



## О ДИНАМИКЕ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ - ДУФФИНГА С ДИССИПАТИВНОЙ СВЯЗЬЮ

*А.П. Кузнецов, В.И Паксютов*

Рассматриваются связанные дифференциальные системы Ван дер Поля - Дуффинга в случае диссипативной и активной связи. Обсуждается устройство пространства параметров и возможные физические эффекты.

### Введение

В настоящей работе мы исследуем взаимодействие двух осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга. Рассматриваемая система является классической в теории колебаний и нелинейной динамике. Однако, несмотря на целый ряд посвященных ей работ, она все еще достаточно полно не исследована. Это можно отчасти объяснить большим числом факторов, влияющих на ее динамику. На поведение системы могут влиять величины управляющих параметров подсистем, параметры фазовой нелинейности (неизохронности), расстройка собственных частот осцилляторов, величина, знак и тип связи. Соответственно наблюдаются интересные эффекты, которые невозможны в случае динамики только одного осциллятора, даже когда он находится под внешним воздействием.

Исследование двух связанных осцилляторов можно проводить двумя способами: в терминах полных дифференциальных уравнений или в терминах укороченных уравнений. Большинство работ [1-5] посвящено изучению динамики системы после проведенного усреднения по времени. Основополагающей и наиболее цитируемой является статья D. Aronson, G. Ermentrout и N. Kopell [2]. В ней представлены и объяснены некоторые существенные эффекты, в частности, возможность описания разности фаз осцилляторов с помощью классического уравнения Адлера при диссипативной связи, а также эффект «гибели колебаний», о котором мы поговорим ниже. Фундаментальное обсуждение явлений в связанных укороченных системах и их физических основ можно найти в книге А. Пиковского, М. Розенблюма, Ю. Куртца [1]. Однако весьма интересно изучить случай, когда система представляет собой два связанных дифференциальных уравнения

$$d^2x/dt^2 - (\lambda_1 - x^2)dx/dt + x + \beta x^3 + \varepsilon(x-y) + \mu(dx/dt - dy/dt) = 0, \quad (1)$$

$$d^2y/dt^2 - (\lambda_2 - y^2)dy/dt + (1+\delta)y + \beta y^3 + \varepsilon(y-x) + \mu(dy/dt - dx/dt) = 0.$$

Это система двух связанных осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга, причем  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  - управляющие параметры,  $\delta$  - расстройка собственных частот осцилляторов,  $\beta$  - параметр фазовой нелинейности (или неизохронности),  $\mu$  и  $\varepsilon$  - коэффициенты связи. При выбранном представлении осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга для автономных осцилляторов имеет место бифуркация Андронова - Хопфа, когда значения параметров  $\lambda_{1,2}$  переходят через ноль\*.

Уравнения (1) содержат члены, отвечающие двум типам связи осцилляторов, по-разному влияющим на динамику системы. Инерционная связь (члены, пропорциональные коэффициенту  $\varepsilon$ ) создает поправку к собственным частотам осцилляторов, не влияя при этом непосредственно на фазы колебаний осцилляторов. Однако этот тип связи изменяет амплитуды колебаний и воздействует на фазу благодаря наличию неизохронности в системе. Соответственно, рассмотрения только динамики фаз осцилляторов недостаточно для адекватного описания системы. Механизмы влияния различных видов инерционной связи на систему подробно описываются в книге [1].

В данной статье рассмотрен только второй тип связи - диссипативный. За него в уравнениях (1) ответственны члены, пропорциональные коэффициенту  $\mu$ . Заметим, что иногда связь вводят несколько иначе, в соответствии со следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 - (\lambda_1 - x^2)dx/dt + x + \beta x^3 - \varepsilon y - \mu dy/dt &= 0, \\ d^2y/dt^2 - (\lambda_2 - y^2)dy/dt + (1 + \delta)y + \beta y^3 - \varepsilon x - \mu dx/dt &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Такую связь называют «прямой».

Диффузионная связь вносит в каждую из систем дополнительное затухание. Когда различие собственных частот связанных осцилляторов достаточно велико, то это затухание не может быть скомпенсировано энергией другого осциллятора, что приводит в общую картину поведения системы новый режим - гибели колебаний. Он проявляется в том, что состояние, при котором амплитуды колебаний осцилляторов равны нулю, становится единственным устойчивым положением равновесия. Этот эффект подробно рассмотрен в работе [2] под названием эффекта Bar-Eli. Он не может проявляться ни в случае прямой связи, ни в случае внешнего воздействия. Однако все остальные характерные режимы поведения связанных систем возможны как при диффузионной, так и при прямой связи. Поэтому в дальнейшем практически без потери общности можно рассматривать лишь диффузионную связь.

