Бифуркации
в динамических системах

Изв. вузов «ПНД», т.11, № 1, 2003

УДК 517.9

О КРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОТОБРАЖЕНИЯ С БИФУРКАЦИЕЙ НЕЙМАРКА - САКЕРА ПРИ РАЗРУШЕНИИ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКЕ ФЕЙГЕНБАУМОВСКОГО КАСКАДА

А.П. Кузнецов, А.Ю. Кузнецова, И.Р. Сатаев

Обсуждаются универсальность и скейлинг при разрушении фазовой синхронизации в предельной точке каскада бифуркаций удвоения периода в двумерном отображении с суперкритической бифуркацией Неймарка - Сакера.

Как известно, существует три основных сценария перехода к хаосу в динамических системах при вариации управляющих параметров. Мы обратимся к переходу к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода и через разрушение квазипериодического режима. Каждый из этих сценариев связан со своим классом универсальности [1,2]. Описываемое нами явление может происходить в некоторых динамических системах, где эти два сценария встречаются на пороге хаоса одновременно. В настоящем сообщении такая ситуация изучена для двумерного отображения с бифуркацией Неймарка - Сакера.

Наличие именно двух измерений в фазовом пространстве в рамках указанной постановки задачи принципиально. Действительно, «встреча» двух сценариев перехода к хаосу возможна, если они связаны с разными фазовыми переменными. Тогда в пространстве параметров возможна ситуация, когда эти сценарии сосуществуют. Наиболее популярным примером двумерного отображения в нелинейной динамике является отображение Эно. Оно демонстрирует широкое разнообразие интересных феноменов: каскад бифуркаций удвоения, кризисы и др. Но некоторые важные бифуркации, в первую очередь, бифуркация рождения инвариантной кривой, вследствие постоянства детерминанта линеаризованной матрицы отображения остаются вне поля рассмотрения. Поэтому перед нами стоит задача подбора двумерного отображения, которое может демонстрировать сосуществование двух указанных сценариев и, в то же время, претендовать на роль достаточно универсальной модели. Это является мотивацией введения для исследования нового отображения, демонстрирующего все важные бифуркации в одной модели.

Как известно [1,2], устойчивый предельный цикл двумерных отображений может терять устойчивость в фазовом пространстве тремя способами: либо один из мультипликаторов отображения становится равным -1 или 1, либо два комплексно-сопряженных мультипликатора лежат на единичной окружности.

Томпсон и Стюарт в монографии [3] указывают, что для любого двумерного отображения критерием устойчивости на плоскости (след S, детерминант J его линеаризованной матрицы) является треугольник, правая сторона которого соответствует линии бифуркации седло-узел, левая сторона - линии бифуркации удвоения периода, а верхняя сторона - линии суперкритической бифуркации Неймарка - Сакера (бифуркации рождения инвариантной кривой или тора). Вершины треугольника устойчивости соответствуют точкам, где пара мультипликаторов обращается в (-1,+1), или (-1,-1), или (+1,+1) (рис. 1). Опираясь на это, в качестве первого шага построим отображение

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Sx_n - y_n, \\ y_{n+1} &= Jx_n, \end{aligned} \tag{1}$$

в котором след S и детерминант J его линеаризованной матрицы выбраны как управляющие параметры. На плоскости этих параметров отображение (1), очевидно, будет демонстрировать треугольник устойчивости, показанный на рис. 1.

Добавим теперь в отображение квадратичную нелинейность. Это естественно сделать в виде добавки слагаемого (x^2+y^2)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (y_n^2 + x_n^2), \\ y_{n+1} &= Jx_n - (y_n^2 + x_n^2)/5. \end{aligned} \tag{2}$$

(Коэффициент 1/5 введен во второе уравнение для более удобного представления результатов и не принципиален.)

