



## ОБ ОДНОМ ТИПЕ ПЕРЕХОДА ПОРЯДОК - ХАОС В СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА

*А.П. Кузнецов, А.В. Савин*

Исследовано поведение на пороге хаоса системы связанных обратимых двумерных отображений. Показано, что тип критического поведения на пороге хаоса, обнаруженный в системе связанных одномерных необратимых отображений, сохраняется и при переходе к двумерным отображениям, но лишь при некотором определенном способе введения связи. В пространстве параметров такой системы определены координаты критической точки и продемонстрирован скейлинг в ее окрестности.

### Введение

Связанные системы со сложной динамикой являются популярным в нелинейной динамике объектом исследования. К настоящему времени имеется большое количество посвященных им работ, в которых рассматриваются проблемы синхронизации (в том числе хаотической) [1-5], пространственно-временные явления в цепочках и более сложных структурах из связанных систем [6-9] и т.д. В центре внимания настоящего сообщения - один из возможных типов критического поведения на пороге хаоса, который может наблюдаться в связанных системах. К пониманию возможности этого типа поведения можно прийти с помощью следующего рассуждения. Представим себе сначала две однонаправленно связанные системы с удвоениями периода, например, два связанных логистических отображения. В этом случае первая подсистема полностью независима от второй. Будем варьировать управляющий параметр первой подсистемы. В силу независимости она будет демонстрировать классический фейгенбаумовский переход к хаосу. Зафиксируем значение управляющего параметра, соответствующее точно порогу возникновения хаоса - *критическое* значение. Затем, варьируя управляющий параметр второй подсистемы, выведем и ее на порог хаоса. В этом случае вторая подсистема будет демонстрировать некоторый новый тип критичности, известный как бикритическое поведение и исследованный в работах [10-12]. Ясно, что, поскольку бикритический тип поведения достигается вариацией двух параметров, то ему отвечает коразмерность два, в то время как классическому переходу через удвоения периода по Фейгенбауму соответствует коразмерность один. Далее включим небольшое обратное воздействие второй подсистемы на первую. Можно ожидать, и это действительно так, что подстройкой обеих управляющих

параметров подсистем можно вновь реализовать критическое поведение на пороге хаоса. Его свойства, однако, оказываются иными, чем при однонаправленной связи. Такой тип поведения получил специальное название FQ. В его окрестности встречаются и фейгенбаумовский сценарий перехода через удвоения периода (F - Feigenbaum), и переход через квазипериодичность (Q - Quasiperiodicity) [13]. В работах [13-16] для системы неидентичных логистических отображений с квадратичной связью этот тип динамики был достаточно подробно изучен, в том числе с помощью ренормгруппового анализа. Были также рассчитаны соответствующие константы скейлинга, универсальные мультипликаторы и т.д.

Рассмотренная в [13] система представляла собой два связанных *необратимых* отображения. В настоящей работе исследован вопрос, будет ли наблюдаться тип критичности FQ в связанных *обратимых* системах? Скажем несколько слов о том, почему этот вопрос нетривиален. Действительно, простейший сценарий перехода к хаосу коразмерности один (фейгенбаумовский сценарий) по своим свойствам одинаков для любых типов динамических систем - необратимых одномерных отображений, обратимых двумерных отображений, систем дифференциальных уравнений. В то же время, оказывается, что при переходе к критическим явлениям, связанным с двумя и более управляющими параметрами, необратимые и обратимые отображения проявляют различные свойства на пороге хаоса. Простейшим и важнейшим примером является так называемая трикритическая динамика, которой в случае одномерных необратимых отображений отвечают концевые точки фейгенбаумовских линий. (Подробности см. в [17,18].) Таким образом, вопрос о том, возможно ли критическое поведение типа FQ коразмерности два на пороге хаоса в связанных обратимых отображениях, заслуживает специального исследования.

## 1. Эмпирический переход к связанным обратимым отображениям

Рассмотренная в [13] система, в которой был обнаружен обсуждаемый тип критического поведения, имела следующий вид:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - C y_n^2, \\ y_{n+1} &= 1 - A y_n^2 - B x_n^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Константы связи фиксировались ( $B=0.375$ ;  $C=-0.25$ ), и исследование проводилось на плоскости управляющих параметров парциальных подсистем ( $A, \lambda$ ). Наиболее популярным и изученным в нелинейной динамике вариантом обратимого отображения является отображение Эно [19]

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - b y_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (2)$$

которое содержит еще один параметр  $b$ , ответственный за степень сжатия фазового пространства, и которое при  $b=0$  превращается в логистическое отображение. Поэтому очень просто перейти от системы связанных логистических отображений (1) к системе связанных отображений Эно

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - b y_n - C u_n^2, \quad y_{n+1} = x_n, \\ u_{n+1} &= 1 - A u_n^2 - b v_n - B x_n^2, \quad v_{n+1} = u_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Значения параметров связи выберем такими же, как и в [13], а параметр диссипации  $b$  зафиксируем равным 0.2.

