постоянными и будем менять только масштабный коэффициент  $\gamma$ .

Важным примером того, как геометрия ограничивает эти колебательные моды, является ситуация, когда область настолько узка, что могут существовать только простые — по существу одномер-



Рис. 6.4. Узоры на хвосте у леопарда (слева), ягуара (в середине) и генетты (справа), а также структуры, полученные с помощью реакционно-диффузионной модели для сужающихся цилиндров разного диаметра (показаны справа на каждом рисунке)

ные — моды. Для истинно двумерных структур нужна область, имеющая достаточно большие как длину, так и ширину. Аналогичное требование для колебаний на поверхности цилиндра за-

ключается в том, что его радиус не может быть слишком мал, в противном случае могут существовать только квазиодномерные моды; другими словами, могут образовываться только кольцеобразные структуры. Однако если радиус достаточно велик, на поверхности могут существовать двумерные структуры. Следовательно, сужающийся цилиндр может демонстрировать переход от двумерной структуры к простым полосам (рис. 6.4).

Для реакционно-диффузионного механизма с двумя морфогенами Марри выбрал такой набор параметров реакции и диффузии, который соответствует диффузионной неустойчивости, и сохранил их неизменными при всех вычислениях. Изменялись только размеры и геометрия рассматриваемой области. При моделировании на компьютере в качестве начальных условий он выбирал случайные возмущения однородного стационарного состояния. Темные и светлые области получившейся структуры — это те, в которых концентрация одного из морфогенов соответственно больше или меньше его концентрации в однородном стационарном состоянии. Даже при таких ограничениях на параметры и начальные условия богатство возможных структур поразительно.

Как результаты модели соотносятся с типичными узорами на шкуре и общими признаками, обнаруженными у животных? Марри начал с рассмотрения сужающихся цилиндров, чтобы смоделировать узоры на хвостах и лапах животных. Результаты аналогичны тем, что были получены для вибрирующей поверхности: если двумерная область, покрытая пятнами, становится достаточно узкой, то пятна переходят в полосы.

Леопард (*Panthera pardus*), гепард (*Acinonyx jubatus*), ягуар (*Panthera onca*), генетта (*Genetta*) дают хорошие примеры таких структур. Пятна на шкуре у леопарда доходят почти до кончика хвоста. Хвосты у гепарда и ягуара имеют отчетливо выраженные полосатые участки, а у генетты хвост полностью полосатый. Эти наблюдения согласуются с тем, что известно о зародышах этих четырех животных. Хвост у зародыша леопарда резко сужается и сравнительно короткий, поэтому можно ожидать, что на нем могут сохраняться пятна до самого его кончика. (У взрослого леопарда хвост длинный, но в нем столько же позвонков.) Хвост у зародыша генетты соответствует другому крайнему случаю: он имеет почти постоянный, причем довольно малый, диаметр, поэтому на хвосте генетты должны возникать поперечные полосы.

Модель дает также пример запрета на структуры определенного типа, которые действительно наблюдаются у животных исключительно редко. Если в основе механизма формирования предструктуры раскраски шкуры у животных лежит реакционно-диффузионный процесс (или любой другой процесс, который аналогичным образом зависит от размеров и геометрии), запрет обусловлен размерами и геометрией зародыша. В частности, модель

допускает, что пятнистое животное может иметь полосатый хвост, но у полосатого животного не может быть пятнистого хвоста.

Марри добился успеха также в попытках понять, как возникает узор на шкуре у зебры. С помощью использованного им механизма нетрудно получить набор полос. Более сложной является область соединения передней ноги и туловища, однако математическая модель верно предсказывает типичную картину полос в области лопаток (рис. 6.5).

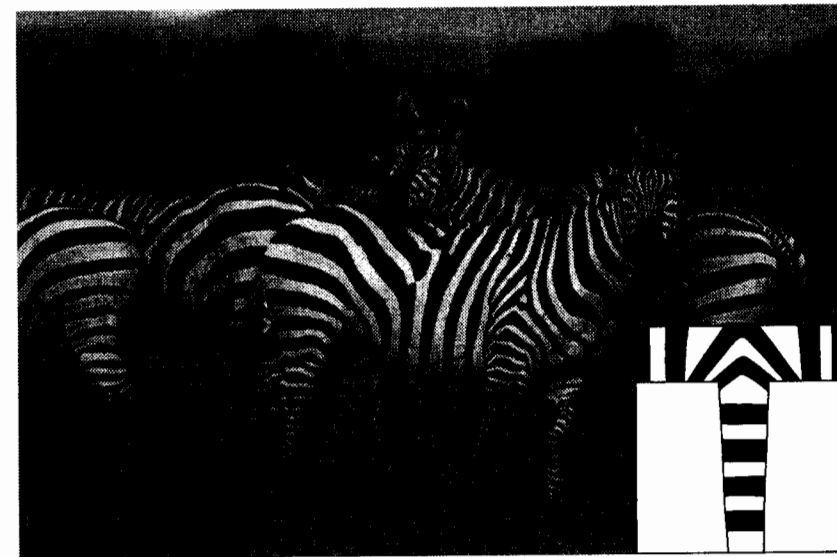


Рис. 6.5. Полосатую окраску зебры в области соединения передней ноги и туловища можно смоделировать с помощью реакционно-диффузионной модели (см. вставку внизу справа)

Чтобы изучить влияние размеров в случае более сложной геометрии, были рассчитаны структуры для обобщенной формы животного, состоящей из тела, головы, четырех конечностей и хвоста (рис. 6.6). Марри начал с маленькой фигуры и постепенно увеличивал ее размер, сохраняя все пропорции. Получено несколько интересных результатов. Если рассматриваемая область очень мала, не возникает никаких структур. По мере увеличения ее размеров происходят последовательные бифуркации: различные узоры внезапно возникают и пропадают. При дальнейшем увеличении размеров структуры получаются более сложными и с большим числом пятен. Однако в случае удлиненной узкой формы полосатый узор сохраняется даже тогда, когда область становится довольно

большой. При очень больших размерах области структура узора делается столь мелкой, что окраска становится почти однородной по цвету.

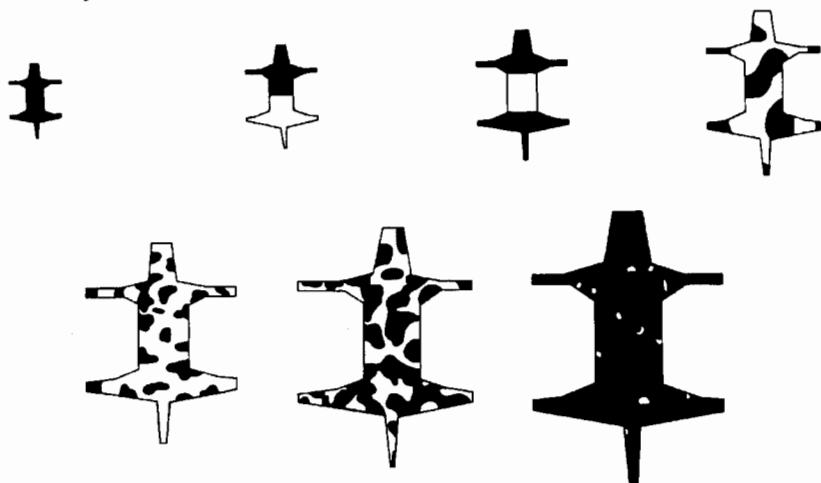


Рис. 6.6. Изменение структуры раскраски при изменении размеров животного. Структуры раскраски получены для обобщенной формы животного. Увеличение размеров при фиксированных остальных параметрах дает поразительное разнообразие структур. Реакционно-диффузионная модель, предложенная Марри, согласуется с теми наблюдениями, что маленькие животные, такие, как мыши, имеют равномерно окрашенные шкуры, животные промежуточных размеров — узорчатые шкуры, а окраска крупных животных, таких, как слоны, снова однородна

Если реакционно-диффузионная модель справедлива, то для объяснения влияния размеров зародыша на структуру раскраски его шкуры первостепенное значение имеет момент времени, в который активируется механизм формирования этой структуры в процессе эмбриогенеза. Марри ввел неявное предположение, что соответствующие константы скоростей реакции и диффузионные коэффициенты примерно одинаковы для разных животных. Если механизм активируется генетически на ранней стадии развития, тогда, например, окраска многих небольших животных, имеющих короткие сроки беременности, должна быть однородной по цвету. В общем случае это действительно так. Для поверхности большей площади в момент активации существует возможность того, что животное наполовину будет черным и наполовину белым. Примером служит муравьед и поразительно окрашенный безоаровый козел (*Capra aegagrus hircus*) (рис. 6.7). По мере увеличения размеров одновременно должна возрастать сложность возникающей структуры. Фактически наблюдается нарастание сложности окраски от безоарового козла к зебре, а затем к леопарду и гепарду.

Наконец, шкуры у очень больших животных снова должны быть однородными по цвету, что на самом деле имеет место у слонов, носорогов и бегемотов.



а

б

Рис. 6.7. Примеры структур раскраски, существующих в природе, дают муравьед (а) и безоаровый козел (б). Формирование таких структур можно объяснить с помощью реакционно-диффузионного механизма

Марри считает, что момент времени, в который активируется механизм формирования структуры, — наследуемое свойство, поэтому, по крайней мере для животных, выживание которых в значительной степени зависит от раскраски, механизм активируется тогда, когда зародыш достигает определенного размера. Конечно, условия на поверхности зародыша в момент активации носят в некоторой степени случайный характер. Реакционно-диффузионная модель дает структуры, которые однозначно зависят от начальных условий, геометрии и размеров. Важная особенность этого механизма заключается в том, что при заданных геометрии и размерах получающиеся структуры для разных случайных начальных условий качественно одинаковы. Например, если структура пятнистая, то меняется только распределение пятен. Этот результат согласуется с тем, что внутри одного вида узор на шкуре животного индивидуален. Такая индивидуальность учитывает отличительные особенности семейства, а также общие групповые особенности.

Предполагая, что моделируемые структуры соответствуют пространственным структурам в распределении морфогенов. Если их концентрация достаточно высока, меланоциты будут вырабатывать пигмент меланин. Для упрощения Марри считал, что однородное стационарное состояние соответствует пороговой концентрации и что меланин будет вырабатываться, если концентрация морфогенов равна или больше этой величины. Однако это предположение несколько произвольно. По-видимому, пороговая концентрация может меняться даже внутри одного вида. Чтобы исследовать такие эффекты, были рассмотрены разновидности жирафа. Для заданного характера структуры изменялся параметр, соответствующий пороговой концентрации морфогена для производства

меланина. Меняя этот параметр, обнаружили, что можно получать структуры, явно напоминающие узоры на шкурах жирафов двух разновидностей (рис. 6.8).

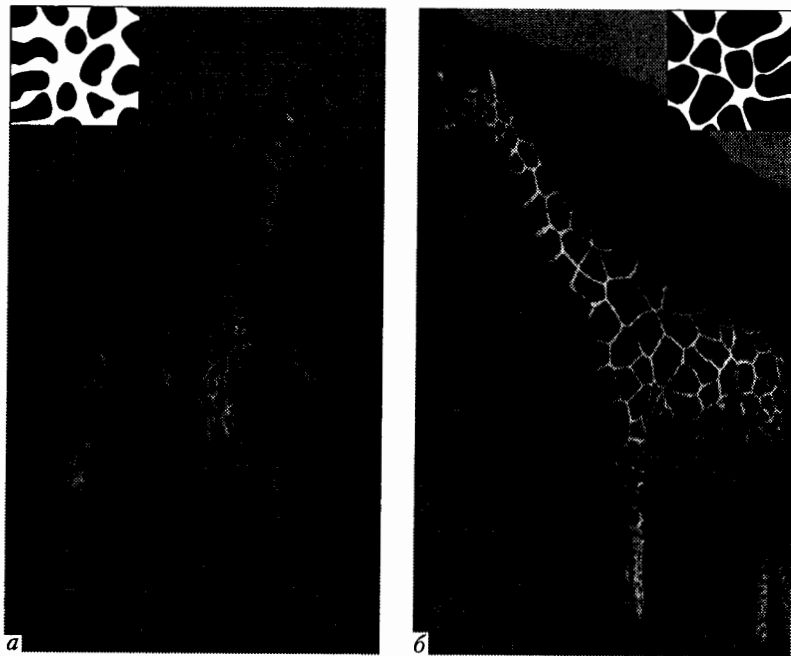


Рис. 6.8. Различные разновидности жирафа имеют различную окраску. Подвид *Giraffa camelopardalis tippelskirchi* характеризуется довольно мелкими пятнами, разделенными широкими промежутками (а); *Giraffa melopardalis reticulata* покрыты обширными близко расположенными пятнами (б). Оба типа структур можно описать с помощью реакционно-диффузионной модели (см. вставки вверху рисунков). Предполагается, что во время «закладки» структуры возраст зародыша 35–45 суток, а длина — примерно 8–10 см

Как уже упоминалось, результаты Марри нашли неожиданное подтверждение в работах Ч. Веста и Сюй Южэня из Мичиганского университета [4]. Они создавали стоячие волны на вибрирующей пластинке и изменяли вид возникающих структур, меняя частоту колебаний. Структуры становились видимыми с помощью голографии, когда пластинка освещалась лучом лазера. Отраженный от нее свет интерферировал с опорным лучом, так что гребни волн складывались с гребнями, впадины с впадинами, а впадины и гребни взаимно уничтожались. Возникающая картина фиксировалась на фотопластинке (рис. 6.9). Вест и Сюй Южэнь обнаружили, что низкие частоты колебаний создают простые структуры, а высокие — сложные структуры. Это наблюдение представляет интерес,

поскольку было показано, что если структура образуется на пластинке, колеблющейся с заданной частотой, то структура, образующаяся на той же пластинке, колеблющейся с большей частотой, идентична структуре, образующейся на пропорционально увеличенной пластинке, колеблющейся с первоначальной частотой. Та-

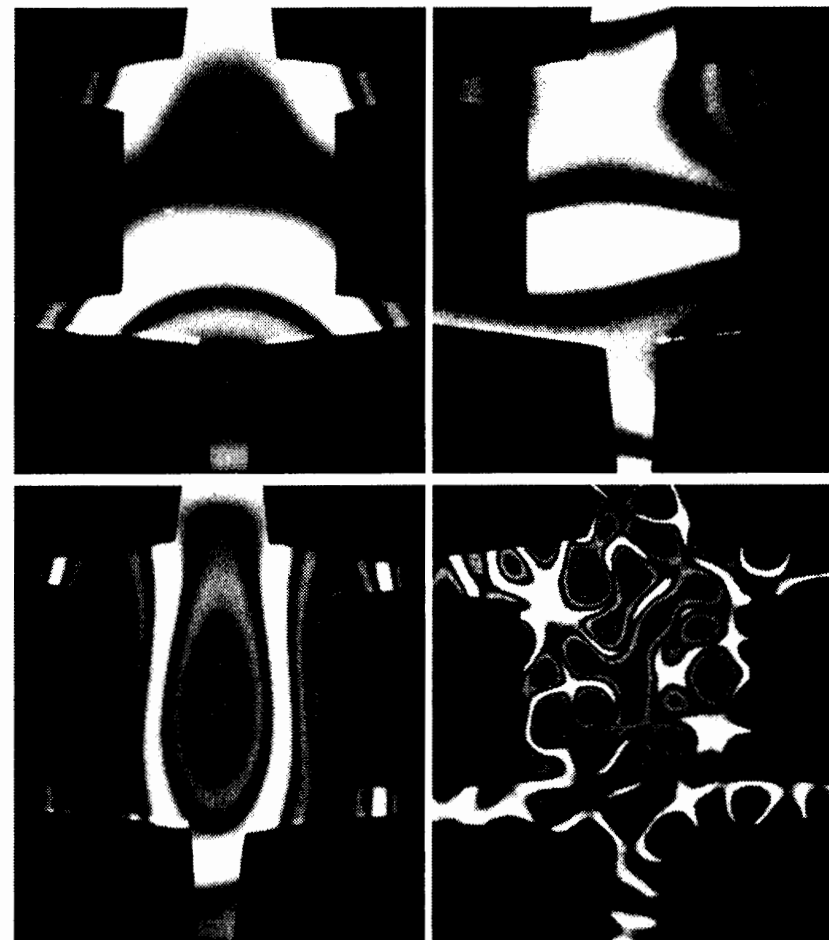


Рис. 6.9. Структуры стоячих волн, реализующихся на тонкой вибрирующей пластинке, напоминают узоры на шкуре животных. Более сложные структуры возникают на более высоких частотах колебаний пластинки

ким образом, данные Веста и Сюй Южэня подтверждают вывод о том, что по мере увеличения размеров реакционно-диффузионной области должны возникать все более сложные структуры. Сходство

между структурами Марри и структурами, полученными исследователями из Мичиганского университета, поразительно.

Следует еще раз подчеркнуть, что все структуры были получены только за счет изменения размеров и геометрии реакционной области; все другие параметры были фиксированы (за исключением различных пороговых концентраций в случае жирафа). Даже в этих условиях разнообразие структур замечательно. Модель предлагает также возможное объяснение различных аномалий в раскраске, наблюдаемых у ряда животных. При некоторых условиях изменение величины одного из параметров может вызвать заметное изменение получаемой структуры. Величина этого эффекта зависит от того, насколько близко значение параметра к бифуркационной точке — значению, при котором возникает качественное изменение генерируемой структуры.

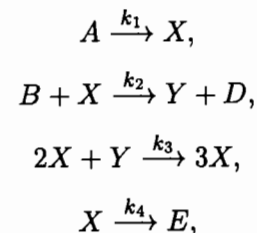
Если один из параметров, например константа скорости в реакционной кинетике, непрерывно меняется, то реакционно-диффузионный механизм переходит от состояния, в котором не могут возникнуть никакие структуры, к состоянию, в котором структуры генерируются, и, наконец, обратно к состоянию без структур. Тот факт, что такие малые изменения параметра около бифуркационной точки могут вызвать столь значительные изменения в структуре, согласуется с теорией эволюции, известной под названием «прерывистое равновесие». Согласно этой теории, длительные периоды малых эволюционных изменений прерываются короткими всплесками внезапных и быстрых изменений.

На раскраску шкуры животных, безусловно, влияют многие факторы. Некоторые из них — это температура, влажность, питание, гормоны и интенсивность метаболизма. Хотя влияние таких факторов, вероятно, можно имитировать, используя различные параметры, в этом нет особого смысла, пока не станет больше известно о том, как действительно образуются структуры, отображаемые меланиновыми пигментами. В то же время нельзя не отметить широкого разнообразия образования структур, которые могут быть получены из реакционно-диффузионной модели при изменении только размеров и геометрии. Вселяет энтузиазм множество косвенных подтверждений, полученных из сопоставления модели с конкретными особенностями раскраски шкуры у животных. Марри убежден, что большинство существующих узоров раскраски может быть получено с помощью реакционно-диффузионной модели. Тем не менее тот факт, что многие общие и специфические черты раскраски шкуры у млекопитающих могут быть объяснены с помощью этой простой теории, еще не значит, что она правильна. Теорию могут подтвердить только экспериментальные наблюдения.

## 6.2. Брюсселятор — важнейшая методическая модель в теории самоорганизации

Работа Тьюринга сильно опередила свое время и не привлекла внимание широкого круга исследователей. О ней вспомнили лишь в 1967 году, когда И. Р. Пригожин с сотрудниками предложил так называемую тримолекулярную модель (ее называют еще моделью Тьюринга-Пригожина или моделью Николиса-Пригожина-Лефевра) [5].

Наиболее употребительным является название, предложенное в 1973 году Тайсоном, — брюсселятор, под которым понимают следующую гипотетическую систему реакций:



где  $k_i$  — абсолютные скорости реакций.

Все реакции необратимы, что автоматически поддерживает систему в неравновесном режиме. Третья стадия носит автокаталитический характер и, являясь тримолекулярным этапом, обеспечивает необходимую для колебательного режима кубическую нелинейность. Считая концентрации исходных реагентов  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  постоянными, для концентраций промежуточных продуктов  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  можно написать уравнения <sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} &= k_1 \tilde{A} - (k_2 \tilde{B} + k_4) \tilde{X} + k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y} + \tilde{D}_1 \nabla^2 \tilde{X}, \\ \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial t} &= k_2 \tilde{B} \tilde{X} - k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y} + \tilde{D}_2 \nabla^2 \tilde{Y}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ .

Прокомментируем смысл кубической нелинейности в данной модели, следуя И. Пригожину и Г. Николису [5].

«Во-первых важно понимать, что основной целью при изучении модели является установление качественных типов поведения, совместимых с некоторыми фундаментальными законами, такими, как законы термодинамики или химической кинетики. В этом отношении, независимо от того, разумна тримолекулярная стадия

<sup>2)</sup> Способ написания уравнений дает химическая кинетика. Элементарное изложение этого способа можно найти, например, в [6, гл. 2].

или нет, брюсселятор является идеальной системой для изучения кооперативных процессов в химической кинетике. До некоторой степени он играет такую же роль, как модели типа гармонического осциллятора или принадлежащая Гейзенбергу модель ферромагнетизма, которые широко использовались для иллюстрации основных свойств систем, описываемых законами классической и квантовой механики. Во-вторых, в большинстве областей физики кооперативных явлений, таких как физика плазмы или лазерная физика, кубические нелинейности, осуществляющие различного рода связи между соответствующим образом определенными «модами», в действительности реализуют первую нетривиальную нелинейность, приводящую к согласованному поведению...»

Фигура Ильи Романовича Пригожина несомненно заслуживает внимания. Он родился 25 января 1917 года в Москве, но вскоре его семья эмигрировала в Бельгию. В 1942 году он окончил Брюссельский университет, где и работает по сей день. Он директор Международного института физики и химии в Сольве (Бельгия), а также Центра статистической механики и термодинамики Техасского университета (США). И. Р. Пригожин — один из создателей того научного направления, которое сейчас называется синергетикой или теорией самоорганизации, термодинамикой необратимых процессов или физической диссипативных структур (мы уже писали об этом). В 1977 году И. Р. Пригожин удостоен Нобелевской премии за работы по термодинамике необратимых процессов и их использование в химии и биологии. Он иностранный член Российской Академии Наук. С 1984 года И. Р. Пригожин регулярно приезжает в Россию, где издано много его книг, в которых обсуждаются вопросы самоорганизации [7–10].

Вернемся к модели брюсселятора и перейдем в уравнении (6.16) к безразмерным переменным:

$$t = k_4 \tilde{t}, \quad X = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \tilde{X}, \quad Y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \tilde{Y},$$

$$A = \sqrt{\frac{k_1 k_3}{k_4^3}} \tilde{A}, \quad B = \frac{k_2}{k_4} \tilde{B}, \quad D_i = \frac{\tilde{D}_i}{k_4} \quad (i = 1, 2).$$

Тогда получим в новых переменных следующие уравнения:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B + 1)X + X^2 Y + D_1 \nabla^2 X,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y + D_2 \nabla^2 Y, \quad (6.17)$$

где оператор Лапласа определен в том же пространстве координат  $\mathbf{r}$ , что и ранее.

Начнем с обсуждения сосредоточенной модели брюсселятора

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B + 1)X + X^2 Y,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y. \quad (6.18)$$

Уравнения (6.18) имеют единственную особую точку  $X = A$  и  $Y = B/A$ . Исследуем уравнения (6.18) на устойчивость, полагая  $X = A + \tilde{x}$ ,  $Y = B/A + \tilde{y}$ , где  $\tilde{x} \ll A$ ,  $\tilde{y} \ll B/A$ . Тогда для возмущений  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$  имеем:

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = (B - 1)\tilde{x} + A^2 \tilde{y}$$

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = -B\tilde{x} - A^2 \tilde{y}.$$

Если  $\tilde{x}, \tilde{y} \sim e^{\omega t}$ , то

$$\begin{vmatrix} \omega - B + 1 & -A^2 \\ B & \omega + A^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получим

$$\omega^2 - (B - 1 - A^2)\omega + A^2 = 0. \quad (6.19)$$

Решая уравнения (6.19) относительно  $\omega$ , получим

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}(B - 1 - A^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(B - 1 - A^2)^2 - 4A^2}.$$

Поскольку свободный член в характеристическом уравнении положителен, седловая точка в системе невозможна. При  $(B - 1 - A^2) > 0$  значения  $\omega$  либо положительны, либо имеют положительные действительные части, т. е. стационарные решения становятся неустойчивыми. Поскольку особая точка единственна, то решение, становящееся устойчивым будет предельным циклом и в системе возникнут автоколебания. Они возникают либо из неустойчивого фокуса ( $0 < (B - 1 - A^2) < 2A$ ), либо из неустойчивого узла ( $(B - 1 - A^2) > 2A$ ). Особая точка является устойчивым узлом при  $(B - 1 - A^2) < -2A$  и устойчивым фокусом при  $-2A < (B - 1 - A^2) < 0$ . Дискриминант характеристического уравнения —  $\{(B - 1 - A^2)^2 - 4A^2\}$  обращается в нуль при  $B = (1 + A)^2$ . Эта кривая на плоскости  $(B, A)$  разделяет режимы автоколебаний, возникающих из неустойчивого фокуса и неустойчивого узла (см. рис. 6.10). На рис. 6.10 заштрихована область, в которой термодинамическая ветвь является неустойчивой. Римскими цифрами обозначены области, в которых особая точка системы (6.18) является

- I — устойчивым узлом;  
 II — устойчивым фокусом;  
 III — неустойчивым фокусом;  
 IV — неустойчивым узлом.

Если  $\eta = B - 1 - A^2 \ll A$ , то предельный цикл близок по форме к эллипсу, тогда как при  $\eta \gg A$  он близок к прямоугольному тре-

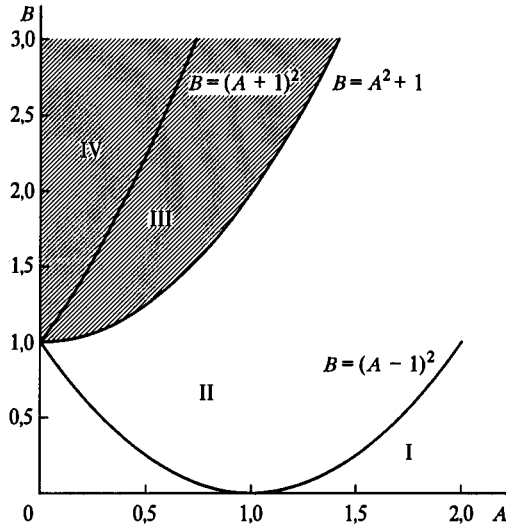


Рис. 6.10. Плоскость параметров для сосредоточенной модели брюсселятора (6.18)

угольнику. В последнем случае колебания имеют релаксационный характер. Форма предельного цикла и решение уравнений (6.18) при  $A = 1$ ,  $B = 3$ ,  $\eta = 1$  показаны на рис. 6.11.

