



ОСЦИЛЛЯТОР ВАН ДЕР ПОЛЯ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ: ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ К ОТОБРАЖЕНИЮ

А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина

В работе рассматривается система Ван дер Поля под периодическим импульсным воздействием. Получены приближенные двумерное и одномерное отображения. Проведен сравнительный анализ эффективности этих аппроксимирующих отображений с помощью построения карт режимов, бифуркационных диаграмм и портретов аттракторов. Обсуждаются особенности картины синхронизации в системе по сравнению с традиционным синус-отображением окружности.

Введение

Ситуации, когда система с предельным циклом подвержена внешнему периодическому воздействию, широко распространены в электронике, биологии, химии и других областях естествознания [1-5]. С точки зрения теории динамических систем это задачи о возникновении квазипериодических движений и явлении синхронизации [1, 2, 4, 5]. Среди них выделяется класс задач, когда внешнее воздействие носит характер коротких по величине, но значительных по амплитуде импульсов. В таких случаях внешнее воздействие можно рассматривать как периодическую последовательность δ -функций. Ясно, что подобные задачи привлекательны не только с точки зрения приложений, но и существенны для нелинейной динамики с позиций возможной специфики картины синхронизации. Они были рассмотрены в ряде работ [6-11] в рамках простейшей модели, представляющей собой укороченное уравнение с предельным циклом, подверженное периодической последовательности δ -импульсов. Было обнаружено, что синхронизация для такой модели обладает рядом особенностей, причем авторы предполагали, что они присущи всем системам, характеризующимся в автономном режиме предельным циклом (например, для брюсселятора, системы Ван дер Поля и др.)

Особенность задач с импульсным воздействием состоит также в том, что в промежутках между импульсами динамика дифференциальной системы вблизи предельного цикла может быть проанализирована, хотя бы приближенно, аналитическим образом. Это означает, что можно получить в явном виде соответствующее сечению Пуанкаре двумерное отображение, а в случае достаточно сильной диссипации перейти и к одномерному отображению для фазы.

Последнее является некоторым вариантом отображения окружности. Таким образом, может быть изучена проблема соответствия описания системы в терминах дифференциальных уравнений и отображений. Такая проблема применительно к нелинейному осциллятору под действием периодической последовательности δ -импульсов обсуждалась в работах [12-14]. Что касается дифференциальных систем с предельным циклом, то она ранее практически не обсуждалась, за исключением некоторых моментов в работе [15]. В настоящей работе мы и рассмотрим эту проблему на примере осциллятора Ван дер Поля под внешним периодическим импульсным воздействием. Параллельно мы в виде аналитического обзора кратко представим результаты упоминавшихся выше работ, поскольку они методически важны и уже послужили толчком для дальнейших исследований, например, для изучения синхронизации возбуждаемых ударами двух связанных систем с предельными циклами [16].

1. Вывод двумерного и одномерного отображений для системы Ван дер Поля с импульсным воздействием

Рассмотрим систему Ван дер Поля с импульсным воздействием

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B \sum \delta(t - nT), \quad (1)$$

где x - динамическая переменная, λ - параметр диссипации, T - период следования внешних импульсов, B - их амплитуда.

Получим сначала аппроксимирующее двумерное отображение. В промежутке между импульсами правая часть уравнения (1) обращается в ноль. В этом случае его можно решить приближенно методом медленно меняющихся амплитуд. Для этого представим x в виде

$$x = ae^{it}/2 + a^*e^{-it}/2, \quad (2)$$

где $a(t)$ и $a^*(t)$ комплексная и комплексно-сопряженная медленно меняющиеся амплитуды. Подставив соотношение (2) в (1) и учитывая традиционное дополнительное условие

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it} = 0, \quad (3)$$

после преобразований получим укороченное уравнение для $a(t)$

$$\dot{a} - \lambda a/2 + |a|^2 a/8 = 0. \quad (4)$$

Положим теперь

$$a(t) = R(t)e^{i\varphi(t)}, \quad (5)$$

где $R(t)$ и $\varphi(t)$ - действительные амплитуда и фаза. Подставив выражение (5) в уравнение (4), приходим к следующей системе уравнений для $R(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \dot{R} = \lambda R/2 - R^3/8. \quad (6)$$

Решив ее, находим зависимость амплитуды и фазы от времени в промежутке между импульсами

$$\varphi(t) = \varphi_n, \quad R(t) = R_n e^{\lambda t/2} [1 + R_n^{-2}(e^{\lambda t} - 1)/(4\lambda)]^{1/2}, \quad (7)$$

где R_n и φ_n - амплитуда и фаза сразу после n -го импульса. Учитывая, что к

моменту начала $(n+1)$ -го импульса проходит время, равное периоду внешнего воздействия T , и что внешнее воздействие носит дельта-образный характер (то

есть величина x не изменится, а величина $v=\dot{x}$ получит добавку, равную амплитуде внешнего воздействия B), для переменных x и v сразу после $(n+1)$ -го импульса из соотношений (2), (3), (7) получим

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= R_n e^{\lambda T/2} \cos(T+\varphi_n) / [1 + R_n^2 (e^{\lambda T} - 1) / (4\lambda)]^{1/2}, \\ v_{n+1} &= -R_n e^{\lambda T/2} \sin(T+\varphi_n) / [1 + R_n^2 (e^{\lambda T} - 1) / (4\lambda)]^{1/2} + B. \end{aligned} \quad (8)$$

Последние формулы удобнее переписать, введя комплексную величину

$$z = x + iv. \quad (9)$$

Тогда для комплексной переменной z получаем искомое двумерное отображение

$$z_{n+1} = z_n e^{\lambda T/2 - iT} / [1 + |z_n|^2 (e^{\lambda T} - 1) / (4\lambda)]^{1/2} + iB. \quad (10)$$

Получим теперь для двумерного отображения (10) аппроксимирующее одномерное. Пусть в системе реализуется сильная диссипация, и $\lambda T \gg 1$. Тогда учитывая, что $e^{-\lambda T} \rightarrow 0$, из (8) находим

$$x_{n+1} = 2\lambda^{1/2} \cos(T + \varphi_n), \quad v_{n+1} = -2\lambda^{1/2} \sin(T + \varphi_n) + B. \quad (11)$$

Для комплексной переменной z очевидно

$$\operatorname{tg} \varphi_{n+1} = -v_{n+1} / x_{n+1} = [\sin(T + \varphi_n) - C] / \cos(T + \varphi_n), \quad (12)$$

где

$$C = B / (2\lambda^{1/2}). \quad (13)$$

Сделав теперь замену $\theta_n = \varphi_n - T$ (фаза φ отсчитывается по часовой стрелке, а θ - против), получаем искомое одномерное отображение

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg}((\sin \theta_n + C) / \cos \theta_n) - T. \quad (14)$$

Заметим, что отображение (14) можно получить не только предельным переходом из (10), но и непосредственно из следующих простых физических соображений. Как вытекает из соотношения (6), при $R=0$ отвечающий установившемуся движению системы предельный цикл представляет собой окружность радиуса $R=2\lambda^{1/2}$. В случае сильной диссипации фазовые траектории достаточно быстро выходят на этот предельный цикл. Пусть изображающая точка непосредственно перед n -м внешним импульсом находится на предельном цикле в точке N и характеризуется фазой θ_n (рис. 1). В результате действия импульса координата системы не меняется, а скорость системы скачком возрастает на величину, равную амплитуде толчка B . На рисунке это отвечает тому, что изображающая