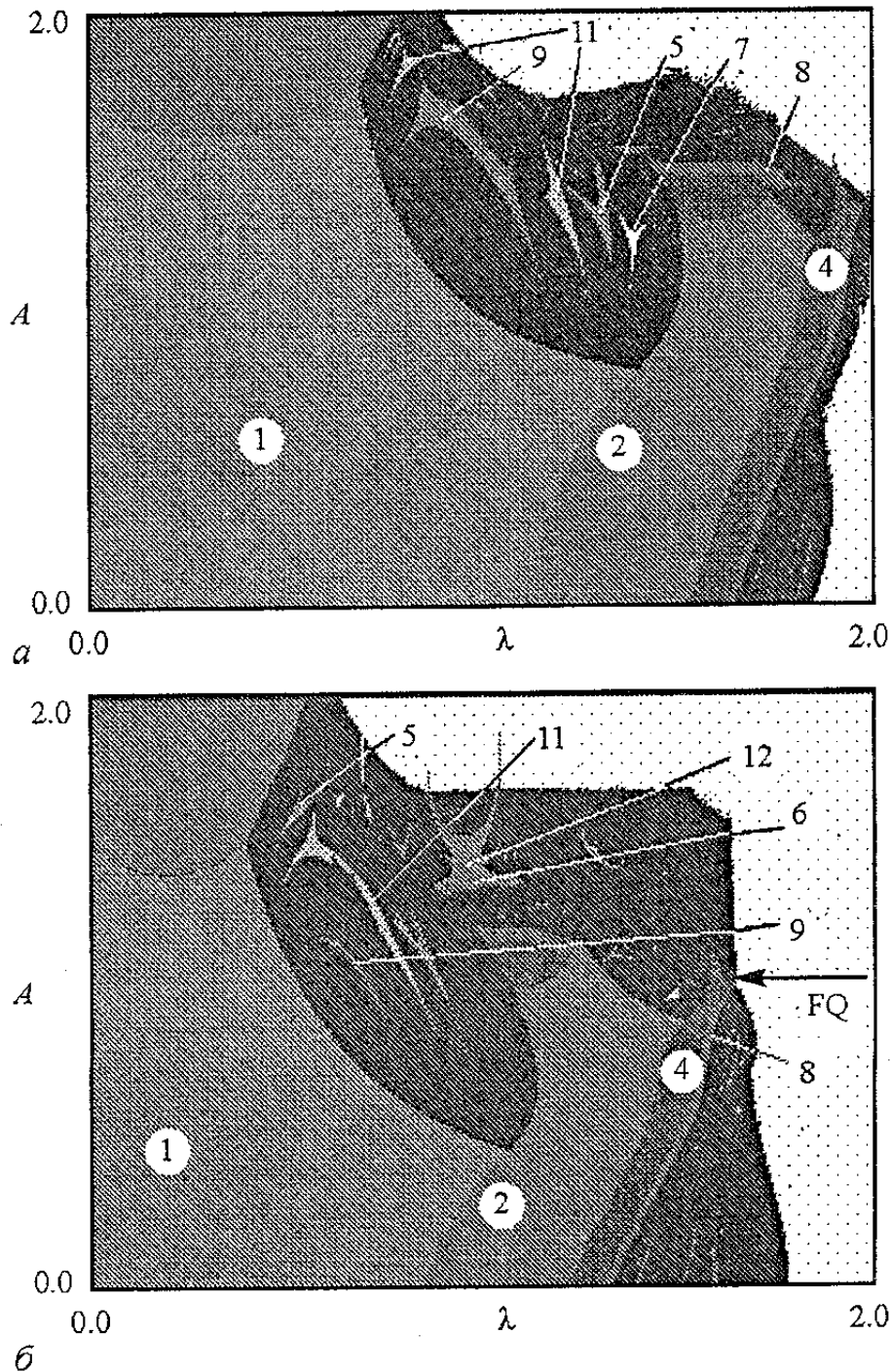


Рис. 1. Карты динамических режимов: *а* - связанных отображений Эно (3) и *б* - связанных логистических отображений (1) на плоскости управляющих параметров подсистем

На рис. 1, *а* приведена карта динамических режимов для системы (3) на плоскости параметров  $(\lambda, A)$ , а на рис. 1, *б* для сравнения - аналогичная карта для системы (1). На картах оттенками серого цвета показаны найденные численно области различных периодических режимов, некоторые из них обозначены соответствующими цифрами. Черный цвет отвечает неперiodическим режимам, то есть хаосу и квазипериодике, а белый - убеганию траекторий на бесконечность. Критическая точка FQ имеет координаты  $A_c = 1.030837593\dots$ ,  $\lambda_c = 1.654524590\dots$  и показана стрелкой на рис. 1, *б*. Видно, что по общей структуре карты весьма похожи, в частности, наряду с переходом к хаосу по сценарию Фейгенбаума наблюдаются и области квазипериодических движений. В то же время при рассмотрении более тонких деталей на увеличенных фрагментах карт (рис. 2)

можно обнаружить достаточно существенные различия. На рис. 2 для удобства визуализации системы языков синхронизации все периодические режимы обозначены одним и тем же оттенком серого цвета. Это позволяет ясно увидеть, что системы языков оказываются устроенными по-разному, особенно в центре рисунка. В частности, для системы связанных отображений Эно в этой области наблюдаются языки Арнольда, представляющие собой либо «полуокружности», опирающиеся своими основаниями на линию бифуркации Неймарка - Сакера, либо даже структуры, свернутые в кольцо и оторванные от этой линии (см. рис. 2, *a*). Аналогичных своеобразных языков в системе связанных логистических отображений нет.

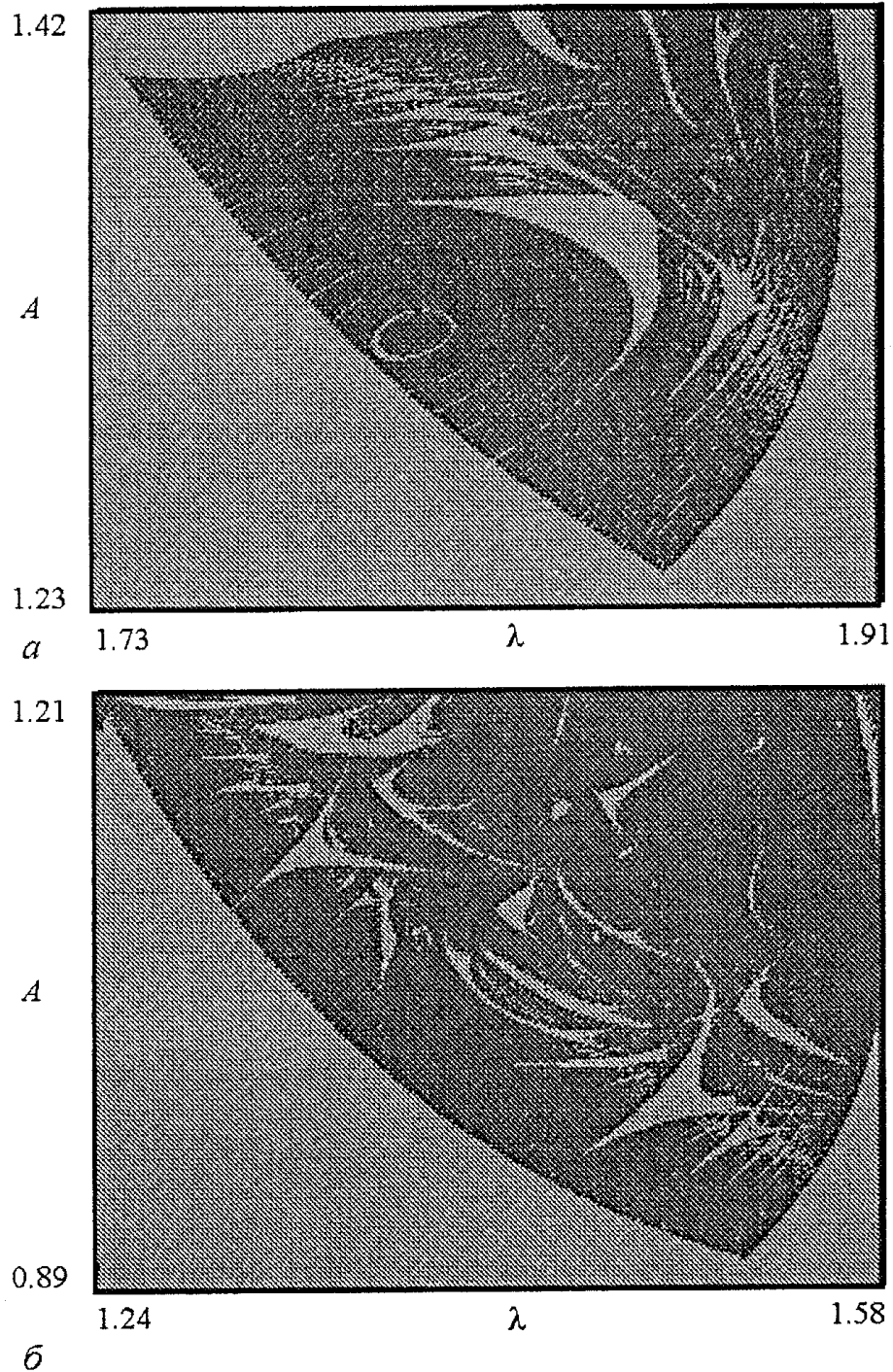


Рис. 2. Увеличенный фрагмент плоскости параметров, демонстрирующий структуру системы языков синхронизации: *a* - связанных отображений Эно и *б* - связанных логистических отображений