Обратимся теперь к распределенному брюсселятору, описываемому уравнениями (6.17), рассматривая для простоты одномерную модель, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= A - (B + 1)X + X^2Y + D_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= BX - X^2Y + D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Граничные условия для системы (6.20) зададим двух типов:

$$\begin{aligned} X(0, t) &= X(L, t); \quad Y(0, t) = Y(L, t); \\ \frac{\partial X(0, t)}{\partial x} &= \frac{\partial X(L, t)}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial Y(L, t)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\text{и} \quad \frac{\partial X(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial X(L, t)}{\partial x} = \frac{\partial Y(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial Y(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (6.22)$$

Система уравнений (6.20) с граничными условиями (6.21) и (6.22) имеет, в частности, пространственно однородное стационарное решение  $X = A$ ,  $Y = B/A$ . Тогда для малых отклонений от этого

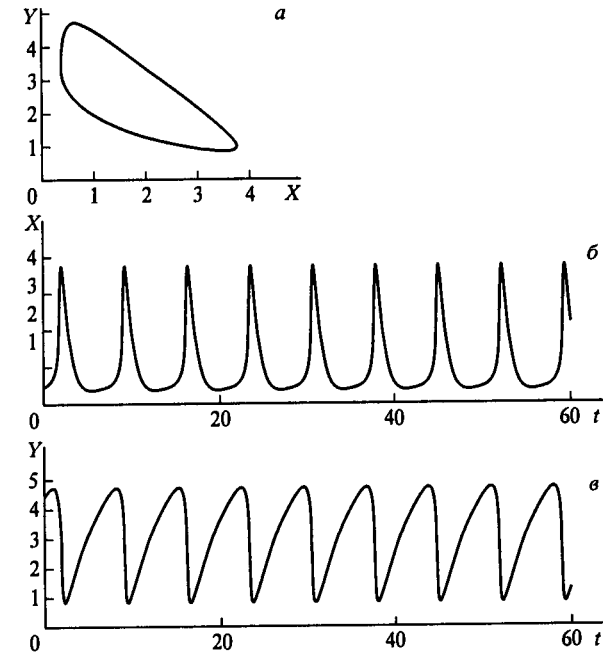


Рис. 6.11. Фазовый портрет (а) и реализации (б, в) для сосредоточенной модели брюсселятора (6.18). Решения уравнений (6.18) получены методом Рунге-Кутты 4-го порядка (шаг интегрирования  $dt = 0,01$ ; начальные условия  $X_0 = 0,1$ ,  $Y_0 = 0,1$ ; длительность переходного процесса  $N_t = 2 \cdot 10^4$ )

решения  $\xi = A - X$  и  $\eta = Y - B/A$ , когда  $\xi = Me^{pt-jkx}$ ,  $\eta = Ne^{pt-jkx}$ , находим дисперсионное уравнение

$$(p + 1 - B + D_1 k^2)(p + A^2 + D_2 k^2) + A^2 B = 0 \quad (6.23)$$

и выражение для отношения амплитуд  $N/M = (1/A^2)(p + 1 + D_1 k^2)$ . Анализируя дисперсионное уравнение (6.23), можно показать, что при  $B > 1 + A^2$  рассматриваемая система обладает абсолютной неустойчивостью. Действительно, при  $k = 0$  мы приходим к уравнению

$$(p + 1 - B)(p + A^2) + A^2 B = 0, \quad p^2 + p(A^2 + 1 - B) + A^2 = 0,$$

т. е. к уравнению (6.19), являющемуся характеристическим уравнением для сосредоточенной версии брюсселятора. Решение  $k = 0$  является кратным корнем уравнения (6.23) для значений  $p$ , удовлетворяющих уравнению (6.19). При  $B > 1 + A^2$ , как мы только что показали, уравнение (6.19) имеет либо два действительных корня, либо два комплексно-сопряженных корня с положительной действительной частью. Уравнение (6.23), решаемое относительно  $k$ , имеет четыре корня. Поэтому общее решение линеаризованной системы уравнений для  $\xi$  и  $\eta$  имеет вид

$$\xi(x, t) = \sum_{i=1}^4 M_i e^{pt - jk_i x}, \quad \eta(x, t) = \sum_{i=1}^4 N_i e^{pt - jk_i x}, \quad (6.24)$$

где  $k_2 = -k_1$ ,  $k_4 = -k_3$ . Подставляя выражение (6.24) в граничные условия (6.21) и (6.22), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} X(0, t) = X(L, t) &\rightarrow \sum_{i=1}^4 M_i e^{pt} = \\ &= \sum_{i=1}^4 M_i e^{-jk_i L} e^{pt} \rightarrow \sum_{i=1}^4 M_i (1 - e^{-jk_i L}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(0, t) = Y(L, t) &\rightarrow \sum_{i=1}^4 \frac{M_i (p + 1 + D_1 k_i^2)}{A^2} (1 - e^{-jk_i L}) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{i=1}^4 M_i k_i^2 (1 - e^{-jk_i L}) = 0, \\ &\sum_{i=1}^4 M_i k_i (1 - e^{-jk_i L}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \frac{M_i k_i (p + 1 + D_1 k_i^2)}{A^2} (1 - e^{-jk_i L}) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \sum_{i=1}^4 M_i k_i^3 (1 - e^{-jk_i L}) = 0, \end{aligned}$$

условием совместности которых является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} (1 - e^{-jk_1 L}) & (1 - e^{-jk_2 L}) & (1 - e^{-jk_3 L}) & (1 - e^{-jk_4 L}) \\ k_1(1 - e^{-jk_1 L}) & k_2(1 - e^{-jk_2 L}) & k_3(1 - e^{-jk_3 L}) & k_4(1 - e^{-jk_4 L}) \\ k_1^2(1 - e^{-jk_1 L}) & k_2^2(1 - e^{-jk_2 L}) & k_3^2(1 - e^{-jk_3 L}) & k_4^2(1 - e^{-jk_4 L}) \\ k_1^3(1 - e^{-jk_1 L}) & k_2^3(1 - e^{-jk_2 L}) & k_3^3(1 - e^{-jk_3 L}) & k_4^3(1 - e^{-jk_4 L}) \end{vmatrix} = 0,$$

откуда для первого и второго типа граничных условий

$$\begin{aligned} k_1 = \frac{2\pi n}{L} \quad \text{или} \quad k_3 = \frac{2\pi n}{L}; \\ k_1 = \frac{\pi n}{L} \quad \text{или} \quad k_3 = \frac{\pi n}{L}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Подставляя (6.25) в (6.23), находим характеристическое уравнение для первого и второго типа граничных условий:

$$p^2 + (1 - B + A^2 + (D_1 + D_2)k_n^2)p + A^2(1 + D_1 k_n^2) + D_2 k_n^2(1 - B + D_1 k_n^2) = 0, \quad (6.26)$$

где  $k_n = 2\pi n/L$  для первого типа граничных условий и  $k_n = \pi n/L$  для второго типа.

Из характеристического уравнения следует, что исследуемое стационарное решение теряет устойчивость аperiodически для значений  $B$  и  $k_n$ , удовлетворяющих условию

$$B > B_{k_n},$$

где  $B_{k_n} = 1 + D_1 k_n^2 + A^2(1 + D_1 k_n^2)/D_2 k_n^2$ , и колебательно для

$$B_{k_n}^* < B < B_{k_n},$$

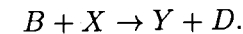
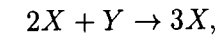
где  $B_{k_n}^* = 1 + A^2 + (D_1 + D_2)k_n^2$ . Последнее неравенство может быть выполнено лишь при условии, что

$$(D_2 k_n^2)^2 < A^2(1 + (D_1 - D_2)k_n^2),$$

т. е. при достаточно больших значениях  $D_1$ . Если  $D_1 < D_2$ , то неустойчивость может быть только аperiodической. При выполнении условия (6.26) в системе возбуждаются диссипативные структуры.

### 6.3. Редуцированный брюсселятор — точно решаемая модель

Рассмотрим модель [11], соответствующую следующим реакциям:



Пусть концентрации реагентов  $X$  и  $Y$  изменяются вдоль оси  $x$ , причем на конечном интервале  $0 \leq x \leq L$ . Тогда

$$\frac{\partial X}{\partial t} = X^2 Y - BX + D_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = -X^2 Y + BX + D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}. \quad (6.27)$$



Стационарные состояния получаются из уравнения

$$\bar{X}^2\bar{Y} - B\bar{X} = 0.$$

Таких состояний будет два ( $\bar{X}(\bar{X}\bar{Y} - B) = 0$ ):

- 1)  $\bar{X} = 0$ ,  $\bar{Y} = \delta$ , где  $\delta$  — произвольное положительное число;
- 2)  $\bar{X} = \xi$ ,  $\bar{Y} = B/\xi$ , где  $\xi$  — произвольное положительное число.

Проанализируем эти решения на устойчивость, полагая, что имеют место малые возмущения  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y} \sim e^{\omega t}$ . Тогда при  $D_1 = D_2 = 0$ :

$$1) \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = -B\tilde{x}, \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = -B\tilde{x}, \quad \begin{vmatrix} \omega + B & 0 \\ -B & \omega \end{vmatrix} = 0,$$

$$\omega^2 + \omega B = 0, \quad \omega(\omega + B) = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -B;$$

$$2) \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = B\tilde{x} + \xi^2\tilde{y}, \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = -B\tilde{x} - \xi^2\tilde{y}, \quad \begin{vmatrix} \omega - B & -\xi^2 \\ B & \omega + \xi^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\omega(\omega - B + \xi^2) = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = B - \xi^2.$$

При  $B > \xi^2$  система уравнений (6.27) имеет неустойчивые решения.

Предположим, что выполняются граничные условия, соответствующие второму однородному решению:

$$X(0) = X(L) = \xi, \quad Y(0) = Y(L) = \frac{B}{\xi}. \quad (6.28)$$

Будем искать неоднородные стационарные решения системы (6.27) с граничными условиями (6.28), т. е. решения системы уравнений

$$\begin{aligned} X^2Y - BX + D_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= 0, \\ -X^2Y + BX + D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Сложим оба уравнения, а затем с учетом граничных условий проинтегрируем получившееся равенство. Тогда получим

$$D_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0.$$

Интегрируя, находим:

$$D_1 \frac{\partial X}{\partial x} = -D_2 \frac{\partial Y}{\partial x} + M,$$

$$D_1 X(x) = -D_2 Y(x) + Mx + N,$$

$$X(0) = \xi, \quad Y(0) = \frac{B}{\xi},$$

$$D_1 \xi = -D_2 \frac{B}{\xi} + N, \quad N = D_1 \xi + D_2 \frac{B}{\xi},$$

$$X(L) = \xi, \quad Y(L) = \frac{B}{\xi},$$

$$D_1 \xi = -D_2 \frac{B}{\xi} + ML + D_1 \xi + D_2 \frac{B}{\xi}, \quad M = 0.$$

В результате имеем следующее равенство:

$$D_1 X(x) + D_2 Y(x) = D_1 \xi + D_2 \frac{B}{\xi}. \quad (6.30)$$

Введем переменную

$$w = X - \xi,$$

которая соответствует отклонению концентрации  $X$  от однородного значения, и новую пространственную переменную

$$r = \frac{x}{\sqrt{D_2}}.$$

Преобразуем теперь первое из уравнений (6.29) с учетом равенства (6.30) и этой замены переменных. После простых преобразований находим:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = w^3 + w^2 \left( 2\xi - \frac{D_2 B}{D_1 \xi} \right) + w \left( \xi^2 - \frac{D_2 B}{D_1} \right).$$

Вводя обозначение  $(D_2/D_1)B = \rho$ , перепишем последнее уравнение в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = \left[ w^3 + w^2 \left( 2\xi - \frac{\rho}{\xi} \right) + w (\xi^2 - \rho) \right] \frac{\partial w}{\partial r}.$$

После интегрирования получим

$$\left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = K - F(w),$$

где

$$F(w) = -\frac{w^4}{2} - \frac{2}{3} \left( 2\xi - \frac{\rho}{\xi} \right) w^3 + (\rho - \xi^2) w^2, \quad (6.31)$$

$K$  — константа интегрирования, равная значению  $(\partial w / \partial \tau)^2$  при  $F(w) = 0$ . Уравнение (6.31) совпадает по форме с уравнением, выражающим закон сохранения полной энергии  $H$  частицы с координатой  $x$ , движущейся в потенциальном поле  $V(x)$ :

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) = H - V(x).$$

Тогда  $K$  играет роль полной энергии частицы,  $F(w)$  является аналогом потенциальной энергии,  $(\partial w / \partial \tau)^2$  аналогична кинетической энергии с  $w$  в качестве пространственной координаты и  $\tau$  — в качестве времени. В зависимости от параметра  $\rho$  при фиксированном  $\xi$  реализуются три ситуации.

1.  $\rho < \xi^2$ . Качественный вид графика  $F(w)$  представлен на рис. 6.12а. Заметим, что  $w = 0$  соответствует  $X = \xi$ , т. е. можно считать (учитывая граничные условия  $X(0) = X(L) = \xi$ ,  $Y(0) = Y(L) = B/\xi$ ), что «частица» начинает свое движение из точки  $w = 0$ . Но при движении и «вправо», и «влево» от  $w = 0$  скорость

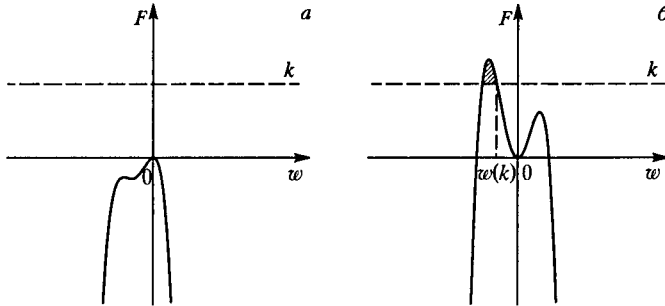


Рис. 6.12. Качественный вид зависимости «потенциальной» энергии  $F(w)$  (6.31) для  $\rho < \xi^2$  (а) и  $\xi^2 < 2\xi^2$  (б)

«частицы» меняется монотонно и, следовательно, координата «частицы» уже не сможет при  $x = L$  принять значение  $X = \xi$ , что несовместимо с граничными условиями. Следовательно, для этих значений параметров в системе могут существовать только однородные решения.

2.  $\xi^2 < \rho < 2\xi^2$ ;  $0 \leq K \leq F(-\xi)$ . Качественный вид графика зависимости «потенциальной» энергии  $F(w)$  представлен на рис. 6.12б, где заштрихована «нефизическая» область, в которой движение невозможно, поскольку  $(\partial w / \partial \tau)^2$  в ней меньше нуля.

При движении «вправо» от  $w = 0$ , т. е. для  $X > \xi$ , опять имеем неоднородное решение, несовместимое с граничными условиями. Зато при движении «влево» потенциал  $F(w)$  имеет минимум, возле которого в принципе могут возникнуть колебания. Но для возникновения колебательных движений необходимо, чтобы минимум потенциальной энергии был ограничен «справа» и «слева» «нефизическими» областями. У нас такая ограниченность есть только «слева», «вправо» же частица может уходить в бесконечность. Таким образом, для совместимости с граничными условиями нужно, чтобы «частица», выйдя из точки  $w = 0$ , прошла через положение равновесия (соответствующее минимуму потенциальной энергии), отклонилась от положения равновесия на максимальное расстояние  $w(K)$  и через «время»  $\tau = L$  снова вернулась в точку  $w = 0$ . Ясно, что далее она пойдет «вправо», поскольку при  $w = 0$  «скорость»  $\partial w / \partial \tau \neq 0$ . Тогда

$$L = \int_0^{w(K)} \frac{dw'}{\sqrt{K - F(w')}}.$$

Можно показать, что при определенных  $L$  и  $K$  это уравнение имеет решение. Таким образом, в системе может существовать неоднородное состояние, совместимое с граничными условиями. Это состояние имеет вид полуволн со значениями  $X$  всюду, кроме граничных точек  $x = 0$  и  $x = L$ , меньшими  $\xi$  ( $w \leq 0$ ), и с максимальным отклонением  $|w(K)|$  от  $\xi$  при  $x = L/2$  (рис. 6.13а).

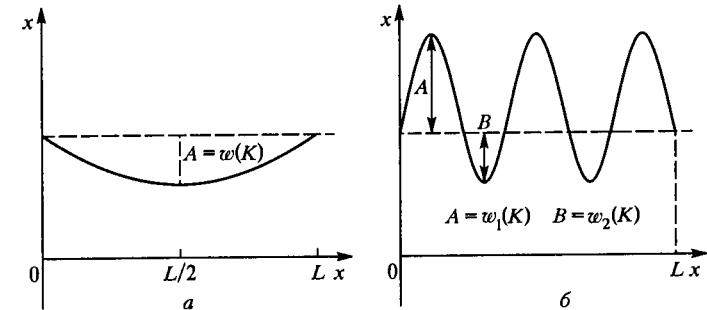


Рис. 6.13. Качественный вид пространственного состояния для редуцированной модели брусслетатора при  $\xi^2 < \rho < 2\xi^2$  (а) и  $\rho > 2\xi^2$

3.  $\rho > 2\xi^2$ . В механической системе с такой потенциальной энергией при определенных начальных условиях (общая энергия меньше, чем оба максимума «потенциальной» энергии) могут воз-

никнуть колебания. В нашем случае это соответствует возникновению в системе периодической пространственной структуры (максимальное отклонение «влево» будет  $X - \xi = w_1(K)$ , «вправо» —  $X - \xi = w_2(K)$ ). Точное решение получается в эллиптических функциях. Можно определить периоды этих структур, а также минимальную длину, при которой они могут возникать. Возможный вариант представлен на рис. 6.13б.

#### 6.4. Реакция Белоусова–Жаботинского и орегонатор

В 1950 году Б. П. Белоусов открыл колебательную химическую реакцию в гомогенном растворе — окисление лимонной кислоты броматом калия, катализируемое ионной парой  $\text{Ce}^{4+}$ – $\text{Ce}^{3+}$ . Позднее А. М. Жаботинский показал, что в качестве катализатора вместо церия можно использовать марганец или железо, а в качестве восстановителя вместо лимонной кислоты можно использовать малоновую и броммалоновую кислоты. Обычно реакцию проводят при 25 °С в сернокислом растворе смеси бромата калия, малоновой или броммалоновой кислот и сернокислого церия (или родственного соединения).

Б. П. Белоусов обнаружил, что раствор регулярно меняет свою окраску от бесцветной к желтой, затем снова к бесцветной и т. д. Он провел достаточно подробное феноменологическое исследование этой реакции и, в частности, показал, что период колебаний сильно уменьшается с повышением кислотности среды или температуры. Реакция Белоусова была исключительно удобна для лабораторных исследований. Колебания можно было наблюдать визуально, а их период находился в пределах 10–100 с, совпадая с естественным масштабом времени человека-наблюдателя.

Тем не менее статью Белоусова дважды отклоняли редакции химических журналов, и лишь ее сокращенный вариант был опубликован в 1959 году в малоизвестном «Сборнике рефератов по радиационной медицине» [12], выпускавшемся институтом, в котором он работал<sup>3)</sup>.

Химики и биохимики довольно дружно отвергали химические колебания, которые привлекали внимание математиков и физиков, интересовавшихся биологией, начиная с работ А. Лотки [13].

<sup>3)</sup> Борис Павлович Белоусов (1893–1970) получил химическое образование в Высшей технической школе (Цюрих, Швейцария). В первые годы Советской власти работал на химических курсах РККА (впоследствии — химической Академии РККА). В 1939 году вышел в отставку в звании комбрига (генерал-майор), а затем заведовал лабораторией биофизики Минздрава СССР. Его необычной жизни посвящена повесть В. Полищука «На общих основаниях», опубликованная в четвертой книжке журнала «Новый мир» за 1984 год. Заметим, что И. Р. Пригожин, считает эксперимент Б. П. Белоусова одним из важнейших экспериментов нашего века.

Почему? Большинство химиков считало, что колебания концентраций в закрытых гомогенных системах невозможны, иначе говоря, чисто химических колебаний не бывает. Если же колебания начинаются, то они обусловлены процессами переноса или фазообразования, связанными с наличием гетерогенных стадий, или же вызваны методическими ошибками.

Опять же, почему возникла эта уверенность? А. М. Жаботинский [14] рассуждает на эту тему так. Во-первых, в закрытой макроскопической системе существует единственное состояние равновесия и, во-вторых, при приближении к термодинамическому равновесию концентрации изменяются монотонно вблизи него, а энтропия — везде. Но эти утверждения равно справедливы и для гомогенных, и для гетерогенных систем; кроме того, из них не следует, что вдали от равновесия концентрации некоторых соединений не могут колебаться. Почему же логически несостоятельные аргументы против возможности появления колебательных химических реакций так охотно воспринимались незаинтересованным большинством?

По-видимому, это было следствием совпадения приведенных аргументов с интуитивными представлениями, возникающими из повседневного опыта. И здесь история вопроса о химических колебаниях частично повторяет историю ниспровержения великих предрассудков о том, что Солнце и звезды вращаются вокруг Земли, что тяжелые предметы падают быстрее легких.

Действительно, интуитивное представление о колебаниях связано с перемещением в пространстве: маятник качается; в водяных часах вода заполняет резервуар, а затем вытекает из него; в электрическом контуре заряды накапливаются на обкладках конденсатора и перетекают через катушку, меняясь местами.

В гетерогенной реакции исходные реагенты поступают из объема к поверхности раздела, где идет реакция, а продукты удаляются в объем, т. е. имеются макроскопические перемещения вещества. И легко дать интуитивное привычное объяснение: реакция идет, затем тормозится своими продуктами, последние удаляются в другую фазу и реакция снова может идти и т. д. В ходе же гомогенной реакции никаких макроскопических перемещений не наблюдается, что непривычно, поэтому интуиция не помогает. Приходится рассуждать и учитывать много факторов, и если рассуждение, содержащее не слишком явную ошибку, совпадает с интуицией, то его охотно принимают.

Таким образом, если причиной эволюции многие считали «жизненную силу», а позже особые биологические законы, то в силу тех же обстоятельств причиной химических колебаний считали гетерогенность или, по крайней мере, стационарную, поддерживаемую извне пространственную неоднородность системы.

Реакция Белоусова не вписывалась в эти представления. Когда реакция протекает в хорошо перемешиваемой среде, в некоторой области начальных концентраций наблюдаются незатухающие колебания концентраций: имеет место изменение во времени концентрации ионов  $\text{Br}^-$  и отношения  $\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}$ . Колебания имеют период порядка минуты и продолжаются около часа. Постепенно колебания затухают, поскольку система замкнута и в нее не поступают исходные вещества, необходимые для протекания реакции. В этом случае следует говорить о временных диссипативных структурах.

Если проводить реакцию в тонкой, длинной вертикально расположенной трубке, то можно наблюдать возникновение горизонтальных зон, соответствующих чередующимся областям высоких концентраций. Невольно возникает аналогия с пространственными диссипативными структурами, но эксперименты показали, что такие распределения скорее всего обусловлены внешними градиентами температуры и плотности, а не потерей симметрии вследствие диффузии.

Когда реакция протекает в тонком не перемешиваемом слое, например в чашке Петри, можно наблюдать различные типы волновой активности. При наличии тонкого слоя обычно возникают концентрические волны с цилиндрической симметрией, а также вращающиеся спиральные волны [14]; в этом случае можно говорить о пространственно-временной диссипативной структуре.

Рассмотрим далее модель орегонатора, предложенную Филдом, Кересом и Нойесом [15]. Введем для концентраций следующие обозначения:

$$X = [\text{HBrO}_2]; Y = [\text{Br}^-]; Z = [\text{Ce}^{4+}]; A = [\text{BrO}_3^-]; P = [\text{HOBr}].$$

Тогда реакции, соответствующие модели орегонатора, можно записать так:

1)  $A + Y \xrightarrow{k_1} X + P$  — бромат с бромидом дают бромистую кислоту;

2)  $X + Y \xrightarrow{k_2} 2P$  — бромит потребляет бромистую кислоту;

3)  $A + X \xrightarrow{k_3} 2X + 2Z$  — бромистая кислота реагирует с броматом, причем происходит ее автокаталитическое производство, происходит окисление  $\text{Ce}^{3+}$  и образование  $\text{Ce}^{4+}$ ;

4)  $2X \xrightarrow{k_4} P + A$  — регенерация бромата;

5)  $Z \xrightarrow{k_5} fY$  —  $\text{Ce}^{4+}$  восстанавливается, регенерируется бромид.

Стехиометрический коэффициент  $f$  подлежит определению. Все реакции предполагаются изотермическими и необратимыми. Концентрация  $A$  предполагается постоянной.

В пренебрежении диффузией получаем следующую систему кинетических уравнений:

$$\frac{dX}{dt} = k_1AY - k_2XY + k_3AX - 2k_4X^2,$$

$$\frac{dY}{dt} = -k_1AY - k_2XY + fk_5Z,$$

$$\frac{dZ}{dt} = 2k_3AX - k_5Z.$$

Переход к безразмерным переменным

$$\tilde{X}(\tilde{t}) = \frac{k_2}{k_1A}X; \quad \tilde{Y}(\tilde{t}) = \frac{k_2}{k_3A}Y; \quad \tilde{Z}(\tilde{t}) = \frac{k_2k_5}{2k_1k_3A^2}Z;$$

$$\tilde{t} = k_1At; \quad \varepsilon = \frac{k_1}{k_3}; \quad p = \frac{k_1A}{k_5}; \quad q = \frac{2k_1k_4}{k_2k_3}$$

дает:

$$\varepsilon \frac{d\tilde{X}}{d\tilde{t}} = \tilde{X} + \tilde{Y} - \tilde{X}\tilde{Y} - q\tilde{X}^2,$$

$$\frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{t}} = 2f\tilde{Z} - \tilde{Y} - \tilde{X}\tilde{Y},$$

$$p \frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{t}} = \tilde{X} - \tilde{Z}.$$

Численный анализ полученной системы уравнений показывает, что в точечной модели орегонатора могут существовать автоколебания (см., например, [1, 5]), т.е. можно говорить о временных структурах (рис. 6.14). Поскольку у системы 1,5 степени свободы, в принципе возможно и хаотическое поведение.

Предположим теперь, что компоненты  $X$  и  $Y$  диффундируют с постоянными одинаковыми коэффициентами диффузии  $D_x = D_y = D$ . Будем считать также, что доминирует первая стадия реакции (ион церия находится в состоянии  $\text{Ce}^{3+}$  и, значит,  $Z = 0$ ).

Введем безразмерные переменные:

$$u = 2k_4X/(k_3A), \quad v = k_2Y/(k_3Ar),$$

$$x' = \sqrt{k_3A/D}x, \quad t' = k_3At,$$

$$L = 2k_4k_1/(k_2k_3), \quad M = k_1/k_3, \quad b = k_2/(2k_4),$$

где  $r$  — параметр, который можно изменять.

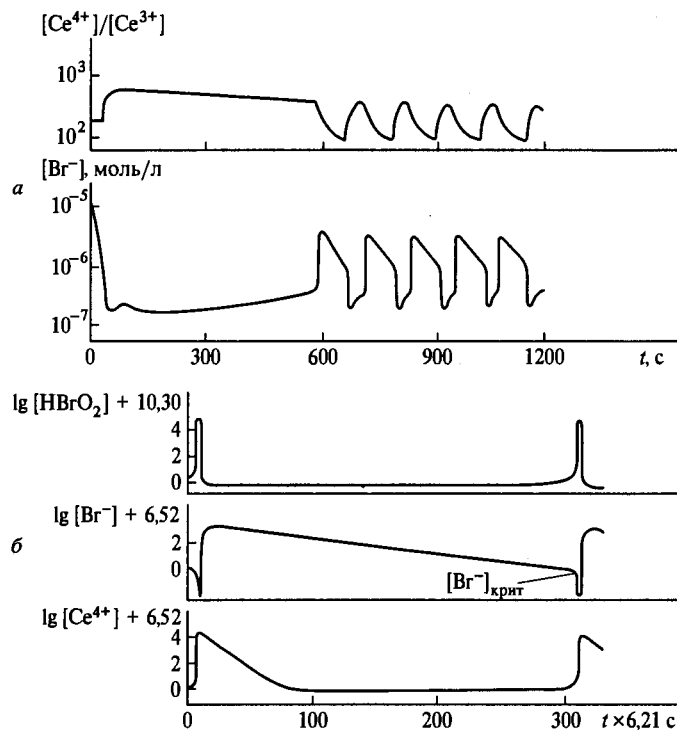


Рис. 6.14. Потенциметрические экспериментальные кривые  $\lg([Ce^{4+}]/[Ce^{3+}])$  и  $\lg[Br^-]$  из работы Филда, Кереса и Нойеса (1972) для типичных временных осцилляций в реакции Белоусова–Жаботинского. Концентрации  $P_i$  измерялись в моль  $\cdot 10^{-7}$  (а). Расчетные кривые для концентраций  $HBrO_2$ ,  $Br^-$ ,  $Ce^{4+}$  в реакции Белоусова–Жаботинского.  $[Br^-]$  соответствует переходу от одной стадии реакции к другой (б)

В безразмерной форме (с учетом  $Z = 0$ ) система кинетических уравнений с учетом диффузии примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t'} &= Lrv + u - u^2 - ruv + \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t'} &= -Mv - buv + \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

К этой системе уравнений вернемся позднее при анализе возможности существования бегущих волновых фронтов в реакции Белоусова–Жаботинского.

## 6.5. Проблема морфогенеза и модели Гирера–Мейнхарта

Проблема морфогенеза одна из центральных в исследовании самоорганизации. Главное в проблеме ответить на вопрос: откуда первоначально недифференцированные клетки знают, где и каким образом дифференцироваться? В отдельных клетках, как следует из экспериментов, такой информации нет. Находясь в ткани, клетка получает информацию о своем положении от других клеток, после чего идет дифференциация. Известно, что в экспериментах, произведенных на эмбрионах, клетка из центральной части тела после пересадки в головной отдел развивалась в глаз [16]. В этих экспериментах доказано, что клетки не располагают информацией о своем последующем развитии, например, через ДНК, а извлекают ее из своего положения в клеточной ткани. Уже отмечалось, что носителем такой «позиционной информации» служит химическая структура — «морфоген», возникающая благодаря совместному действию химических реакций и диффузии. Сейчас предполагается, что при достаточно высокой концентрации морфогенов в работу включаются гены. Последнее и приводит к дифференциации клеток. Подчеркнем, что существование морфогенов до настоящего времени окончательно не установлено, за исключением некоторых косвенных подтверждений. У гидры найден ряд веществ, которые можно рассматривать как подходящие кандидаты в активаторы и ингибиторы образования головы и щупалиц. В рамках этих представлений, как уже говорилось, можно объяснить образование полос и пятен на шкурах животных, узоры на крыльях бабочек [1, 2].

После модели Тьюринга появился целый ряд моделей, которые относятся к моделям реакционно-диффузионного типа. Все они применимы, когда размер пространственной структуры много больше размера отдельных клеток.

Одна из наиболее известных реакционно-диффузионных моделей морфогенеза принадлежит А. Гиреру и Х. Мейнхарту (модель ГМ) (см., например, [17]). Модель Гирера–Мейнхарта основана на том, что все клетки развивающегося организма могут продуцировать два морфогена: активатор и ингибитор, которые могут диффундировать в другие клетки.