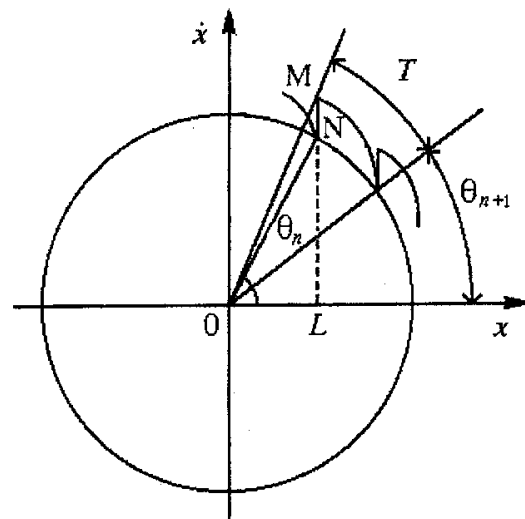


Рис. 1. Фазовая траектория в случае больших значений параметра λT . В промежутке между импульсами траектория успевает вернуться на предельный цикл, представляющий собой окружность радиуса $2\lambda^{1/2}$

точка на фазовой плоскости «поднимается» вверх на величину B и попадает в M . Затем наступает период автономной эволюции в течение времени T , равного периоду внешнего воздействия. За это время фазовый угол меняется на T и, как мы предполагаем, изображающая точка успевает вернуться на предельный цикл. Теперь она характеризуется фазовым углом θ_{n+1} . Далее наступает $(n+1)$ -й импульс и т.д. Дальнейшие рассуждения носят простой «геометрический» характер. Из треугольника OML (см. рис. 1) получаем

$$\operatorname{tg}(\theta_{n+1} + T) = (MN + NL)/(OL). \quad (15)$$

В свою очередь $OL=2\lambda^{1/2}\cos\theta_n$, $NL=2\lambda^{1/2}\sin\theta_n$, $MN=B$. Поэтому

$$\operatorname{tg}(\theta_{n+1} + T) = (B + 2\lambda^{1/2}\sin\theta_n)/(2\lambda^{1/2}\cos\theta_n), \quad (16)$$

и мы приходим к отображению (14).

В работах [8-10] решалась отчасти аналогичная задача. Авторы рассматривали более абстрактную модель, в рамках которой система с предельным циклом

$$\dot{r} = sr(1 - r^2), \quad (17)$$

$$\dot{\varphi} = 1$$

подвергалась импульсному воздействию вдоль оси x , так что

$$\dot{x} = sx(1 - x^2 - y^2) + c\sum\delta(t - nT), \quad (18)$$

$$\dot{y} = x + sy(1 - x^2 - y^2).$$

Решая уравнение (17) в промежутке между импульсами, получим

$$r(T) = r_n e^{sT} / [1 + r_n^2 (e^{2sT} - 1)]^{1/2}, \quad (19)$$

$$\varphi(T) = \varphi_n + T.$$

Поскольку затем следует толчок вдоль оси x , из (18) - (19) находим

$$x_{n+1} = r_n e^{sT} \cos(\varphi_n + T) / [1 + r_n^2 (e^{2sT} - 1)]^{1/2} + c, \quad (20)$$

$$y_{n+1} = r_n e^{sT} \sin(\varphi_n + T) / [1 + r_n^2 (e^{2sT} - 1)]^{1/2}.$$

Это, с точностью до перенормировки $r=R/(2\lambda^{1/2})$, $s=\lambda/2$ и поворота осей координат на угол $\pi/2$, уравнение (8). Соответственно, при сильном затухании можно прийти к отображению (14).

Заметим, однако, что если исходить сразу из укороченных уравнений (17), (18), то исчезает проблема соотношения дифференциальных уравнений и отображений. Действительно, в рамках такой постановки задачи отображение (10) является точным. Если же исходить из дифференциального уравнения, то оно становится приближенным настолько, насколько эффективен метод медленно меняющихся амплитуд. При этом, вообще говоря, делаются противоположные по характеру приближения. При использовании метода медленно меняющихся амплитуд мы полагаем диссипацию малой ($\lambda \ll 1$), а при переходе к одномерному отображению - сильной ($\lambda T \gg 1$). Вопрос о правомерности одновременной эффективности обоих условий требует дополнительного обсуждения. Мы полагаем, что весьма часто эти модели не совместимы. С другой стороны, двумерное (10) и одномерное (14) отображения представляют самостоятельный

интерес и приводят к новой, по сравнению со стандартным синус-отображением окружности, картине синхронизации.

2. Одномерное отображение

Рассмотрим сначала динамику одномерного отображения (14). Это отображение характеризуется следующими особенностями (рис. 2). При $C < 1$ оно является монотонно возрастающим и поэтому обратимым. (Разрыв на рис. 2 является фиктивным и связан с 2π -периодическими свойствами отображения.) При $C = 1$ отображение становится кусочно-линейным и испытывает настоящий разрыв. Наконец, при $C > 1$ оно становится необратимым бимодальным, причем величина «размаха» отображения с ростом амплитуды воздействия C уменьшается.

Эти особенности отображения можно понять из следующего рассуждения, если привлечь рисунки типа рис.

1. Как мы отмечали при выводе двумерного отображения, предельный цикл является окружностью радиуса $2\lambda^{1/2}$. Представим теперь каждую точку этого цикла смещенной на фазовой плоскости вверх в результате импульсного толчка на амплитуду внешнего воздействия V . Поскольку $C = V/(2\lambda^{1/2})$, то при $C < 1$ смещенный предельный цикл охватывает начало координат, при $C = 1$ проходит точно через него, а при $C > 1$ начало координат лежит вне этого цикла. Фаза же, являющаяся переменной одномерного отображения, отсчитывается с помощью радиус-вектора, соединяющего начало координат с точками предельного цикла. Тогда становится понятным появление разрыва в отображении и его необратимый и бимодальный характер при $C > 1$. Заметим, что представления о «смещенном» предельном цикле могут быть обобщены и на случай его произвольной формы, и с помощью развитых в [17] представлений об изохронах (линиях, отвечающих на фазовой плоскости одному и тому же значению фазы выхода на предельный цикл) позволяют делать важные выводы о свойствах одномерных отображений.

На рис. 3 а показана карта динамических режимов одномерного отображения (14) на плоскости (нормированная амплитуда внешнего воздействия C - частота $W = 2\pi/T$). На рис. 3 б представлен увеличенный фрагмент этой карты. На картах оттенками серого цвета отмечены области существования циклов различных периодов, черный цвет отвечает хаосу и квазипериодическим режимам. На карте можно видеть систему языков синхронизации с числами вращения $\omega = 1, 1/2, 1/3$ и т.д. В соответствии со свойствами одномерного отображения карта распадается на две характерные области, $C < 1$ и $C > 1$.