Отображение (2) уже будет демонстрировать требуемые свойства. Однако для дальнейшего нам понадобится ввести асимметрию в нелинейность, что можно сделать при помощи дополнительного параметра ε

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (\varepsilon y_n^2 + x_n^2), \\ y_{n+1} &= Jx_n - (y_n^2 + x_n^2)/5. \end{aligned} \tag{3}$$

Карта режимов отображений (2) и (3) на плоскости параметров S и J демонстрирует треугольник устойчивости Томсона - Стюарта (рис. 2). Оттенками серого цвета на рисунке обозначены области существования различных периодических режимов. Некоторые периоды указаны на рисунке. Область периода 1 и образует треугольник устойчивости. В то же время каждая из сторон треугольника, благодаря нелинейности, инициировала определенный сценарий перехода к хаосу. Вдоль левой стороны треугольника устойчивости развивается переход к хаосу через бифуркации удвоения периода, вдоль правой имеет место касательная бифуркация с жестким переходом на другой режим, а сверху к линии бифуркации Неймарка - Сакера

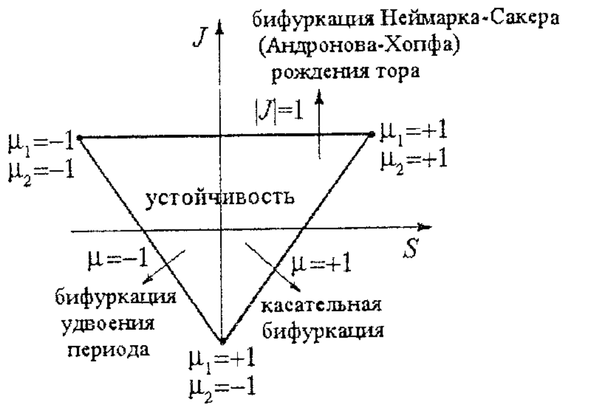


Рис. 1. Треугольник устойчивости двумерных отображений по Томсону и Стюарту [3] на плоскости (след S, якобиан J) линеаризованной матрицы

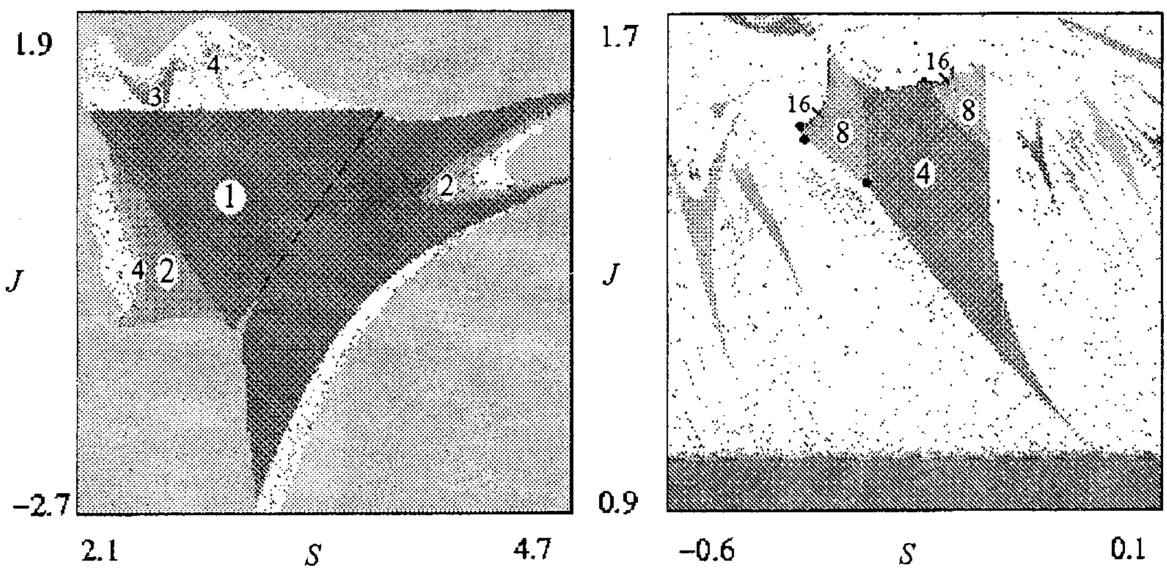


Рис. 2. Карта динамических режимов отображения (2) на плоскости параметров (S, J). Справа - увеличенный язык синхронизации с периодом 4

примыкает система языков синхронизации. Справа приведен один из них - язык синхронизации с числом вращения $^1/_4$ (период 4).