Обозначим продукцию активатора через  $a$ , продукцию ингибитора через  $h$  и примем, что коэффициент диффузии ингибитора  $D_h$  больше коэффициента диффузии активатора  $D_a$ . Процесс продуцирования активатора — автокаталитическая реакция второго порядка. В то же время продуцирование активатора подавляется ингибитором. Тогда оба эти процесса выражаются слагаемым  $Ca^2/h$ . Считается, что продукция самого ингибитора тоже является функцией квадрата концентрации активатора (слагаемое  $C' \rho' a^2$ ). Предполагается, что имеет место фоновая, постоянная (не

автокаталитическая) продукция активатора  $\rho_0\rho$ . Наконец, есть ток (распад) активатора (слагаемое  $-\mu a$ ) и ингибитора (слагаемое  $-\beta h$ ). В результате модель Гирера–Мейнхарта описывается системой уравнений

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \rho_0\rho + C\rho\frac{a^2}{h} - \mu a + D_a\frac{\partial^2 a}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = C'\rho'a^2 - \beta h + D_h\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}, \quad (6.33)$$

где  $r$  — координата. Систему уравнений (6.33) можно решить только численно. Попробуем, однако, предугадать характер решений. Предположим, что на край одномерной системы подано малое начальное возмущение, которое привело к локальному подъему концентрации активатора. Процесс автокаталитический, поэтому

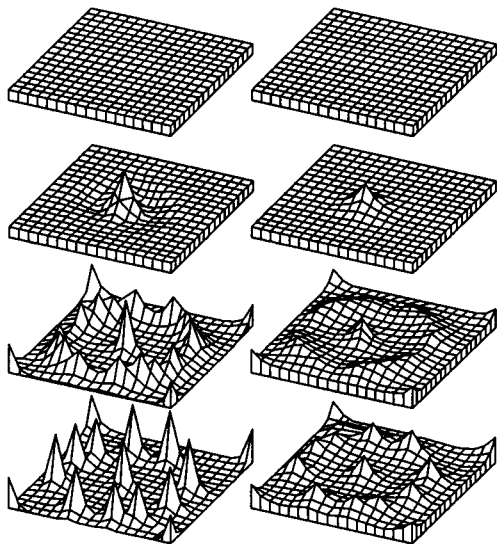


Рис. 6.15. Результаты компьютерного моделирования динамики изменения концентраций активатора (левая колонка) и ингибитора (правая колонка). Заметно образование узких пиков концентрации активатора и более широких вершин и фронтов ингибитора

концентрация активатора будет нарастать, и он начнет диффундировать по системе. Но при этом начнет нарастать и концентрация ингибитора — нарастать пропорционально концентрации активатора. Ингибитор станет замедлять дальнейший рост концентрации активатора (знаменатель  $h$  во втором члене первого уравнения) и диффундировать вдоль системы. Исходно предполагается, что  $D_h > D_a$ , поэтому ингибитор диффундирует быстрее и «растекается» по системе дальше, чем активатор. Тогда отношение  $h/a$  в точке возмущения уменьшается, а вдали от нее — увеличивается.

В итоге в начальной точке возмущения возникнет устойчивый узкий пик концентрации активатора, а от этой точки на некоторое расстояние будет распространяться пологий горб концентрации ингибитора. Когда он снизится до некоторого порогового значения, начнется новый подъем концентрации активатора. Так будет в одномерной системе небольшой длины. С увеличением длины системы будут возникать семейства пиков концентрации активатора, окруженные более пологими горбами концентрации ингибитора. На рис. 6.15 [17] приведены результаты компьютерного моделирования динамики двумерной модели Гирера–Мейнхарта. Если теперь считать, что активатор стимулирует образование каких-либо морфологических структур (например, головной области гидры, щетинок на покровах тела насекомого, листовой почки), а ингибитор их подавляет, то результаты моделирования динамики модели Гирера–Мейнхарта можно интерпретировать как возникновение периодичности в образовании упомянутых структур и наличие «зон запрета». Считая далее, что согласно концепции позиционной информации [17] клетки тонко различают концентрацию морфогена, реагируя образованием определенной структуры, можно полагать, что модель Гирера–Мейнхарта описывает сколь угодно подробный морфогенез и дифференциацию. Однако сама концепция позиционной информации обладает рядом противоречий, которые передаются и реакционно-диффузионным моделям.

## 6.6. Ячейки Бенара

Традиционный пример стационарной автоструктуры — возникновение в подогреваемом снизу слое жидкости шестигранных призматических ячеек — ячеек Бенара. Если слой жидкости (например, минерального масла) сильно нагреть снизу, то возникает разность температур  $\Delta T$  между верхней и нижней поверхностью. Для малых (докритических) разностей температур жидкость остается в покое, и тепло передается только путем теплопроводности. При разности температур выше критической начинается конвекция. Режим неподвижной теплопроводящей жидкости становится неустойчивым и на смену ему приходит устойчивый режим, характеризующийся наличием конвективных ячеек. Если нет никаких посторонних возмущений, то ячейки принимают форму правильных шестиугольников. В центре каждой ячейки жидкость движется вверх, а вблизи ее краев — вниз. Параметры ячеек не зависят от формы и размеров сосуда, если он достаточно большой.

Остановимся подробнее на качественном описании ячеек Бенара, следуя работе В. Шефера с несколько необычным названием — «Наблюдения над утренней чашкой кофе» [18]. Правда, Шефер предупреждает: «Начинать опыты, по-видимому, лучше

всего с глицерином или подкрашенной чернилами водой, не расходуя кофе».

Что мы увидим, если наполнили до краев чашку черным кофе, близким к закипанию, и посмотрим на поверхность, осветив ее ярким горизонтальным пучком света? Первое, что бросается в глаза, — структура ячеек на поверхности кофе под поднимающимся паром, которые имеют форму неправильных многоугольников поперечным размером от 1 до 3 см и выглядят как пыльные белые пятна, ограниченные темными линиями. Пятнам соответствуют места выхода на поверхность восходящих потоков жидкости, которые затем растекаются по поверхности, немного охлаждаются и вновь погружаются в кофе там, где видны темные линии. Так образуются структуры, названные в честь их первооткрывателя — французского врача Бенара (*Benard E. // Ann. de Chimie et Phys.* 1901. V. 23. P. 62). Для образования такой структуры необходимы неравновесность нелинейной среды и ее диссипативность. В результате развития конвективной неустойчивости (она связана с тем, что нижние слои имеют более высокую температуру, чем верхние) возмущения поля скорости и температуры нарастают в некотором интервале пространственных масштабов. При наличии диссипации возникает конкуренция пространственных масштабов, в результате которой выживает решетка лишь вполне определенного масштаба. Масштаб самого явления бывает разным: его можно наблюдать и на поверхности воды в морях, и в облаках над Землей, и даже в гранулярной структуре фотосферы Солнца (*Унзольд А. Физика звездных атмосфер.*—М: ИЛ, 1949). Если нет никаких посторонних возмущений, то на поверхности жидкости решетка принимает форму почти правильных шестиугольников — завихрений. По оси каждой ячейки жидкость поднимается, а вдоль ее внешних границ стекает вниз. Глубина слоя жидкости в каждой ячейке приблизительно в 3,3 раза меньше, чем расстояние между осями соседних ячеек. Параметры ячеек не зависят от формы и размеров сосуда, если он достаточно большой.

Ячейки Бенара хорошо видны на поверхности горячего кофе благодаря так называемым потокам Стефана. Можно даже считать, что наблюдение ячеек — один из наиболее изящных способов заметить это трудно фиксируемое явление, названное в честь открывшего его австрийского физика Йозефа Стефана (1835–1893). Стефан наиболее известен в физике своим экспериментально установленным в 1879 году законом интегрального излучения черного тела (закон Стефана–Больцмана), согласно которому энергия, излучаемая нагретым телом, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры. В 1884 году Л. Больцман сформулировал его теоретически. Стефан — основатель австрийской физической школы, его учениками были Л. Больцман и физик-теоретик Ф. Газенорль (в 1904–1905 годах вывел формулу электромагнитной

массы и формулу взаимосвязи массы и энергии, которая отличалась от эйнштейновской коэффициентом  $4/3$ ; первым попытался на квантовой основе интерпретировать формулу Бальмера).

Молекулы водяного пара интенсивно поднимаются от поверхности горячего кофе, действуют на слои более холодной атмосферы, непосредственно прилегающие к жидкости, с силой, направленной вверх. Большая часть водяных капель, которые конденсируются в насыщенном влагой воздухе, либо поднимаются в атмосферу, испаряясь в ней, либо опускаются назад, в жидкость. Есть, правда, и такие капельки, которые слишком велики, чтобы подняться в верхние слои воздуха, но и в то же время слишком малы по весу, чтобы преодолеть давление восходящего потока молекул воды, поднимающихся с поверхности горячего кофе. В результате капельки оказываются взвешенными в воздухе над поверхностью горячего кофе, поскольку вес сконденсированных капелек уравновешивается силой давления молекул, вылетающих с поверхности кофе. На границах ячеек существует нисходящий поток, и здесь черная поверхность кофе обнажается, поскольку капельки оседают.

Пылевидные пятна над восходящими потоками горячего кофе состоят из плотно упакованных маленьких однородных водяных капелек, которые сильно заряжены (взвешенные капельки исчезают, если к поверхности жидкости поднести какой-либо наэлектризованный предмет). В работе В. Шефера описан еще ряд явлений, которые можно наблюдать «над утренней чашкой кофе». Вот конструктивное наставление для экспериментаторов из [18]:

«Чашка горячего кофе является идеальным прибором для наблюдения всех или некоторых из описанных явлений, однако, по мере остывания кофе эффекты быстро ослабевают. Для более продолжительных наблюдений я пользовался следующим устройством. Чисто вымытая жестянка из-под консервов наполнялась водой, подкрашенной черными чернилами, и подогревалась на горячей подставке. В качестве горячей подставки служил старый, но исправный электрический утюг, перевернутый вниз ручкой, которая зажималась в настольные тиски. Это приспособление позволяло проводить наблюдения сколь угодно долго. Прекрасным источником света служил проектор для показа диапозитивов, а наблюдать расположение, размеры и другие характеристики плавающих капелек можно было в бинокулярный микроскоп. Впоследствии я обнаружил, что горячий глицерин лучше подходит для продолжительных исследований.»

Изложим линейную теорию процесса конвекции Бенара, следуя, в основном, книге [19].

Для реальной сжимаемой жидкости при наличии поля тяжести справедливо уравнение Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\eta}{3} + \xi \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (6.34)$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6.35)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести,  $\eta$  и  $\xi$  — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, которые считаются постоянными.

Для описания свободной тепловой конвекции необходимо к уравнениям (6.34) и (6.35) добавить уравнение теплопроводности, которое в пренебрежении диссипативным теплом, выделяющимся в жидкости за счет внутреннего трения, принимает вид обычного уравнения теплопроводности в движущейся жидкости:

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \kappa \Delta T, \quad (6.36)$$

где  $T$  — температура,  $s$  — энтропия единицы массы жидкости,  $\kappa$  — постоянный коэффициент теплопроводности.

К уравнениям (6.34)–(6.36) нужно добавить уравнение состояния среды

$$\rho = \rho(T, p), \quad (6.37)$$

что позволяет выразить энтропию  $s$ , например, через  $T$  и  $p$ . Ограничимся исследованием конвекции, когда сжимаемость среды не существенна, что соответствует так называемому приближению Буссинеска.

Предположим далее, что  $T = \bar{T} + T'$ ,  $p = \bar{p} + p'$ , где  $\bar{T}$ ,  $\bar{p}$  — некоторые постоянные средние значения, а  $T'$  и  $p'$  — малые добавки, которые обуславливают малые отклонения плотности  $\rho'$  от среднего значения  $\rho_0 = \rho(\bar{T}, \bar{p})$  ( $\rho' \ll \rho_0$ ).

В рамках линейного приближения имеем

$$\rho = \rho_0 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' + \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p' = \rho_0(1 - \beta T' + \alpha p'), \quad (6.38)$$

где  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $\alpha$  — коэффициент изотермической сжимаемости:

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad \alpha = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T, \quad (6.39)$$

причем

$$|\beta T'| \ll 1 \text{ и } |\alpha p'| \ll 1, \quad (6.40)$$

так как  $\rho' \ll \rho_0$ . Кроме того, предположим, что изменения плотности из-за неоднородности давления малы по сравнению с изменениями из-за неоднородности температуры, т. е.

$$|\beta T'| \gg |\alpha p'|. \quad (6.41)$$

Тогда соотношение (6.37) принимает вид

$$\rho = \rho_0(1 - \beta T'). \quad (6.42)$$

Итак, мы пренебрегли зависимостью плотности от давления. Существенно, что зависимостью плотности от температуры пренебречь нельзя — именно эта зависимость приводит к возникновению конвекции. Условие (6.41) важно, поскольку из него, в частности, следует, что вертикальный масштаб области (характерный размер  $l$ ) не должен быть слишком велик (давление вдоль жидкости не должно существенно меняться). Если считать, что гидростатический перепад давлений имеет порядок  $\rho_0 g l$ , то из условия (6.40) и (6.41) следуют неравенства

$$\rho_0 g l \alpha \ll \beta \theta \ll 1, \quad (6.43)$$

где  $\theta$  — характерная разность температур.

Из малости относительных изменений плотности следует еще одно упрощение: приближенно уравнение непрерывности (6.35) можно записать для несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (6.44)$$

что существенно упрощает уравнение Навье–Стокса. Преобразуем теперь уравнение (6.36), представив энтропию в виде разложения

$$s = s_0 + \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p T' + \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T p' \quad (6.45)$$

и учитывая термодинамические соотношения

$$\left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T}, \quad \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = -\frac{\beta}{\rho_0}, \quad c_p - c_v = \frac{\beta^2 \bar{T}}{\alpha \rho_0}, \quad (6.46)$$

где  $c_p$  и  $c_v$  — удельные теплоемкости. Рассмотрим отношение

$$\left[ \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T p' \right] / \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p T' \right] = M.$$

Легко видеть, что

$$M = -\frac{\beta p' \bar{T}}{\rho_0 c_p T'} = -\frac{\alpha p'}{\beta T' c_p} \left( \frac{\beta^2 \bar{T}}{\alpha \rho_0} \right) = -\frac{\alpha p'}{\beta T'} \left( 1 - \frac{c_v}{c_p} \right),$$

причем, поскольку  $0 < (1 - c_v/c_p) < 1$ , то в силу (6.41)  $M$  пренебрежимо мало и, следовательно, можно пренебречь изменением энтропии за счет давления, т. е.

$$s = s_0 + \frac{c_p}{T} T'. \quad (6.46)$$



Тогда из уравнения (6.36) находим

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T' = \chi \Delta T', \quad (6.47)$$

где  $\chi = \kappa / (c_p \rho_0)$  — коэффициент температуропроводности. Подставляя теперь соотношение (6.42) и уравнение (6.44) в уравнение (6.34), получим

$$\rho(1 - \beta T') \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho_0(1 - \beta T') \mathbf{g}, \quad (6.48)$$

где  $d\mathbf{v}/dt = \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ ,  $\bar{p}$  — гидростатическое давление, соответствующее равновесию при средней плотности  $\rho_0 = \text{const}$  и удовлетворяющее уравнению  $\nabla \bar{p} = \rho_0 \mathbf{g}$ . Правая часть уравнения (6.48) тогда примет вид  $[-\nabla p' + \eta \Delta \mathbf{v} - \rho_0 \beta T' \mathbf{g}]$ .

В левой части уравнения (6.48) пренебрежем слагаемым  $s \beta T'$ , что справедливо, если вертикальное ускорение  $dv_z/dt$  (ось  $z$  направлена вертикально вверх) будет мало по сравнению с ускорением силы тяжести  $g$ . При свободной конвекции это справедливо. Тогда уравнение (6.48) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v} + g \beta T' \boldsymbol{\gamma}, \quad (6.49)$$

где  $\nu = \eta / \rho_0$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор оси  $z$ . Окончательно система уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска «собирается» из уравнений (6.49), (6.47) и (6.44) (штрихи далее опущены):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + g \beta T \boldsymbol{\gamma}, \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad (6.51)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (6.52)$$

Напомним, что приближение Буссинеска — приближение «слабой» конвекции — состоит в следующем: вызванные неоднородностью температуры отклонения плотности от среднего значения предполагаются столь малыми, что ими можно пренебречь всюду, кроме уравнения движения, где это отклонение учитывается лишь слагаемым с подъемной силой.

Найдем из системы уравнений (6.50)–(6.52) условия механического равновесия жидкости, для чего положим скорость равной

нулю и будем искать равновесные распределения температуры  $T_0$  и давления  $p_0$ . Легко видеть, что в этом случае

$$-\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 + g \beta T_0 \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (6.53)$$

$$\Delta T_0 = 0. \quad (6.54)$$

Применим к уравнению (6.53) операцию  $\text{rot}$ . Поскольку  $\text{rot } \nabla p_0 = 0$ , а  $\boldsymbol{\gamma} = \text{const}$ , имеем

$$\text{rot}(g \beta T_0 \boldsymbol{\gamma}) = \{T_0 \text{rot } \boldsymbol{\gamma} + \nabla T_0 \times \boldsymbol{\gamma}\} g \beta,$$

но

$$\text{rot } \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad \text{и} \quad \nabla T_0 \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (6.55)$$

т.е. вектор  $\nabla T_0$  параллелен вектору  $\boldsymbol{\gamma}$  и имеет вертикальное направление (мы отбросим тривиальный случай  $\nabla T_0 = 0$ ). Таким образом, горизонтальные компоненты

$$\frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{\partial T_0}{\partial y} = 0, \quad (6.56)$$

а температура в равновесии

$$T_0 = T_0(z). \quad (6.57)$$

Из уравнения (6.54) тогда находим, что  $\partial^2 T_0 / \partial z^2 = 0$ . Следовательно,

$$T_0 = -Az + B, \quad (6.58)$$

где  $A, B = \text{const}$  и, если  $A > 0$ , то ось  $z$  направлена вверх и температура линейно убывает с высотой.

Условие (6.58) легко осуществить, например, в плоском горизонтальном слое жидкости: горизонтальные параллельные плоскости, ограничивающие слой, должны поддерживаться при постоянных, не меняющихся вдоль этих плоскостей температурах; градиент температуры в слое будет вертикальным, постоянным и равным  $(\bar{T}_1 - \bar{T}_2)/h$ , где  $\bar{T}_1, \bar{T}_2$  — постоянные температуры границ, а  $h$  — толщина слоя.

Будем далее рассматривать малые нестационарные возмущения равновесия, полагая  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ ,  $T = T_0 + T_1$ ,  $p = p_0 + p_1$  ( $f_1 \ll f_0$ ) в уравнениях (6.50)–(6.52). Это даст

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{v}_1 + g \beta T_1 \boldsymbol{\gamma}, \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \nabla T_0 &= \chi \Delta T_1, \\ \text{div } \mathbf{v}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Перейдем в системе уравнений (6.59) к безразмерным переменным, выбрав следующие единицы измерения: длины — характерный линейный размер — глубина  $h$ , времени —  $h^2/\nu$ , скорости —  $\chi/h$ , давления —  $\rho_0\nu\chi/h^2$ , температуры —  $Ah$  ( $A$  определяется из (6.58) и равняется  $\theta/h$ , где  $\theta$  — разность температур между плоскостями). Тогда из системы (6.59) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + RT\boldsymbol{\gamma}, \\ P \frac{\partial T}{\partial t} - (\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma})\mathbf{v}_1 &= \Delta T, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (6.60)$$

В системе уравнений (6.60)  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $T$  — безразмерные возмущения,  $t = \nu t/h^2$  — безразмерное время,  $x = x/h$ ,  $y = y/h$ ,  $z = z/h$ ,  $R = g\beta Ah^4/(\nu\chi)$  — число Релея,  $P = \nu/\chi$  — число Прандтля ( $R = \operatorname{Pr}G$ ,  $G$  — число Грасхофа).

Применим к первому уравнению из системы (6.60) операцию  $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$  и спроектируем получившееся векторное уравнение на ось  $z$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z = \Delta \Delta v_z + R \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z = \Delta \Delta v_z + R \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T, \quad (6.61)$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + v_z. \quad (6.62)$$

Сформулируем граничные условия к уравнениям (6.61) и (6.62). Следуя Релею<sup>4)</sup>, будем считать границы слоя свободными; на таких границах исчезают касательные напряжения; границы считаются плоскими (возмущения не приводят к их искривлению); значения температуры на границах фиксированы — возмущения температуры на границах исчезают.

Итак, при  $z = 0$  и  $z = 1$ ;  $v_z = 0$  (нет потока в направлении  $z$ ),  $T = 0$  и компоненты тензора вязкого напряжения ( $p_{xz}$  и  $p_{yz}$ ) обращаются в нуль (записаны в размерных переменных):

$$p_{xz} = -\eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0,$$

$$p_{yz} = -\eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = 0,$$

но поскольку  $v_z = 0$ , то

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0.$$

Из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

при повторном дифференцировании по  $z$  следует, что  $\partial^2 v_z / \partial z^2 = 0$  при  $z = 0; 1$ .

Окончательно в безразмерных переменных граничные условия к уравнениям (6.61) и (6.62) имеют вид

$$\text{при } z = 0 \text{ и } z = 1: \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0, \quad T = 0. \quad (6.63)$$

Так как ни коэффициенты в уравнениях (6.61) и (6.62), ни граничные условия (6.63) не зависят ни от  $t$ , ни от  $x$ ,  $y$ , существуют решения, которые носят название нормальных мод и имеют вид двумерных волн:

$$v_z(x, y, z, t) = v(z)e^{-\lambda t + j(k_x x + k_y y)}, \quad (6.64)$$

$$T(x, y, z, t) = \theta(z)e^{-\lambda t + j(k_x x + k_y y)},$$

где  $\lambda$  — декремент возмущений,  $k_x$  и  $k_y$  — вещественные волновые числа, характеризующие периодичность возмущений вдоль  $x$  и  $y$ ,  $v(z)$  и  $\theta(z)$  — амплитуды возмущений. Подставим соотношения (6.64) в уравнения (6.61) и (6.62), получим следующие уравнения:

$$-\lambda \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) v(z) = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right)^2 v(z) - Rk^2 \theta(z), \quad (6.65)$$

$$-\lambda P \theta(z) = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \theta(z) + v(z) \quad (6.66)$$

с граничными условиями

$$\text{при } z = 0 \text{ и } z = 1: \quad v = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \theta = 0. \quad (6.67)$$

Система уравнений (6.65) и (6.66) с граничными условиями (6.67) — есть краевая задача, нетривиальное решение которой существует лишь при определенных собственных значениях

<sup>4)</sup> Reyleigh // *Phil. Mag. and J. of Science*. 1916. V.32. No.192. P. 529–546.

$\lambda$  данной задачи;  $v(z)$  и  $\theta(z)$  — собственные функции этой задачи имеют вид

$$v = a \sin n\pi z, \quad \theta = b \sin n\pi z, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.68)$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  можно найти из системы уравнений, которая получается подстановкой функции (6.68) в (6.65) и (6.66). Эта система уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{cases} (n^2\pi^2 + k^2) [\lambda - (n^2\pi^2 + k^2)] a + Rk^2 b = 0, \\ a + [\lambda P - (n^2\pi^2 + k^2)] b = 0. \end{cases} \quad (6.69)$$

Условие совместности системы уравнений (6.69) есть уравнение для определения  $\lambda$ . Находим, что

$$\begin{vmatrix} (n^2\pi^2 + k^2) [\lambda - (n^2\pi^2 + k^2)] & Rk^2 \\ 1 & [\lambda P - (n^2\pi^2 + k^2)] \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda_n^{(\pm)} = \frac{P+1}{2P} (n^2\pi^2 + k^2) \pm \sqrt{\frac{(P-1)^2}{4P^2} (n^2\pi^2 + k^2)^2 + \frac{Rk^2}{P(n^2\pi^2 + k^2)}}, \quad (6.70)$$

индекс  $n$  при  $\lambda$  означает соответствие данному  $n$ .

В число Релея  $R$  входит  $A$  ( $R \sim A$ ), поэтому, когда  $A > 0$ , подогрев осуществляется снизу и  $R > 0$ . В этом случае выражение под корнем всегда положительно и  $\lambda$ , определяемые формулой (6.70), вещественны. Корень  $\lambda_n^{(-)}$  убывает с ростом  $R$  и при достаточно большом  $R$  становится отрицательным. Возникает неустойчивость.

Если  $R < 0$  (подогрев сверху), то подкоренное выражение в формуле (6.70) остается положительным лишь при малых  $R$ . С увеличением  $|R|$  оно становится отрицательным и формула (6.70) дает два комплексно сопряженных корня, т. е. возникают колебательные возмущения. Из условия обращения в нуль подкоренного выражения в соотношении (6.70) находим значение числа  $R_*$ , при котором появляются комплексные корни. Оно выражается формулой

$$R_* = -\frac{(P-1)^2 (n^2\pi^2 + k^2)^3}{4P k^2}. \quad (6.71)$$

При  $|R| > |R_*|$  возмущения осциллируют с частотой, равной  $\text{Im } \lambda$ ,

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{k^2}{P(n^2\pi^2 + k^2)}} (R_* - R), \quad (6.72)$$

которая растет по мере удаления от  $R_*$  по корневому закону.

Интересно, что из (6.71) следует условие  $R_* = 0$  при  $P = 1$ , т. е. когда коэффициенты кинематической вязкости  $\nu$  и теплопроводности  $\chi$  равны. Это означает, что при подогреве сверху колебания возникают при сколь угодно малой разности температур (близкая ситуация имеет место во многих газах). При  $R < 0$  вещественные части всех декрементов положительны (см. формулу (6.70)), следовательно, при подогреве сверху все возмущения затухают.

Из условия  $\lambda_n^{(-)} = 0$  легко найти критическое значение числа Релея, при котором возникает неустойчивость по отношению к возмущениям с заданными  $n$  и  $k$ . Из формулы (6.70) находим

$$R_k = \frac{(n^2\pi^2 + k^2)^3}{k^2}. \quad (6.73)$$

В области  $k \gg 1$  (коротковолновые возмущения — длина волны много меньше толщины слоя)  $R_k \sim k^4$ , в противоположном случае,  $k \ll 1$ ,  $R_k \approx n^6 \pi^6 / k^6$ .

При всех  $k$  наименьшее значение число  $R$  имеет для основной моды  $n = 1$ . Из формулы (6.73) следует, что минимальное значение  $R_m$  имеет вид

$$R_m = \frac{27}{4} n^4 \pi^4 \quad \text{при} \quad k_m = \frac{n\pi}{\sqrt{2}}. \quad (6.74)$$

Для основной моды  $n = 1$ ;  $R_m = 657,511$ ;  $k_m = 2,221$ .

Из системы уравнений (6.69) с учетом формулы (6.70) находим связь между амплитудами  $a$  и  $b$ , которая имеет вид

$$b = -\frac{a}{\frac{P-1}{2} (n^2\pi^2 + k^2) \pm \sqrt{\frac{(P-1)^2}{4} (n^2\pi^2 + k^2)^2 + \frac{RPk^2}{(n^2\pi^2 + k^2)}}}. \quad (6.75)$$

Из соотношения (6.75) видно, что при  $R > 0$  (подогрев снизу):

- 1) вдоль ветвей  $\lambda_n^{(-)}$   $a$  и  $b$  имеют одинаковые знаки, т. е.  $v\theta > 0$ ;
- 2) вдоль ветвей  $\lambda_n^{(+)}$   $a$  и  $b$  имеют разные знаки, т. е.  $v\theta < 0$ .

Произведение  $v\theta$  есть локальная плотность вертикального конвективного теплового потока, обусловленного возмущениями. Неустойчивость обусловлена теми возмущениями, которые увеличивают вертикальный перенос тепла в слое. Так что все «сходится»: неустойчивость связана с ветвью  $\lambda_n^{(-)}$  и для нее же теплопроводный поток тепла положителен.

Как подчеркивается в [19], важная особенность амплитудной краевой задачи (6.65)–(6.67) в том, что параметрами является квадрат модуля волнового вектора  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ , а не  $k_x$  и  $k_y$  отдельно.

Имеется вырождение: одному и тому же  $R_k$  соответствует бесконечное множество возмущений, для которых, например, вертикальная составляющая скорости может быть записана в виде

$$v_z(x, y) = v(z) \cos k_x x \cdot \cos k_y y, \quad k_x^2 + k_y^2 = k^2. \quad (6.76)$$

Решение (6.76) описывает конвективные ячейки прямоугольной формы со сторонами  $l_x = 2\pi/k_x$  и  $l_y = 2\pi/k_y$ , из него, в частности, получаются плоские (двумерные) движения в виде конвективных валов с осями, параллельными оси  $x$  ( $k_x = 0, k_y = k$ ) или оси  $y$  ( $k_x = k, k_y = 0$ ); при  $k_x = k_y = k/\sqrt{2}$  получается конвективная ячейка квадратной формы. Нормальные моды типа (6.64) или (6.76) — простейшие периодические решения в горизонтальной плоскости, допускающие разделение переменных в уравнениях (6.61) и (6.62). Для разделения переменных необходимо выполнение условия  $\partial^2 \left\{ \frac{v}{T} \right\} / \partial x^2 + \partial^2 \left\{ \frac{v}{T} \right\} / \partial y^2 = -k^2 \left\{ \frac{v}{T} \right\}$ . Этому условию удовлетворяет широкий класс возмущений, частным случаем которого являются прямоугольные ячейки, выражаемые формулой (6.76). Из других структур наиболее интересны пространственные периодические структуры, состоящие из ячеек в виде многоугольников, целиком заполняющих слой (вспомните наши размышления над чашкой кофе!). В частности, возможны гексагональные структуры и треугольные, которые получаются из гексагональных. В случае гексагональных структур вертикальная составляющая скорости имеет вид

$$v_z(x, y, z) = v(z) \left[ 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} kx \cdot \cos \frac{1}{2} ky + \cos ky \right],$$

где сторона шестиугольника  $l = 4\pi/3k$ , расстояние между центрами соседних ячеек  $d = 4\pi/\sqrt{3}k$ .