При $C > 1$ языки сложно устроены: внутри каждого из них у его краев располагаются области удвоения периода с последующим переходом к хаосу (см. рис. 3, б). Отметим существенное отличие от традиционного синус-отображения окружности: удвоения периода наблюдаются не при увеличении, а при уменьшении амплитуды воздействия, поскольку именно при этом растет «крутизна» экстремумов отображения (см. рис. 2). Соответственно, области удвоенного

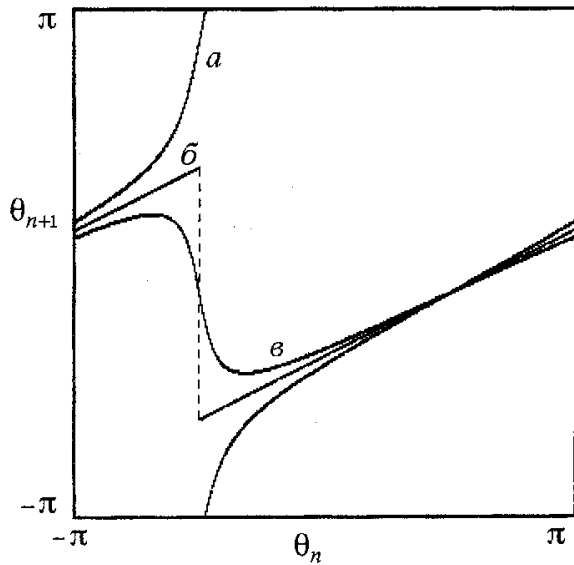


Рис. 2. Вид одномерного отображения (14) при различных C : а - 0.8, б - 1.0, в - 1.2

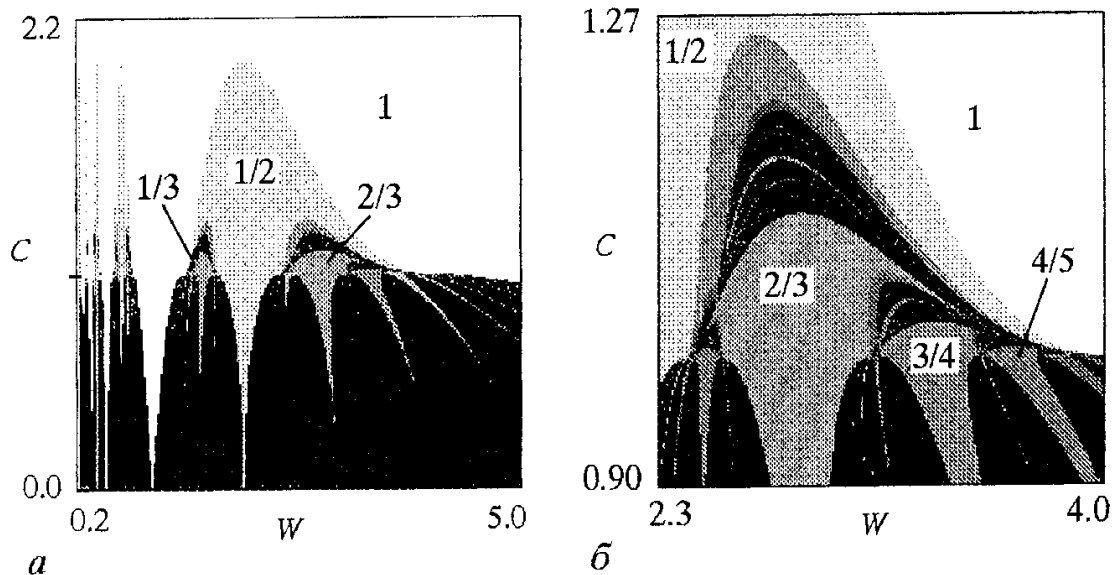


Рис. 3. Карта динамических режимов и ее увеличенный фрагмент для одномерного отображения (14). Цифрами обозначены числа вращения ω

периода выглядят на карте как «перевернутые»: удвоения периода наблюдаются при движении по карте сверху вниз. На линии $C=1$ эта картина сопряжена с расширяющимися от линии $C=0$ соответствующими языками синхронизации. При этом окно периода 3 при $C>1$, традиционное для каскада удвоений, оказывается одновременно и языком синхронизации с числом вращения $\omega=2/3$ (см. рис. 3, б). Такие же особенности характерны и для других окон и языков.

Так же хорошо эти особенности отображения видны на бифуркационном дереве, построенном для одномерного отображения (14) для значения частоты воздействия $W=3.2$ (рис. 4). Из рисунков видно, что при уменьшения параметра C система сначала демонстрирует удвоения периода с переходом к хаосу на базе цикла периода 1. Затем переход в окно цикла периода 3, на базе которого также наблюдаются удвоения периода, и т. д. После прохода языка синхронизации с числом вращения $3/4$ попадаем в область квазипериодики.

На линии $C=1$ отображение теряет обратимость и, соответственно, она

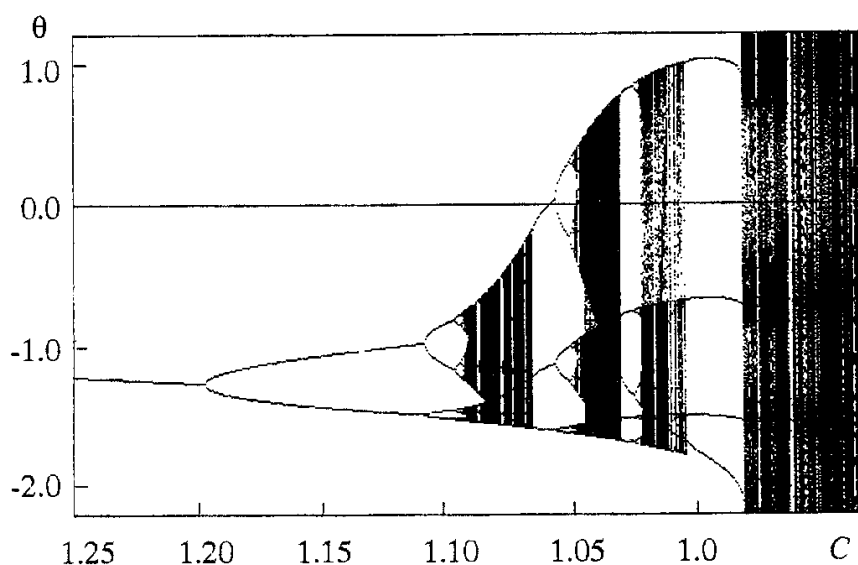


Рис. 4. Бифуркационное дерево для одномерного отображения (14) при уменьшении амплитуды C . Частота воздействия $W=3.2$

является линией начала перекрытия языков синхронизации, а чертова лестница чисел вращения на ней оказывается полной [6, 9].

На рис. 5 представлена картина языков синхронизации на плоскости (амплитуда воздействия C , частота W) в области $C \leq 1$. На первый взгляд эта картина напоминает структуру языков для стандартного синус-отображения, так что можно, казалось, ожидать соответствующей известной универсальности [2]. Однако это не так, в чем можно убедиться, обратившись к виду одномерного отображения (14) вблизи значения $C=1$ (см. рис. 2). Видно, что при $C=1$ отображение имеет не кубическую точку перегиба, а является кусочно-линейным и испытывает разрыв. В результате его свойства оказываются иными по сравнению со стандартным синус-отображением. Они достаточно подробно обсуждены в работах [6, 9]. Здесь лишь отметим, что на линии $C=1$, отвечающей появлению перекрытия языков синхронизации, ширина языков с рациональными числами вращения $\omega=p/q$, разлагаемыми в цепную дробь, дается соотношением $\Delta T = 1/[2(2^q - 1)]$ и не зависит от p [6, 9]. Если теперь взять два языка, соответствующие аппроксимации золотого сечения с помощью чисел Фибоначчи $w_n = F_{n-1}/F_n$, $w_{n+1} = F_n/F_{n+1}$, то получаем

$$\Delta T_n = 1/[2(2^{F_n} - 1)], \quad \Delta T_{n+1} = 1/[2(2^{F_{n+1}} - 1)]. \quad (21)$$

Соответственно, имеем

$$\Delta T_{n+1}/\Delta T_n \approx 1/2^{F_{n+1}-F_n} = 1/2^{F_n}. \quad (22)$$

А значит,

$$\Delta T_{n+1}/\Delta T_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Таким образом, известные соотношения скейлинга для традиционного синус-отображения окружности, когда отношение $\Delta T_{n+1}/\Delta T_n$ стремится к универсальной константе $\delta = -2.83362$ [2], не выполняются.