Даже беглого взгляда на рисунок достаточно, чтобы понять, что система языков в окрестности бифуркации Неймарка - Сакера устроена иначе, чем для классических отображений окружности или кольца [1,2]. Можно указать следующие характерные особенности. Верхняя сторона языков образована линией вторичной бифуркации Хопфа. Вдоль края языка развивается переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума; на краю существует последовательность точек коразмерности два, где кривые бифуркации удвоения периода с мультипликатором -1 встречают линию седло-узловой бифуркации с мультипликатором +1. Мы называем такие точки терминальными [2]. Наконец, если идти вдоль края языков Арнольда, то переход к хаосу через разрушение тора происходит уже возле первой терминальной точки. Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая внутреннюю структуру языка Арнольда периода 4, показана на рис. 3. Штрихпунктирной линией обозначены линии бифуркации седло-узел, сплошной линией - линии бифуркации удвоения периода, пунктирной - линии вторичной бифуркации Хопфа. Отмечены терминальные точки кривых бифуркаций удвоения периода. Мы предполагаем, что вычисленная последовательность терминальных точек, приведенная в табл. 1, бесконечна и сходится к критической точке с мультипликаторами, близкими к -1 и

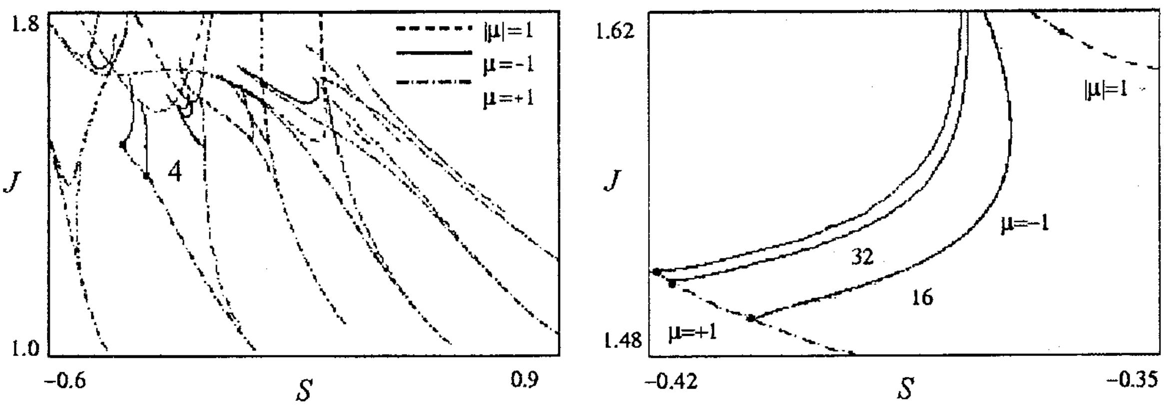


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма отображения (2) на плоскости параметров (S, J) для языка синхронизации периода 4 и ее увеличенный фрагмент в окрестности критической точки

Таблица 1

Последовательность терминальных точек линий бифуркаций удвоений периода при оптимальном значении ε=0.535 и оценки константы скейлинга в пространстве параметров

$$\delta_{2,S} = (S_{N/4}-S_{N/8})/(S_N-S_{N/2}),\ \delta_{2,J} = (J_{N/4}-J_{N/8})/(J_N-J_{N/2})$$