Таким образом, при  $R > R_k$  в жидкости возникает стационарное конвективное движение, которое периодически в плоскости  $(x, y)$ . Пространство между плоскостями делится на прилегающие

друг к другу одинаковые ячейки, в каждой из которых жидкость движется по замкнутым траекториям, не переходя из одной ячейки в другую. Контуры ячеек на горизонтальных плоскостях образуют в них некоторую решетку. Линейная теория, изложенная выше, позволяет найти периодичность возникающих на границе устойчивости движений, которая определяется значением  $k_k$ . Именно периодичность, а не симметрию решетки, поскольку возможно возбуждение многих линейных мод. Проблема отбора упорядоченных конвективных структур — нелинейная проблема.

Вернемся к уравнениям (6.50)–(6.52) для возмущений конечной амплитуды и рассмотрим в качестве примера термоконвекцию жидкости в вертикальной ячейке (ячейке Хеле–Шоу), подогреваемой снизу, которая представляет собой параллелепипед, причем один из горизонтальных размеров его (скажем,  $d$  вдоль  $z$ ) много меньше двух других [21]. На широких твердых гранях параллелепипеда поддерживается постоянный вертикальный градиент температуры  $A$ . Узкие грани изолированы, а горизонтальные изотермичны. Таким образом, граничные условия задачи имеют вид

$$\mathbf{v} = 0, \quad T = 0 \quad (z = \pm 1),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \quad v_x = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, L), \quad (6.77)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad v_y = 0, \quad T = 0 \quad (y = 0, H).$$

Поскольку  $L, H \gg 1$ , то можно считать, что скорость жидкости поперек слоя приближенно равна нулю (условие  $v_z \approx 0$  есть приближение плоских траекторий). Тогда разумно как и для двумерных течений ввести функцию тока, связанную с компонентами скорости  $v_x$  и  $v_y$  соотношениями  $v_x = -\partial\Psi/\partial y$ ,  $v_y = -\partial\Psi/\partial x$ . С учетом этого уравнения (6.50)–(6.52) в терминах функций тока, завихренности  $\omega = -(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\Psi$  и температуры примут вид

$$\frac{1}{P} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \right] = \Delta \omega + R \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (6.78)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \Delta T + \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ ,  $T$  — отклонение температуры от равновесного распределения  $T_0 = -y$ . В качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, температуры и давления выбраны соответственно  $d$ ,  $d^2/\chi$ ,  $\chi/d$ ,  $\rho_0 \nu \chi/d^2$ . Граничные усло-

вия к системе уравнений (6.78) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi = T = 0 \quad (z = \pm 1), \\ \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, L), \\ \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = T = 0 \quad (y = 0, H). \end{aligned} \quad (6.79)$$

Как решать задачу? Ведь аналитически ее не решить? Да и численное моделирование «в лоб» затруднительно. Остановимся кратко на модовом подходе (метод Галеркина), в котором гидродинамические поля  $u(x, t)$  представляются в виде линейной комбинации конечного числа координатных функций  $\varphi_n(x)$  (их обычно называют базисными):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \varphi_n(x), \quad (6.80)$$

где  $a_n(t)$  — коэффициенты разложения, для которых предстоит получить конечномерную систему уравнений в обыкновенных производных вместо бесконечномерной в частных производных.

Если исходные уравнения имеют, например, вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \widehat{M} \right) u(x, t) = f(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (6.81)$$

где  $\widehat{M}$  — некоторый дифференциальный оператор (в общем случае нелинейный), а поле  $u(x, t)$  достаточно гладкое, то уравнения для  $a_n(t)$  получаются из условий ортогональности невязки  $\Delta_n = [(\partial/\partial t + \widehat{M})u(x, t) - f]$  базисным функциям  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

Если эти функции взаимно ортогональны, то вся процедура существенно упрощается. Откуда взять базисные функции? И можно ли хоть что-то сказать о виде решения?

Рассмотрим задачу об устойчивости равновесия жидкости относительно малых возмущений. Линеаризованная задача (6.78), (6.79) допускает точное решение

$$\begin{aligned} \Psi \sim \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{H} y \cos \left[ \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) z \right], \\ T \sim \cos \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{H} y \cos \left[ \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) z \right], \\ n, k = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.82)$$

Покажите сами, что при  $k = 0$  критическое значение числа Релея определяется формулой

$$R_{mn} = \frac{\pi^4 (n^2 + \varepsilon m^2) [4p(n^2 + \varepsilon m^2) + 1]^2}{16 n^2}, \quad p = \frac{1}{L^2}, \quad \varepsilon = \frac{L^2}{H^2}. \quad (6.83)$$

Случай  $k \neq 0$  в [18] не рассматривался, так как соответствующие  $R_k$  очень велики по сравнению с наименьшим, определяемым (6.83). Основные результаты линейного анализа представлены на рис. 6.16.

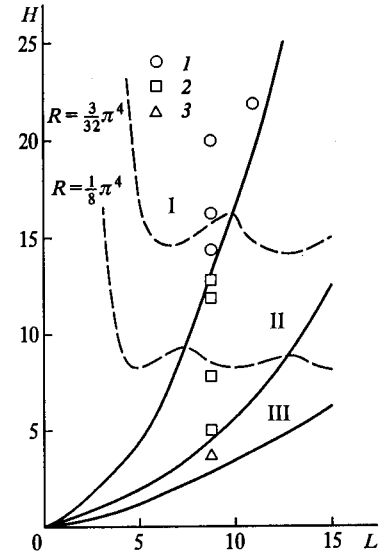


Рис. 6.16. На рисунке сплошные линии разделяют области с различной структурой наиболее «опасных» возмущений. Область I ( $n = m = 1$ ) — одновихревое движение; область II ( $n = 2, m = 1$ ) — двухвихревое; область III ( $n = 3, m = 1$ ) — трехвихревое; штриховыми линиями изображены изолинии  $R_k$ . Цифровые обозначения экспериментальных точек показывают число вихрей по горизонтали при малых надкритичностях (как видно, результаты эксперимента не противоречат линейной теории)

Система функций (6.81) может служить базисом для решения нелинейной задачи. Однако эта система функций неполна, поэтому в разложение температуры нужно включить функции, не зависящие от горизонтальной координаты  $x$ . Таким образом, конечномерную аппроксимацию поля скорости и температуры (типа формулы (6.80)) для нашей краевой задачи возьмем в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_{n,m=1}^{N,M} \Psi_{n,m}(t) \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{m\pi}{H} y \right) \cos \frac{\pi}{2} z, \quad (6.84)$$

$$T(x, y, z, t) = \sum_{n,m=1}^{N,M} T_{n,m}(t) \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{m\pi}{H} y \right) \cos \frac{\pi}{2} z. \quad (6.85)$$

После подстановки выражений (6.84) и (6.85) в систему уравнений (6.78) и ортогонализации для  $\Psi_{nm}(t)$  и  $T_{nm}(t)$  получается система уравнений типа

$$\frac{da_k}{dt} = -\nu_k a_k + \sum_{i,j} \sigma_{kij} a_i a_j, \quad (6.86)$$

где  $a \sim \Psi, T$ .

Основной вопрос теперь: сколько мод учитывать в разложении? Никаких четких алгоритмов здесь нет; единственным критерием правильности конечномерного описания является сравнение его с

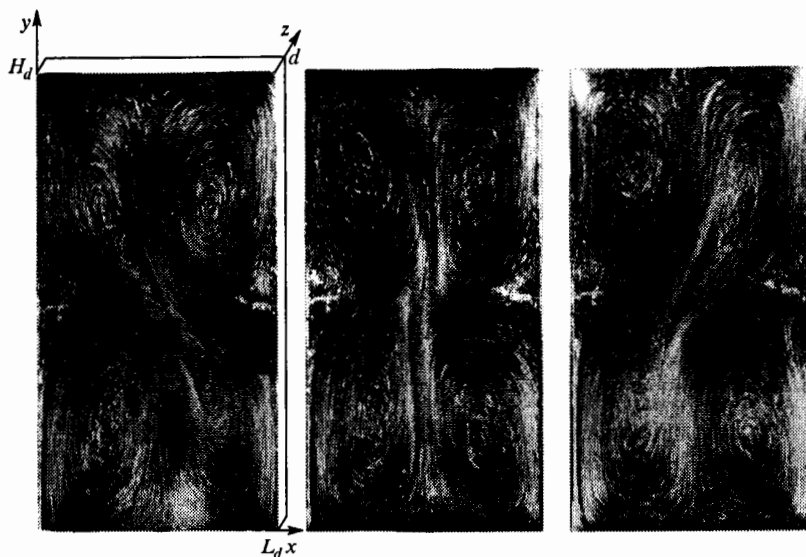


Рис. 6.17. Линии тока в ячейке Хеле-Шоу в разные моменты времени (эксперимент)

точным решением (если такое есть) или с экспериментом. Поэтому обычно строят такую конечномерную аппроксимацию в тех случаях, когда ясно, какую картину течения хотят описать. Конечномерные модели могут строиться также и по принципу моделирования основных свойств этих уравнений — квадратичности, симметрии, законов сохранения и т. д. (так называемые системы гидродинамического типа). В частности, для рассматриваемого течения — четырехвихревой конвекции в ячейке Хеле-Шоу (это известно из эксперимента; см. рис. 6.17) представляется разумным ограничиться учетом первых трех мод полей скорости и температуры (( $nm$ )  $\longleftrightarrow$  (11), (12), (21), (31), (22)) и двумя простран-

ственно однородными по  $x$  координате модами  $T_{01}$  и  $T_{02}$ , учитывающими изменение равновесного распределения температуры за счет конвекции. Даже в этом приближении система уравнений получается сложной и громоздкой [21; 22, с. 353–354], поэтому не будем ее выписывать. На рис. 6.18 изображены типичные структуры

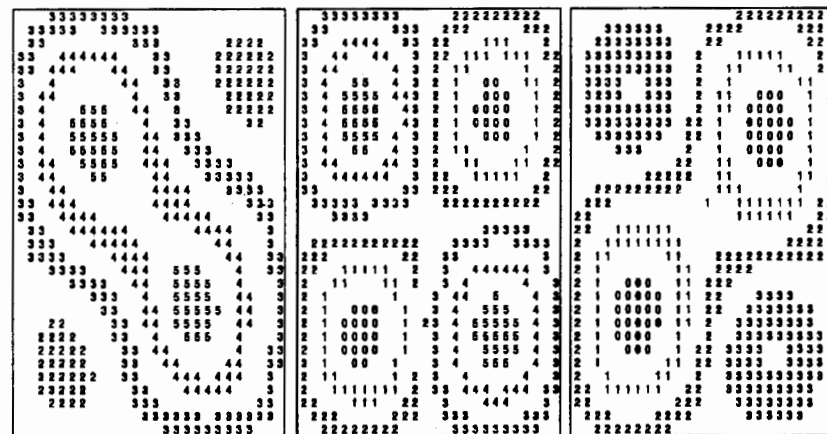


Рис. 6.18. Линии тока в ячейке Хеле-Шоу в разные моменты времени (расчет на ЭВМ)

колебательного движения, полученные в вычислительном эксперименте (см. для сравнения рис. 6.17).

Очевидно, что использование конечного числа базисных функций ограничивает диапазон чисел Рейлея, в котором можно пользоваться выведенными таким способом уравнениями.

Как показано в [21] (см. также [22]), если в начальный момент времени все амплитуды, кроме  $\Psi_{11}$ ,  $T_{11}$ ,  $T_{02}$ , равны нулю, то они остаются нулевыми и во все последующие моменты времени и можно выделить замкнутую триплетную подсистему:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{11} &= -cP\Psi_{11} - RP\frac{1}{\pi^4 a}T_{11}, \\ \dot{T}_{11} &= -cT_{11} - (4T_{02} + 1)\Psi_{11}, \\ \dot{T}_{02} &= -bT_{02} + 2T_{11}\Psi_{11}, \end{aligned} \quad (6.87)$$

где  $a = 1 + \epsilon$ ,  $b = 4\rho\epsilon + 1/4$ ,  $c = \rho a + 1/4$ ; для удобства введены новые единицы времени, функции тока и температуры, отличаю-

щиеся от старых соответственно множителями  $1/\pi^2$ ,  $(3/2)LH\pi$ ,  $(3/2)H$ ; точка означает дифференцирование по времени.

При соответствующем выборе единиц измерения система уравнений (6.87) совпадает с полученной при описании конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое — известной системой Эдварда Лоренца [23].

Уравнения (6.87) допускают стационарное решение

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \left[ \frac{b}{8ac\pi^4} (R - R_{11}) \right]^{1/2}, \\ T_{11} &= -\frac{\pi^2}{R} \left[ \frac{abc}{8} (R - R_{11}) \right]^{1/2}, \\ T_{02} &= -\frac{R - R_{11}}{4R}, \end{aligned} \quad (6.88)$$

где  $R_{11}$  — нижнее критическое число в спектре конвективной неустойчивости равновесия (см. формулу (6.83) при  $m = n = 1$ ). При  $R > R_{11}$  возникает стационарная одноячейстая конвекция. В принципе при такой одноячейстой конвекции ( $\Psi_{11}$ ,  $T_{11}$ ,  $T_{02}$  отличны от нуля, а остальные моды по-прежнему невозбуждены) мог возникнуть турбулентный режим, если бы в рамках одноячейкового режима удалось бы превысить критическое число Релея  $R_T = [P(P+3+a)/(P-1-a)]R_{11}$ ,  $a = b/c$ . Именно такая ситуация имеет место в конвективной петле (Cleveland H. F. et al. // J. Fluid Mech. 1975. V. 67. P. 65). Однако гораздо раньше при  $R < R_T$  возбуждаются моды  $\Psi_{22}$ ,  $T_{22}$ ,  $\Psi_{31}$ ,  $T_{31}$ ,  $T_{01}$ , т. е. может установиться режим трех- или четырехячейстой конвекции.

В рамках модового подхода можно объяснить и форму ячеек, возникающих при конвекции Бенара-Релея и объяснить механизм их самоорганизации. Как мы видели на линейной стадии нарастает широкий спектр пространственных возмущений. Но когда неустойчивости резонансны, т. е. нарастают лишь возмущения определенного пространственного масштаба, зачастую не они определяют масштаб возникающих структур, а их последующее взаимодействие друг с другом. В частности, формирование структур на нелинейной стадии определяется взаимной синхронизацией (в результате параметрической связи) отдельных мод и конкуренцией между модами.

Рассмотрим случай слабого превышения над порогом конвективной неустойчивости  $R \geq R_k$  в жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры. Если нет такой зависимости, то в подогреваемом плоском слое жидкости устанавливается описанная выше конвективная структура в виде валов. Дополнительная квадратичная нелинейность, возникающая из-за зависимости вязкости от температуры  $\nu = \nu(T)$ , приводит к резонансной связи

между модами одного масштаба и различной пространственной ориентации. Простейший вариант такой связи — связь трех мод с одинаковыми по модулю и развернутыми друг относительно друга на  $60^\circ$  волновыми векторами:

$$\pm \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 = \pm \mathbf{k}_3,$$

где  $|\mathbf{k}_{1,2,3}| = k$  (см. рис. 6.19). Нелинейное взаимодействие приводит к установлению стационарной конвекции с равными амплиту-

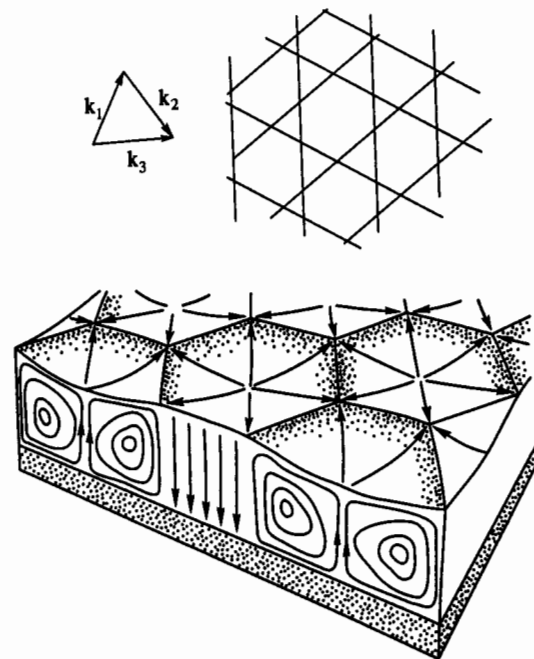


Рис. 6.19. Возникновение шестигранных ячеек при суперпозиции трех пространственных решеток одинакового периода, развернутых друг относительно друга на  $60^\circ$ . Линии тока в слое жидкости, находящейся в режиме бенаровской конвекции

дами этих мод и синхронизованными фазами. В результате поле скорости принимает вид

$$v_z(x, y) \sim \cos\left(\frac{kx}{2}\right) \cos\left(\frac{kx + \sqrt{3}ky}{4}\right) \cos\left(\frac{kx - \sqrt{3}ky}{4}\right).$$

Ориентация ячеек в пространстве произвольна и зависит лишь от начальных условий. Для нахождения решения, описывающего

такую структуру,  $v_z$  следует представить в виде

$$v_z = f(z) \left[ a_1(t) \cos kt + a_2(t) \cos \left( \frac{kx}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} ky \right) + a_3(t) \cos \left( \frac{kx}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} ky \right) \right].$$

Для действительных амплитуд можно получить уравнения

$$\dot{A}_{1,2,3} = hA_{1,2,3} \left[ 1 + \sigma \dot{A}_{2,3,1} - \beta A_{1,2,3}^2 + \delta (A_{2,3,1}^2 + A_{3,1,2}^2) \right]. \quad (6.89)$$

Таким образом, линейная неустойчивость переходит во взрывную, вызванную взаимодействием параметрически связанных мод на диссипативной нелинейности ( $\sigma \sim \partial \nu / \partial T$ ). Ограничение неустойчивости происходит за счет кубической нелинейности в зависимости вязкости от температуры. Система (6.89) имеет устойчивое стационарное решение  $A_1 = \pm A_2 = \pm A_3$ , которое и соответствует шестигранным призматическим ячейкам (рис. 6.19). Итак, из приведенного примера видно, что именно синхронные взаимодействия между модами определяют форму возникающих в результате неустойчивостей пространственных структур. Конкуренция же обеспечивает устойчивость этих структур по отношению к нерезонансным возмущениям.

## Глава 7

### АНСАМБЛИ АВТОСТРУКТУР

«Когда речь идет об исследовании сложной динамики, возникающей в результате развития вторичных неустойчивостей на фоне, например, периодического движения, задача построения модовых моделей, непосредственно следующих из исходных уравнений, чрезвычайно усложняется. Здесь уже сама модель зачастую должна строиться с помощью вычислительной машины. Развитие каких-либо качественных представлений и построение теории на физическом уровне таким образом представляется затруднительной. В подобных ситуациях весьма полезными оказываются чисто феноменологические модели, основанные на элементарных физических представлениях и эксперименте.»

*Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн (М.: Наука, 1984. С. 398.)

#### 7.1. Вместо введения: качественное описание вихрей Тейлора в круговом течении Куэтта

Большое разнообразие автоструктур со стационарным движением демонстрируют гидродинамические течения. Чаще наблюдаются ансамбли таких структур: подробно описанные выше соты при конвекции Бенара (рис. 7.1 и 7.2), цепочки вихрей Тейлора в течении Куэтта между цилиндрами (рис. 7.3 и 7.4, левый) и другие [1]<sup>1</sup>).

Правда, удалось наблюдать стационарную уединенную автоструктуру при термокапиллярной конвекции в тонком слое силиконового масла при неоднородном подогреве снизу (см., например, [2]). Независимо от начальных и граничных условий, а также и от формы подогревателя устанавливалась ячейка, близкая по форме к правильному многограннику, с вихревым движением внутри.

Как подчеркивается в статье [2], такие автоструктуры могут возникать необязательно в заданном поле неоднородности (в опи-

<sup>1</sup>) Снимки, представленные на рис. 7.1–7.4, 7.8, 7.9, и подписи к ним взяты из [1].



санном выше примере — температуры), но и в самосогласованном. Это важно, поскольку, если с ростом параметра надкритичности регулярный ансамбль автоструктур в однородно подогреваемом слое сменится турбулентностью, то ее можно рассматривать как хаотическую динамику этого ансамбля.

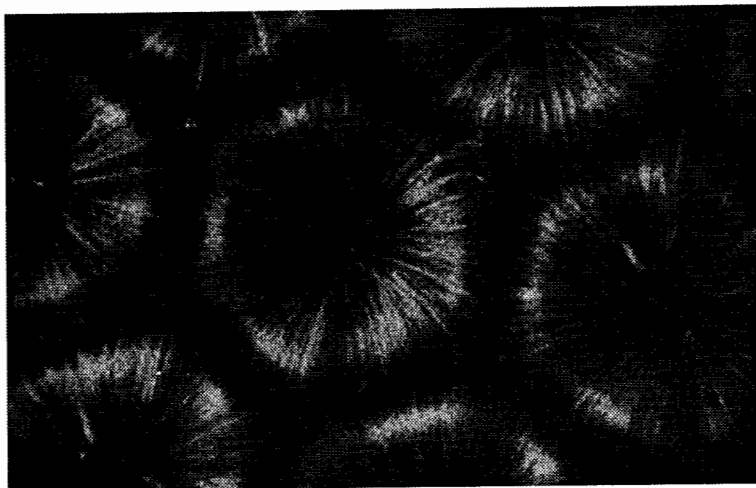


Рис. 7.1. Конвекция, создаваемая поверхностным натяжением (конвекция Бенаара). Приводимый снимок, увеличенный примерно в 25 раз, демонстрирует гексагональную конвективную структуру в слое силиконового масла глубиной 1 мм при равномерном нагреве снизу и воздействии окружающего воздуха сверху. Если верхняя поверхность свободна, то течение создается главным образом неоднородностями поверхностного натяжения, а не плавучестью. Свет, отраженный от алюминиевых хлопьев, демонстрирует подъем жидкости в центре каждой ячейки и ее опускание на краях. Время экспозиции составляет 10 с, тогда как время движения жидкости поперек ячейки от центра к краю равно 2 с

Наконец, у динамических автоструктур могут проявляться и собственные (внутренние) степени свободы. Если возбуждается несколько собственных степеней свободы, то даже одиночная динамическая автоструктура может демонстрировать сложную временную динамику, включая хаотическое поведение. Пример — вихрь Тейлора (в круговом течении Куэтта), на котором возбуждена азимутальная волна [3].

Изолированные структуры возбуждаются редко. Чаще в диссипативных средах при достаточно большой степени их неравномерности возникают ансамбли автоструктур. Пример однородного одномерного ансамбля динамических автоструктур — цепочка связанных между собой вихрей Тейлора, на которых возбуждены азимутальные волны (рис. 7.4, правый) [1].

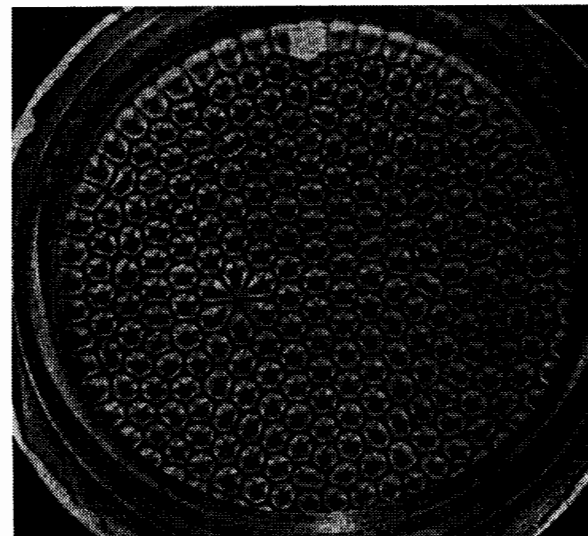


Рис. 7.2. Нерегулярности гексагональной структуры конвективной картины Бенаара. Как видно на снимке, гексагональная структура ячеек, характерная для конвективной неустойчивости, вызванной главным образом поверхностным натяжением, приспосабливается к круговой границе. Алюминиевый порошок демонстрирует течение в тонком слое силиконового масла с кинематической вязкостью  $0,5 \text{ см}^2/\text{с}$  на равномерно нагретой медной пластинке. Маленькая выемка на пластинке приводит к возникновению нерегулярности ячеек в области слева, где образуются ячейки в форме огранки бриллианта. Это показывает, насколько картина чувствительна к малейшим нарушениям регулярности

В экспериментах машинное масло, содержащее алюминиевый порошок, заполняет зазор между неподвижным внешним цилиндром и вращающимся внутренним металлическим цилиндром. При медленном вращении внутреннего цилиндра ничего неожиданного не происходит. Однако при очень быстром вращении жидкость разбивается на горизонтальные полосы (см. рис. 7.5 и 7.8). Если вращать внешний цилиндр, а внутренний оставить в покое, то ничего похожего не будет. Почему у внутреннего цилиндра такая привилегия? Обратимся к рис. 7.6<sup>2)</sup>. Когда внутренние слои жидкости движутся быстрее внешних, центробежная сила становится больше удерживающего давления, и слои стремятся двигаться в направлении от оси, состояние жидкости становится неустойчивым. Но на пути слоя стоят внешние слои, и целиком слой не может двигаться равномерно. Поэтому слои разбиваются на клетки, образуя горизонтальные полосы (рис. 7.6б), и циркули-

<sup>2)</sup> Далее мы следуем лекциям [4].

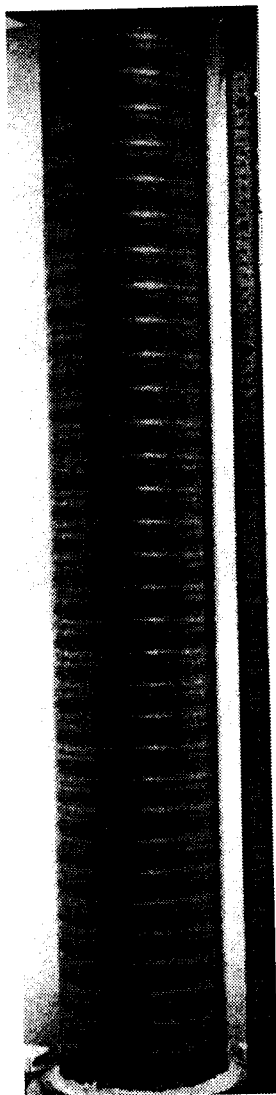


Рис. 7.3. Осесимметричные ламинарные вихри Тейлора. Машинное масло, содержащее алюминиевый порошок, заполняет зазор между неподвижным внешним стеклянным цилиндром и вращающимся внутренним металлическим цилиндром с относительным радиусом 0,727. Торцевые пластинки сверху и снизу неподвижны. Скорость вращения в 9,1 раза больше той, для которой Тейлор предсказывает возникновение регулярно расположенных тороидальных вихрей, видимых на снимке. Радиальная компонента скорости течения направлена внутрь на более широких темных горизонтальных кольцах и наружу — на более узких. Движение началось внезапно, при этом создаются вихри более узкие, чем те, которые получаются при плавном начале движения

руют как на рис. 7.6б (есть аналогия с конвекционными токами в комнате, в которой на уровне пола есть слой холодного воздуха). Если остановить внутренний цилиндр, а внешний вращать с большой скоростью (рис. 7.6в), то центробежные силы создают градиент давления, удерживающий все в равновесии (так же происходит в комнате, когда теплый воздух находится у потолка).