Для того чтобы идентифицировать тип критичности FQ в связанных отображениях Эно, нужно найти соответствующую критическую точку на плоскости управляющих параметров и определить константы скейлинга. В настоящей работе для этой цели были применены прямые численные методы.

## 2. Методы поиска критической точки FQ

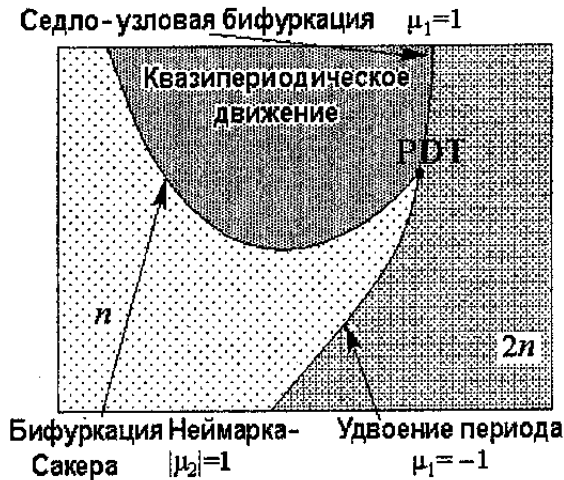


Рис. 3. Схематическая иллюстрация устройства плоскости параметров в окрестности PDT-точки цикла периода  $n$

естественно назвать *точкой обрыва линии удвоения периода* или, для краткости, PDT-точкой (от *period-doubling terminal point*). В свою очередь, критическая точка FQ является предельной для накопления PDT-точек на базе циклов удвоенного периода. Нетрудно видеть, что PDT-точка определяется условием обращения в (-1) двух мультипликаторов цикла периода  $n$  одновременно.

Остановимся несколько подробнее на некоторых особенностях поиска точки PDT численными методами. Условие равенства (-1) двух мультипликаторов эквивалентно фиксации только двух из четырех инвариантов матрицы монодромии, являющихся коэффициентами следующего характеристического уравнения:

$$\mu^4 - Sp\mu^3 + I_2\mu^2 - I_3\mu + Det = 0. \quad (4)$$

Нетрудно показать, однако, что для системы (3) эти инварианты связаны условием:

$$Det = b^{2n}, \quad I_3 = Sp(Det)^{1/2}, \quad (5)$$

где  $n$  - период цикла. Поэтому точку PDT можно найти, решив численно систему двух алгебраических уравнений

$$Sp(\lambda, A) = -2 - 2b^n, \quad I_2(\lambda, A) = 1 + 2b^n + b^{2n} \quad (6)$$

относительно параметров  $\lambda$  и  $A$ .

Далее можно оценить константы и направления скейлинга в пространстве параметров как собственные числа и векторы так называемой скейлинговой матрицы  $\delta^{(n)}$ , элементы которой определяются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\lambda_{n-1} = \delta_{11}^{(n)}\Delta\lambda_n + \delta_{12}^{(n)}\Delta A_n, \\ \Delta A_{n-1} = \delta_{21}^{(n)}\Delta\lambda_n + \delta_{22}^{(n)}\Delta A_n, \\ \Delta\lambda_n = \delta_{11}^{(n)}\Delta\lambda_{n+1} + \delta_{12}^{(n)}\Delta A_{n+1}, \\ \Delta A_n = \delta_{21}^{(n)}\Delta\lambda_{n+1} + \delta_{22}^{(n)}\Delta A_{n+1}, \end{array} \right. \quad (7)$$

где  $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$ ,  $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n$ , а  $\lambda_n$  и  $A_n$  - координаты PDT-точки периода  $n$  на плоскости управляющих параметров.

Другим способом поиска точки FQ является *метод приравнивания мультипликаторов (eigenvalue-matching method)* [20, 12]. Он основан на том, что в критической точке циклы всех периодов асимптотически имеют одинаковые мультипликаторы, равные универсальным для данного типа критичности. Поэтому последовательность точек в пространстве параметров, в которых совпадают мультипликаторы циклов с периодами  $n$  и  $2n$ , должна сходиться к критической точке. Скейлинговая матрица при этом может быть определена из соотношения

$$\Delta_n = \Gamma_n^{-1} \Gamma_{2n}, \quad (8)$$

где

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} \partial Sp_n / \partial \lambda & \partial Sp_n / \partial A \\ \partial \text{Det}_n / \partial \lambda & \partial \text{Det}_n / \partial A \end{pmatrix}, \quad (9)$$

причем производные в (9) находятся численно в точке совпадения мультипликаторов.

### 3. Поиск точки FQ в системе связанных отображений Эно

Естественно, что применение обоих методов к системе связанных логистических отображений (1) дает результаты, находящиеся в хорошем соответствии с известными из [13]. Результаты же исследования системы связанных отображений Эно (3) для приведенных выше значений параметров связи и параметра  $b$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

$N$	$\lambda$	$A$
1	1.40443502928989	0.79643741735745
2	1.86175463183402	1.23944066580457
4	1.97335903306898	1.35074553299430
8	1.99056056299470	1.36629930670432
16	1.99624541595448	1.37214442850807
32	1.99617991542720	1.37183053629896
64	1.99670754154512	1.37245686703393
128	1.99678555442172	1.37254857436948
256	1.99680474820096	1.37257100453603
512	1.99680426655928	1.37257029885968
1024	1.99680723586445	1.37257387623783
2048	1.9968080269575	1.37257483016671
	1.99681...	1.372575...