Формально знаки параметров связи в уравнениях (2) могут быть различными. Оказывается, что изменение знака приводит к существенной модификации динамики и к появлению новых эффектов. Ситуацию с отрицательными значениями параметра  $\mu$  будем называть «активной» связью. Смысл этого термина вполне ясен из уравнений (1). Такой случай представляет интерес как минимум с математической точки зрения. Если же система связанных осцилляторов реализована в виде радиотехнического устройства, то изменения знака связи можно добиться, применяя соответствующие схемные решения.

\* Отметим, что обычно нормировку выбирают несколько иначе - параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  выносят за скобку [1,2]. Выбранный нами способ удачнее в том отношении, что в автономных осцилляторах возможна бифуркация Андронова - Хопфа рождения предельного цикла. Это позволит нам изучить динамику связанных систем при рождении предельных циклов в подсистемах. Кроме того, в рамках одной и той же системы (1) можно будет рассмотреть не только «запороговые» ( $\lambda_{1,2} > 0$ ), но и «допороговые» осцилляторы ( $\lambda_{1,2} < 0$ ), что, как станет ясно из дальнейшего, оказывается важным.

## 1. Укороченные уравнения. Предшествующие результаты

Как уже отмечалось, популярным способом изучения системы связанных осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга является переход к укороченным уравнениям. Осуществить этот переход можно при помощи метода медленно меняющихся амплитуд, произведя замену в уравнениях (1)

$$x = ae^{it} + a^*e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^*e^{-it} \quad (3)$$

и полагая

$$e^{it}da/dt + e^{-it}da^*/dt = 0, \quad e^{it}db/dt + e^{-it}db^*/dt = 0. \quad (4)$$

Здесь  $a$  и  $b$  - комплексные амплитуды колебаний первого и второго осцилляторов. Они изменяются с течением времени относительно медленно. После проведенного усреднения получаем уравнения для комплексных амплитуд  $a$  и  $b$

$$da/dt = \lambda_1 a - |a|^2 a + ia/\omega + 3\beta i |a|^2 a/\omega + i\epsilon a/\omega - i\epsilon b/\omega - \mu a + \mu b - i\omega a, \quad (5)$$

$$db/dt = \lambda_2 b - |b|^2 b + i(1+\delta)b/\omega + 3\beta i |b|^2 b/\omega + i\epsilon b/\omega - i\epsilon a/\omega - \mu b + \mu a - i\omega b.$$

Комплексные амплитуды  $a$  и  $b$  можно представить в следующем виде:  $a = R e^{i\varphi_1}$ ,  $b = r e^{i\varphi_2}$ , где  $R$ ,  $r$  - действительные амплитуды колебаний первого и второго осциллятора, соответственно,  $\varphi_{1,2}$  - фазы колебаний осцилляторов. Тогда получаем систему из четырех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dR/dt &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \epsilon r \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ dr/dt &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \epsilon R \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ d\varphi_1/dt &= (1 + \epsilon)/\omega + 3\beta R^2/\omega - (\epsilon/\omega)(r/R)e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} - \omega, \\ d\varphi_2/dt &= (1 + \delta + \epsilon)/\omega + 3\beta r^2/\omega - (\epsilon/\omega)(R/r)e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - \omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку фазы колебаний осцилляторов входят в уравнения только в виде разности  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ , то можно вычесть из третьего уравнения четвертое и получить систему уже из трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dR/dt &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos\psi - \epsilon r \sin\psi, \\ dr/dt &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos\psi + \epsilon R \sin\psi, \\ d\psi/dt &= -\delta - 3\beta(R^2 - r^2) + \mu(r/R + R/r)\sin\psi - \epsilon(r/R - R/r)\cos\psi. \end{aligned} \quad (7)$$

Хотя система (7) и получается методом медленно меняющихся амплитуд из конкретной дифференциальной системы (1), она имеет и большое самостоятельное значение, так как укороченные уравнения автономных систем представляют собой нормальную форму бифуркации Андронова - Хопфа.