3. Двумерное отображение

Теперь рассмотрим динамику двумерного отображения (10). Построим для него карты динамических режимов для разных значений параметра диссипации λ на плоскости параметров (B, W) , где $W = 2\pi/T$ - частота внешнего воздействия, а B - амплитуда внешнего воздействия (рис. 6). Исходный рисунок (рис. 6, а), отвечающий значению параметра $\lambda = 0.2$, дает картину, существенно отличающуюся от случая одномерного отображения в области, где располагаются основные языки синхронизации с числами вращения $\omega = 1$ и $1/2$.

Из рис. 6, б, в видно, что с ростом параметра λ языки становятся более широкими и их внутреннее устройство усложняется: появляются области существования циклов удвоенного периода, вначале внутри языка с числом

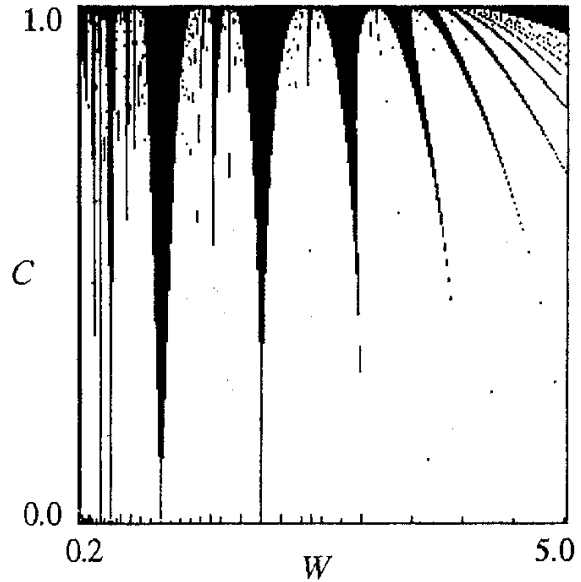


Рис. 5. Картина языков синхронизации для одномерного отображения (14) на плоскости амплитуды воздействия C , частота W в области C_1

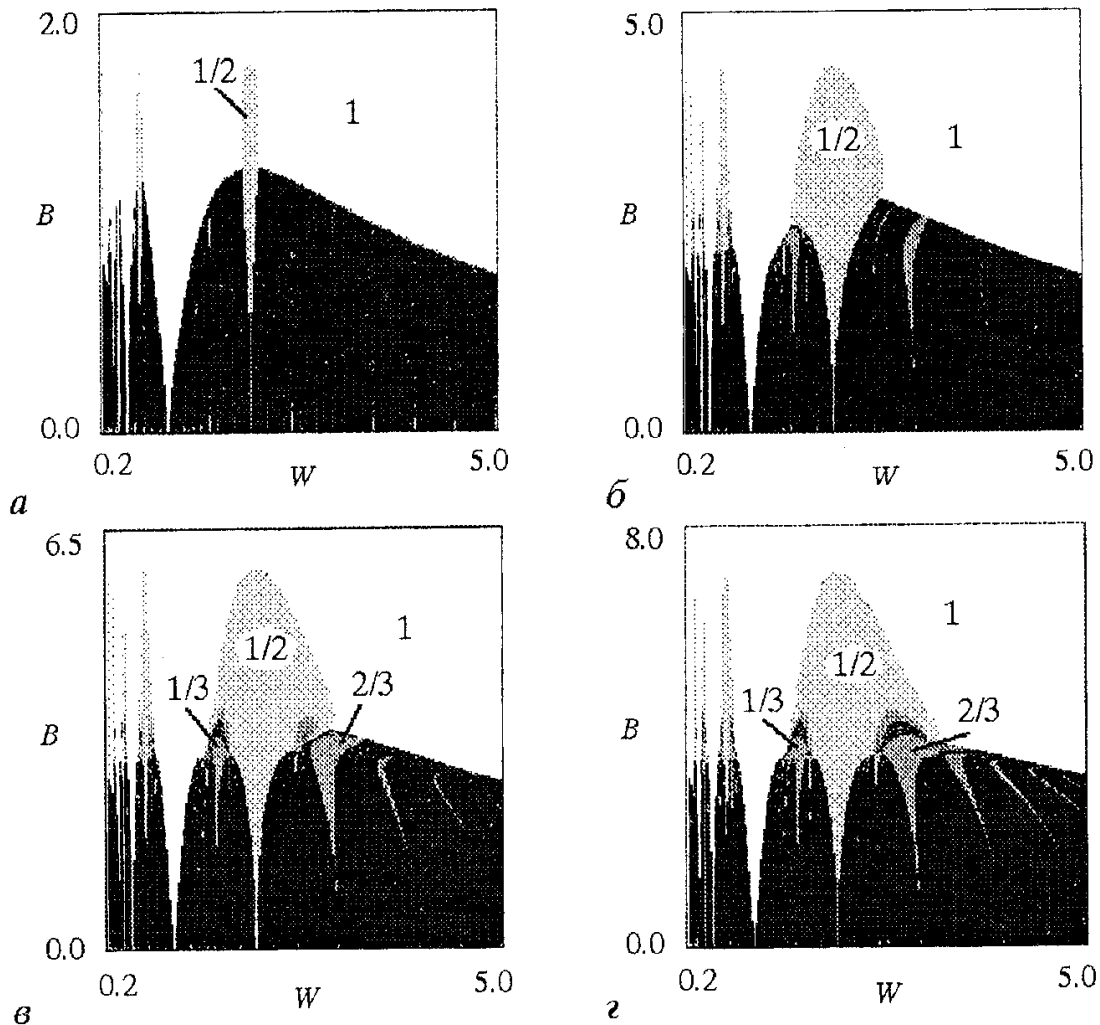


Рис. 6. Эволюция карт динамических режимов двумерного отображения (10) при увеличении параметра диссипации λ : 0.2 (а); 1.2 (б); 2.2 (в); 3.2 (г)

вращения $1/2$, затем внутри языка - $1/3$ и т. д. При дальнейшем увеличении λ появляются области хаоса. При $\lambda=3.2$ карта (рис. 6 г) визуально идентична карте одномерного отображения.

Эволюция карт более детально представлена на увеличенных фрагментах (рис. 7). При $\lambda=0.2$ можно видеть края языков с числами вращения λ и $1/2$ (рис. 7, а). Остальные языки очень узкие, и на карте, фактически, различим лишь один из них. При $\lambda=1.2$ система языков становится очень хорошо выраженной (рис. 7, б). Вершины целой системы языков, в частности, с числами вращения $1/4$, $1/3$, заканчиваются остриями, упирающимися в границу основного языка периода 1. Система языков, вершины которых прилегают к языку с числом вращения $\omega=1/2$, устроены иначе. Они не сужаются к вершине, а расширяются. Внутри них можно видеть характерную для традиционного отображения окружности область удвоенного периода в виде «crossroad area». Особенно хорошо эти особенности видны для языка периода 5. Однако при $\lambda=2.2$ (рис. 7, в) эти различия двух систем языков пропадают, и картина языков начинает модифицироваться к виду, характерному для одномерного отображения (14). Некоторые особенности еще можно наблюдать лишь в верхней части языка периода 5, которые при $\lambda=3.2$ исчезают.