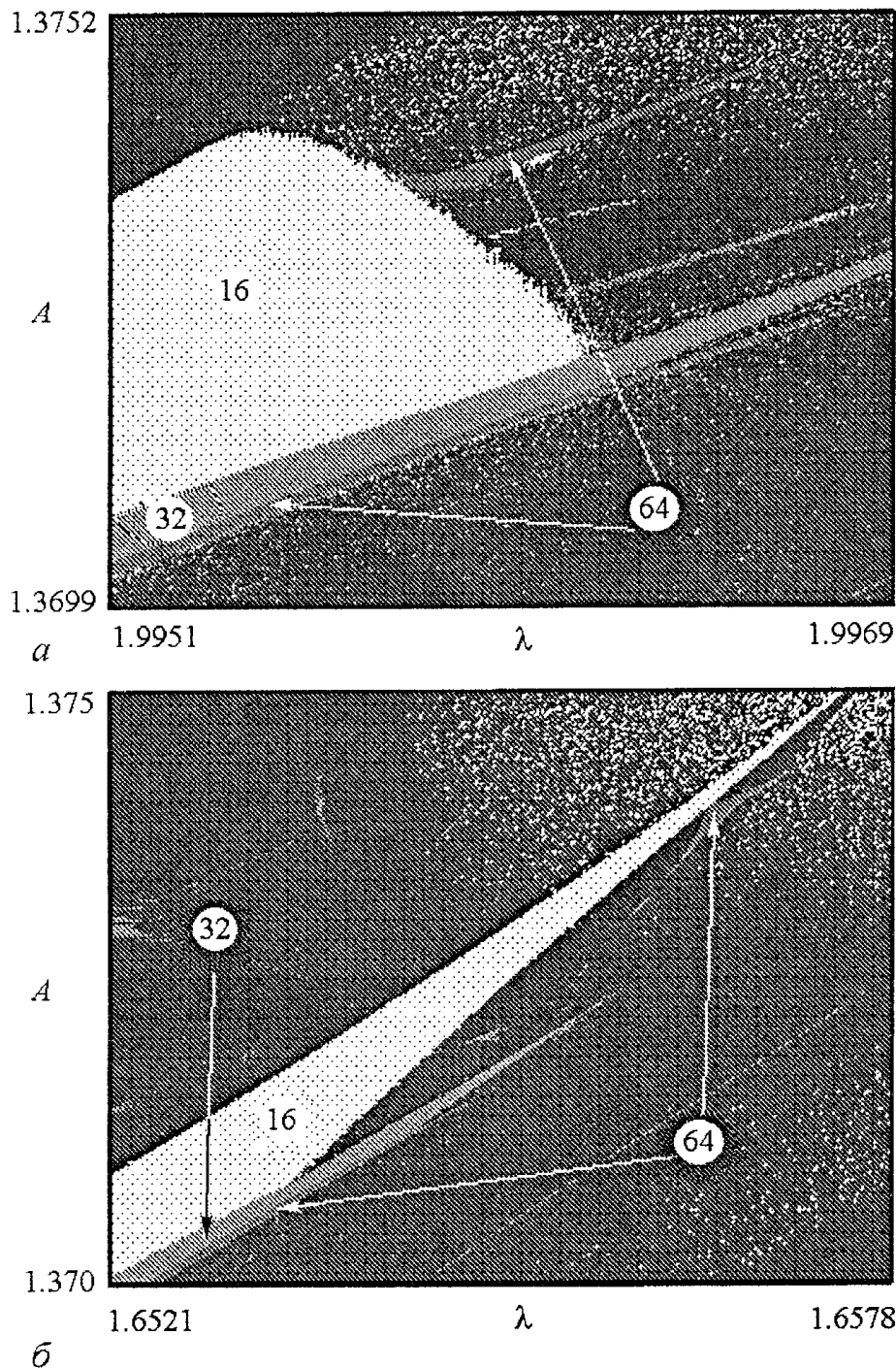


Рис. 4. Тонкая структура плоскости параметров вблизи точки накопления PDT-точек: *a* - для системы связанных отображений Эно (3) и *б* - связанных логистических отображений (1)

Из этих численных данных видно, что последовательность PDT-точек хотя и не является монотонной, но достаточно хорошо сходится к точке с координатами  $\lambda_c = 1.99681\dots$  и  $A_c = 1.372575\dots$ . Если, однако, обратиться к окрестности предельной точки, то можно видеть, что по своему устройству плоскости параметров связанных отображений Эно и логистических отображений в некоторых деталях различаются (сравните рис. 4, *a* и *б*). Так, по-разному устроена область периода 16. В случае логистических отображений она вытянута аналогично области периода 32, причем к нижней ее границе примыкает характерный язык синхронизации периода 64 (см. рис. 4, *б*). В то же время, для связанных отображений Эно область периода 16 ограничена справа линией, идущей в

противоположную сторону, а примыкающая к ней область периода 64 имеет совершенно другую форму.

В табл. 2 приведены определенные из последовательности PDT-точек значения собственных чисел и векторов<sup>1</sup> скейлинговой матрицы, то есть констант и направлений скейлинга в пространстве параметров. Хорошо видно, что полученные значения не только не сходятся к какому-либо пределу, но даже не являются близкими к характерным для типа FQ значениям  $\delta_1=6,32631925\dots$  и  $\delta_2=3,44470967\dots$  [13].

Метод приравнивания мультипликаторов дает аналогичные результаты (см. табл. 3 и 4). Последовательность значений параметров сходится к тем же значениям, что и последовательность PDT-точек, а константы скейлинга и мультипликаторы не демонстрируют сходимости.

Таблица 2

$N$	$\delta_1$	$k_1$	$\delta_2$	$k_2$
32	4.8933154462	1.0527078332	-1.7677933141	0.8136146977
64	5.7735161148	1.0618518238	-1.9484228812	0.7917875975
128	5.9926045444	0.8483763694	-53.676711965	0.7934952985
256	8.6510607419	0.8402148829	1.6728600590	0.8741604923
512	1.9132819289+ +i2.4126309404	—	1.9132819289- -i2.4126309404	—
1024	7.8519009324	0.8678952769	-0.9655094017	0.8264079992
2048	35.8392805175	0.8234232061	4.2114730875	0.8292153379

Таблица 3

$N$	$2N$	$\lambda$	$A$	$\mu_1$	$\mu_2$
32	64	1.9969124398	1.3727041660	-1.55854083+ +i0.3607099	-1.55854083- -i0.36070989
64	128	1.9968004145	1.3725655428	-1.63021166	-0.99523694
128	256	1.9968134885	1.3725813958	-1.68722397	-1.17913205
256	512	1.9968021017	1.3725676291	-1.58523901	-0.57471264
512	1024	1.9968083843	1.3725752629	-1.48235261+ +i0.1773832	-1.48235261- -i0.17738321

Таблица 4

$N$	$2N$	$\delta_1$	$k_1$	$\delta_2$	$k_2$
32	64	10.922514659	0.6199830434	3.5720883442	0.8220440721
64	128	3.8395331550+ +i0.44904466	—	3.8395331550- -i0.44904466	—
128	256	10.496833297	0.7691942096	3.6876523713	0.8373123253
256	512	4.8531849223	0.8698848848	1.8060630873	0.8195198177
512	1024	8.9414001110	0.8046329966	3.6714378890	0.8270404275

<sup>1</sup> Для собственных векторов приведены их угловые коэффициенты (тангенсы углов наклона к оси  $\lambda$ )  $k_1$  и  $k_2$ .