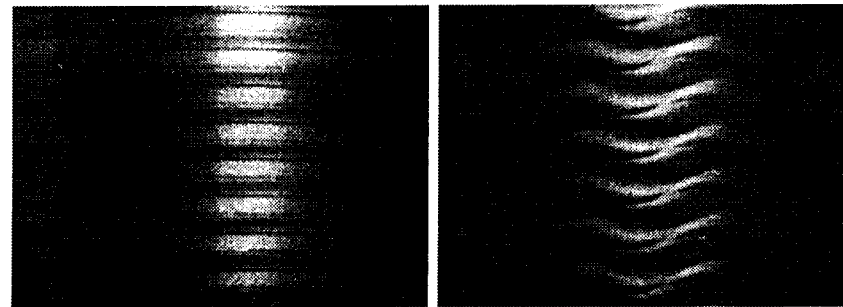


Рис. 7.4. Ламинарные вихри Тейлора в узком зазоре. Внутренний цилиндр большего радиуса в той же установке соответствует относительному радиусу, равному 0,896. Как и прежде, вращается только внутренний цилиндр. На левом снимке показана центральная область осесимметричных вихрей при скорости вращения, в 1,16 раза превышающей критическую. На правом снимке при скорости вращения, в 8,5 раза больше критической, течение оказывается двоякопериодическим с шестью волнами по окружности вихрей, дрейфующими при вращении

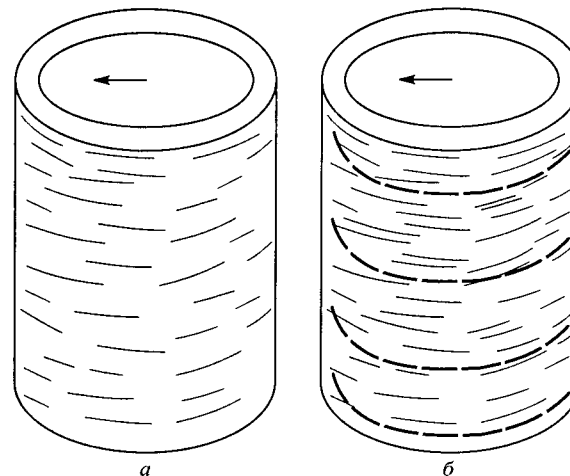


Рис. 7.5. Иллюстрация к экспериментам с вращающимися цилиндрами: а — медленное вращение; б — быстрое вращение [4]

Для невязкого течения Куэтта и симметричных возмущений необходимое и достаточное условие неустойчивости

$$\frac{d}{dr}(rv)^2 < 0$$

обычно называют критерием Релея (здесь  $r$  — расстояние от оси,

$v$  — азимутальная скорость). Таким образом, неустойчивость течения Куэтта приводит к новому стационарному вторичному осесимметричному течению в виде регулярно расположенных вдоль оси вихрей, обычно называемых вихрями Тейлора. Если еще увеличить скорость цилиндра, вихри Тейлора становятся неустой-

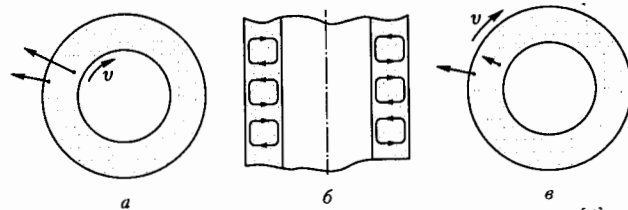


Рис. 7.6. Вот почему поток разбивается на полосы [4]

чивыми, что приводит к образованию периодических азимутальных волн. Волны на вихрях имеют определенную частоту и распространяются с определенной скоростью в азимутальном направлении. С дальнейшим увеличением скорости внутреннего цилиндра возникает регулярная стационарная турбулентная структура (рис. 7.7 а и 7.8, левый [1]), причем число элементов в ансамбле остается конечным и неизменным. Если теперь вращать в противоположную сторону и внешний цилиндр, то возникает структура из ламинарных и турбулентных областей, образуя спиральную кар-

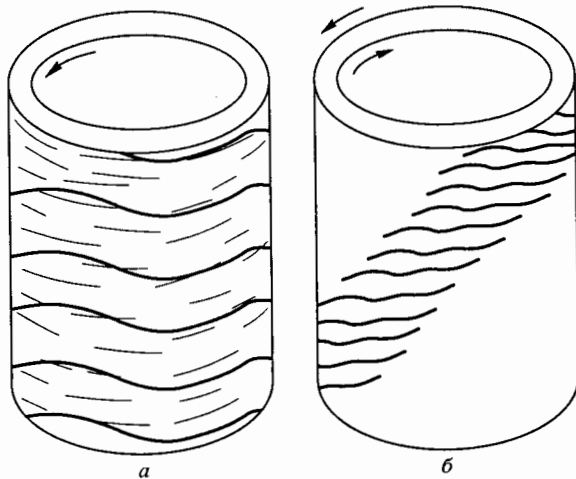


Рис. 7.7. Эволюция полос разбиения с увеличением скорости вращения внутреннего цилиндра [4]

тину (рис. 7.7 б и 7.8, правый [1]). Однако и в «ламинарных» областях поток не регулярен; он полностью турбулентен. Когда цилиндры вращаются еще быстрее, поток хаотизируется.

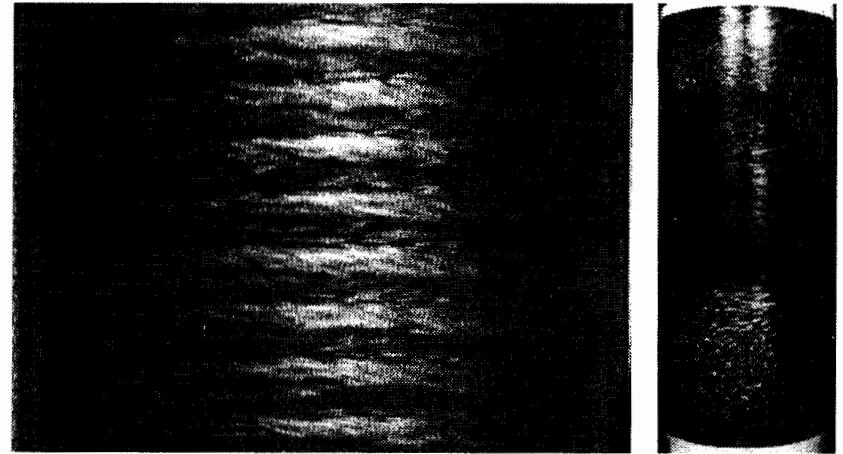


Рис. 7.8. На левом снимке показаны осесимметричные турбулентные вихри Тейлора. Условия совпадают с теми, которые соответствуют снимкам на рис. 7.3 и 7.4, однако скорость вращения в 1625 раз больше критической. Внезапное начало вращения создает первоначально хаотическое движение, однако в течение минуты возникает видная на снимке регулярная стационарная турбулентная структура. На правом снимке показана спиралевидная турбулентность между цилиндрами, вращающимися в противоположные стороны. Показанная структура из чередующихся ламинарных и турбулентных спиралей была образована путем первоначального придания вращения внешнему цилиндру от состояния покоя до  $Re = 10000$  (рассчитано по внешнему радиусу), а затем медленного ускорения внутреннего цилиндра вплоть до  $Re = 4200$  (рассчитано по внутреннему радиусу)

Как указано в [2], при малом числе взаимодействующих структур переход к хаосу связан обычно с рождением и исчезновением структур. Особо в статье [2] выделены неоднородные ансамбли структур (неоднородность определяется наличием границ, действием внешних полей, неоднородностью неравновесной среды), среди которых как типичные выделены ансамбли автоструктур, не-взаимно связанных друг с другом. Именно эти ансамбли близки к системам СВЧ электроники. Действительно, подобная невзаимная связь характерна для потоковых систем, таких как электронные потоки в плазме, сдвиговые течения в гидродинамике, автокаталитические химические реакции в реакторах с протоком. Важно, что из-за наличия потока хаотические изменения в ансамбле раз-

виваются и во времени, и в пространстве. Красивый пример — спиральные вихри на конусе, вращающемся в потоке (рис. 7.9).

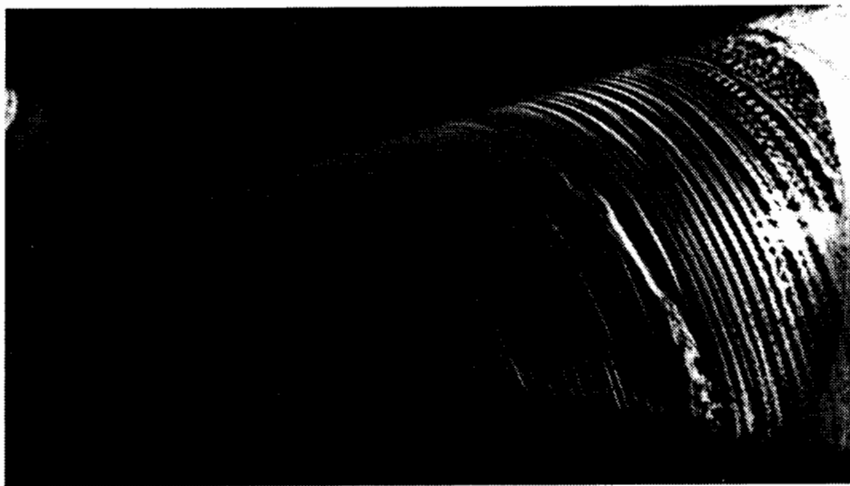


Рис. 7.9. Спиральные вихри на конусе, вращающемся в потоке. Конус с углом полураствора  $15^\circ$  и диаметром основания 20 см вращается со скоростью 700 об/мин в осевом воздушном потоке, имеющем скорость 2,9 м/с. Видно, что по мере развития спиральных вихрей они приобретают кружевную структуру

По мере развития спиральных вихрей они приобретают кружевную структуру.

## 7.2. Ансамбли автоструктур в сыпучих средах

Эксперименты по формированию автоструктур, описанные в гл. 6 (например, ячейки Бенара) и § 7.1 (вихри Тейлора в течении Куэтта), уже стали классическими. Существуют достаточно красивые качественные и строгие теоретические обоснования образования таких структур. Однако возникает вопрос: является ли существенно необходимым условием формирования автоструктур непрерывность среды, где мы хотим наблюдать такие структуры? Можно ли заменить непрерывную среду набором дискретных элементов и наблюдать формирование структур? Ответ на эти вопросы дают авторы ряда работ [5–7] по исследованию поведения сыпучих материалов при пространственно-однородном периодическом воздействии.

Сыпучая (гранулярная) среда представляет собой среду с сильной диссипацией, составленную из макроскопических элементов (гранул), которые взаимодействуют благодаря непосредственному контакту друг с другом. Для того чтобы в такой среде возбу-

дить движение частиц, необходимо воздействие на среду. Эксперименты, в которых гранулярная среда помещалась в вертикально периодически вибрирующий контейнер, показали, что в этом случае в ней возникают стоячие волны. Таким образом, в сыпучей среде реализуются структуры в виде полос, квадратных или шестигранных (гексагональных) ячеек, в зависимости от частоты и амплитуды внешнего воздействия [5–7].

В работах [5–7] использовались стеклянные [5] и бронзовые [6, 7] сферические шарики, причем в работах [6, 7] давление газа в контейнере со средой было существенно понижено по сравнению с атмосферным. Такие дополнительные меры были предприняты для исследования влияния воздуха на формирование структур.

Мы решили провести эксперимент с сыпучей средой, возбуждаемой периодическим внешним воздействием, причем в качестве среды предполагалось взять более широко доступный гранулярный материал, чем в работах [5, 6]. Элементы среды должны, по возможности, иметь сферическую форму, а также близкие, хотя и не идентичные размеры. Кроме этого, элементы сыпучей среды должны состоять из немагнитных материалов, поскольку, как и в экспериментах [5–7], нами использовалась электромагнитная вибрационная установка.

В качестве такой среды была выбрана поваренная соль. Гранулы поваренной соли, использованной в нашем эксперименте, были почти сферическими и калибровались с целью достижения идентичности в размерах. Сыпучая среда помещалась в легкий эбонитовый контейнер цилиндрической формы с плоским, достаточно гладким дном (диаметр  $D = 120$  см, высота  $H = 3$  см). Контейнер укреплялся на вибрационной установке, которая подключалась к генератору гармонических колебаний через усилитель мощности.

Изменяя частоту и амплитуду внешнего воздействия, можно наблюдать различные эффекты в слое сыпучего материала. Так, при малых амплитудах внешнего воздействия наблюдается формирование холма в слое сыпучего материала. При увеличении амплитуды в сыпучей среде формировались различные структуры, представленные на рис. 7.10. Для малых частот внешнего воздействия ( $f \sim 20$  Гц) наблюдалась структура, представляющая собой квадратную решетку (рис. 7.10а). При увеличении частоты ( $f \sim 20$ –27 Гц) в решетке возникала граница, разделяющая все еще существующую квадратную решетку и структуру из случайным образом чередующихся холмов и впадин (рис. 7.10б), с последующим постепенным исчезновением квадратной решетки (рис. 7.10в, г). На частоте внешнего воздействия ( $f \sim 30$  Гц) какие-либо четко различимые структуры исчезали (рис. 7.10д). При более высо-

ких частотах ( $f \sim 31-35$  Гц) реализовывались структуры смешанного типа — в контейнере сосуществовали квадратные ячейки и полосы (рис. 7.10e), однако в данном случае размер квадратных ячеек меньше, чем для малых частот (см. рис. 7.10a).

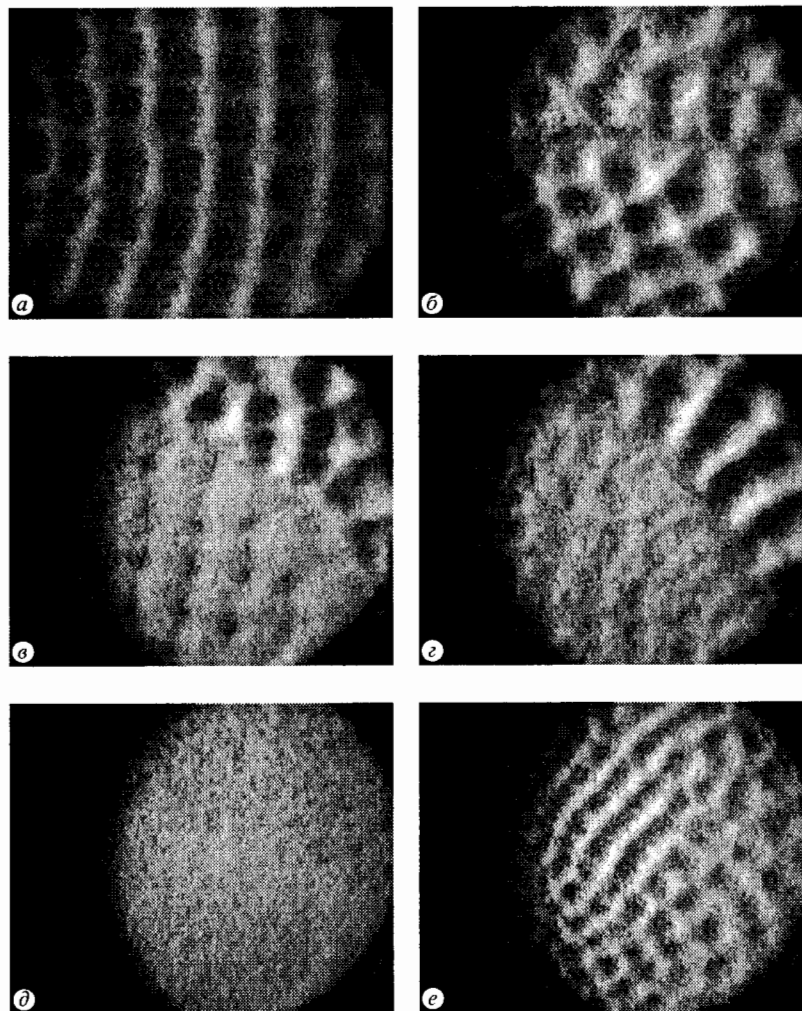


Рис. 7.10. Структуры, реализующиеся в тонком слое гранулярной среды

Таким образом, можно сделать вывод о том, что структуры, наблюдаемые в сыпучей среде, находящейся под внешним гармоническим воздействием, являются достаточно устойчивым обра-

зованием и не проявляют, в конечных пределах, принципиальной зависимости от степени однородности среды, начального ее распределения в пространстве и формы границ.

Следует отметить, что структуры, наблюдаемые в слое сыпучего материала, обладают известным сходством со структурами на поверхности тонкого слоя жидкости в пространственно-однородном поле накачки.

### 7.3. Сверхизлучение в цепочке сгустков, содержащих электроны-осцилляторы

Одним из направлений исследования процессов в различных диссипативных неравновесных средах является создание феноменологических моделей, которые могут объяснить явление турбулентности. В частности, известны модели пространственного развития хаоса [2] для описания гидродинамической турбулентности при образовании в потоке взаимодействующих когерентных структур. Возникновение структур в электронных потоках давно наблюдалось экспериментально авторами известной работы [8], а в эксперименте, описанном в [9], была обнаружена хаотическая динамика цилиндрического кольцевого потока электронов, находящегося в постоянном продольном магнитном поле. По мнению авторов работы [9], сложный характер колебаний в потоке был прямым следствием взаимодействия электронных сгустков или структур.

Возникает вопрос: какие модели нужны для описания взаимодействий структур в неравновесных средах с диссипацией? По-видимому, те, которые несли бы в себе потенциальную возможность развития хаоса, происходящую от физической природы самой среды.

Такой моделью может служить, например, последовательность взаимодействующих структур, состоящих из классических нелинейных осцилляторов, в предположении, что для каждой из структур существует эффект сверхизлучения или кооперативного излучения.

Известно, что сверхизлучение (кооперативное или когерентное спонтанное излучение) происходит благодаря развитию в системе диссипативной неустойчивости, возникающей для процессов с отрицательной энергией колебаний при наличии потерь. Особенность заключается в том, что диссипация существует за счет потерь энергии на излучение. Несмотря на свое квантовое происхождение (для квантовых систем сверхизлучение было впервые предсказано Дике в 1954 году), эффект реализуется и в системах другого типа, в том числе классических. Аналогом когерентного спонтанного излучения в классической электронике являются излучательные неустойчивости в ансамблях классических электро-

нов-осцилляторов [10–12] различной физической природы. Следуя обзору [13], в широком смысле к сверхизлучению может быть отнесен любой нестационарный когерентный процесс излучения, самопроизвольно развивающийся в открытой неравновесной системе за время, меньшее времени некогерентной релаксации колебаний отдельных частиц.

Что касается классической теории кооперативного излучения, то здесь одной из первых теоретических работ может считаться вышедшая в 1973 году статья [14]. В ней авторы рассматривают когерентные эффекты при спонтанном излучении из малого объема активной среды, представленной ансамблем классических нелинейных осцилляторов. Предполагается, что эффекты когерентности (кооперативные эффекты) возникают для возбужденных осцилляторов за счет их взаимодействия через поле собственного излучения. Подобные явления наблюдаются в объемах, линейные размеры которых малы по сравнению с длиной волны излучения.

Кооперативному излучению из малых объемов посвящена и работа [15], в которой содержится вывод системы обыкновенных дифференциальных уравнений для электронов, осциллирующих в вакууме под действием фазирующего ближнего поля, создаваемого самими электронами.

Далее мы будем рассматривать феноменологическую модель потока электронов с момента образования в нем структур<sup>3)</sup>. Поток может быть представлен последовательностью (цепочкой) взаимодействующих движущихся элементов, каждый из которых служит аналогом электронной структуры. Существенным отличием модели, о которой пойдет речь, является ее внутренняя сложность: каждый элемент в цепочке состоит из конечного числа более мелких подсистем — совокупностей нелинейных осцилляторов. В этом случае каждая отдельная структура уже не может считаться сосредоточенной системой, а дискретность модели полностью соответствует исходным предпосылкам о начальной структурированности потока.

Рассмотрим последовательность электронных структур со сверхизлучением, движущихся и оказывающих друг на друга взаимное влияние. Следуя [15, 16], в безразмерных комплексных переменных поведение ансамбля  $M$  электронов-осцилляторов описывается системой уравнений вида  $\dot{c}_k + F(c_k) = -\bar{c}$ ,  $k = \overline{1, M}$ , где  $c_k$  — переменная, соответствующая полю  $k$ -го электрона,  $F(c_k)$  —

<sup>3)</sup> Следует отметить, что моделирование процессов в неравновесных диссипативных средах, связанных с взаимодействием когерентных структур и образованием вследствие этого пространственно-временного беспорядка, можно осуществлять по-разному. Один из способов заключается в написании и численном интегрировании уравнений в частных производных. Другие способы предполагают изначальное приближение сплошной среды некоторыми дискретными аналогами — цепочками и решетками сосредоточенных систем.

функция с кубичной нелинейностью, а величина  $\bar{c}$  является средним всех  $c_k$  и определяет коллективные взаимодействия.

С учетом вышесказанного поток взаимодействующих электронных структур может быть описан уравнением

$$\dot{c}_{ki} + F(c_{ki}) = -\bar{c}_i + k_f \bar{c}_{i-1} + k_b \bar{c}_{i+1},$$

где  $i = \overline{1, N}$ , а  $N$  — количество структур, одновременно присутствующих в потоке. Параметры  $k_f$  и  $k_b$  определяют взаимное влияние электронных ансамблей. Переменная  $i$  определяет фиксированное место в пространстве взаимодействия и служит дискретным аналогом пространственной координаты. Более подробное математическое описание модели содержится в [17, 18].

Отметим, что каждая электронная структура в потоке представляет собой группу осцилляторов с глобальной связью. Поэтому модель имеет много общего с распределенной системой, а именно — большое число степеней свободы. Черты сосредоточенной системы заложены в динамике отдельных автоколебательных элементов, соответствующих электронам-осцилляторам.

Обратимся к качественному объяснению эволюции состояния потока десяти взаимодействующих структур. На рис. 7.11 изображены сечения Пуанкаре фазового пространства и спектры мощности для шести сечений потока. В начале пространства взаимодействия в спектре присутствуют две несоизмеримые частоты, а

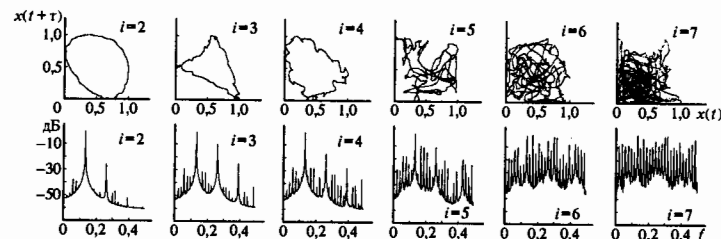


Рис. 7.11. Сечения Пуанкаре фазового пространства и спектры мощности для последовательных сечений потока

в сечении Пуанкаре наблюдается двухчастотный тор, соответствующий квазипериодическому режиму. По мере увеличения аналога пространственной координаты  $i$  в спектре возникают гармоники с новыми частотами, которые являются комбинационными двух несоизмеримых частот. Замкнутый цикл в сечении фазового пространства теряет гладкость, что соответствует перемешиванию фазовых траекторий и приводит к появлению странного аттрактора. Отсутствие случайных воздействий, полная детерминированность системы и наличие закономерности эволюции динамики позволяют предположить, что мы имеем дело с пространственно-временным хаосом.

Проведем сравнение описанного сценария возникновения сложной динамики со сценариями, известными для сосредоточенных систем. Если пространственную координату уподобить некоторому управляющему параметру в сосредоточенной системе с количеством степеней свободы, достаточным для возникновения хаоса, то переход к турбулентности (рис. 7.11) в нашей модели может оказаться аналогичным сценарию перехода к хаосу через квазипериодичность в сосредоточенных системах [19–21].

Довольно интересное качественное изменение поведения системы наблюдается в случае существенного увеличения количества взаимодействующих электронных структур (в данном случае от 10 до 150). Когда число структур, одновременно присутствующих в потоке, относительно велико, после короткого переходного процесса происходит установление стационарного во времени и нерегулярного в пространстве распределения поля из-

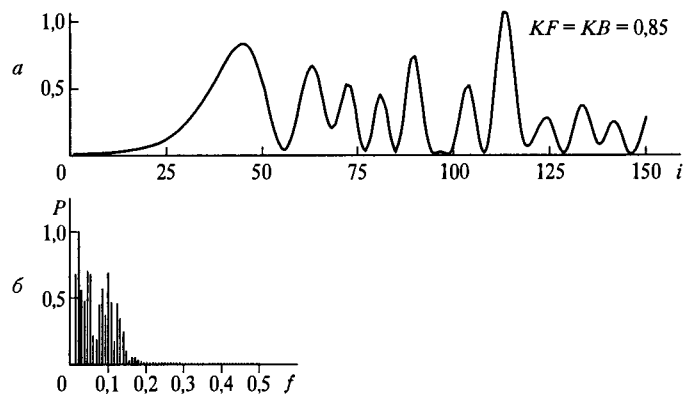


Рис. 7.12. Распределение поля и спектр излучения для случая хаотических стационарных пространственных структур

лучения (рис. 7.12а), образуются стационарные хаотические пространственные структуры. На рис. 7.12б изображен пространственный спектр для распределения  $|\bar{c}|^2$ .

Качественное изменение динамики потока при указанном качественном преобразовании своим происхождением обязано специфике построения модели и связано с тем, что время излучения из каждого элементарного объема ограничено и постоянно. Поэтому время локальных взаимодействий, в значительной степени определяющее динамику потока, обратно пропорционально количеству структур, одновременно присутствующих в пространстве взаимодействия. Более детальное описание этой проблемы содержится в [18].

В заключение отметим, что система допускает возможность управления пространственно-временным распределением поля электронных структур, которая реализуется, например, пропусканием потока через один или несколько резонаторов [18]. Результаты моделирования, когда поток проходит через два резонатора (один — на входе, другой в конце пространства взаимодействия), представлены на рис. 7.13. Здесь величина  $\xi'$  определяет собственную частоту резонаторов. Для сравнения на рис. 7.14 изображена

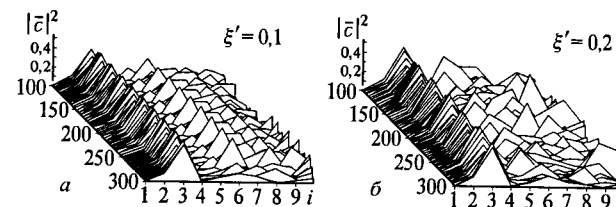


Рис. 7.13. Пространственно-временные распределения поля потока при прохождении через резонаторы

зависимость  $|\bar{c}|^2$  от времени и координаты и спектр колебаний при  $i = 2$  для потока без резонаторов. Можно заметить, что в зависимости от соотношения между собственной частотой колебаний

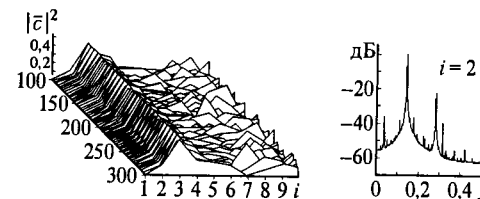


Рис. 7.14. Зависимость  $|\bar{c}|^2$  от времени и координаты; спектр колебаний при  $i = 2$  для потока без резонаторов

в потоке и частотой резонаторов процесс будет либо более упорядоченным в смысле сохранения периодичности колебаний вдоль потока (рис. 7.13а), еще более хаотизируется (рис. 7.13б).

## Глава 8

## АВТОВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ И СИСТЕМЫ

«Следуя Р. В. Хохлову, возникновение волн и структур, вызванное потерей устойчивости однородного равновесного состояния, иногда называют автоволновыми процессами (по аналогии с автоколебаниями). На первый план здесь выступает волновой характер образования структур: независимость их характерных пространственных и временных размеров от начальных условий..., а в некоторых случаях — от краевых условий и геометрических размеров системы.»

Ю. А. Данилов, Б. Б. Кадомцев. Что такое синергетика? В кн. «Нелинейные волны. Самоорганизация» (М.: Наука, 1983. С. 9)

«Игра Джона Конвея «Жизнь», представленная широкой общественности ведущим рубрику математических игр и развлечений в журнале «Сайнтифик Америкен» М. Гарднером, некоторое время пользовалась популярностью, близкой к культуре, и сделала выражение «клеточные автоматы» частью бытового жаргона целого поколения молодых ученых.»

Т. Гоффолли, Н. Маргулис. Машины клеточных автоматов (М.: Мир, 1991. С. 14)

Часто в теории самоорганизации самостоятельно выделяют автоволны (см., например, [1, 2]). Автоволнами в настоящее время принято называть самоподдерживающиеся нелинейные волны в активных средах, сохраняющие свои характеристики (период, длину волны, амплитуду и форму) постоянными за счет распределенного в среде источника энергии. В установившихся режимах эти характеристики зависят только от локальных свойств среды и не зависят от начальных условий, а достаточно далеко от границ среды — линейных размеров системы. Один из наглядных примеров автоволны — волна распространения пламени в среде с восстановлением исходного состояния. Мы уже упоминали, что задача о распространении фронта горения была решена известными физиками Я. Б. Зельдовичем и Д. А. Франк-Каменецким еще в 1938 году (см. гл. 5). Напомним, что они теоретически показали, что в однородной по своим свойствам среде фронт горения движется без изменения формы и с постоянной скоростью, кото-

рая определяется только параметрами самой среды и не зависит от начальных условий.

Пожалуй, самый известный пример автоволны — нервный импульс, который бежит по нервному волокну. Его изучал еще в 1850 году Гельмгольц, который измерил скорость нервного импульса, составившую величину от 1 до  $100 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  [3]. Другой интересный пример — автоволна временного уменьшения разности электрических потенциалов между наружной и внутренней сторонами мембраны сердечных клеток, пробегающая по сердцу раз в секунду и запускающая сокращение сердечной мышцы (см., например, [4]).

Не так давно стало понятно, что в обработке информации в коре головного мозга главную роль играют процессы взаимодействия между волнами возбуждения и торможения, которые захватывают большие участки мозга (см., например, [5]). Можно считать доказанным, что обработка информации в мозге происходит не на уровне отдельных нейронов и, следовательно, мозг принципиально отличается от цифровых компьютеров.