N	S	J	$\delta_{2,S}$	$\delta_{2,J}$
4	-0.39772949746572545	1.4242792555931527		
8	-0.52787573309833224	1.5109546360650039		
16	-0.54522794023774945	1.5388563593567191		
32	-0.54912839619867837	1.5476047028546780		
64	-0.54848447154228996	1.5460314205857346		
128	-0.54905304308486091	1.5474031718916161	6.860097	6.377500
256	-0.54885866146316653	1.5469257709038009	3.312683	3.295515
512	-0.54898370750538472	1.5472314728483525	4.546898	4.487218
1024	-0.54893664526825736	1.5471159042695048	4.130310	4.130889
2048	-0.54896586510927747	1.5471875798768000	4.279491	4.265076
...				
С-точка	-0.548966...	1.547188...	4.19244418	

мультипликаторами, близкими к -1 и +1. Эта точка достигается вариацией двух параметров: вариация S приводит к бифуркации удвоения периода и вариация J ведет к седло-узловой бифуркации.

Мы полагаем, однако, что это не новая критическая ситуация, а описанная ранее в работах [4-6]. В этих работах посредством ренормгруппового анализа показано, что возможен тип критического поведения, связанный с ренорм-циклом периода 2 - устойчивой точкой преобразования учетверения и названный С-типом критичности. Его характерным признаком является накопление терминальных точек, в которых мультипликаторы обращаются в -1 и +1 на плоскости параметров, что и позволяет предположить наличие С-типа критичности в нашей задаче.

Более строгая идентификация этого типа критичности наталкивается, однако, (в отличие, например, от классического фейгенбаумовского поведения) на некоторое затруднение принципиального порядка. Оказывается, что спектр соответствующего ренормгруппового уравнения содержит собственное значение, хотя и меньшее 1 (то есть асимптотически не существенное), но близкое к 1. Вследствие этого ясно выраженный С-тип критического поведения наблюдается только на глубоких уровнях разрешения бифуркационной структуры в окрестности критической точки. В промежуточной асимптотике, на не очень глубоких уровнях разрешения, это дополнительное собственное число проявляется и разрушает универсальность. Истинная универсальная картина может оказаться недостижимой даже с помощью современных компьютеров.

ровать еще один из параметров отображения (третий), что позволяет исключить влияние медленной моды ренормгруппового уравнения. С этой целью в исследуемом отображении и использовался параметр ε. Для определения оптимального значения ε мы искали циклы периодов 4^k, 4^{k+1}, k=0,1,... и сравнивали их мультипликаторы с универсальными значениями, определенными в работах [4-6]. Затем, меняя постепенно параметр ε, следили за изменениями мультипликаторов нескольких сосуществующих циклов. Чем ближе к оптимальной точке, тем ближе должны быть мультипликаторы к универсальным значениям. На заключительной стадии этой процедуры оптимальное значение параметра ε было оценено как 0.535.

В табл. 1 для языка Арнольда периода 4 показана сходимость последовательности терминальных точек к критической точке С-типа при оптимальном значении параметра ε

$$S_C = -0.548966..., J_C = 1.547188... \tag{2}$$

В этой критической точке существует бесконечное множество аттракторов - устойчивых циклов периодов $2{\cdot}4^k$ и неустойчивых циклов периодов 4^k, k=0,1,... В табл. 2 показано, что последовательно вычисленные для каждого цикла мультипликаторы сходятся к универсальным значениям, в табл. 1 и 3 также проверена сходимость констант скейлинга фазового пространства и пространства параметров к универсальным значениям, вычисленным в [4-6].