Эти результаты позволяют сделать вывод, что при переходе от связанных логистических отображений к системе связанных отображений Эно тип критичности FQ не сохраняется.

Можно предложить объяснение этому факту. Как известно из строгого ренормгруппового анализа, у соответствующего ренормгруппового уравнения кроме двух собственных чисел  $\delta_1=6,32631925\dots$  и  $\delta_2=3,44470967\dots$ , ответственных за скейлинг на плоскости управляющих параметров подсистем, имеется и третье собственное число  $\delta_3=-1,900\dots$  [13-16]. Это число оказывается «незадействованным» в системе связанных логистических отображений из-за присутствующей скрытой симметрии аналогично тому, как оказываются незадействованными все три собственных числа для трикритической динамики [17,18]. Его «включение» при переходе к обратимым отображениям Эно приводит к разрушению критичности типа FQ, поскольку теперь соответствующая точка имеет коразмерность три. Таким образом, критическая динамика связанных отображений с удвоениями периода дает еще один пример ситуации, когда переход к обратимым отображениям повышает коразмерность соответствующего феномена (сценария перехода к хаосу) на единицу.

#### 4. Система диссипативно связанных отображений Эно

Можно ли все же каким-то образом пронаблюдать критическую динамику типа FQ в системе связанных обратимых отображений Эно? Устранить влияние третьего собственного числа можно введением связи специального вида - так называемой диссипативной связи [13-15].

В общем виде две автономные системы с диссипативной связью можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + C(f(x_n) - g(y_n)), \\y_{n+1} &= g(y_n) + B(g(y_n) - f(x_n)),\end{aligned}\tag{10}$$

где  $B$  и  $C$  - параметры связи<sup>2</sup>. Такая связь стремится «выровнять» значения динамических переменных парциальных систем.

Записав систему (10) с использованием отображений Эно в качестве автономных систем и произведя замену параметров (для того чтобы система переходила в (1) с теми же константами связи при  $b=0$ ), получим систему диссипативно связанных отображений Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - b(1-C')y_n - Cu_n^2 - bC'v_n, & y_{n+1} &= (1-C')x_n + C'u_n, \\u_{n+1} &= 1 - Au_n^2 - b(1-B')v_n - Bx_n^2 - bB'y_n, & v_{n+1} &= (1-B')u_n + B'x_n.\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь введены обозначения  $C'=C(\lambda-B)/(A\lambda-CB)$ ,  $B'=B(A-C)/(A\lambda-CB)$ , а значения параметров выбраны такими же, как в разделе 1:  $B=0.375$ ,  $C=-0.25$ ,  $b=0.2$ .

На рис. 5 приведена карта динамических режимов системы (11). Видно, что устройство плоскости параметров практически полностью совпадает с характерным для связанных логистических отображений (1) (сравните рис. 5 и рис. 1, б). Определенную особенность представляют появляющиеся вдоль осей управляющих параметров области «убегания» траектории на бесконечность.

<sup>2</sup> В системе (1) квадратичная связь была диссипативной. При переходе к системе (2) диссипативность связи нарушилась, поскольку появились еще две переменные.

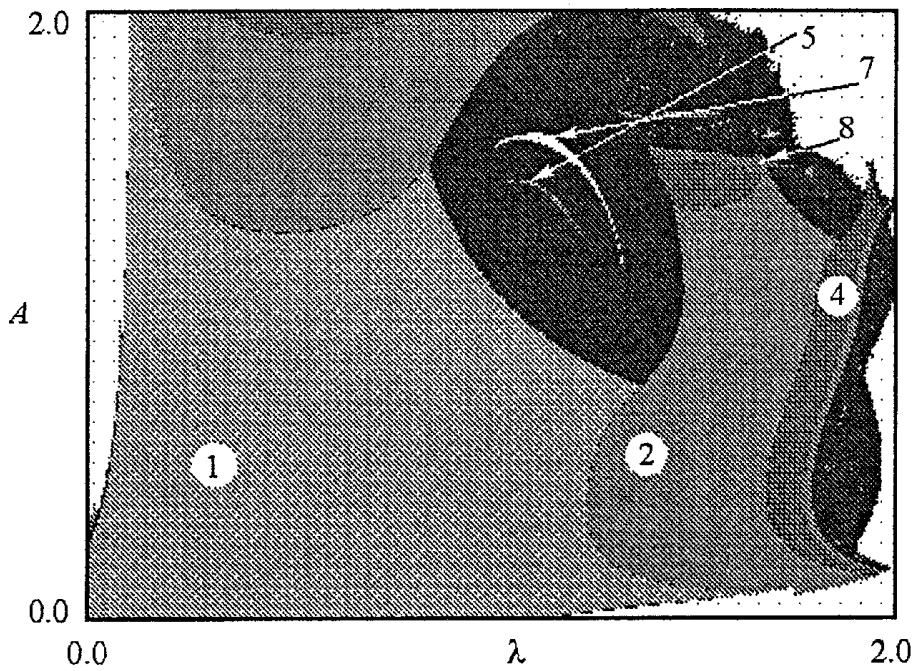


Рис. 5. Карта динамических режимов для системы связанных отображений Эно с диссипативной связью (11)

Весьма любопытно, что в окрестности границы между областями устойчивости цикла периода 1 и глобальной неустойчивости располагается очень узкая область квазипериодических движений, в которую встроены языки Арнольда (рис. 6; обратите внимание на масштаб рисунка). Эта особенность связанных отображений Эно, хотя и очень интересна, располагается вдали от точки накопления PDT-точек и не сказывается на картине в ее окрестности.

Попробуем найти точку FQ в системе (11), используя представленные выше

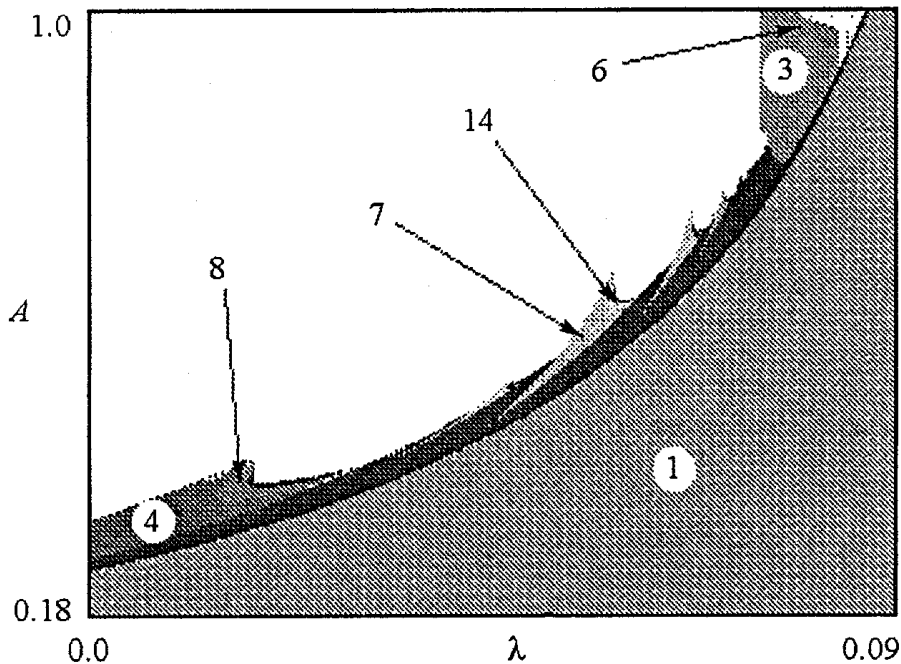


Рис. 6. Узкая область квазипериодических движений на границе области устойчивости на плоскости параметров диссипативно связанных отображений Эно (11) в увеличенном виде

методы. В табл. 5 приведены координаты PDT-точек, а в табл. 6 - соответствующие значения констант и направлений скейлинга<sup>3</sup>.