## 8.1. Решения типа бегущего фронта для реакции Белоусова–Жаботинского

Если, следуя [6, с. 229], подставить в систему уравнений (6.32) числовые значения коэффициентов и опустить штрихи у  $x'$  и  $t'$ , то модель, пригодная для описания бегущих волновых фронтов в реакции Белоусова–Жаботинского, будет такой:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1 - u - rv) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -buv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (8.2)$$

где  $r$  и  $b$  — положительные параметры и  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$ .

Будем искать волновые решения, удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{aligned} u(-\infty, t) &= v(\infty, t) = 0, \\ u(\infty, t) &= v(-\infty, t) = 1. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Уравнения (8.1) и (8.2) инвариантны относительно замены  $x$  на  $(-x)$ , так что 0 и 1 в условиях (8.3) можно поменять местами. На основании условий (8.3) можно ждать в качестве решения волну, движущуюся влево.

Тогда искомые решения естественно отыскивать в виде бегущих волн вида

$$u(x, t) = f(z), \quad v(x, t) = g(z), \quad z = x + ct. \quad (8.4)$$



Подставим (8.4) в (8.1) и (8.2), а также в (8.3). Тогда, выполнив замену

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial g}{\partial z},$$

получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - c \frac{\partial f}{\partial z} + f(1 - f - rg) = 0, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - c \frac{\partial g}{\partial z} - bfg = 0, \quad (8.6)$$

$$f(-\infty) = g(\infty) = 0, \quad f(\infty) = g(-\infty) = 1. \quad (8.7)$$

Можно показать, что если  $f(z) \geq 0$ , то  $f(z)$  и  $g(z)$  — монотонные функции с  $dg/dz \leq 0$  и  $df/dz \geq 0$  для всех  $z$ ; типичный вид кривых для конкретных значений  $r$ ,  $c$  и  $b$  показан на рис. 8.1.

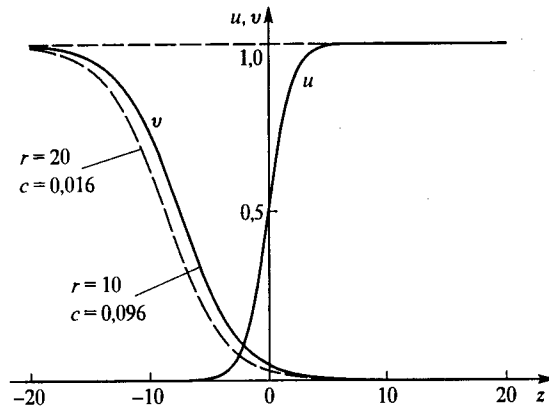


Рис. 8.1. Волновые решения типа уединенного фронта для модели, описывающей реакцию Белоусова-Жаботинского (8.5), (8.6) с граничными условиями (8.7) при  $b = 1, 25$

В [6, приложение 5, раздел А. 5.2] показано, что скорость распространения волновых решений системы уравнений (8.5)–(8.7) удовлетворяет условиям

$$\left[ \left( r^2 + \frac{2}{3}b \right)^{1/2} - r \right] [2(b + 2r)]^{-1/2} \leq c \leq 2.$$

## 8.2. Бегущий импульс

Рассмотрим теперь среды с восстановлением, в которых возможен значительно более широкий класс автоволновых процессов, чем в средах без восстановления. Бегущая автоволна в средах с восстановлением имеет конечную длительность, и состояние среды после ее прохождения восстанавливается. Примеры таких сред — нервные волокна, цепочки связанных генераторов Ван дер Поля, химические системы с автокатализом и т. п. (см., например, [4]).

Базовой моделью активных сред с восстановлением является система двух уравнений:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v), \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v), \quad (8.9)$$

где  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр. Соответствующая точечная система уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= g(u, v) \end{aligned} \quad (8.10)$$

представляет собой, как правило, релаксационную систему с  $N$ -образной характеристикой, которая может быть как ждущим генератором одиночных импульсов (рис. 8.2 а), так и автогенератором (рис. 8.2 б). Для химических систем  $D_u \neq 0$ ,  $D_v \neq 0$ ; для возбудимых мембран  $D_v = 0$ . Смысл переменных: для возбудимых мембран  $u$  — потенциал мембраны,  $v$  — проводимость медленной компоненты ионного тока. Для химической возбудимой среды  $u$  и  $v$  — концентрации реагентов. В моделях нейронной сети  $u$  и  $v$  — число клеток или волокон в активном состоянии, приходящихся на единицу объема нейронной сети.

Ограничимся в дальнейшем анализом системы уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} &= P(x, y) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= Q(x, y), \end{aligned} \quad (8.11)$$

в которых выделены быстрая  $x$  и медленная  $y$  переменные. Пусть для простоты связь в пространстве осуществляется только за счет быстрой переменной  $x$ , система уравнений (8.11) безразмерна, масштабы характерных времен таковы, что  $\varepsilon \ll 1$ , а  $x$  и  $y$  в обла-

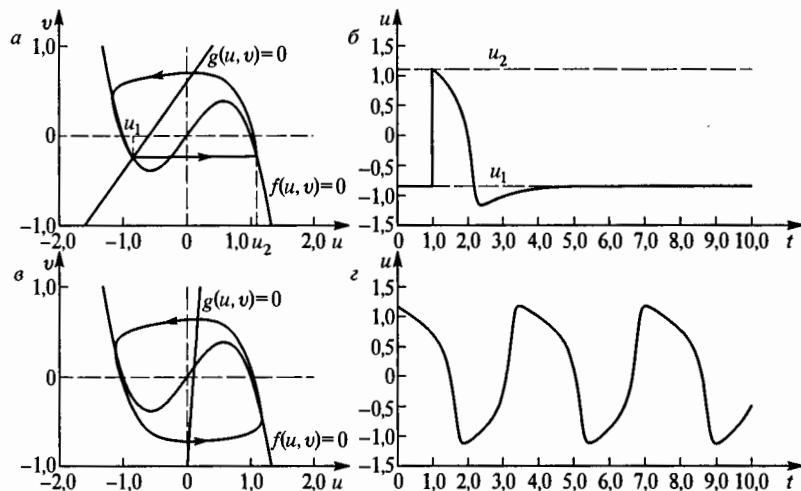


Рис. 8.2. Вид фазового пространства (а, в) и изменения переменной состояния (б, г) для системы Фитц-Хью-Нагумо:  $\varepsilon(du/dt) = f(u, v) = u - u^3 - v$ ,  $dv/dt = g(u, v) = u - b - \gamma v$ , где  $\varepsilon = 0, 2$ . Зависимости получены для  $b = -0, 6$ ,  $\gamma = 1, 0$  (а, б) и для  $b = 0, 1$ ,  $\gamma = 0, 1$  (в, г). При получении (а, б) проводилось возмущение системы в момент времени  $t_0 = 1, 0$

сти их изменения имеют одинаковые по порядку максимальные значения [7].

Конкретизируем задачу, рассмотрев так называемую модель Фитц-Хью-Нагумо (ФХН), которая выглядит так [8–10]:

$$\varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = F(x) - y = -\frac{1}{3}x^3 + x - y = P(x, y), \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = x - by + a = x - 0,8y + 0,7 = Q(x, y). \quad (8.13)$$

Уравнение (8.12) позволяет описать возвращение системы (после прохождения импульса) в исходное состояние. Переменная  $y$  — «восстанавливающее слагаемое»<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> А. Скотт [11] считает, что (8.12), (8.13) «являются классическими благодаря той роли, которую они играют для распространения по нервным волокнам, и в этом смысле они аналогичны уравнениям Ван дер Поля в теории колебаний».

Система уравнений (8.12)–(8.13) — хорошая модель для изучения распространения бегущего импульса в нервном волокне [11]. Фазовая плоскость точечной системы

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} &= -\frac{1}{3}x^3 + x - y = P(x, y), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= x - 0,8y + 0,7 = Q(x, y) \end{aligned} \quad (8.14)$$

показана на рис. 8.3.

Точка пересечения главных изоклин (точка  $O$ ) — устойчивый узел с координатами  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Пусть начальные условия следующие:

$$y(0) = \bar{y}, \quad x(0) > x_1.$$

В этом случае произойдет быстрый скачок (за время  $\sim \varepsilon$ ) из начальной точки  $D$  в точку  $C$ , затем изображающая точка будет

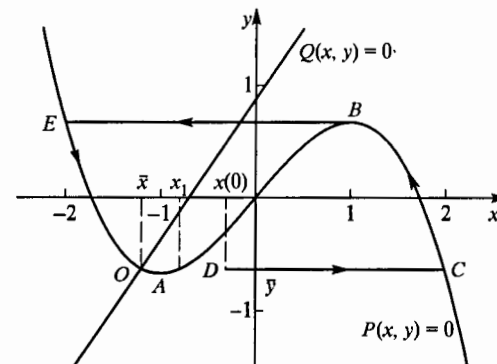


Рис. 8.3. Фазовый портрет точечной системы (8.14)

медленно двигаться от  $C$  до  $B$ . В точке  $B$  произойдет срыв медленного движения и система по быстрой траектории  $BE$  «мгновенно» перейдет на левую ветвь изоклины  $P(x, y) = 0$ . В результате в системе генерируется почти прямоугольный импульс с резкими передним и задним фронтами. Если  $x_1 > x(0) > \bar{x}$ , то изображающая точка мгновенно вернется в состояние равновесия.

Обратимся теперь к уравнениям в частных производных (8.12) и (8.13). В том случае, когда по координате  $r$  имеется диффузионная связь лишь по быстрой переменной  $x$ , уравнения (8.12) и (8.13) можно без ограничения общности записать в виде

$$\frac{\partial x}{\partial t_1} = F(x) - y + \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t_1} = \varepsilon(x - by + a), \quad (8.16)$$

где  $t_1 = t/\varepsilon$ . Для изучения стационарного бегущего импульса введем, как и в случае уединенного фронта, автомодельную перемен-

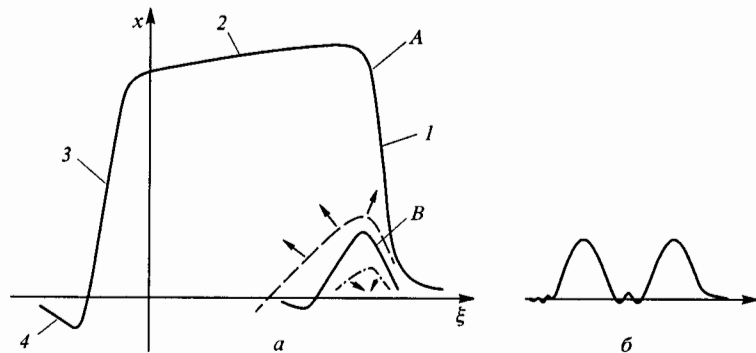


Рис. 8.4. Бегущий импульс в системе уравнений (8.17) (а). А — устойчивый импульс, который соответствует возврату изображающей точки в 0 при  $x_1 > x(0)$ . Штриховыми линиями показаны возмущения, релаксирующие либо к равновесному состоянию, либо к устойчивому бегущему импульсу: 1 — резкий передний фронт, 2 — медленно убывающая вершина, 3 — резкий задний фронт, 4 — медленная релаксация в исходное состояние. Квазистохастические волны в системе Фитц-Хью-Нагумо (б)

ную  $\xi = r - vt_1$ . Тогда из (8.15) и (8.16) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = W, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} = -[F(x) - y + vW], \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\varepsilon}{v}(by - x - a). \quad (8.17)$$

Некоторые результаты численного решения (8.17) приведены на рис. 8.4–8.7.

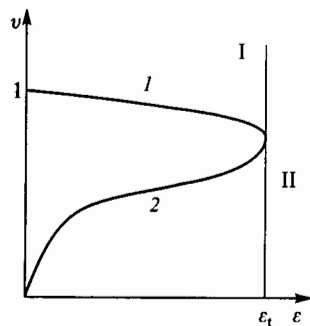


Рис. 8.5. Зависимость скорости  $v$  распространения стационарных бегущих импульсов от степени релаксационности  $\varepsilon$ . I — область стационарных бегущих импульсов, II — гомоклинических траекторий: 1 — устойчивая ветвь, 2 — неустойчивая ветвь

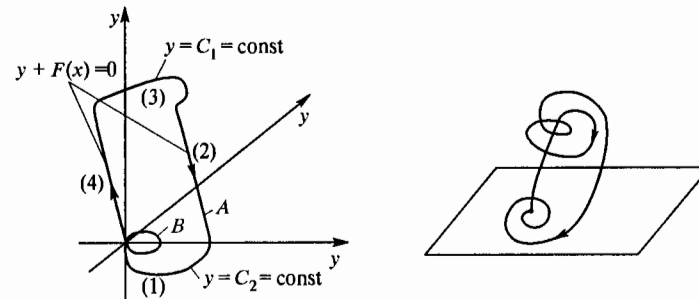


Рис. 8.6. Гомоклинические фазовые траектории (выходящие из седла и возвращающиеся в это же седло), соответствующие бегущие импульсы в трехмерном фазовом пространстве  $(W, x, y)$  (а); фазовые траектории квазистохастических волн. Участки траекторий 1 и 3 при  $\varepsilon \rightarrow 0$  лежат на поверхностях, близких к плоскостям  $y_1 = \bar{y}$  и  $y_2 = F(x_2)$ , где  $x_1, y_2$  — координаты точки В на изоклине рис. 8.3

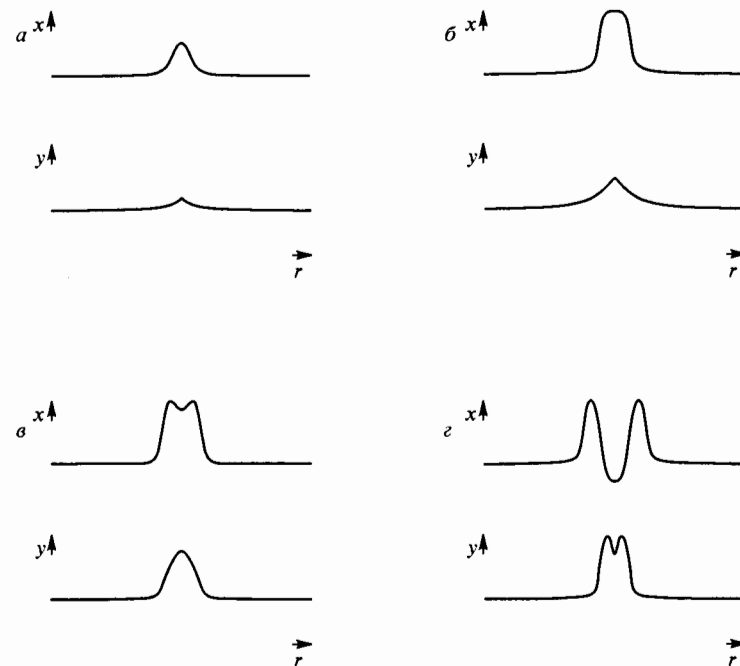


Рис. 8.7. Фитц-Хью снял по результатам численного интегрирования (8.17) фильм «Распространение импульса в нервном волокне», некоторые фрагменты которого представлены на данном рисунке. Показано распространение двух импульсов от точки возбуждения. В полностью сформированных импульсах изменения восстанавливающей переменной  $y$  происходит после изменения  $x$

Возбуждение в нервном волокне может возникнуть либо само по себе (спонтанно), либо под влиянием внешнего стимулятора (например, раздражения электрическим током). Перейдя в возбужденное состояние, нервная клетка остается в этом состоянии некоторое время, а затем возбуждение исчезает и наступает так называемый рефрактерный период, в течение которого клетка не реагирует на поступающие к ней сигналы. Затем клетка возвра-

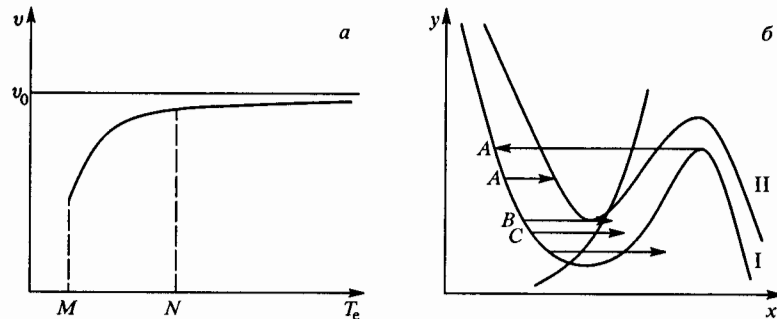


Рис. 8.8. Рефрактерность в системе Фитц-Хью-Нагумо. Зависимость скорости бегущих волн от их периода (а); фазовая плоскость точечной системы (I — система в состоянии покоя, II — возбуждение за счет диффузионной связи) (б)

щается в первоначальное состояние покоя, из которого она снова может перейти в возбужденное состояние. Если возбуждение от внешнего стимулятора носит не единичный характер, а осуществляется периодически (не слишком часто), то имеет место периодическое распространение импульсов с постоянной скоростью. С уменьшением периода  $T_e$  внешнего возбуждения скорость импульсов падает (рис. 8.8 а). При  $T_e < T_t$  периодическое распространение с постоянной скоростью невозможно, что связано с существованием в системе рефрактерности.

Из рис. 8.8 б следует, что, если изображающая точка не дошла до положения В к моменту подачи следующего внешнего импульса, то возбуждения не произойдет. Время прохождения изображающей точкой участка АВ и есть период рефрактерности. При возбуждении с участка ВС скорость движения по горизонтали (т. е. крутизна фронта импульса) резко уменьшена, чем и объясняется уменьшение скорости импульса при возбуждении в интервале MN (рис. 8.8 а).

Для установившегося бегущего импульса скорости переднего и заднего фронтов должны быть одинаковы. Решение системы (8.17) в области быстрого переднего фронта в этом случае можно искать в виде рядов

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \\ x(\xi) &= x_0(\xi) + \varepsilon x_1(\xi) + \varepsilon^2 x_2(\xi) + \dots, \\ y(\xi) &= y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + \varepsilon^2 y_2(\xi) + \dots \end{aligned}$$

Подставим эти ряды в (8.17) и приравняем слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Тогда для участков быстрых движений получим следующую цепочку уравнений (положим  $a = b = 0$ ):

$$\frac{d^2 x_0}{d\xi^2} + v_0 \frac{dx_0}{d\xi} + F(x_0) - y_0 = 0, \quad (8.18)$$

$$\frac{d^2 x_1}{d\xi^2} + v_0 \frac{dx_1}{d\xi} + x_1 \frac{dF(x_0)}{d\xi} - y_1 + v_1 \frac{dx_0}{d\xi} = 0, \quad (8.19)$$

$$\frac{dy_1}{d\xi} = \frac{x_0}{v_0}. \quad (8.20)$$

Уравнение (8.18) при соответствующих заменах совпадает с уравнением для фронта возмущения, поэтому величину скорости в нулевом приближении легко найти. Как показано в [11] для  $v_1$  из (8.19) с использованием (8.18) и (8.20) получается следующее выражение:

$$v_1 = \frac{-\frac{1}{v_0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\xi} x_0(\xi') d\xi' \right) \frac{dx_0}{d\xi} e^{v_0 \xi} d\xi \right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dx_0}{d\xi} \right)^2 e^{v_0 \xi} d\xi}.$$

Приближенная формула  $v \approx v_0 + \varepsilon v_1$  описывает большую часть стабильной ветви на рис. 8.5. При этом важно, что для этого нужно знать только профиль импульса  $x_0(\xi)$ .

Для нижней ветви скорости на рис. 8.5 в [11] приведено выражение

$$v = \sqrt{\varepsilon} v_1, \quad v_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_0^2 d\xi}{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dx_0}{d\xi} \right)^2 d\xi \right\}^{1/2}}.$$

При определенных условиях система Фитц-Хью-Нагумо испытывает бифуркацию, приводящую к появлению в нуле сложной особой точки типа седло-фокус; траектории в фазовом пространстве  $(w, x, y)$  могут иметь сложный характер, а соответствующие последовательности бегущих импульсов имеют признаки стохастичности (см. рис. 8.6 б и 8.4 б).

В работе [12], используя метод Р. В. Хохлова, основанного на разделении движений на быстрые и медленные (метод поэтапного упрощения укороченных уравнений), приведены результаты исследования различных случаев распространения бегущих импульсов и процессов их установления.

Согласно этому методу в исходной модели (8.11)

$$\varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = P(x, y),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y)$$

на быстром этапе движения (за время порядка  $\varepsilon$ ), который описывает передний фронт бегущего импульса, функция  $Q(x, y)$  не успевает измениться и модель можно представить в виде

$$\frac{\partial x}{\partial t_1} - D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = F(x) - y, \quad (8.21)$$

где  $t_1 = t/\varepsilon$  — «быстрое» время,  $y$  — параметр. Уравнение (8.21) почти совпадает с уравнениями первого приближения (8.18) и (8.19). Для медленных этапов установления бегущего импульса в исходной системе можно пренебречь слагаемым  $\varepsilon \partial x / \partial t$ , тогда получим:

$$-D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = P(x, y),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y). \quad (8.22)$$

Решая систему уравнений (8.22), находим  $x = f(r, t)$  и  $y = g(r, t)$ . Подставляя далее функцию  $y$  как неизменный параметр в уравнение (8.21), можно найти скорость бегущего импульса (вообще говоря, без ЭВМ здесь не обойтись).

В заключение укажем, что нервное волокно или аксон представляет собой длинный отросток нервной клетки (его длина может достигать 1 м и более). По аксону распространяются электрические импульсы возбуждения, величина и длительность ( $\sim 1$  мс) которых не зависят от природы и силы раздражения. Нервные (и мышечные) волокна по своей электрической природе подобны кабелю: они представляют собой относительно хорошо проводящий сердечник — внутреннюю среду нервного волокна (аксоплазму), окруженную оболочкой (мембраной волокна) с большим сопротивлением и большой емкостью (см. [1, 13, 14]).

### 8.3. Аксиоматическая модель Винера–Розенблюта. Ревербератор и ведущий центр

Остановимся отдельно на аксиоматических моделях активных сред, которые основаны на том, что процесс возникновения и распространения возбуждения, скажем, в нервной ткани обладает рядом четко выраженных свойств: возбуждение–рефрактерность–покой.

Активную среду можно представить как сеть, состоящую из элементов с названными свойствами, по которой могут распространяться волны возбуждения.

Впервые такая модель была предложена и изучена применительно к ткани сердечной мышцы в 1946 году американским математиком Норбертом Винером [15, 16], которого называют отцом кибернетики, и мексиканским физиологом Артуром Розенблютом. Статья была опубликована в мексиканском кардиологическом журнале и не была известна ни в США, ни тем более в Европе. Дальнейшее развитие событий, связанное с «открытием» статьи Н. Винера и А. Розенблюта, выглядело в изложении авторов [15, 16] так:

«В 1960 году советский математик И. М. Гельфанд организовал в Москве в Институте биофизики АН СССР семинар по математической биологии<sup>2)</sup>. Основной задачей семинара считалось выяснение принципов работы головного мозга. Довольно скоро в ходе совместных обсуждений с нейрофизиологами стала очевидной колоссальная сложность устройства головного мозга. Поэтому И. М. Гельфанд принял решение попытаться вначале понять механизмы процессов в более простых биологических возбудимых средах. Внимание семинара было привлечено к простейшей из биологических возбудимых сред — ткани сердечной мышцы, где связи между клетками однородны. И тут молодой тогда нейрофизиолог М. Л. Шик обнаружил в мексиканском кардиологическом журнале статью Н. Винера и А. Розенблюта о волнах возбуждения в сердечной мышце. Статья вызвала огромный интерес среди участников семинара. По инициативе И. М. Гельфанда она была переведена на русский язык [16]. Следует заметить, что, как признают многие зарубежные авторы, они познакомились со статьей Винера и Розенблюта именно по ссылкам на нее в советских публикациях. В работах участников семинара (И. С. Балаховского, В. И. Кринского, В. В. Смолянинова), основывавшихся на теории Винера и Розенблюта в середине 60-х годов были предсказаны новые явления в возбудимых средах: возможность циркуляции спиральной волны в однородной среде без препятствий, механизм рождения

<sup>2)</sup> Непременное условие проведения семинара, выдвинутое И. М. Гельфандом, состояло в том, чтобы на каждом заседании число его участников-математиков не превышало числа присутствующих биологов.

спиральных волн в неоднородных средах и механизмы их размножения. Общность использовавшегося математического описания показывала, что волны в возбудимых средах — это широкий класс процессов с необычными свойствами, который существует не только для биологических объектов.»

Что же понимается под активной (возбудимой) средой в аксиоматической модели? Под активной средой понимают некоторое множество элементов, обладающих следующими свойствами.

1. Каждый элемент такого множества может находиться в одном из трех состояний: покой, возбуждение и рефрактерность.

2. Для разных элементов время возбуждения может быть в общем случае разным. В модели Н. Винера и А. Розенблюта длительность возбужденного состояния считалась исчезающе малой. По прошествии времени возбуждения элемент переходит на определенное время (время рефрактерности) в рефрактерное состояние, а затем возвращается в состояние покоя.

3. По множеству находящихся в покое элементов возбуждение от каждого возбужденного элемента распространяется с некоторой определенной скоростью.

4. Возможен самопроизвольный переход элемента в возбужденное состояние по прошествии некоторого определенного времени (период спонтанной активности элемента), пока элемент не был возбужден. Отсутствию спонтанной активности соответствует ее бесконечный период.

Н. Винер и А. Розенблют сформулировали аксиоматическую модель для объяснения некоторых видов сердечных аритмий. Среди патологических режимов работы сердечной мышцы — один из самых тяжелых для больных — так называемая фибрилляция. Это явление состоит в том, что вместо ритмических согласованных сокращений сердечной мышцы возникают лишенные какой-либо периодичности беспорядочные локальные возбуждения. Некоторые выводы о природе этого явления дает аксиоматическая модель.

Пусть по участку двумерной активной среды периодически распространяется волна возбуждения. Допустим, что некоторая часть среды оказалась невосприимчивой к возбуждению в тот момент, когда по ней пробегает очередная волна возбуждения (рис. 8.9 а). Такая заторможенность — временная невозбудимость отдельных участков — может возникать в сердечной мышце под влиянием нервных воздействий. Пусть теперь именно в тот момент, когда волна возбуждения огибает заторможенную область, эта область выходит из заторможенного состояния. Очевидно, что волна возбуждения начнет распространяться в вышедшую из торможения область (рис. 8.9 б). В случае, когда размеры этой области велики, пройдя по ней, волна возбуждения обогнет рефрактерный участок и будет его периодически обегать, что и иллюстрируют

рис. 8.9 в,г. Такие спиральные волны получили название ревербераторов. Исследования показали, что ревербераторы через некоторое время либо исчезают, либо порождают новые ревербераторы.

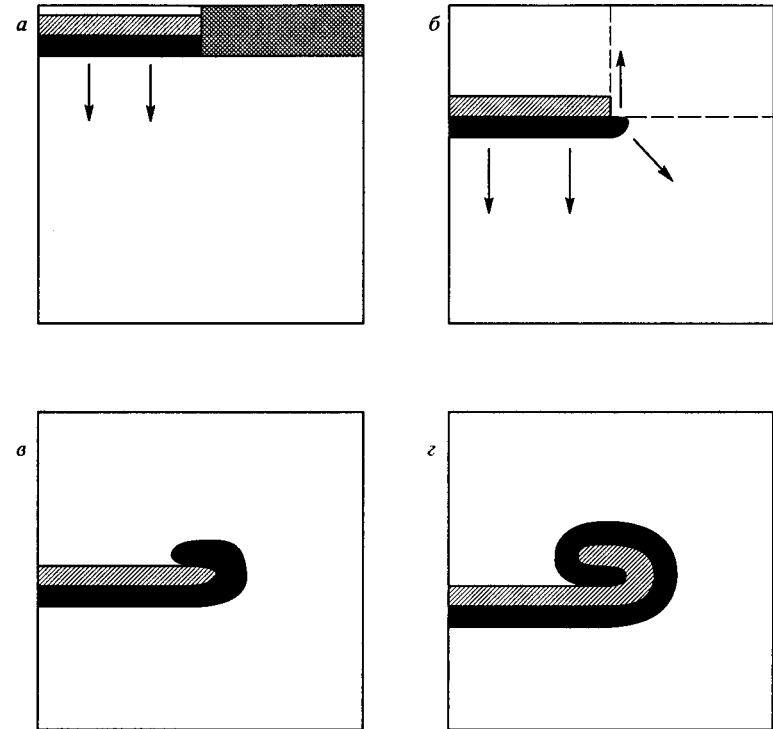


Рис. 8.9. Схематическое изображение этапов формирования спиральной волны. Стрелками указаны направления распространения волны возбуждения

Фибрилляции соответствует случай, когда ревербераторов появляется больше, чем исчезает, и в среде развивается лавинный процесс нарастания беспорядочной активности.