Как мы говорили, критерием эффективности одномерного отображения (14) являются большие значения параметра λT . Это означает, в частности, что язык синхронизации с числом вращения $\omega=1/3$ должен в большей степени

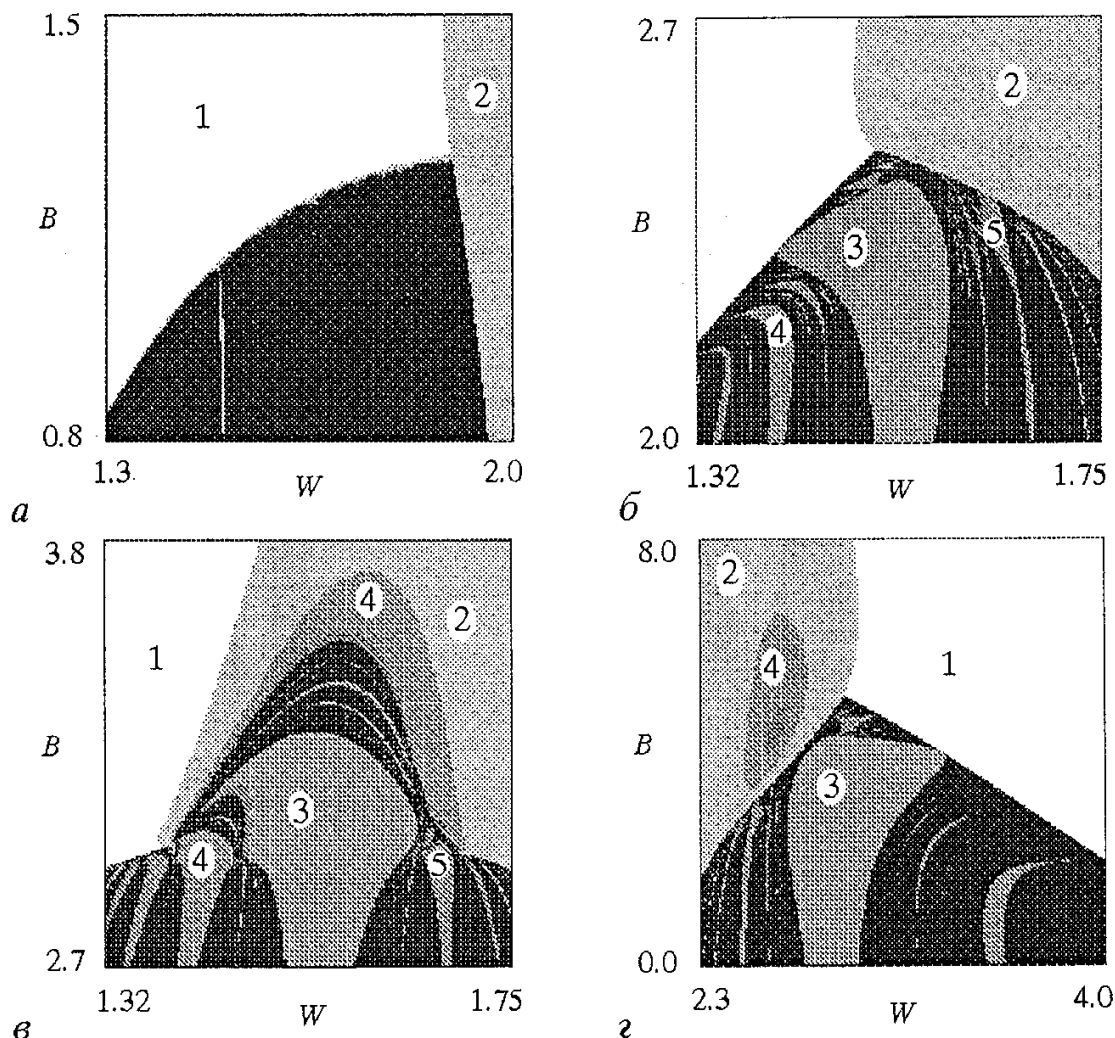


Рис. 7. Увеличенные фрагменты карт динамических режимов двумерного отображения, представленных на рис. 6. Цифры обозначают период цикла. Значения λ : 0.2 (а); 1.2 (б); 2.2 (в, г)

соответствовать одномерному случаю, нежели язык с $\omega=2/3$. (Последнему отвечает меньшее значение периода воздействия T .) Действительно, если обратиться к рис. 3, а, то можно видеть, что для одномерного отображения окрестности этих языков устроены одинаково. Для двумерного же при $\lambda=2.2$ первый из них (см. рис. 7, в) уже похож на случай одномерного отображения (см. рис. 3, б), а второй и его окрестность устроены иначе (рис. 7, г). Так, на рис. 7, г можно видеть отсутствующую на рис. 7, в картину «вложенных» друг в друга островов удвоенного периода 4 и 8, аналога которой нет на рис. 7, в.

Как модифицируется динамика двумерного отображения с ростом λ , можно усмотреть из вида бифуркационных деревьев, показанных на рис. 8. При $\lambda=0.2$ из области периода 1 сразу попадаем в область квазипериодики (рис. 8, а). Затем картина усложняется, и при $\lambda=1.2$ появляются окна других периодических режимов. Наконец, при $\lambda=2.2$ можно видеть и каскад бифуркаций удвоения периода (рис. 8, в). Графики бифуркационных деревьев также позволяют судить об эффективности одномерной аппроксимации. Для этого на рис. 8, г показано дерево для одномерного отображения (14), но в качестве переменной выбрана не входящая в него величина θ , а связанная с ней соотношением $x=2\lambda^{1/2}\cos\theta$ переменная двумерного отображения; так же перенормирована амплитуда $B=2/\lambda^{1/2}C$. Хорошо видно, что для случая $\lambda=2.2$ аппроксимация одномерным отображением для данного значения частоты выполняется очень хорошо. Случаи $\lambda=0.2$ и 1.2 демонстрируют существенные отличия.