Таблица 5

$n$	$\lambda$	$A$
1	1.38086158309370	0.767475147912510
2	1.86757505232277	1.2465952177085
4	1.97122317625588	1.34817658582353
8	1.99205486911043	1.36816213548345
16	1.99586986012335	1.37171420874537
32	1.99658765207043	1.37237639851598
64	1.99679762782443	1.37259964564689
128	1.99686780498146	1.37268023315623
256	1.99688666711350	1.37270235786756
512	1.99689167237394	1.37270830331782
1024	1.99689328976159	1.37271024552807
2048	1.99689374523250	1.37271079464915
FQ	1.99689...	1.372711...

Таблица 6

$n$	$\delta_1$	$k_1$	$\delta_2$	$k_2$
64	6.3443901435	2.1783225565	2.6224980367	0.8182342331
128	9.1135776261	0.7378513318	4.2230717098	0.8403653521
256	6.0336077820	0.5289292370	3.8482016876	0.8246878272
512	5.7675233495	0.8700967996	2.3145232861	0.8224543110
1024	7.5488624760	8.0161196451	3.9563831279	0.8265435416

Видно, что последовательность PDT-точек хорошо сходится к точке  $\lambda_c=1.99689\dots$ ,  $A_c=1.372711\dots$ , а значения констант скейлинга хоть и медленно, но все же приближаются к характерным для типа FQ значениям  $\delta_1=6.32631925\dots$  и  $\delta_2=3.44470967$ . (Отметим, что скорость сходимости хотя и не очень высока, но практически такая же, как и в случае связанных логистических отображений. Добиться более высокой точности численными методами не удастся, поэтому для более точного определения скейлинговых факторов необходим ренормгрупповой анализ.)

Обратим также внимание на то, что собственное направление, соответствующее константе  $\delta_2$ , демонстрирует достаточно хорошую сходимость, а соответствующее константе  $\delta_1$  (параметр  $k_1$  в табл. 8) - нет. Совершенно аналогичная ситуация наблюдается и при исследовании системы связанных логистических отображений (1) с помощью данного метода. Это свидетельствует о том, что константе  $\delta_1$  не отвечает фиксированное направление в пространстве параметров.

В табл. 7 и 8 приведены результаты исследования системы (11) методом приравнивания мультипликаторов. Координаты критической точки в этом случае можно определить более точно ( $\lambda_c=1.9968939\dots$ ,  $A_c=1.3727110\dots$ ), а константы

<sup>3</sup> В отличие от системы (3), инварианты матрицы монодромии системы (11) связаны более сложным образом. Однако при фиксированных параметрах связи и диссипации ее определитель постоянен, а три остальных инварианта зависят только от выражений  $A$  и  $\lambda$ , поэтому в качестве независимых можно выбрать два любых инварианта из трех.

Таблица 7

$n$	$\lambda$	$A$	$\mu_1$	$\mu_2$
16	1.99687691641775	1.37268668506845	-1.6170589314	-1.0112255964
32	1.99688585640509	1.37270094253325	-1.5843693263	-1.0369086877
64	1.99689573668345	1.37271326317861	-1.5683321681	-1.0871398197
128	1.99689414055984	1.37271127155012	-1.5903527325	-1.0525173079
256	1.99689375950757	1.37271081030431	-1.5844004769	-1.0359465453
512	1.99689395237675	1.37271104530920	-1.5684327452	-1.0771637002
1024	1.99689392799765	1.37271101559994	-1.5847107614	-1.0545699415
FQ	1.9968939...	1.3727110...		

Таблица 8

$n$	$\delta_1$	$\delta_2$	$k_1$	$k_2$
32	6.37230587644639	3.35439783114072	-0.1599570414666	0.82328552366704
64	6.40710291097091	3.47269258053367	-0.4845874935710	0.82499823121141
128	6.28763506485056	3.49448642834621	-4.6695291430479	0.82569786364289
256	6.29957692687017	3.37416298825241	0.02514259807977	0.82520711519217
512	6.38625353078327	3.41934418784381	0.19201772847962	0.82515911805565
1024	6.29424829695937	3.46133630862438	1.43131919277669	0.82518215509976

скейлинга несколько лучше сходятся к характерным значениям для типа FQ. Величины мультипликаторов также приближаются к универсальным для типа FQ значениям  $\mu_1 = -1.057149...$  и  $\mu_2 = -1.579739...$ . Это позволяет сделать вывод, что в системе (11) обратимых двумерных отображений, связанных диссипативной связью, реализуется тип критичности FQ.

### 5. Скейлинг в окрестности точки FQ на плоскости параметров системы диссипативно связанных отображений Эно

Для того чтобы окончательно убедиться в существовании критической точки типа FQ в системе связанных отображений Эно (11), продемонстрируем скейлинг в ее окрестности с универсальными константами. Для этого, как и обычно для критических явлений, необходимо выбрать соответствующим образом систему скейлинговых координат  $(C_1, C_2)$ , по которым будет производиться перемасштабирование с константами  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . В нашем случае для демонстрации скейлинга достаточно косоугольной системы координат, отвечающей линейной связи между «естественными» и скейлинговыми переменными. Ось  $C_2$  направим вдоль собственного направления, соответствующего константе  $\delta_2$  (см. табл. 8). Поскольку константе  $\delta_1$  не отвечает определенное направление, то ось  $C_1$  можно выбирать произвольно. Выберем ее совпадающей с осью  $\lambda$ . Тогда «естественные» и скейлинговые координаты будут связаны следующим соотношением:

$$A = A_c + C_2, \quad (12)$$

$$\lambda = \lambda_c + C_1 + kC_2,$$

где  $A_c = 1.3727110...$  и  $\lambda_c = 1.9968939...$  - координаты критической точки,  $k = 0.8452...$  - угловой коэффициент оси  $C_2$  в «естественной» системе координат.