Получить соотношения, описывающие полную картину бифуркаций в пространстве параметров системы (7) в общем виде трудно, и до сих пор эта задача полностью не решена. Однако, если ввести определенные допущения, например, предположить идентичность осцилляторов или исследовать только изохронные осцилляторы, то можно получить ряд результатов. Авторы работы [2] рассмотрели случай только диссипативной связи и провели исследования системы в терминах укороченных уравнений. Ими получены соотношения для линий бифуркаций на плоскости параметров  $(\delta, \mu)$ . При этом были рассмотрены два случая - симметричной и несимметричной систем. Когда система симметрична, связанные осцилляторы являются абсолютно идентичными. Тогда в случае

синхронизации будет справедливо равенство  $R=r$ , и можно уменьшить число уравнений до двух, поскольку первые два уравнения системы (7) становятся одинаковыми,

$$\begin{aligned} dR/dt &= R(\lambda - \mu) - R^3 + \mu r \cos \psi - \epsilon r \sin \psi, \\ d\psi/dt &= -\delta + \mu \sin \psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Можно видеть, что для разности фаз осцилляторов получилось классическое уравнение Адлера [1]. Для системы (8) линии бифуркаций на плоскости параметров (частотная расстройка  $\delta$ , величина связи  $\mu$ ) и фазовые портреты, соответствующие различным динамическим режимам системы, показаны на рис. 1. Заметим, что в этом случае параметр  $\lambda$  можно убрать перенормировкой или просто положить  $\lambda=1$ .

Фазовый дрейф - единственное решение, возможное в области  $\{0 < \mu < \min(1/2|\delta|, 1)\}$  и оно устойчиво (область 1 на рис. 1). При этом разность фаз  $\psi$  монотонно возрастает либо убывает. Тогда на фазовом портрете на плоскости фазовых переменных  $(R^2 \cos \psi, R^2 \sin \psi)$  (рис. 1) можно видеть предельный цикл. Такой способ введения фазовых переменных для данной задачи предложен в работе [2]. При  $|\delta| \in (0, 2)$  фазовый дрейф заканчивается с появлением решения с захватом фазы