Возникновение спиральной волны в двумерной модели Фитц-Хью–Нагумо

$$\varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{3}x^3 + x - y - D_x \Delta x,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon(x - by + a),$$

где  $\varepsilon = 0,2$ ;  $b = 0,5$ ;  $a = 0,7$  и  $D_x = 20,0$ , представлено на рис. 8.10. Процесс формирования спиральных волн в решетке связанных отображений (см. Приложение) показан на рис. П.2.

Ревербератор можно наблюдать в реакции Белоусова–Жаботинского. В двумерном реакторе, заполненном однородным вначале

раствором (с равными исходными концентрациями реагентов), из-за развития диффузионной неустойчивости происходит спонтанное разрушение симметрии. В результате рождаются автопаттерны с цилиндрической симметрией вокруг отдельных точек. Чтобы наблюдать спирали, а не мишени, необходимо слегка кач-

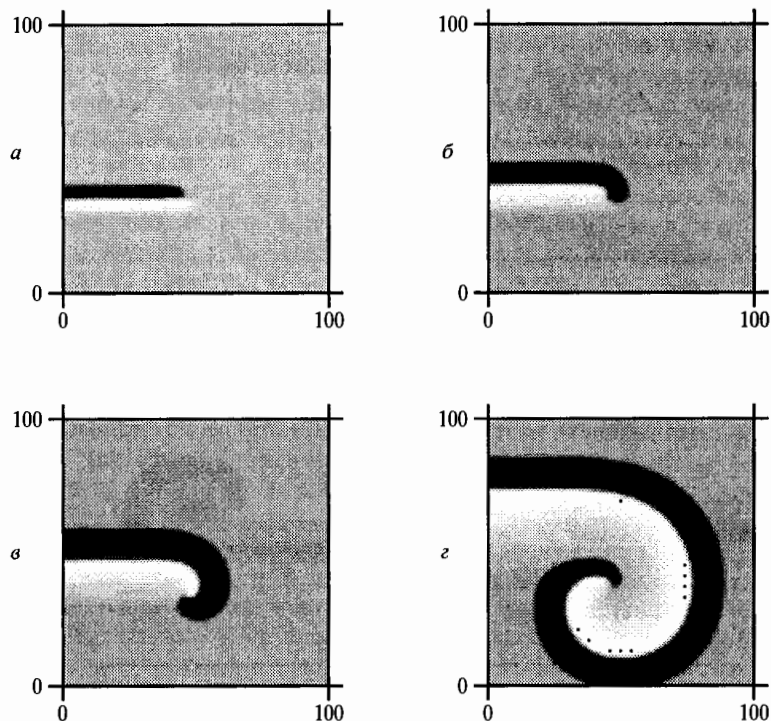


Рис. 8.10. Формирования спиральной волны в двумерной системе Фитц-Хью-Нагумо. Приведены последовательные мгновенные снимки состояния системы в моменты времени:  $t = 0$  (а),  $t = 30$  (б),  $t = 60$  (в),  $t = 140$  (г)

нуть чашку или механически разорвать фронт цилиндрической волны. В результате возникнет топологическая дислокация и родится спиральная волна (рис. 8.11).

Как правило, спирали, наблюдаемые в подобных экспериментах, близки к архимедовой спирали, т. е. в полярных координатах их уравнение  $r \approx a\theta$ . Другими словами, расстояние между фронтами (ширина) этих спиралей, примерно постоянно.

Если принять (во многих случаях это действительно так), что двумерный реактор представляет собой континуум точечных подсистем с осциллирующим поведением, определяемым локальной химической кинетикой, то диффузия обеспечивает слабую связь между точечными генераторами и определяет таким образом их

глобальную синхронизацию. Линии постоянной фазы этих синхронизованных генераторов и есть фронты спиральных волн или мишеней.

Естественно при этом, что в центре спирали, где фронты пересекаются и фаза неопределенна, должна быть сингулярность или топологический дефект, в центре которого концентрации реаген-

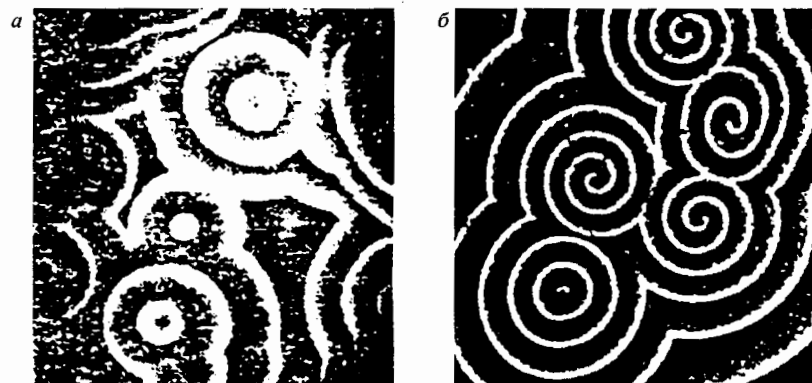


Рис. 8.11. Структуры в виде цилиндрических мод (а) и ансамбль взаимодействующих спиралей (б)

тов должны обратиться в ноль. Наличие сингулярностей весьма характерно для разнообразных спиральных форм [17]. Однако существуют спирали и без топологических дефектов, отвечающие плавному изменению концентрации в неосциллирующих средах, т. е. в средах, точечная динамика которых не является колебательной.

Если для осциллирующих сред точечная динамика должна описываться, как минимум, двумя переменными, т. е. необходимо рассматривать два или более уравнения типа «реакция-диффузия», то для неосциллирующих сред такого ограничения уже нет. В этом отношении чрезвычайно интересно, что спиральные волны без сингулярностей могут рождаться в результате бифуркации Андронова-Хопфа в однородных средах, описываемых одним скалярным уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + \lambda u + f(u), \quad (8.23)$$

где  $f(0) = 0$  и  $\lambda$  — действительный параметр. Решения спирального профиля, наблюдаемые в экспериментах, примерно имеют вид

$$u(r, \theta) = V(mr + \theta), \quad (8.24)$$

где  $(r, \theta)$  — полярные координаты и  $m = \text{const}$ . Такое решение на краю ограниченной области радиуса  $R$  должно удовлетворять «спиральным граничным условиям» [18]

$$\frac{\partial u}{\partial r} = m \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (8.25)$$

Поскольку  $m r + (\theta + 2\pi) = m(r + 2\pi/m) + \theta$ , где число  $2\pi/m$  — асимптотическая длина волны спирали — может интерпретироваться как ширина спирали.

В полярных координатах краевая задача (8.23), (8.25) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda u + f(u), \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= m \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{r=R}, \end{aligned} \quad (8.26)$$

где  $m \neq 0$ . Если решение  $u(t, r, \theta)$  есть решение (8.26), то и  $u(t, r, \theta + \psi)$ , где  $\psi \in (0, 2\pi)$ , также есть решение, т.е. рассматриваемая задача характеризуется вращательной симметрией.

Рассмотрим устойчивость тривиального решения (8.26). Линеаризуя вблизи  $u = 0$ , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda u \quad (8.27)$$

с граничными условиями (8.25). Будем искать решение (8.27) в виде

$$u(r, \theta, t) = e^{i\omega t} e^{in\theta} u_n(r). \quad (8.28)$$

После подстановки (8.28) в (8.27) для  $u_n(r)$  получаем уравнение в обыкновенных производных

$$i\omega u_n(r) = \frac{d^2 u_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_n(r) + \lambda u_n(r). \quad (8.29)$$

Введем комплексную координату  $Z = \sqrt{\mu} r$ , где  $\mu = \lambda - i\omega$ , тогда (8.29) примет вид комплексного уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 v_n}{dZ^2} + \frac{1}{Z} \frac{dv_n}{dZ} + \left(1 - \frac{n^2}{Z^2}\right) v_n = 0. \quad (8.30)$$

В предположении, что  $v_n(0)$  определено, т.е. сингулярность в нуле отсутствует, решение (8.30) имеет вид комплексной функции Бесселя  $J_n(Z)$ , или в старых переменных

$$u_n(r) = J_n(\sqrt{\mu} r). \quad (8.31)$$

Связь между  $n$  и  $m$  определяется из граничного условия

$$\sqrt{\mu} \frac{dJ_n}{dR} = imn J_n(\sqrt{\mu} R). \quad (8.32)$$

Используя равенство

$$\frac{dJ_n}{dR} = J_{n-1}(Z) - \frac{n}{Z} J_n(Z),$$

окончательно получаем

$$\sqrt{\mu} J_{n-1}(\sqrt{\mu} R) - n \left( \frac{1}{R} + im \right) J_n(\sqrt{\mu} R) = 0. \quad (8.33)$$

Нетривиальное решение  $\omega \neq 0$  этого уравнения ( $\mu = \lambda - i\omega$ ) отвечает рождению через бифуркацию Андронова–Хопфа вращающейся волны с периодом  $2\pi/\omega$ . Возникновение таких структур подтверждается прямым численным анализом исходной

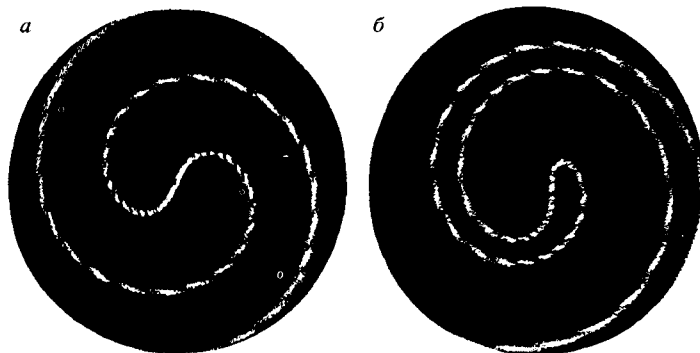


Рис. 8.12. Результат численного решения уравнений (8.26) для  $f(u) = -u^3$  (а) и  $f(u) = \alpha u^2 - u^3$  (б) при  $\lambda = 10$

задачи (8.26). Результаты моделирования [18] представлены на рис. 8.13 а для нелинейности  $f(u) = -u^3$  и на рис. 8.12 б для нелинейности  $f(u) = \alpha u^2 - u^3$ .

Другой феномен, который был предсказан в рамках аксиоматической модели, — ведущий центр (ВЦ), представляющий собой периодически действующий источник концентрически распространяющихся волн.

Пусть у нас имеется два связанных между собой возбудимых элемента (рис. 8.13). Каждый из них в отдельности в ответ на однократное внешнее воздействие «умеет» перейти из состояния покоя в возбужденное состояние, а затем — в состояние рефрактерности, т.е. элемент может совершить всего один цикл колебаний. Если же элементов два и длительность возбужденного состояния больше длительности периода рефрактерности, а колебания



сдвинуты по фазе, элементы будут поочередно запускать друг друга (рис. 8.13): в системе могут существовать автоколебания, не требующие каких-либо внешних воздействий. Действительно, если к моменту окончания рефрактерности первого элемента второй находится в возбужденном состоянии, то он возбуждает первый элемент. После этого они меняются ролями, и перезапуск повторяется

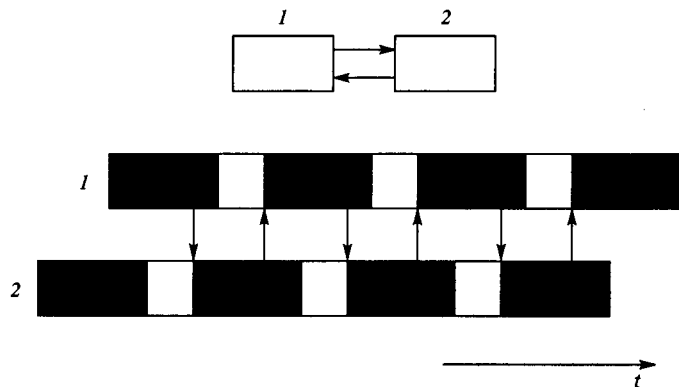


Рис. 8.13. К пояснению принципа действия ведущего центра. Темный прямоугольник обозначает элемент в возбужденном состоянии, светлый — в состоянии рефрактерности

еще раз и т. д. Таким образом, пара элементов становится автоволновым источником, от которого по среде могут распространяться концентрические волны возбуждения.

Завершим обсуждение автоволн перечислением их некоторых общих свойств.

1. Автоволна — сильно нелинейная волна, форма, амплитуда и скорость которой не зависят от начальных условий возбуждения, а зависят от свойств среды.

2. До и после прохождения автоволны среда находится в состоянии покоя, т. е. автоволна локализована в пространстве (движущаяся структура).

3. Две автоволны при столкновении уничтожают друг друга (вспомните Фенимора Купера — пожар тушат пожаром).

4. Приложив к активной среде один раз внешнее воздействие, можно создать бесконечно долго живущий источник, периодически испускающий волны возбуждения (ведущий центр — источник концентрических волн, ревербератор — спиральная волна).

5. Если среда неоднородна, то возможны процессы размножения источников, которые приводят к автоволновому хаосу.

## 8.4. О клеточных автоматах

Мы закончим главу кратким рассказом о клеточных автоматах, с помощью которых удастся анализировать многие проблемы самоорганизации. Собственно клеточные автоматы и были задуманы в конце сороковых годов XX столетия Дж. фон Нейманом и К. Цусе как универсальная вычислительная среда для построения алгоритмов. В книге [19] приводится следующее определение:

«Клеточные автоматы являются дискретными системами, поведение которых полностью определяется в терминах локальных зависимостей, в значительной степени так же обстоит дело для большого класса непрерывных динамических систем, определенных уравнениями в частных производных. В этом смысле клеточные автоматы в информатике являются аналогом физического понятия «поля»... Клеточный автомат может мыслиться как стилизованный мир. Пространство представлено равномерной сеткой, каждая ячейка которой, или клетка, содержит несколько битов данных; время идет вперед дискретными шагами, а законы мира выражаются единственным набором правил, скажем небольшой справочной таблицей, по которой любая клетка на каждом шаге вычисляет свое новое состояние по состояниям ее близких соседей. Таким образом, законы системы являются локальными и повсюду одинаковыми. «Локальный» означает, что для того чтобы узнать, что произойдет здесь мгновение спустя, достаточно посмотреть на состояние ближайшего окружения: никакое дальнедействие не допускается. «Одинаковость» означает, что законы везде одни и те же: я могу отличить одно место от другого только по форме ландшафта, а не по какой-то разнице в законах».

В 1970 году математик Джон Конвей придумал клеточный автомат, который заинтересовал на долгое время весь мир и известен как игра «Жизнь». Можно считать, что игра описывает популяцию неких организмов, развивающихся во времени и пространстве в соответствии с заданными законами размножения и вымирания. Играть можно на шахматной доске, определяя состояние индивидуумов расположением на ней фишек. Множество всевозможных расположений фишек определяет пространство состояний. Например, состояние можно задать матрицей  $8 \times 8$ , элементами которой являются единицы и нули: индивидуум представлен фишкой — это единица, пустая клетка — нуль. Все фазовое пространство состоит из всевозможных таких матриц. Расположение фишек на каждом шаге меняется в соответствии с правилами выживания, смерти и рождения:

- 1) фишка остается, если рядом с ней две или три другие фишки;
- 2) фишка должна быть убрана, если рядом с ней менее двух или более трех фишек;

3) на пустую клетку нужно поместить новую фишку, если рядом с ней три фишки.

Авторы [19], говоря о «живых» и «мертвых» клетках, образно формулируют эти правила так:

«Смерть: живая клетка остается живой, только когда она окружена двумя или тремя живыми соседями; в противном случае она будет чувствовать или «перенаселенность», или «одинокость» и умрет.

Рождение: мертвая клетка обретет жизнь, если будет окружена в точности тремя живыми соседями. Таким образом, рождение вызывается встречей трех родителей.»

Мир возможных расположений фишек многообразен. Например, расположение фишек в виде квадрата (рис. 8.14 а) не приводит к дальнейшим изменениям. Конфигурация на рис. 8.14 б сначала превращается, как показано, в две фишки, а потом они исчезают. Три фишки, расположенные в ряд по горизонтали, превращаются в вертикальный ряд, после чего исходная конфигурация повторяется

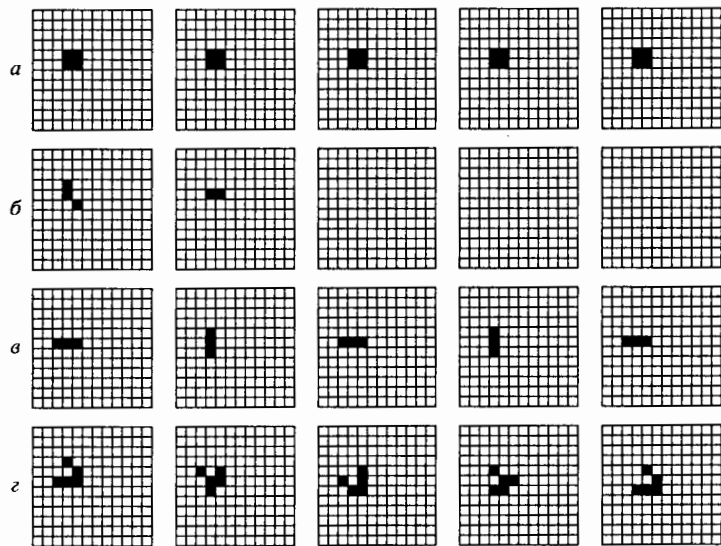


Рис. 8.14. Последовательные шаги эволюции конфигураций в игре «Жизнь». Начальная конфигурация представлена в крайнем левом столбце

(рис. 8.14 в). Такая осциллирующая конфигурация носит название «семафор». Наконец, на рис. 8.14 г представлена конфигурация из пяти фишек — «планер». Проследите сами за ее эволюцией. Найдите расположение фишек, колебания которого порождают планер каждый период.

Увлеченные авторы [19] написали яркое введение к своей книге, отрывком из которого мы и закончим этот параграф главы:

«В греческой мифологии механизмом Вселенной являлись сами боги. Они самолично тащили солнце по небу, посылали дождь и гром и вкладывали подходящие мысли в человеческие головы. Согласно более новым представлениям, мир создан завершенным, т. е. вместе с механизмом его функционирования; будучи однажды приведен в движение, он продолжает двигаться сам собой. Бог сидит снаружи и наслаждается наблюдением за ним.

Клеточные автоматы являются стилизованными, синтетическими мирами, определенными простыми правилами, подобными правилам настольной игры. Они имеют свой собственный вид материи, которая кружится в своих собственных пространстве и времени. Можно вообразить удивительное разнообразие этих миров. Можно действительно построить их и наблюдать, — как они развиваются. Поскольку творцы мы неопытные, вряд ли нам удастся получить интересный мир с первой попытки; как люди, мы можем иметь разные представления о том, что делает мир интересным, или о том, что мы могли бы захотеть сделать с ним. В любом случае, после того как нам покажут мир клеточного автомата, нам захочется сотворить его самим; создав один, мы захотим попытаться сделать еще один. После создания нескольких мы сможем создать мир, специально предназначенный для определенной цели, с некоторой уверенностью».

## КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ «САМООРГАНИЗАЦИЯ В ОТКРЫТЫХ СИСТЕМАХ»

### П1. Случайные (шумовые) процессы. Методы генерирования случайных (шумовых) последовательностей. Характеристики случайных последовательностей

**П.1.1. Случайная последовательность с равномерной функцией плотности распределения вероятностей.** При проведении компьютерного моделирования случайных процессов, как правило, используют генератор случайных чисел, предусмотренный языком программирования. Однако следует отметить, что цифровой компьютер (ЭВМ) является полностью детерминированной системой и последовательности «случайных» чисел не являются чисто случайными. Последовательности, генерируемые с помощью компьютера, часто называют псевдослучайными. Компьютерные генераторы случайных чисел позволяют получить последовательность, повторяющуюся после некоторого количества членов, т.е. периодическую последовательность. Наиболее распространенные генераторы случайных чисел основаны на линейном конгруэнтном методе (методе вычетов), который определяется отображением [1, 2]

$$I_{n+1} = (aI_n + c) \bmod m, \quad (\text{П.1})$$

где  $a$  — множитель,  $c$  — инкремент,  $m$  — модуль,  $I_0$  — начальное число. Наибольший возможный период последовательности, полученной из (П.1), равен  $m$ . В общем случае период существенно зависит от всех трех параметров метода ( $a, c, m$ ). Например, если  $a = 3, c = 4, m = 32$  и  $I_0 = 1$ , то с помощью (П.1) генерируется последовательность с периодом меньше чем 32. При осуществлении выбора  $a, c$  и  $m$  особым образом, можно получить максимальный период (в последовательности будут встречаться все целые числа от 0 до  $m - 1$ ). Наиболее качественными генераторами случайных чисел считаются такие генераторы, у которых период максимален. Кроме этого, в случайной последовательности должны содержаться числа, равномерно распределенные на интервале  $[0, 1]$ . Числа в последовательности могут появляться не идеально равномерно, а проявляют тенденцию к образованию групп или коррелируют. Количественная оценка степени корреляции чисел в последователь-

ности может быть проведена на основе расчета автокорреляционной функции.

**Задание 1.1.** Определите период случайной последовательности, полученной с помощью генератора на основе линейного конгруэнтного метода для: 1)  $a = 3, c = 4, m = 32, I_0 = 1$ ; 2)  $a = 899, c = 0, m = 32768, I_0 = 12$ . Определите период последовательности для генератора случайных чисел, имеющегося в языке программирования.

**Задание 1.2.** Определите среднее, дисперсию и автокорреляционную функцию для случайных последовательностей, описанных в задании 1.1. Оцените функцию плотности распределения вероятности для последовательностей, описанных в задании 1.1.

**Задание 1.3.** Определите среднее, дисперсию, автокорреляционную функцию и оцените функцию плотности распределения вероятности для последовательностей, полученных с помощью: 1) логистического отображения; 2) системы Ресслера [3] при различных значениях управляющих параметров.

**П.1.2. Случайная последовательность с нормальной (гауссовой) функцией плотности распределения вероятностей.** Наряду с равномерно распределенными случайными числами широко используются случайные числа, распределенные неравномерно. Одним из наиболее широко известных неравномерных распределений является гауссово, или нормальное, распределение, функция плотности распределения вероятностей которого имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad (\text{П.2})$$

где  $\mu$  — среднее,  $\sigma^2$  — дисперсия. Для гауссовых величин справедливо следующее утверждение: случайная величина, полученная линейным преобразованием из гауссовой величины, является гауссовой. В частности, величина  $y = ax + b$  является гауссовой, если  $x$  имеет гауссову (нормальную) функцию плотности распределения вероятностей (П.2) со средним  $\mu_x$  и дисперсией  $\sigma_x^2$ , причем  $\mu_y = a\mu_x + b$  и  $\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$ . Существуют различные методы получения последовательностей с гауссовой (нормальной) функцией плотности распределения вероятностей, один из них основан на использовании центральной предельной теоремы, которая утверждает, что распределение суммы случайных величин, вообще говоря, с любым распределением стремится к нормальному, если суммируется достаточно большое количество таких величин [4].

**Задание 1.4.** Получите последовательность случайных чисел  $\{x_i\}_{i=1}^N$  с нормальной функцией плотности распределения вероятностей. Для получения такой последовательности воспользуйтесь центральной предельной теоремой, т.е. рассмотрите сумму вида  $x_i = \sum_{j=1}^M r_j$ , где  $r_j$  — случайные величины, равномерно распределенные на отрезке  $[0, 1]$ .

Определите среднее, дисперсию, автокорреляционную функцию и оцените функцию плотности распределения вероятности для различных значений  $M$ . Проведите сравнение (на одной координатной плоскости  $p(x)$ ) функции плотности распределения вероятности, рассчитанной для последовательности  $\{x_i\}$ , и функции плотности распределения вероятности для случайного процесса с нормальным распределением (П.2). Получите последовательность с нормальной функцией плотности распределения вероятностей,  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 1,0$ ; покажите численно, что среднее и дисперсия совпадают с заданными; сравните рассчитанную плотность распределения вероятности с теоретической.

## П.2. Количественные и качественные характеристики последовательностей данных

**П.2.1. Преобразование Фурье. Применение преобразования Фурье. Спектры сложно периодических, хаотических и шумовых реализаций.** Большой класс задач анализа последовательностей данных связан с преобразованием Фурье. Преобразование Фурье играет важную роль как необходимый промежуточный шаг в определении плотностей спектра мощности, передаточных функций, корреляционных функций и других характеристик. Преобразование Фурье задается выражением

$$X(f) = F(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad (\text{П.3})$$

где  $j = \sqrt{-1}$ ,  $-\infty < f < \infty$ ,  $x(t)$  обычно является функцией времени  $t$ . Преобразование Фурье обратимо:

$$x(t) = F^{-1}(X(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df. \quad (\text{П.4})$$

Данные, полученные в ходе натуральных и численных экспериментов, как правило, представляют собой последовательности отсчетов переменной состояния  $x_n = x(t_n)$ , расположенных через равные интервалы времени  $\Delta t$  ( $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ). В таком случае рассматривают дискретное прямое и обратное преобразование Фурье соответственно:

$$X_k = X(f_k) = F(x(t_n)) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (\text{П.5})$$

$$x_n = x(t_n) = F^{-1}(X(f_k)) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(f_k)e^{j2\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (\text{П.6})$$

где  $\Delta f = 1/(N\Delta t)$ ,  $f_k = k\Delta f$ . Величины  $X$  и  $x$  связаны равенством Парсеваля:  $\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$ . График величины  $|X_k|^2$  как функции частоты  $f$  называется спектром мощности. Величина шага  $\Delta f$  соответствует спектральному разрешению. Наибольшая частота спектра равна  $N\Delta f$ . График спектра всегда симметричен относительно вертикальной прямой  $(N/2)\Delta f$ . Таким образом, полезный диапазон частот (содержащий избыточную информацию) находится в интервале  $[0; 1/(2\Delta t)]$ . Как правило, при построении графика спектра по оси ординат откладывают величину  $P = 10 \log_{10}(|X_k|^2)$ .

**Задание 2.1.** Рассчитайте численно действительную и мнимую части преобразования Фурье, а также, спектральную плотность мощности: 1) периодического сигнала; 2) периодического сигнала с двумя кратными частотами; 3) квазипериодического сигнала; 4) сигнала в виде одиночного прямоугольного импульса; 5) шумовых сигналов с равномерной и нормальной функцией плотности распределения вероятностей. Сравните полученные результаты с теоретическими. При оценке преобразования Фурье периодической реализации рассмотрите случаи, когда преобразование Фурье выполняется для реализации, содержащей: 1) целое число периодов; 2) нецелое число периодов. Сравните спектры, рассчитанные по одной реализации и по нескольким фрагментам реализации с применением процедуры усреднения спектра.

**Задание 2.2.** Рассчитайте спектральную плотность мощности для последовательностей, полученных с помощью: 1) логистического отображения; 2) системы Ресслера при различных значениях управляющих параметров.

**П.2.2. Расчет энтропии сложнопериодических, хаотических и шумовых реализаций.** Для расчета значения энтропии Шеннона  $S$  необходимо диапазон изменения переменной состояния системы  $x \in [-A; A]$  разделить на  $K$  интервалов длины  $\Delta_S$ . Затем необходимо рассчитать вероятности  $p_k$  нахождения траектории системы в  $k$ -м интервале. Тогда энтропия Шеннона определяется выражением

$$S = - \sum_{k=1}^K p_k \ln p_k. \quad (\text{П.7})$$

Числовые ошибки при определении энтропии возникают из-за того, что длина рассматриваемой последовательности данных конечна, а также из-за произвольного выбора длины интервала  $\Delta_S$ . Для того чтобы избежать неточности в определении  $S$ , связанной с выбором длины интервала, используют нормированную энтропию Шеннона

$$S_n = \frac{S}{E}, \quad (\text{П.8})$$

где  $E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i - \bar{x}}{A} \right)^2$ ,  $N$  — длина последовательности данных,  $\bar{x}$  — среднее.

**Задание 2.3.** Рассчитайте энтропию Шеннона  $S$  и нормированную энтропию Шеннона  $S_n$  для последовательностей, полученных с помощью: 1) логистического отображения; 2) системы Ресслера при различных значениях управляющих параметров. Проведите исследования зависимости  $S$  и  $S_n$  от величин  $K$  и  $N$ . Рассчитайте  $S$  и  $S_n$  для шумовых последовательностей с равномерной и нормальной функциями плотности распределения вероятностей.

### П.3. Исследование динамики систем с запаздывающим аргументом

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом — это уравнения вида [5, 6]

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau))$$

или

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau_1), y(x - \tau_2)),$$

или более общего вида. Особенность состоит в том, что производная решения зависит от его значений в предыдущих точках.

Запаздывание встречается во многих моделях нелинейной динамики и в общем случае отражает тот факт, что процессы в реальных системах, подлежащих моделированию, протекают не мгновенно и что предыстория процесса часто определяет его течение. Такие модели актуальны для физических, биологических, экономических, социальных систем и сами по себе являются источником многих интересных динамических явлений.

Следует отметить, что в отличие от обыкновенного дифференциального уравнения уравнение с запаздывающим аргументом — система с многими степенями свободы, и ее эволюция определяется не одним начальным условием (в случае уравнения первого порядка), а вектором начальных условий или начальной функцией.