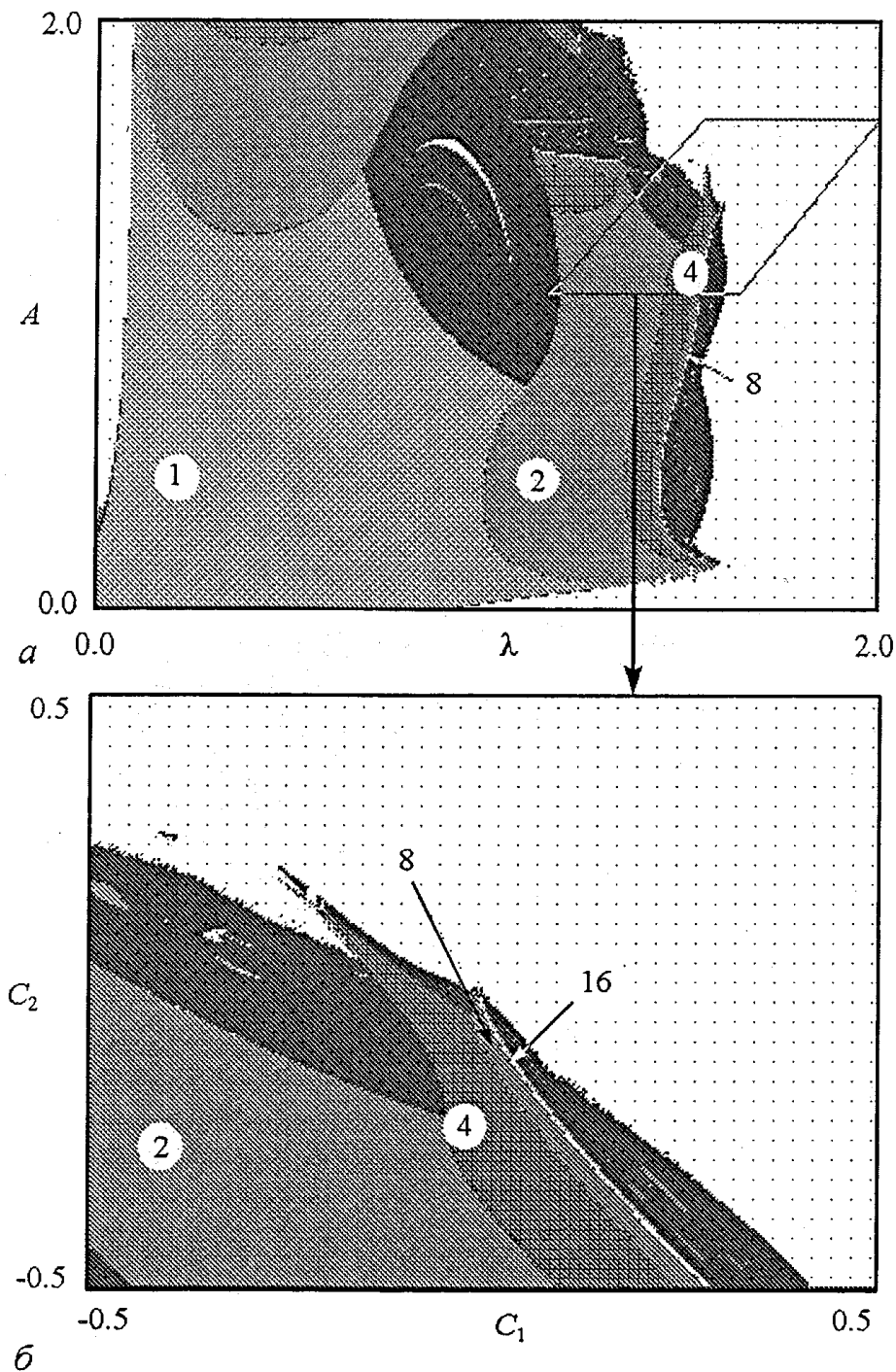


Рис. 7. Карта динамических режимов диссипативно связанных отображений Эно (11) и ее выделенный фрагмент в скейлинговых координатах

На рис. 7 продемонстрировано, как происходит преобразование карты динамических режимов в скейлинговые координаты. На верхнем рисунке показан выделенный фрагмент, задающий оси косоугольной системы, а внизу - этот же фрагмент, перестроенный в скейлинговые координаты. Соответствующие иллюстрации скейлинга дает пара рисунков 8,  $a$ , на которых показана достаточно малая окрестность критической точки и ее увеличенный в соответствующее число раз  $\delta_1=6.32631925\dots$  и  $\delta_2=3.44470967\dots$  фрагмент. Цифрами обозначены периоды циклов, при этом «цвет» областей изменен так, чтобы на исходном рисунке и его увеличенном фрагменте они были одинаковы для циклов удвоенного периода. Видно, что устройство плоскости параметров очень хорошо воспроизводится при