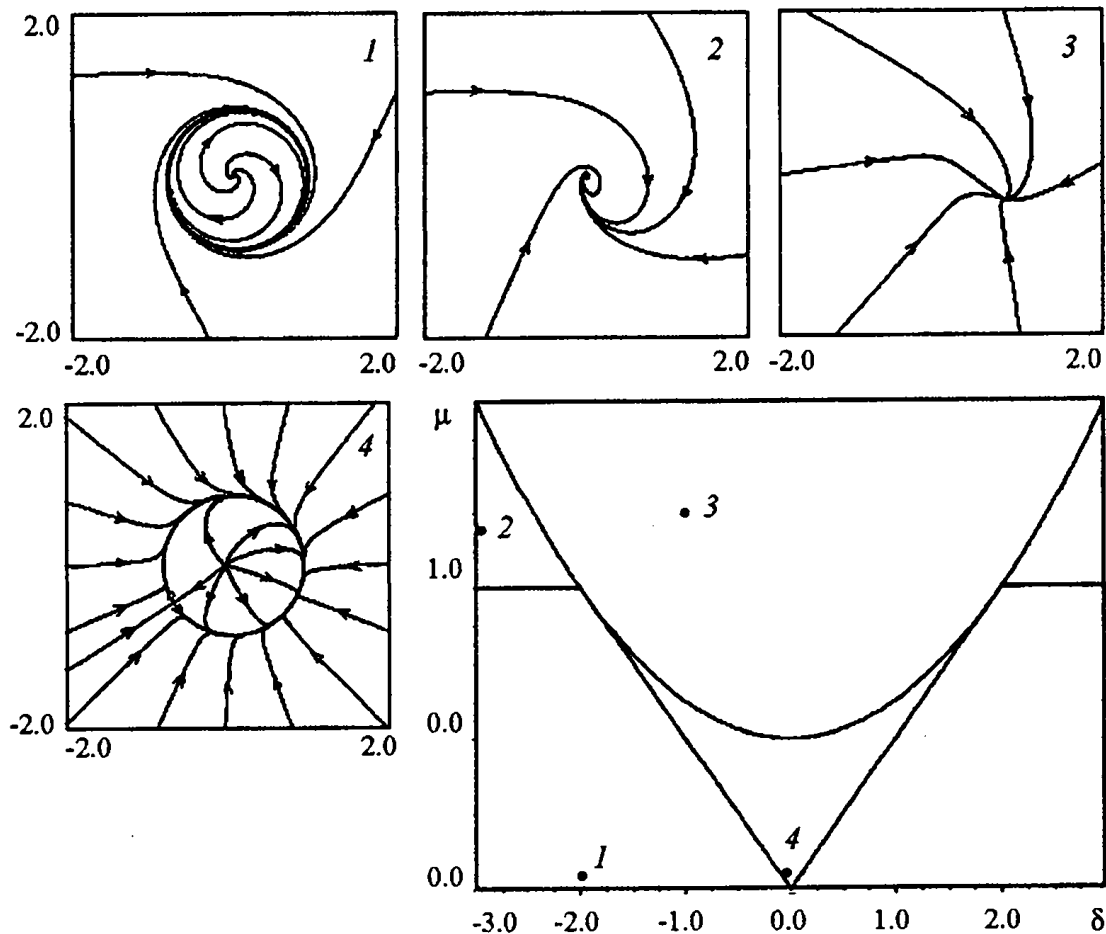


Рис. 1. Линии бифуркаций на плоскости параметров (расстройка частот  $\delta$ , коэффициент связи  $\mu$ ) для связанных осцилляторов, описываемых укороченными уравнениями (7). В области 1 на фазовом портрете, построенном в «сферических» координатах  $(R^2, \psi)$ , можно видеть устойчивый предельный цикл, который отвечает режиму фазового дрейфа. В области 2 наблюдается эффект гибели колебаний. В области 4 сосуществуют неустойчивая, устойчивая неподвижные точки и седло. При переходе из области 4 в область 3 седло сливается с неустойчивой точкой, и в области 3 можно видеть лишь одну устойчивую ненулевую точку

при переходе через линию  $\mu = 1/2 |\delta|$  (область 4 на рис. 1). Здесь на фазовом портрете существуют три неподвижные точки, одна из которых является устойчивым узлом, вторая - седлом, а третья - неустойчивым узлом. На линии  $\mu = 1/2 (1 + 1/4 \delta^2)$  седло сливается с неустойчивым узлом, и они исчезают. В области  $\{\mu > 1/2 (1 + 1/4 \delta^2)\}$  существует только одна неподвижная устойчивая точка (область 3 на рис. 1).

Действительно, для случая идентичных осцилляторов разность фаз  $\psi$  удовлетворяет уравнению Адлера. В соответствии с этим, как и в классической задаче о синхронизации внешним сигналом, на плоскости параметров  $(\delta, \mu)$  имеем язык синхронизации (см. рис. 1). Согласно рисунку при  $|\delta| < 2\mu$  происходит захват фаз. При этом координаты неподвижной точки даются соотношениями

$$R_0^2 = 1 - \mu \pm (\mu^2 - 1/4 \delta^2)^{1/2}, \quad (9)$$

$$\psi_0 = -\arcsin(\delta/(2\mu)).$$

В задаче о связанных системах, однако, возникает эффект гибели колебаний [1,2]. Он заключается в том, что колебания обоих осцилляторов затухают. При этом реализуется единственная устойчивая неподвижная точка в начале координат ( $R=0, r=0$ ). Можно показать [2], что для укороченной системы (7) он проявляется в области  $\{1 < \mu < 1/2 (1 + 1/4 \delta^2)\}$ . Отметим, что эффект гибели колебаний характерен не просто для конкретной системы (7), а имеет «общекосильное» значение (см., например, недавнюю работу [7] по его экспериментальному наблюдению).

С другой стороны, границы области, в которой проявляется эффект гибели колебаний, были получены, исходя из анализа укороченных уравнений (7). Вопрос о границах этого эффекта на плоскости параметров в случае полных дифференциальных уравнений интересен и будет обсужден в разделе 2 настоящей статьи.

Необходимые условия для проявления этого эффекта в случае диссипативной связи определены в работе [1]. Именно наличие связи между осцилляторами, динамика которых при данном значении параметров должна выходить на предельный цикл, может привести к эффекту гибели колебаний при выполнении следующих необходимых условий.