**П.3.1. Метод последовательного интегрирования (метод шагов) для решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.** Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом [5]

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (\text{П.9})$$

где постоянное запаздывание  $\tau > 0$ , начальные условия даны в виде функции  $x(t) = \varphi_0(t)$  на интервале  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ . Тогда на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$  функция  $x(t - \tau)$  является известной

функцией  $t$  и уравнение (П.9) решается как обыкновенное дифференциальное уравнение. Определив  $x(t)$  при  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ , можно переходить к вычислению решения при  $t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$  и т. д.

**Пример.** Дано уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = 6x(t - 1), \quad x = t \text{ при } 0 \leq t \leq 1.$$

Определить  $x(t)$  при  $1 < t \leq 3$ .

Применяя метод шагов, получим:

$$\dot{x}(t) = 6(t - 1), \quad 1 \leq t \leq 2, \quad x(1) = 1,$$

интегрируя полученное уравнение, находим

$$\int_1^x dx = 6 \int_1^t (t - 1) d(t - 1), \quad x(t) = 3(t - 1)^2 + 1.$$

Аналогичным образом при  $2 \leq t \leq 3$

$$\dot{x}(t) = 6[3(t - 2)^2 + 1], \quad x(2) = 4,$$

откуда  $x(t) = 6(t - 2)^3 + 6t - 8$ .

На рис. П.1 изображены начальная функция и решение уравнения (П.9) на указанном интервале.

**Задание 3.1.** Решите аналитически (методом последовательного интегрирования) и численно (методом Рунге-Кутты 4-го порядка, адаптированным для систем уравнений с запаздывающим аргументом) следующее уравнение:  $y'(x) = -y(x - 1)$ , где  $y(x) = 1$  при  $-1 \leq x \leq 0$ . Решение проводить на интервале  $0 \leq x \leq 3$ . Сравните численное и аналитическое решения на одном графике. Сделайте выводы.

**Задание 3.2.** Исследуйте численно уравнение Хатчинсона, написанное для экологических систем и, в частности, для моделирования численностей популяций видов. В безразмерных переменных уравнение имеет вид

$$x'(t) = a(1 - x(t - \tau))x(t).$$

Найдите и проклассифицируйте типы возможных решений при различных значениях параметра нелинейности и запаздывания. Как решение зависит от выбора вида начальной функции? Выясните, каким образом частота колебаний (там, где они присутствуют) зависит от параметров системы.

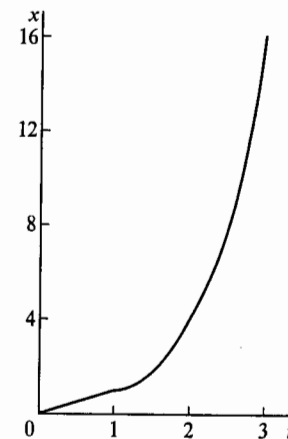


Рис. П.1. График начальной функции и решения уравнения (П.9) на указанном интервале изменения  $t$

Задание 3.3. Исследуйте численно уравнение Мэки–Гласса, представленное в виде

$$\dot{x}(t) = \frac{ax(t-s)}{1+[x(t-s)]^c} - bx(t),$$

где  $a = 0, 2$ ;  $b = 0, 1$ ;  $c = 10$ . Изменяя величину запаздывания  $s$ , получите решения уравнения, постройте спектр, автокорреляционную функцию и функцию плотности распределения для основных колебательных режимов.

#### П.4. Решетки связанных отображений: классификация пространственно-временных состояний

Решетки связанных отображений являются одними из простейших моделей распределенных систем. Такие модели широко используются при изучении сложной пространственно-временной динамики систем различной природы [7, 8]. Очевидное преимущество решеток связанных отображений (по сравнению с уравнениями в частных производных и системами связанных обыкновенных дифференциальных уравнений) заключается в эффективности их компьютерного моделирования.

Решетки связанных отображений можно классифицировать по способу описания отдельного элемента и по типу связей элементов в решетке. В качестве элемента решетки обычно выбирается одномерное отображение, демонстрирующее сложнопериодическое и хаотическое поведение. Связи между элементами решетки могут задаваться самыми разнообразными способами в зависимости от структуры моделируемой системы.

Так, для одномерной решетки логистических отображений с диффузионной связью можно записать

$$x_{n+1,i} = (1 + \varepsilon)f(x_{n,i}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_{n,i+1}) + f(x_{n,i-1})], \quad (\text{П.10})$$

где  $f(x) = 1 - \lambda x^2$  — нелинейная функция;  $n$  — дискретное время,  $n = 1, \dots, N$ ;  $i$  — дискретная пространственная координата,  $i = 1, \dots, L$ ;  $\varepsilon$  — параметр связи. Периодические граничные условия для данной цепочки запишутся в виде

$$x_{n,0} = x_{n,L}; \quad x_{n,L+1} = x_{n,1}. \quad (\text{П.11})$$

Задание 4.1. Решить численно систему уравнений (П.10), соответствующую цепочке диффузионно связанных логистических отображений, с граничными условиями (П.11) и начальными условиями, заданными в интервале  $[0;1]$  случайным образом с равномерным законом распределения. На пространственно-амплитудных диаграммах  $x_n(i)$  пронаблюдать возникновение и эволюцию пространственных структур  $\varepsilon = 0, 1$ ;  $\lambda = \{1, 44, 1, 64, 1, 72, 1, 80, 1, 90\}$ .

Задание 4.2. На основе пространственно-временных диаграмм пронаблюдать эволюцию дефектов и переход к развитой турбулентности при увеличении параметра нелинейности  $\lambda$  ( $\varepsilon = 0, 1$ ). Выяснить, каким образом увеличение параметра связи  $\varepsilon$  влияет на динамику системы. Построить пространственные спектры для разных конфигураций цепочки.

#### П.5. Моделирование структур в решетках связанных отображений

Возбуждаемые активные среды являются наиболее известными системами, в которых наблюдаются различные пространственно-временные структуры (например, бегущие и спиральные волны). Моделирование поведения таких систем возможно на основе дифференциальных уравнений в частных производных; решеток, составленных из систем обыкновенных дифференциальных уравнений; решеток связанных отображений; клеточных автоматов.

Рассмотрим модель возбудимой активной среды, построенную на основе решетки связанных отображений [8]. В качестве составляющего элемента решетки необходимо выбрать отображение, позволяющее моделировать переход системы в возбужденное состояние. Отображение может иметь вид

$$x_{n+1} = f(x_n) = b(x_n - H(x_n)) + c, \quad (\text{П.12})$$

где  $b$  — параметр,  $H(x)$  — функция Хевисайда ( $H(x) = 1$  для  $x \geq 0$ ,  $H(x) = 0$  для  $x < 0$ ),  $n$  — дискретное время. Будем считать, что система находится в состоянии возбуждения, если  $x > 0$ . Постоянная  $c$  определяет внешнее воздействие.

При построении решетки связанных отображений на основе отображения (П.12) будем предполагать, что воздействие определяется соседними элементами. Двумерная решетка отображений в этом случае имеет вид

$$x_{n+1}(i, j) = b[x_n(i, j) - H(x_n(i, j))] + d[H(x_n(i+1, j)) + H(x_n(i-1, j)) + H(x_n(i, j+1)) + H(x_n(i, j-1))], \quad (\text{П.13})$$

где  $d$  — параметр связи,  $i, j$  — дискретные пространственные координаты. Будем рассматривать периодические граничные условия:

$$x_n(0, j) = x_n(L, j); \quad x_n(L+1, j) = x_n(1, j);$$

$$x_n(i, 0) = x_n(i, L); \quad x_n(i, L+1) = x_n(i, 1), \quad (\text{П.14})$$

где  $L$  — размер системы.

Задание 5.1. Создайте программу, позволяющую рассмотреть динамику решетки связанных отображений (П.13), (П.14) при  $L = 50$  (решетка  $50 \times 50$ ),  $b = 0, 77$ ,  $d = 0, 06$ . Значения переменной состояния в дискретные моменты времени отмечайте оттенками серого цвета (для

получения более четкой картины поведения системы проведите предварительную оценку диапазона изменения переменной состояния). Про моделируйте распространение плоской волны вдоль одной из координатных осей системы. Для формирования плоской волны необходимо задать однородное невозбужденное состояние для всей системы  $(\{x_0(i, j)\}_{i, j=\overline{1, L}})$  и затем сформировать тонкий фронт волны (2–4 элемента), состоящий из элементов в возбужденном состоянии. Рассмотрите взаимодействие двух плоских волн, движущихся навстречу друг другу.

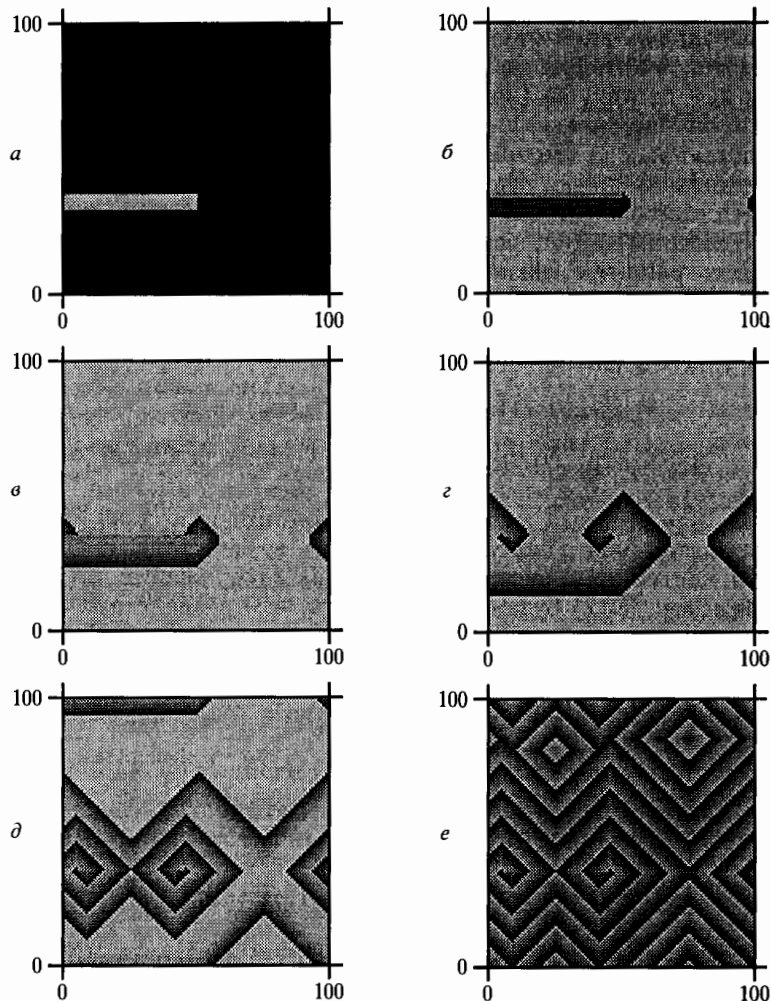


Рис. П.2. Формирование спиральной волны в решетке нелинейных элементов (П.13) с граничными условиями (П.14). Мгновенные снимки состояний  $x_n(i, j)$  при  $\lambda = 0,77$ ,  $\varepsilon = 0,06$ ,  $L \times L = 100 \times 100$ . Мгновенные снимки представлены для последовательных значений дискретного времени: а)  $n = 1$ , б)  $n = 5$ , в)  $n = 10$ , г)  $n = 20$ , д)  $n = 40$ , е)  $n = 100$

Задание 5.2. Рассмотрите формирование в системе (П.13), (П.14) спиральных волн при взаимодействии двух плоских волн, движущихся перпендикулярно друг к другу.

Задание 5.3. Рассмотрите формирование в системе (П.13), (П.14) спиральных волн при распространении в системе начального возмущения, занимающего часть пространства по одной из координат, например,  $\{x_0(i, j = \text{const})\}_{i=\overline{1, L/2}}$ . Процесс формирования спиральной волны для такого возмущения представлен на рис. П.2.

Задание 5.4. Рассмотрите формирование в системе (П.13), (П.14) спиральных волн при распространении в системе начального возмущения в виде плоской волны (например,  $\{x_0(i, j = \text{const})\}_{i=\overline{1, L}}$ ) и при наличии в системе точечного возмущения.

Задание 5.5. Рассмотрите формирование в системе (П.13), (П.14) спиральных волн из случайного начального возмущения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*К Введению*

1. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации.—М.: Мир, 1973.
2. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания.—М.: Наука, 1974.
3. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биологии.—М.: Наука, 1975.
4. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур.—М.: Мир, 1979.
5. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации.—М.: Мир, 1979. 512 с.
6. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос.— М.: Наука, 1992.
7. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны.—М.: Наука, 1997.
8. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем.— М.: Янус, 1995.
9. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур.—М.: Наука, 1999.
10. Известия вузов «Прикладная нелинейная динамика» / Тематический выпуск «Нелинейная динамика живых систем». 1994. № 3, 4.
11. Зыков В.С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах.—М.: Наука, 1984.
12. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику.—М.: Наука, 1990.

*К главе 1*

1. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем.— М.: Янус, 1995.
2. Климонтович Ю.Л. Физика открытых систем // Успехи физических наук. 1966. Т. 168.
3. Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 8. С. 109–116.
4. Пригожин И. От существующего к возникающему.—М.: Наука, 1985.

5. Изаков М.Н. Роль энтропии в открытых системах // Успехи физических наук. 1997. Т. 167, № 10. С. 1087–1094.
6. Emden R. Nature (London). 1938. V. 141. P. 908.
7. Шредингер Э. Что такое жизнь? С точки зрения физика.—М.: Атомиздат, 1972.
8. Волькенштейн М.В. Общая биофизика.—М.: Наука, 1978.
9. Волькенштейн М.В. Физика и биология.—М.: Наука, 1980.
10. Волькенштейн М.В. Биофизика.—М.: Наука, 1981.
11. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации.—М.: Мир, 1979. 512 с.
12. Lorenz E.N. Deterministic Non-Periodic Flow // J. Atmos. Sci. 1963. №. 20. P. 130–141.
13. Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение.—В кн.: Странные аттракторы: Пер. с англ. / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова.—М.: Мир, 1981. С. 88–116.

*К главе 2*

1. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего.—М.: Наука, 1997. 285 с.
2. Короновский А.А., Трубецков Д.И. Нелинейная динамика в действии.—Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995. 130 с.
3. Пойзнер Б.Н. О субъекте самоорганизации. // Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика». 1996. Т. 4, № 1.
4. Яблонский А.И. Математические модели в исследовании науки.—М.: Наука, 1986. 352 с.
5. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.—М.: Мир, 1973. 272 с.
6. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах.—М.: Мир, 1979. 512 с.
7. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов.—М.: Мир, 1960. 128 с.
8. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного.—М.: Мир, 1990. 344 с.
9. Кун Т. Структура научных революций.—М.: Прогресс, 1975. 288 с.
10. Пригожин И., Николис Г. Биологический порядок, структура и неустойчивости // Успехи физических наук. 1973. Т. 109. Вып. 3. С. 517–544.
11. Качак В.В., Мчедлова Е.С. Модель взаимодействия и эволюции двух научных направлений // Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика». 1997. Т. 5, № 4. С. 110–119.



12. Качак В. В., Мчедлова Е. С. Модель взаимодействия двух научных направлений с учетом ограничения экспоненциального роста достижений // Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика». 1998. Т. 6, № 2. С. 85–95.
13. Мчедлова Е. С. Влияние временного запаздывания на динамику взаимодействующих научных направлений // Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика». 2000. Т. 8, № 4.
14. Качак В. В., Усанов Д. А. К вопросу о взаимодействиях научных школ или об одном аргументе «за» интеграции образовательных структур // Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика». 1998. Т. 6, № 2. С. 95–96.
15. Трубецков Д. И., Кузнецов Н. И., Усанов Д. А. Интеграция — бремя ожиданий: Социально-экономические аспекты интеграции в системе образования и науки.—Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1998. 72 с.
16. Кузнецов С. П. Бифуркации удвоения в простой модели распределенной системы // Изв. вузов «Радиофизика». 1982. Т. 25, № 11. С. 1364–1368.
17. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов «Радиофизика». 1991. Т. 34, № 10–12. С. 1079–1115.
18. Waller I., Karjal R. Spatial and temporal structure in system of coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. A. 1984. V. 30, № 4. P. 2047–2055.
19. Kaneko K. Period doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice // Prog. Theor. Phys. 1984. V. 72, № 3. P. 480–486.
20. Kaneko K. Theory and applications of coupled map lattices / Ed. K. Kaneko—New York: Wiley, 1993. 195 p.
21. Мчедлова Е. С. Решетка связанных отображений с неоднородной диффузией как возможная модель интеграции высшей школы // Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика». Т. 8, № 6. С. 35–43.

## К главе 3

1. Спрингер С., Дейч Г. Левый мозг, правый мозг.—М.: Мир, 1983.
2. Уолтер Г. Живой мозг.—М.: Мир, 1966.
3. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей.—В кн. Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.—М.: Наука, 1987. С. 7–44.
4. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа.—М.: Мир, 1986.

5. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.—М.: Наука, 1984 (первое издание), 1992 (второе издание).
6. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны.—М.: Наука, 2000.

## К главе 4

1. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической задаче // Бюллетень МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1, серия А, № 16. С. 1. Позднее статья перепечатана в сб. Вопросы кибернетики. Проблемы биомедицинской кибернетики.—М., 1975. Вып. 12. С. 3.
2. Fisher R. A. The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. V. 7. P. 355. Изложение работы Фишера есть в монографии Дж. Марри (Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях.—М.: Мир, 1983).
3. Тихомиров В. Андрей Николаевич Колмогоров. Квант. 1993. № 3, 4. С. 3.
4. Шкловский И. С. Эшелон // Химия и жизнь. 1989. № 2. С. 82.
5. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва.—М.: Наука, 1980.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики.—М.: Мир, 1964. Т. 2.
7. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. Теория теплового распространения пламени // ЖФХ. 1938. Т. 12. Вып. 1. С. 100.
8. Зельдович Я. Б. Горение: нелинейная температурная волна в веществе, выделяющем тепло.—В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие.—М.: Наука, 1981. С. 30.
9. Автоволновые процессы в системах с диффузией / Сборник научных трудов.—Горький, 1981.

## К главе 5

1. Барелко В. В., Бейбутян В. М., Володин Ю. Е., Зельдович Я. Б. Тепловые волны и неоднородные стационарные состояния в системе Fe+H<sub>2</sub>.—В сб.: Автоволновые процессы в системах с диффузией.—Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 135–148.
2. Зельдович Я. Б. Горение: нелинейная температурная волна в веществе, выделяющем тепло.—В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие.—М.: Наука, 1981. С. 30.

## К главе 6

1. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: Пер. с англ.—М.: Мир, 1983. 397 с. [Murray J.D. Lectures on nonlinear differential equation. Models in biology.—Oxford: Clarendon Press, 1977.]
2. Марри Дж. Д. Отчего у леопарда пятна на шкуре // В мире науки. 1988. № 5. С. 46–54.
3. Tomas D. Artificial enzyme membranes, transport, memory and oscillatory phenomena.—In: Proc. inst. symp. on Analysis and control of immobilized enzyme systems / Eds. D. Tomas, J.-P. Kernevez. 1975. P. 115–150.
4. Youren Xu, Vest C.M., Murray J.D. Holographic interferometry used to demonstrate a theory of pattern formation in animal coats // Appl. Optics 1983. V. 22. P. 3479–3483.
5. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах.—М.: Мир, 1979. 512 с.
6. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев.—Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 1997. 391 с.
7. Пригожин И. От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках.—М.: Наука, 1985. 327 с.
8. Пригожин И., Стингерс И. Порядок из хаоса.—М.: Мир, 1986. 430 с.
9. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного: Введение.—М.: Мир, 1990. 342 с.
10. Пригожин И., Стингерс И. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени.—М.: Мир. Изд. группа «Прогресс», 1994. 272 с.
11. Кудрявцев И.К. Химические неустойчивости.—М.: Из-во Моск. ун-та, 1987. 254 с.
12. Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм —В кн.: Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г.—М.: Медгиз, 1959. С. 145–148.  
Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм // Химия и жизнь. 1982. Т. 7. С. 65.  
Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм.—В кн.: Колебания и бегущие волны в химических системах / Под ред. Р.Филд, М.Бургер: Пер. с англ. / Под ред. А.М. Жаботинского—М.: Мир, 1988. С. 648–656. [Oscillations and traveling waves in chemical systems / Eds. R. J.Field, M. Burger—Singapore: Wiley, 1985].
13. Lotka A. Elements of physical biology.—Baltimore, 1925.
14. Жаботинский А.М. Концентрационные колебания.—М.: Наука, 1974.

15. Field R.J., Koros E., Noyes R.M. Oscillations in chemical system. II. Through analysis of temporal oscillation in bromate — cerium malonic acid system // J. Am. Chem. Soc. 1972. V. 94. P. 8649–8664.
16. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах.—М.: Мир, 1985. 419 с.
17. Белоусов Л.В. Биологический морфогенез.—М.: Из-во Моск. ун-та, 1987. 239 с.
18. Шефер В. Наблюдения над утренней чашкой кофе // УФН. 1972. Т. 108. Вып. 3. С. 577–580.
19. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.—М.: Наука, 1972. 392 с.
20. Christopherson D.Y. Note of the vibration of membranes // Quart. J. Math. 1940. V. 11. P. 63.
21. Любимов Д.В., Путин Г.Ф., Чернотынский В.И. О конвективных движениях в ячейке Хеле-Шоу // ДАН СССР. 1977. Т. 235. С. 554.  
Путин Г.Ф., Ткачева Е.А. Экспериментальные исследования надкритических конвективных движений в ячейке Хеле-Шоу // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. С. 3.
22. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн.—М.: Наука, 1984. 432 с.
23. Лоренц Э.Н. Детерминированное непериодическое течение.—В кн.: Странные аттракторы.—М.: Мир, 1988. С. 88–116.

## К главе 7

1. Альбом течений жидкости и газа / Составление и авторский текст М. Ван-Дайка.—М.: Мир, 1986.
2. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей.—В кн.: Нелинейные волны. Бифуркации и структуры.—М.: Наука, 1987. С. 7–44.
3. Ди Прима Р.С., Суинни Х.Л. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности.—М.: Мир, 1984. С. 169–217.
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 7. Физика сплошных сред.—М.: Мир, 1966. С. 269–271.
5. Melo F., Umbanhowar P., Swinney H.L. Transition to parametric wave patterns in vertically oscillated granular layer // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72, № 1. P. 172–175.
6. Melo F., Umbanhowar P., Swinney H.L. Hexagons, kinks, and disorder in oscillated granular layers // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 3838–3841.
7. Umbanhowar P. Patterns in the sand // Nature. 1997. V. 389. P. 541–542.

8. Kuhl R.L., Webster H.F. // IRE Trans. 1956. ED-3. № 4. P. 172.
9. Ампилогова В.Р., Зборовский А.В., Трубецков Д.И., Худзик К.В. О проверке одной гипотезы возникновения хаоса из структур в электронных потоках / Лекции по электронике СВЧ и радиофизике.—Саратов, 1986. Кн. 1. С. 106–110.
10. Гинзбург Н.С., Ковалев Н.Ф., Петелин М.И. Канализация электромагнитных волн и эффекты сверхизлучения в неравновесных электронных ансамблях // Материалы 6 семинара «Релятивистская ВЧ электроника».—Горький, 1990. Вып. 6. С. 7–81.
11. Гинзбург Н.С., Сергеев А.С. Сверхизлучение в слоях возбужденных классических и квантовых осцилляторов // ЖЭТФ. 1991. Т. 99. Вып. 2. С. 438–446.
12. Ginzburg N.S., Novozhilova Yu.V., Sergeev A.S. Super-radiance of ensembles of classical electron-oscillators as a method for generation of ultrashort electromagnetic pulses // Nuclear Instruments and Methods in Physic Research. A 341. 1994. P. 230–233.
13. Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский В.В. Волны поляризации и сверхизлучение в активных средах // УФН. 1989. Т. 159. Вып. 2. С. 193–260.
14. Канавец В.И., Стабинис А.Ю. Спонтанное излучение и самовозбуждение малого объема классической нелинейной активной среды // Вестник МГУ. 1973. №2. С. 186–195.
15. Вайнштейн Л.А., Клеев А.И. Кооперативное излучение из малых объемов в квантовой и классической вакуумной электронике / Лекции по электронике СВЧ и радиофизике.—Саратов, 1989. Кн. 1. С. 253–255.
16. Вайнштейн Л.А., Клеев А.И. Кооперативное излучение электронов-осцилляторов // ДАН СССР. 1990. Т. 311, № 4. С. 862–866.
17. Мчедлова Е.С., Трубецков Д.И. Излучение потока взаимодействующих малых объемов, содержащих электроны-осцилляторы // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 24. С. 26–30.
18. Мчедлова Е.С., Трубецков Д.И. Особенности излучения в цепочках связанных малых объемов, содержащих электроны-осцилляторы // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 10. С. 158–167.
19. Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D. Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49, № 2. P. 132–135.
20. Eckmann J.-P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems // Reviews of Modern Physics. 1981. V. 53, № 4. Part I. P. 643–654.
21. Uherka D.J., Tresser C., Galeeva R., Campbell D.K. Solvable models for the quasi-periodic transition to chaos // Phys. Lett. A. 1992. V. 170, № 3. P. 189–194.

## К главе 8

1. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы.—М.: Наука, 1987. 240 с.
2. Полак Л.С., Михайлов А.С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах.—М.: Наука, 1983. Гл. 5.
3. Гельмгольц Г. Скорость распространения нервного возбуждения / Классика естествознания. Книга VI.—Москва–Петроград: Государственное издательство, 1923.
4. Автоволновые процессы в системах с диффузией / Сборник научных трудов.—Горький: ИНФ АН СССР, 1981.
5. Wilson H.R., Cowan J.D. // Kybernetic. 1973. V. 13. P. 55.
6. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: Пер. с англ.—М.: Мир, 1983. 397 с. [Murray J.D. Lectures on nonlinear differential equation. Models in biology.—Oxford: Clarendon Press, 1977.]
7. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика.—М.: Наука, 1984. 304 с.
8. Fitzhugh R. Mathematical models of excitation and propagation in nerve.—In: Biological Engineering / Ed. H.P. Schwan—New York: Mc. Graw-Hill, 1965. P. 1–85.
9. Fitzhugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445.
10. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. V. 50. P. 2061–2070.
11. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике.—М.: Сов. радио, 1977.
12. Яхно В.Г. Автоволновые процессы в одномерных релаксационных системах.—В кн.: Автоволновые процессы в системах с диффузией / Сборник научных трудов.—Горький: ИНФ АН СССР, 1981. С. 46–76.
13. Кринский В.И., Михайлов А.С. Автоволны.—М.: Знание, 1984. С. 10–11.
14. Фомин С.В., Беркинблит М.Б. Математические проблемы биологии.—М.: Наука, 1973. 200 с.
15. Wiener N., Rosenblueth A. The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in a network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle // Arch. Inst. Cardiol. Mex. 1946. V. 16. P. 205–265.
16. Винер Н., Розенблют А. Кибернетический сборник. Вып.3.—М.: ИЛ, 1961. С. 3–56.

17. Рабинович М.И., Езерский А.Б. Динамическая теория формообразования.—М.: Янус-К, 1998. 192 с.
18. Mikhailov A.S., Zykov V.S. Kinematical theory of spiral waves in excitable media: Comparison with numerical simulations // *Physica D*. 1991. V. 52. P. 379.
19. Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов.—М.: Мир, 1991. 280 с.

*К Приложению*

1. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. В двух частях. Часть вторая.—М.: Мир, 1990. 400 с.
2. Press W., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical recipes in C. Second edition.—Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
3. Rossler O.E. An equation for continuous chaos // *Phys. Lett. A*. 1976. V. 57. P. 397–398.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.—М.: Наука, 1970. 720 с.
5. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.—М.: Наука, 1971. 296 с.
6. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.—М.: Мир, 1990. 512 с.
7. Kaneko K. Pattern dynamics and spatiotemporal chaos // *Physica D*. 1989. V. 34. № 12. P. 1–41.
8. Kaneko K. Theory and applications of coupled map lattices / Ed. K. Kaneko.—New York: Wiley, 1993. 195 p.

Учебное издание

*ТРУБЕЦКОВ Дмитрий Иванович*  
*МЧЕДЛОВА Елена Сумбатовна*  
*КРАСИЧКОВ Леонид Валерьевич*

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ САМООРГАНИЗАЦИИ  
ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ**

*Серия: Современная теория колебаний и волн*

Редактор *Л. А. Панюшкина*  
Компьютерная графика *М. В. Ивановский*  
Компьютерный набор *Г. И. Дмитриева*  
Компьютерная верстка *А. С. Фурсов*

ИД № 01389 от 30.03.2000  
Гигиеническое заключение № 77.99.02.953.Д.003724.07.01  
от 05.07.2001 г.

Подписано в печать 01.06.2002. Формат 60×90/16.  
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 12,5. Уч.-изд. л. 13,75.  
Тираж 1000 экз. Зак. 93.

Издательство Физико-математической литературы  
119071 Москва, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с готовых диапозитивов  
ГУП «Облиздат»  
248640 Калуга, пл. Старый торг, 5