Итак, мы предложили новое модельное отображения со всеми бифурка-

Таблица 2

Циклы периодов $N=2^k$, k=5,6... и их мультипликаторы в С-точке (3)

N	x	y	μ_1	μ_2
64	-0.1723834013669912	0.6744394795975487	1.179719	
			-0.874220	
128	-0.1707046006160449	0.6740278492946273		0.859691
				-0.695732
256	-0.1708068694513571	0.6740657874848399	1.175752	
			-0.855538	
512	-0.1706608673354479	0.6740282547483277		0.850658
				-0.722936
1024	-0.1706913598068464	0.6740368962348172	1.172441	
			-0.847454	
2048	-0.1706718741712245	0.6740317417780291		0.847450
				-0.725255
...				
С-точка			1.174459...	0.847450...

Таблица 3

Оценки константы скейлинга фазового пространства

N	$\Delta x_{N/4}/\Delta x_N$	$\Delta y_{N/4}/\Delta y_N$
256	7.053254	7.104247
512	6.199600	6.181228
1024	6.699108	6.716163
2048	6.539725	6.539759
C-точка	6.565350	

циями, характерными для двух измерений. Мы продемонстрировали для такого отображения возможность ситуации сосуществования сценариев перехода к хаосу через удвоения периода и через разрушение квазипериодического движения. Было показано, что такая ситуация ассоциируется с определенным типом критичности - типом C. Возможность ренормгруппового описания для этого типа критичности и степень общности рассуждений при выводе модельного отображения говорят в пользу универсальности ситуаций разрушения фазовой синхронизации в предельной точке фейгенбаумовского каскада. В качестве возможного примера укажем на исследованную эмпирически в [7] систему с запаздыванием, приводящуюся к двумерному отображению, демонстрирующему замечательное сходство с описанной в настоящем сообщении картиной.

Работа поддержана Федеральной целевой программой Интеграция и Американским фондом гражданских исследований и развития (грант CRDF REC-006), а также Фондом содействия отечественной науке.

Библиографический список

1. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990. 240 с.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
3. *Thompson J.M., Stewart H.B.* Nonlinear dynamics and chaos. Wiley and Sons, New York. 1986.
4. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Period-doubling for two-dimensional non-invertible maps: Renormalization group analysis and quantitative universality // Physica D. 1997 Vol. 101. P. 249.
5. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* New types of critical dynamics for two-dimensional maps // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 162. P. 236.
6. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // Physica D. 1997. Vol. 109. P. 91.
7. *Maistrenko V., Maistrenko Y., Sushko I.* Noninvertible two-dimensional maps arising in radiophysics // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. Vol. 4, № 2. P. 383.

ИРЭ РАН, Саратовское отделение
Саратовский государственный университет

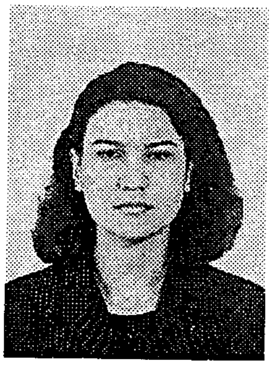
Поступила в редакцию 21.10.02

CRITICAL BEHAVIOR OF THE MAP WITH NEIMARK-SACKER BIFURCATION FOR THE PHASE SYNCHRONIZATION BREAKUP AT THE ACCUMULATION POINT OF PERIOD DOUBLING CASCADE

A.P. Kuznetsov, A.Yu. Kuznetsova, I.R. Sataev

Universality and scaling are discussed for the case of the phase synchronization breakup at the accumulation point of period doubling cascade in two-dimensional map with supercritical Neimark-Sacker bifurcation.

Кузнецов Александр Петрович - родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Кузнецова (Потапова) Анна Юрьевна - родилась в Саратове (1978). Окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2000). В настоящее время является аспирантом кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - теория катастроф, физика нелинейных динамических систем, динамический хаос. Автор шести публикаций. Принимала участие в четырех международных научных конференциях. В 2000 году работала в Датском техническом университете в научной группе профессора Э. Мозекилде.

Сатаев Игорь Рустамович - родился в 1959 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - критические явления в нелинейной динамике, моделирование динамики на пороге хаоса, применение численных методов для решения ренормгрупповых уравнений. Автор 30 научных публикаций.