- Связь между осцилляторами должна быть достаточно велика, чтобы она была способна подавить колебания. Точнее, сила связи должна быть соизмерима по величине с силой притяжения осцилляторов к предельному циклу.
- Связь должна быть диффузионного типа. При прямой связи или, скажем, при внешнем воздействии эффект не наблюдается.
- Взаимодействующие осцилляторы должны быть различны, то есть они должны иметь достаточно большую расстройку собственных частот. Дело в том, что связь привносит в каждый осциллятор дополнительное затухание, и оно не может быть в этом случае скомпенсировано за счет энергии другого осциллятора, так как сумма переданной за период колебаний энергии будет близка к нулю.

В дальнейшем мы будем исследовать систему связанных осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга в терминах исходных дифференциальных уравнений (1). Наше исследование будет проводиться преимущественно численным образом. Форма и структура хаотических аттракторов, а также возможности сосуществования различных динамических режимов уже изучались [6]. Основной целью нашего исследования является существенно более полный анализ устройства пространства параметров системы (1). Необходимо понять также, как соотносятся данные о поведении системы, полученные в терминах укороченных и полных уравнений. Оказывается, изучение полных уравнений дает возможность наблюдать ряд новых эффектов.

## 2. Полные дифференциальные уравнения. Анализ неподвижных точек

Если в системе связанных осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга присутствует только диссипативная диффузионная связь, то можно записать уравнения (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 - (\lambda_1 - x^2)dx/dt + x + \beta x^3 + \mu(dx/dt - dy/dt) &= 0, \\ d^2y/dt^2 - (\lambda_2 - y^2)dy/dt + (1 + \delta)y + \beta y^3 + \mu(dy/dt - dx/dt) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Исследуем эту систему уравнений, введя дополнительные переменные  $u$  и  $v$ , так что она преобразуется к виду

$$\begin{aligned} dx/dt &= v, \\ dv/dt &= (\lambda_1 - x^2)v - x - \beta x^3 - \mu(v - u), \\ dy/dt &= u, \\ du/dt &= (\lambda_2 - y^2)u - (1 + \delta)y - \beta y^3 - \mu(u - v). \end{aligned} \quad (11)$$

Такая запись уравнений облегчает анализ системы и делает возможным численное моделирование ее динамики. Легко показать, что у системы уравнений (11) может быть либо одна, нулевая, либо три неподвижные точки:  $x=v=y=u=0$  и  $x=\pm(-1/\beta)^{1/2}$ ,  $y=\pm(-(1+\delta)/\beta)^{1/2}$ ,  $v=u=0$ .

Исследуем сначала нулевое положение равновесия на устойчивость. Эта неподвижная точка интересна в первую очередь тем, что ее наличие обуславливает возможность возникновения эффекта гибели колебаний. Чтобы эффект был возможен, достаточно, чтобы эта точка была устойчивой. Линеаризуем систему уравнений (11) в окрестности нулевой точки равновесия. Для этого введем малые отклонения от положения равновесия  $x^*$ ,  $v^*$ ,  $y^*$ ,  $u^*$ , для которых справедливы уравнения

$$\begin{aligned} dx^*/dt &= v^*, \\ dv^*/dt &= \lambda_1 v^* - x^* - \mu(v^* - u^*), \\ dy^*/dt &= u^*, \\ du^*/dt &= \lambda_2 u^* - (1 + \delta)y^* - \mu(u^* - v^*). \end{aligned} \quad (11')$$

Соответствующая матрица Якоби для этой системы будет выглядеть следующим образом:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda_1 - \mu & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mu & -1 - \delta & \lambda_2 - \mu \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Используя матрицу Якоби, можно получить соотношения, задающие в пространстве параметров поверхность седло-узловой бифуркации

$$\det M = -1 - \delta = 0 \Rightarrow \delta = -1. \quad (13)$$

эффект гибели колебаний, полученной в статье [2] в терминах укороченных уравнений.

### 3. Полные дифференциальные уравнения. Численное исследование

**3.1. Диссипативная связь.** Обратимся теперь к численному исследованию двух осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга с диссипативной связью (11). На рис. 2 и далее представлены карты динамических режимов, на которых черным цветом и оттенками серого показаны найденные численно области с различными периодами колебаний одного из связанных осцилляторов. Белый цвет обозначает хаотические и квазипериодические режимы. Буквами ГК обозначена область гибели колебаний.