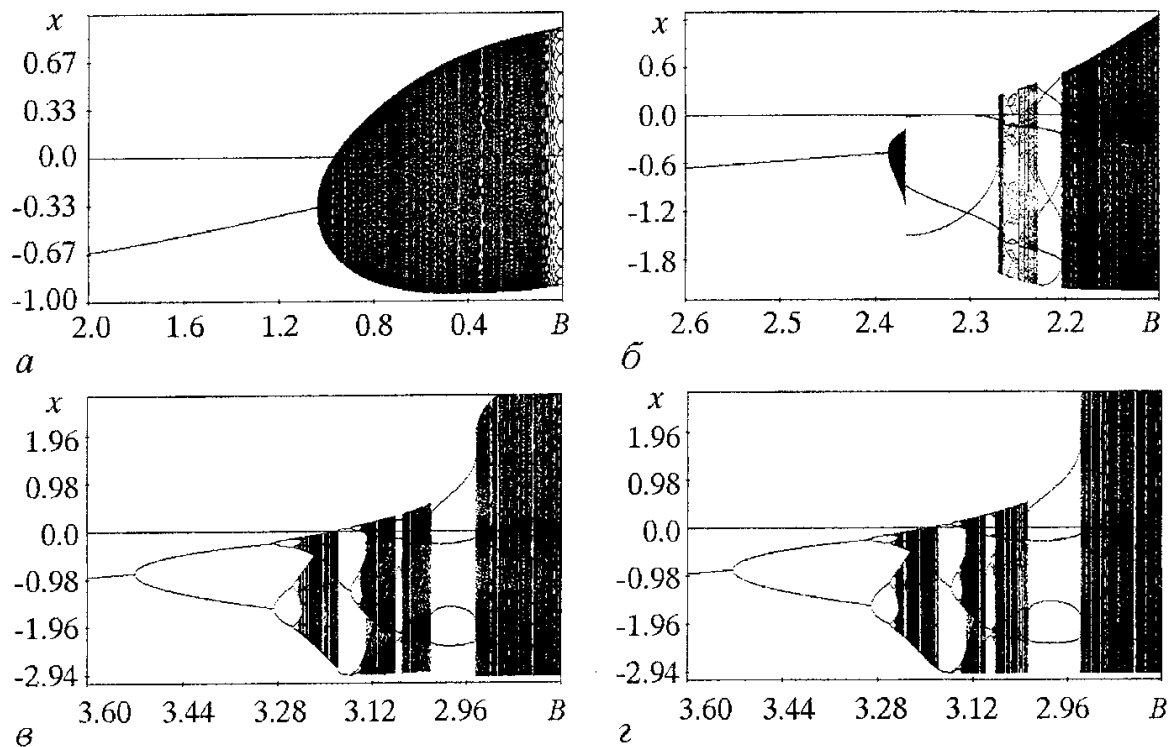


Рис. 8. Бифуркационные деревья двумерного отображения при $W=1.45$ и $\lambda=0.2$ (а), 1.2 (б), 2.2 (в) и одномерного отображения $W=1.45$, $\lambda=2.2$ (г)

Как мы уже отмечали, эффективность одномерной аппроксимации управляется параметром λT , и если мы уменьшим частоту в два раза, то одномерная аппроксимация будет работать хорошо и при уменьшенном в два раза параметре λ . Рис. 9, на котором показаны бифуркационные деревья одномерного и

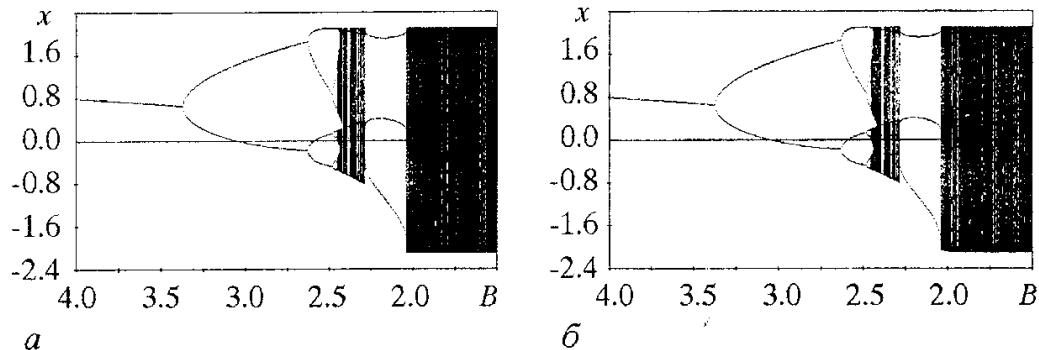


Рис. 9. Бифуркационные деревья одномерного отображения (а) и двумерного (б) при частоте воздействия $W=0.725$ и параметре $\lambda=1.1$. Используются переменные, характерные для двумерного отображения

двумерного отображений с уменьшенными по сравнению с рис. 8, в в два раза значениями частоты и параметра λ , убеждает, что это действительно так. В этом случае одномерная аппроксимация эффективна и при $\lambda=1.1$.

4. Генератор Ван дер Поля

Теперь рассмотрим динамику дифференциальной системы - генератора Ван дер Поля с импульсным воздействием (1). Вначале построим для него карты динамических режимов на плоскости параметров (B, W) , где W - частота внешних импульсов, а B - их амплитуда (рис. 10). На картах использованы те же масштабы,

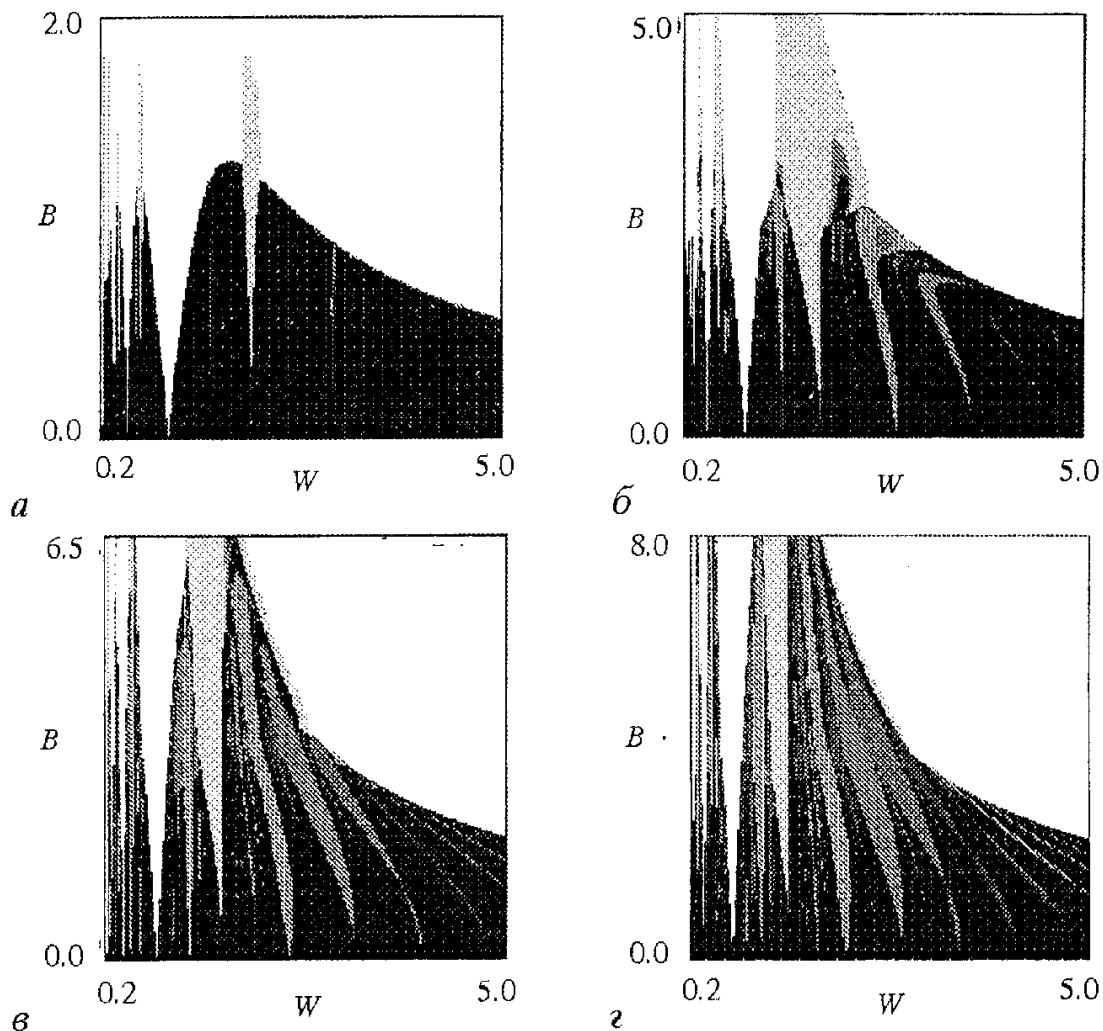


Рис. 10. Эволюция карт динамических режимов для генератора Ван дер Поля с импульсным воздействием при изменении параметра диссипации λ : *a* - 0.2; *б* - 1.2; *в* - 2.2; *г* - 3.2

что и на рис. 5, отвечающем двумерному отображению. Это позволяет их попарно сравнить.