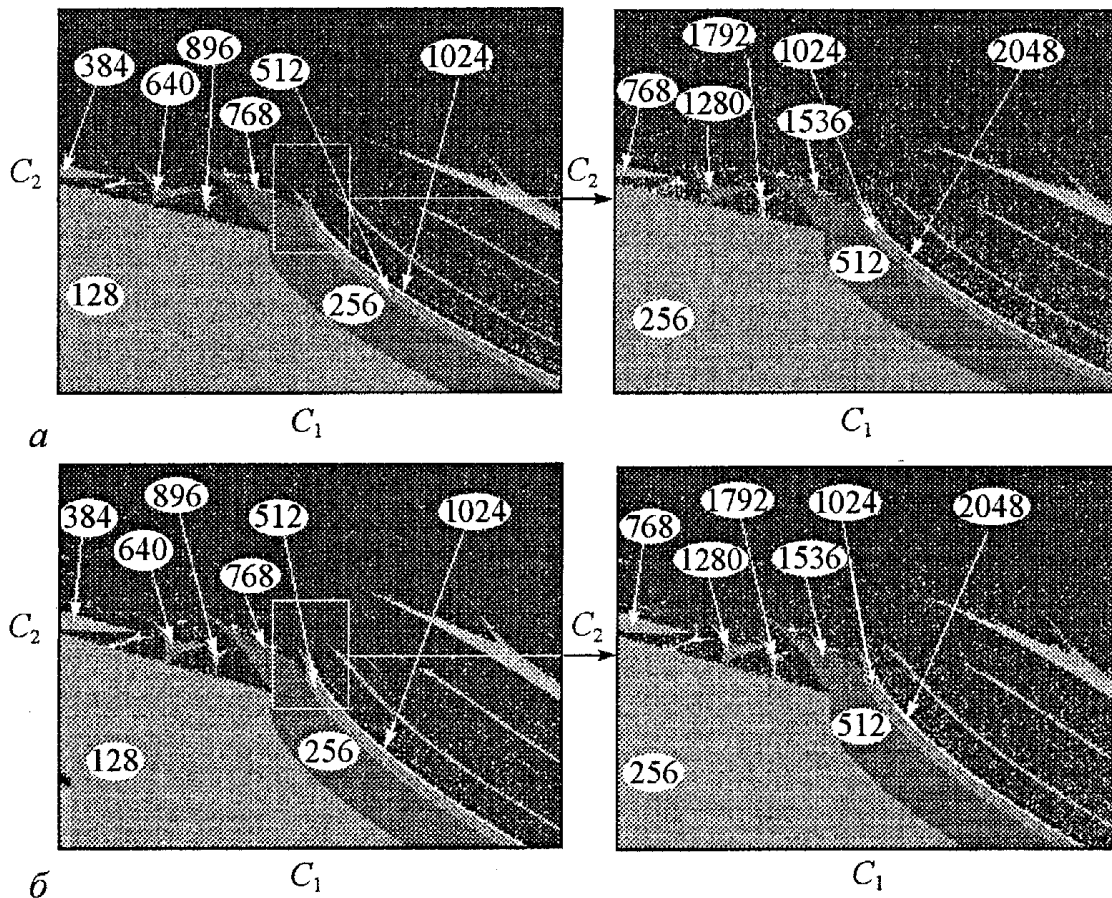


Рис. 8. Иллюстрация скейлинга на плоскости параметров системы: *а* - диссипативно связанных отображений Эно (11) и *б* - логистических отображений (1). Справа - увеличенные в соответствующее число раз выделенные фрагменты рисунков. Пересчет масштабов производится в  $\delta_1$  раз по оси  $C_1$  и в  $\delta_2$  раз по оси  $C_2$

соответствующем преобразовании подобия. Заметим также, что оно практически полностью совпадает с устройством аналогичной области параметров для системы связанных логистических отображений (1), показанной на нижней паре рисунков 8, *б*. Это является еще одним аргументом в пользу универсальности данного типа критичности.

### Заключение

Таким образом, характерный для связанных необратимых отображений тип критичности FQ «не выживает» как феномен коразмерности 2 при переходе к связанным обратимым отображениям. Эта ситуация, наряду с трикритической динамикой, является еще одним примером того, что при рассмотрении критических явлений (сценариев перехода к хаосу) переход к обратимым отображениям может приводить к повышению на единицу коразмерности соответствующего типа поведения. В то же время этот тип критичности можно наблюдать и при двухпараметрическом анализе, для чего необходимо ввести между системами связь специальным образом. В этом случае устройство плоскости параметров в окрестности критической точки демонстрирует соответствующий скейлинг (подобие) и полностью аналогично наблюдающемуся в системе одномерных необратимых связанных отображений. Связанные обратимые отображения могут демонстрировать интересные особенности устройства

плоскости управляющих параметров - языки синхронизации, замкнутые в кольцо, и тонкие области квазипериодики со встроенными языками, разделяющие области периодических режимов и разбегания траекторий.

Авторы благодарны д.ф.-м.н., профессору Кузнецову С.П. и к.ф.-м.н. Сатаеву И.Р., а также профессору Сан Юн Киму (университет Кангвон, Республика Корея) за полезные консультации и обсуждение.

*Работы выполнены при поддержке грантов CRDF REC-006, РФФИ № 03-02-16074 и № 03-02-16192.*

### Библиографический список

1. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во СГУ, 1999.
2. Fujisaka H., Yamada Y. Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems // *Progr. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 32.
3. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28, №8. С. 991.
4. Ashwin P., Buescu J., Stewart I. From attractor to chaotic saddle: tale of transverse instability // *Nonlinearity.* 1994. Vol. 9. P. 703.
5. Ott E., Sommerer J.C. Blowout bifurcation in chaotic dynamical systems // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 188. P. 39.
6. Kaneko K. Spatiotemporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices // *Physica D.* 1989. Vol. 32. P. 60.
7. Kuznetsov S.P. Universality and scaling in two-dimensional coupled map lattices // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1992. Vol. 2, №3. P. 281.
8. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, №10-12. С. 1079.
9. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И. Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, №1. С. 35.
10. Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Новый тип критического поведения связанных систем при переходе к хаосу // *ДАН СССР.* 1986. Т. 287, №3. С. 619.
11. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Variety of types of critical behavior and multistability in period doubling systems with unidirectional coupling near the onset of chaos // *Int. J. of Bif. & Chaos.* 1993. Vol. 3, №1. P. 139.
12. Kim S.Y. Bicritical behavior of period-doublings in unidirectionally coupled maps // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 59, №6. P. 6585.
13. Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Period-doubling for two-dimensional non-invertible maps: renormalization group analysis and quantitative universality // *Physica D.* 1997. Vol. 101. P. 249.
14. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. A variety of period-doubling universality classes in multiparameter analysis of transition to chaos // *Physica D.* 1997. Vol. 109. P. 91.
15. Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Universality and scaling in non-invertible two-dimensional maps // *Physica Scripta.* 1996. Vol. T67. P. 184.
16. Кузнецов С.П. Хаос: сценарий Фейгенбаума и его обобщения // *Империя математики.* 2000, №1. С. 1.
17. Kuznetsov S.P. Tricriticality in two-dimensional maps // *Phys. Lett. A.* 1992. Vol. 169. P. 438.
18. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Turukina L.V. Two-parameter



analysis of the scaling behavior at the onset of chaos: tricritical and pseudo-tricritical points //Physica A. 2001. Vol. 300. P. 367.

19. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor //Commun. Math. Phys. 1976. Vol. 50. P. 69.

20. *Derrida B., Gervois A., Pomeau Y.* Universal metric properties of bifurcation of endomorphisms // J. Phys. A. 1979. Vol. 12. P. 269.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 10.06.03*

*Саратовское отделение Института  
радиотехники и электроники РАН*

## ON SOME TYPE OF TRANSITION FROM ORDER TO CHAOS IN THE SYSTEM OF COUPLED MAPS WITH PERIOD DOUBLING

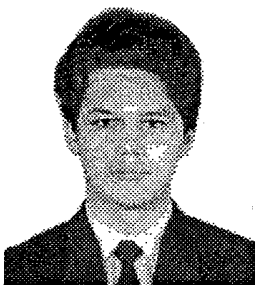
*A.P. Kuznetsov, A.V. Savin*

The critical behavior at the onset of chaos in the system of coupled invertible 2D-maps is investigated. It is shown that the type of critical behavior which was found in the system of coupled noninvertible 1D-maps exists also in the system of coupled invertible 2D-maps, but only for the special type of coupling. For this system we obtained the coordinates of critical point and demonstrated scaling in the parameter plane near this point.



*Кузнецов Александр Петрович* - родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики».

E-mail: [alkuz@sgu.ru](mailto:alkuz@sgu.ru); [www.sgtdn.tserv.ru](http://www.sgtdn.tserv.ru)



*Савин Алексей Владимирович* - родился в Саратове (1980), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002). В настоящее время аспирант кафедры динамических систем СГУ. Соавтор 3 статей в научных журналах. Область научных интересов - исследование критической динамики модельных нелинейных систем.