Периоды циклов при построении карт динамических режимов определялись с использованием метода сечений Пуанкаре. После достаточно длительного переходного процесса, когда можно считать фазовую траекторию вышедшей на предельный цикл, определялись точки ее пересечения с секущей плоскостью. Но при этом рассматривались только траектории, «протыкающие» сечение Пуанкаре в одном направлении. Количество точек пересечения секущей плоскости принималось за период предельного цикла. Однако период, определенный таким образом, зависит от выбора сечения Пуанкаре. Поэтому каждый раз для одних и тех же значений параметров и начальных условий были построены карты динамических режимов при двух различных сечениях Пуанкаре:  $x=0$  и  $y=0$ , то есть нулевых значений координат первого и второго осцилляторов, соответственно. Поскольку траектория должна пересекать сечение Пуанкаре только в одном направлении, то дополнительно наложены условия  $dx/dt > 0$  и  $dy/dt > 0$ .

Тем не менее, численное исследование показало, что для любого выбора сечения форма языков синхронизации на картах динамических режимов одинакова. Наиболее характерные режимы синхронизации обозначены  $m/n$ , где  $m$  - период колебаний первого осциллятора, в точности соответствующий цвету на карте, а  $n$  - период колебаний второго осциллятора.

Рис. 2 отвечает случаю одинаковых управляющих параметров  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  и изохронному случаю  $\beta = 0$ . В области малых значений отстройки собственных частот осцилляторов  $\delta$  можно видеть большой основной язык синхронизации  $1/1$ , что совпадает с предсказаниями на основе анализа укороченной системы. Однако наблюдаются и весьма существенные отличия. Опишем их подробнее.

Во-первых, основной язык синхронизации  $1/1$  является несимметричным. В левой своей части он обрезан линией, отвечающей частотной расстройке  $\delta = -1$ . Напомним, что линия  $\delta = -1$  дает седло-узловую бифуркацию. Физически ее происхождение очень понятно из исходной системы (2) - при  $\delta < -1$  за счет влияния связи осцилляторы перестают быть колебательными системами.

Если говорить о глобальной картине языков синхронизации, то можно отметить следующие моменты. Основной язык синхронизации окружен теперь областью квазипериодики, внутри которой наблюдаются языки синхронизации высших порядков. При положительных расстройках (справа от основного языка) эти языки оказываются очень узкими, значительно более узкими, чем в задаче о синхронизации одного осциллятора Ван дер Поля внешним гармоническим сигналом. Однако в области отрицательных расстройек, слева от основного языка, структура вторичных резонансов выражена очень хорошо, что видно из увеличенного фрагмента карты на рис. 2, б. Можно видеть множество языков синхронизации  $2/1$ ,  $3/1$ ,  $4/1$ ,  $5/1$  и т.д. Все они имеют вид узких полос с острями у основания и вершины и однородны, то есть не обладают внутренней структурой.

Еще один существенно новый момент - появление больших, с характерным основанием и вершиной, языков синхронизации  $1/3$ ,  $1/2$ ,  $1/6$ ,  $1/9$  и т.д. при достаточно больших положительных частотных расстройках  $\delta$ .

На рис. 3 показаны фазовые портреты системы (1) в характерных точках плоскости параметров. При этом использованы два варианта фазовых переменных -