Можно видеть, что при $\lambda=0.2$ карты практически идентичны. При $\lambda=1.2$ появляются довольно существенные различия. Для дифференциальной системы языки более узкие, появляются островки удвоенного периода. Карты же дифференциальной системы и двумерного отображения, отвечающие значениям $\lambda=2.2$ и 3.2 , практически не похожи.

Мы можем дать и другие иллюстрации, позволяющие судить о соответствии дифференциальной системы и двумерного отображения. Так, на рис. 11 и 12 показаны сечения Пуанкаре и портреты аттракторов для разных значений λ . Хорошо видно, что соответствие наблюдается лишь для $\lambda=0.2$. При $\lambda=1.2$ нижние рисунки демонстрируют режимы, совершенно отличные друг от друга. Система Ван дер Поля демонстрирует развитый хаос, а двумерное отображение - 2-цикл. То же самое можно усмотреть из графика бифуркационного дерева при $\lambda=1.2$ для дифференциальной системы (рис. 13, *a*) и двумерного отображения (рис. 13, *б*).

Итак, двумерное отображение эффективно при малых $\lambda \leq 0.5$, что и следует из исходных предположений метода медленно меняющихся амплитуд. Если теперь в качестве критерия работоспособности одномерной аппроксимации использовать оценку $\lambda T \geq 2$, то получим, что оба приближения работают при значениях периода воздействия $T \geq 4$ или для значений частоты $W \leq 1.5$. Эта оценка хорошо согласуется с численным исследованием: практически на всех картах, отвечающих дифференциальной системе и двумерному и одномерному отображениям (см. рис. 2, 6, 10),

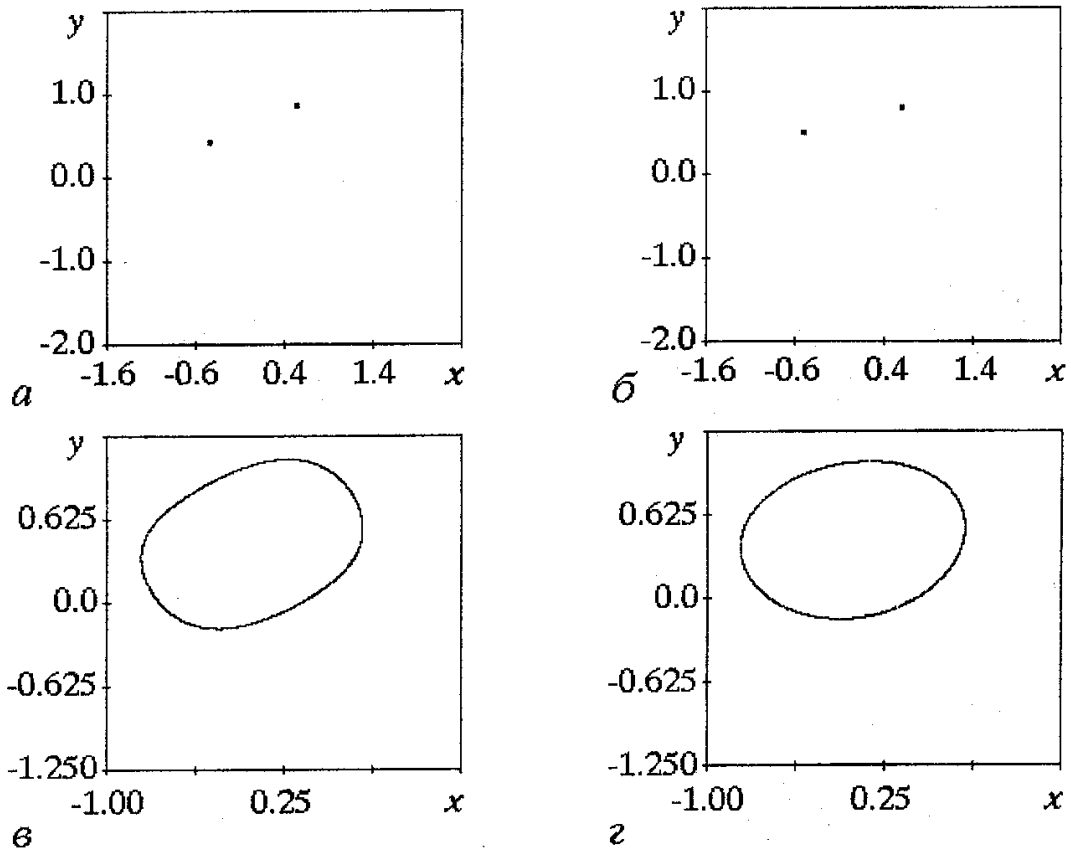


Рис. 11. Сечения Пуанкаре для генератора Ван дер Поля (а, в) и портреты аттракторов двумерного отображения (15) (б, г) при $W=2.05$; $B=1.3$ (а, в); $B=0.8$ (б, г). Значение параметра диссипации $\lambda=0.2$