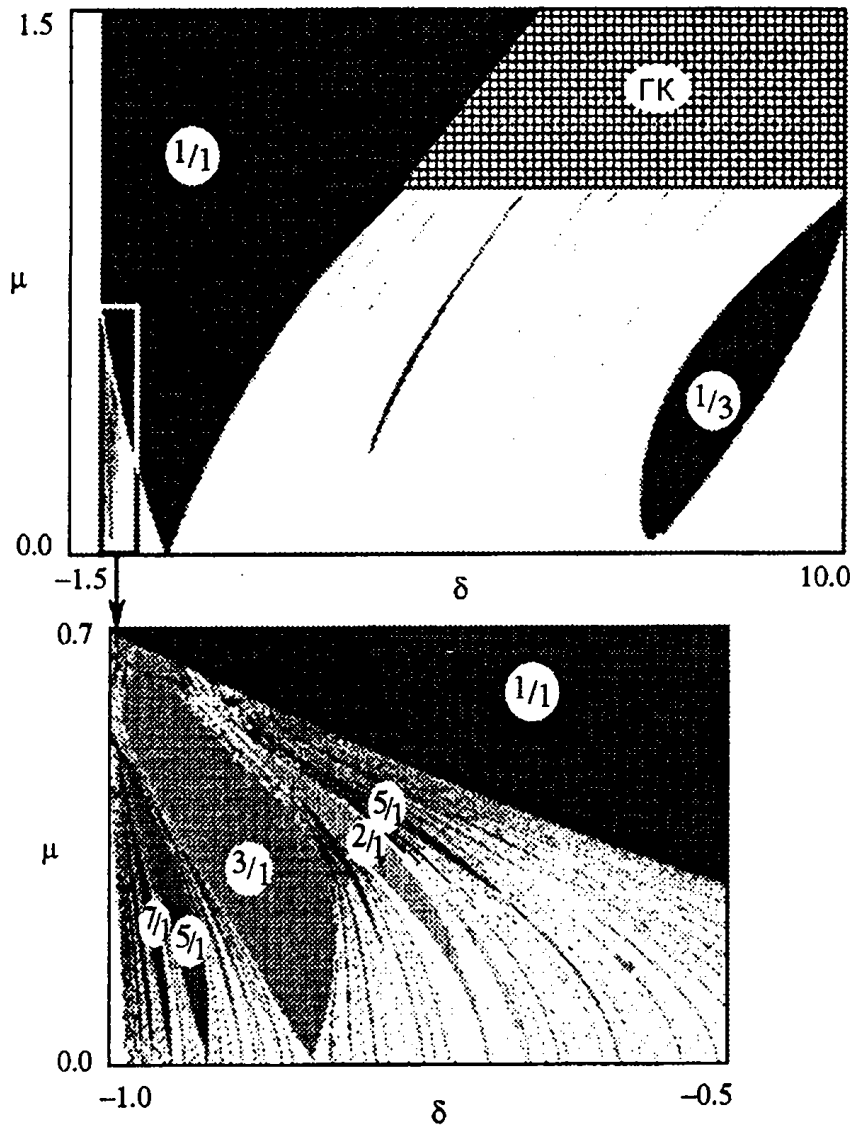


Рис. 2. Карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля (1) на плоскости параметров  $(\mu, \delta)$  для случая диссипативной связи и ее увеличенный фрагмент. Значения параметров  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\beta = 0$ . Дробями обозначены режимы синхронизации, где числитель и знаменатель - периоды колебаний первого и второго осциллятора, соответственно

пара верхних рисунков относится к координате и скорости первого и второго осциллятора, соответственно, а нижняя пара представляет смешанные переменные - координаты обоих осцилляторов и скорости обоих осцилляторов. Таким образом, это разные сечения четырехмерного фазового пространства системы. Интересно сравнить фазовые портреты, относящиеся к разным языкам синхронизации  $1/1$ .

Перейдем теперь к обсуждению эффекта гибели колебаний. Для укороченной системы (7) картина бифуркаций симметрична относительно линии  $\delta = 0$  (см. рис. 1), причем величина параметра частотной расстройки  $\delta$  может быть по модулю сколь угодно большой. Соответственно эффект гибели колебаний может наблюдаться как в области отрицательных, так и в области положительных расстроек. В дифференциальной системе, как мы уже отмечали, область отрицательных расстроек ограничена значением  $\delta = -1$ . Неудивительно поэтому, что на рис. 2 эффект гибели колебаний в области отрицательных расстроек вообще отсутствует.

Однако эффект гибели колебаний в дифференциальной системе в области отрицательных частотных расстроек все-таки можно наблюдать. Для этого надо уменьшить значения управляющих параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  подсистем. Действительно, пороговое значение расстройки, при котором наблюдается этот эффект в