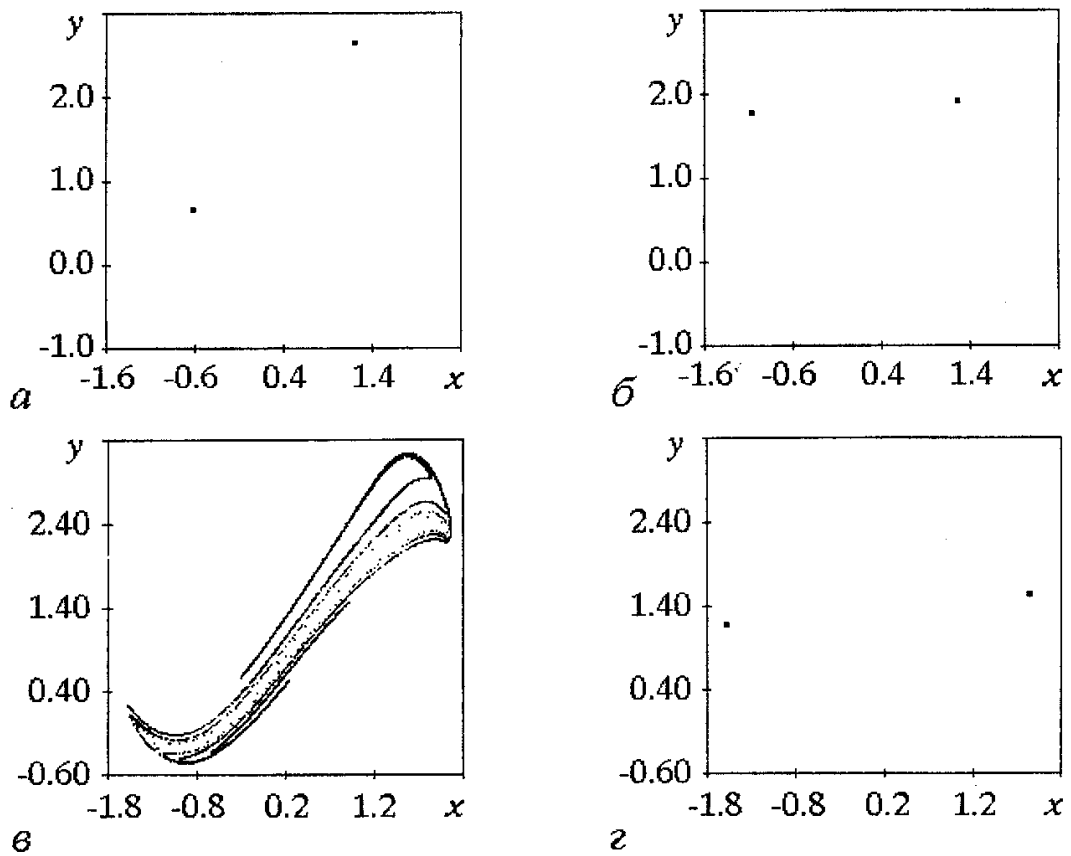


Рис. 12. Сечения Пуанкаре для генератора Ван дер Поля (а, в) и портреты аттракторов двумерного отображения (15) (б, г) при $W=2.05$; $B=3.7$ (а, в); $B=2.7$ (б, г). Значение параметра диссипации $\lambda=1.2$

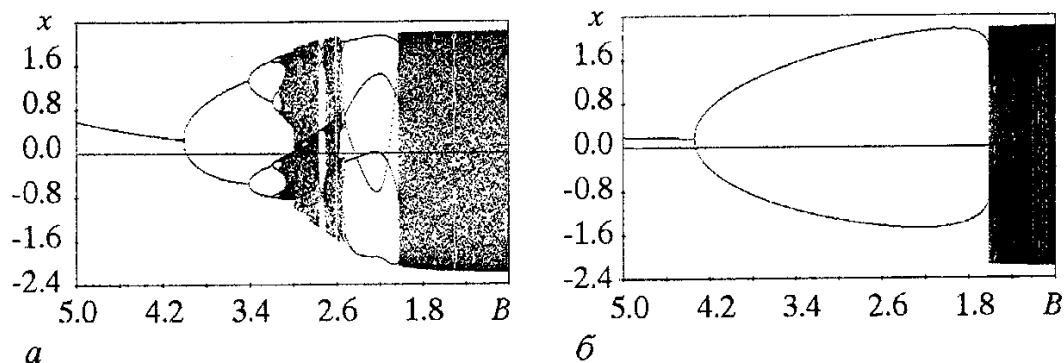


Рис. 13. Бифуркационное дерево для генератора Ван дер Поля под периодическим импульсным воздействием (а) и двумерного отображения (б) при $W=2.1$ и $\lambda=1.2$

область $W \leq 1.5$, в которую попадает и основной язык синхронизации, устроена одинаково.

В то же время двумерную, а тем более одномерную аппроксимацию в задаче о системе Ван дер Поля с импульсным воздействием следует применять с большой осмотрительностью, поскольку многие существенные элементы картины не описываются тем или иным приближением. Это, в свою очередь, означает, что использование модели (18) [8-10], основанной на идее импульсного воздействия на простейший предельный цикл в виде окружности, для реальных дифференциальных систем также требует осторожности.

Системы с импульсным воздействием, как мы видели, в одномерном случае приводят к отображениям с разрывами, а в рамках модели (14) - к кусочно-линейному отображению с разрывом. Казалось бы, можно ожидать, по аналогии с традиционным синус-отображением, что в этом случае реализуется новый тип универсальности, простейшие свойства которого установлены в [6, 9]. Насколько общими являются результаты работ [6, 9]? Этот вопрос в свете представленного здесь исследования следует признать открытым.

Работа выполнена при поддержке программы CRDF REG-006 (грант REC-006), грантов РФФИ (№ 00-02-17509 и № 01-02-06391) и Фонда содействия отечественной науке.

Библиографический список

1. Помо П., Берже И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 386 с.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990, 240 с.
3. Winfree A. T. The geometry of biological time. Berlin: Springer, 1980.
4. Ott E. Chaos in dynamical systems. Cambridge university press. 1993. 386 p.
5. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 382 с.
6. Ding E.J. and Hemmer P.C. Exact treatment of mode locking for a piecewise linear map // Journal of Stat. Phys. 1987. Vol. 46, № 1,2. P. 99.
7. Ullmann K. and Caldas I.L. Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system // Chaos, Solitons & Fractals. 1996. Vol. 7, № 11. P. 1913.
8. Glass L. and Sun J. Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // Phys. Rev. 1994. Vol. 50, № 6. P. 5077.
9. Ding E.J. Analytic treatment of a driven oscillator with a limit cycle // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35, № 6. P. 2669.
10. Ding E. Analytic treatment of periodic orbit systematics for a nonlinear driven oscillator // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34, № 4. P. 3547.
11. Ding E.J. Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36, № 3. P.1488.

12. *Kuznetsov A.P., Turukina L.V. and Mosekilde E.* Dynamical systems of different classes as models of the kicked nonlinear oscillator // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2001. Vol. 11. № 4.

13. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2000. Т. 8, № 2. С. 31.

14. *Gonzalez D.L. and Piro O.* Chaos in a nonlinear driven oscillator with exact solution // *Phys. Rev. Lett.*. 1983. Vol. 50, № 12. P. 870.

15. *Ding E.J.* Structure of the parameter space for the van der Pol oscillator // *Physica Scripta*. 1988. Vol. 38. P. 9.

16. *Viana R.L. and Batista A.M.* Synchronization of coupled kicked limit cycle systems // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998. Vol. 9, № 12. P. 1931.

17. *Campbell A. et. al.* Isochrones and the dynamics of kicked oscillators // *Physica A*. 1989. № 155. P. 565.

*Саратовское отделение Института
радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный университет*

Поступила в редакцию 11.06.01

KICKED VAN DER POL OSCILLATOR: FROM DIFFERENTIAL EQUATION TO MAPS

A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina

Dynamics of a kicked Van der Pol system is considered. Approximate 2D and 1D maps are derived. Comparative analysis of efficiency of these maps is undertaken with the help of dynamical regimes charts, bifurcation diagrams and phase portraits technique. Peculiarities of the synchronization effects the kicked oscillator are discussed in comparison with traditional circle map.



Кузнецов Александр Петрович - родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Опубликовал более 100 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» СГУ и СО ИРЭ РАН. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ, пяти научно-популярных книг и учебных пособий.



Тюрюкина Людмила Владимировна - родилась в 1977 году. В 2000 году окончила факультет нелинейных процессов СГУ. В настоящее время - аспирант кафедры динамических систем СГУ, младший научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сравнительный анализ описания динамических систем с помощью математических моделей разных классов. Автор четырех научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Принимала участие в 10 международных научных конференциях. В 1999, 2000, 2001 годах стажировалась в Датском техническом университете, в 2001 году - в Потсдамском университете. Соросовский студент (1998, 1999, 2000), соросовский аспирант (2001). Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов (1999-2000, 2001-2002). E-mail: Turukina@info.sgu.ru