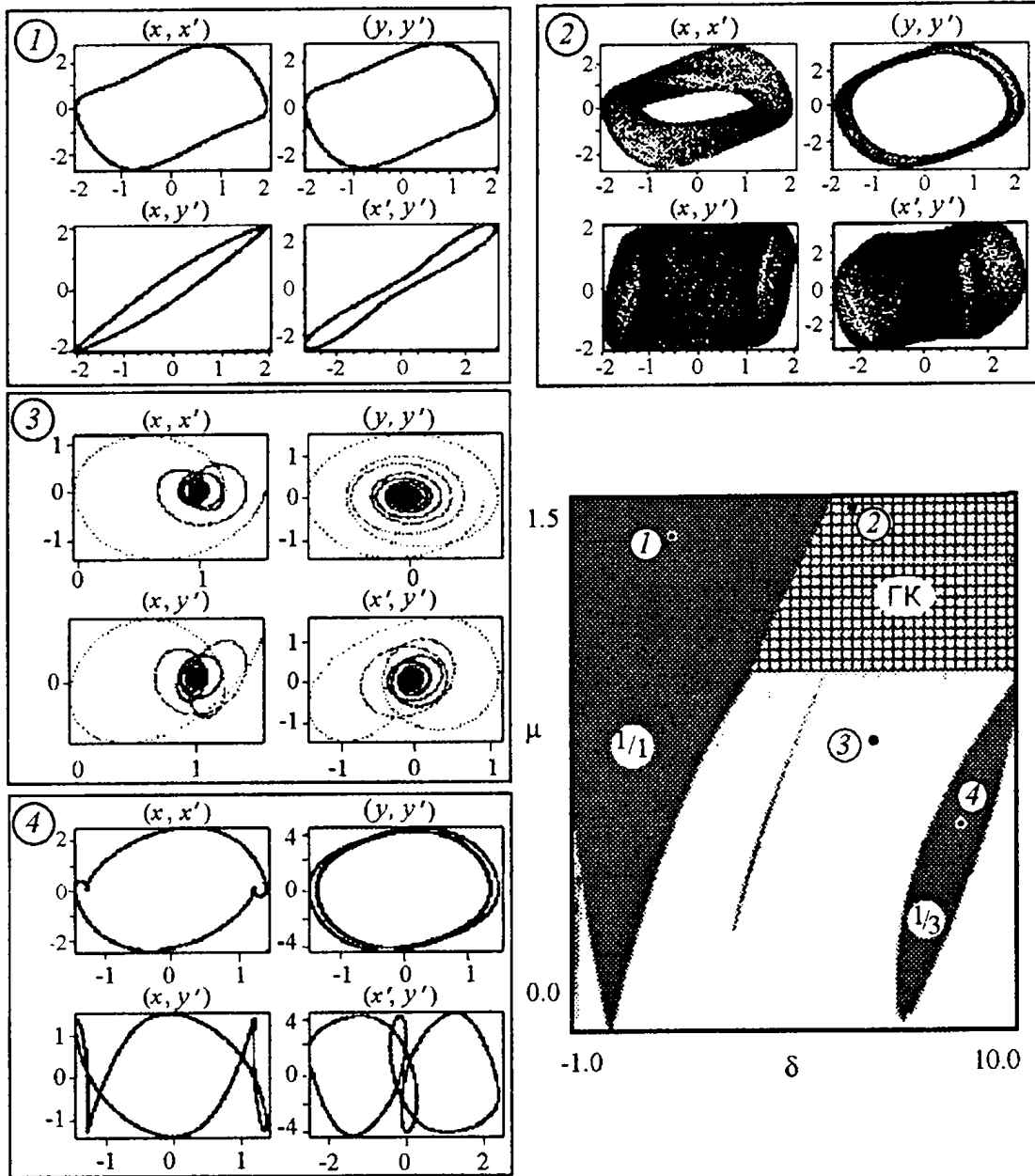


Рис. 3. Примеры фазовых портретов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля (1), наблюдаемых в различных точках карты динамических режимов. Случай диссипативной связи. Значения параметров  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\beta = 0$

укороченной системе, будет постепенно уменьшаться по абсолютной величине и наступит момент, когда он сможет проявиться в дифференциальной системе. Это хорошо видно на фрагментах карты рис. 4, когда этот эффект появляется в области между значениями  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$  и  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.6$ . При уменьшении управляющих параметров подсистем область гибели колебаний расширяется. При очень малых значениях  $\lambda_{1,2}$  язык становится симметричным и все более похожим на даваемый укороченной моделью (см. рис. 1).

**3.2. Активная связь.** Рассмотрим случай диссипативной связи осцилляторов с отрицательным коэффициентом связи  $\mu$ . Это позволит нам более глубоко оценить свойства исходной дифференциальной системы. С другой стороны, как мы уже отмечали, можно надеяться и на экспериментальное исследование соответствующих эффектов в электронных системах. Случай отрицательных  $\mu$  будем называть активной связью.

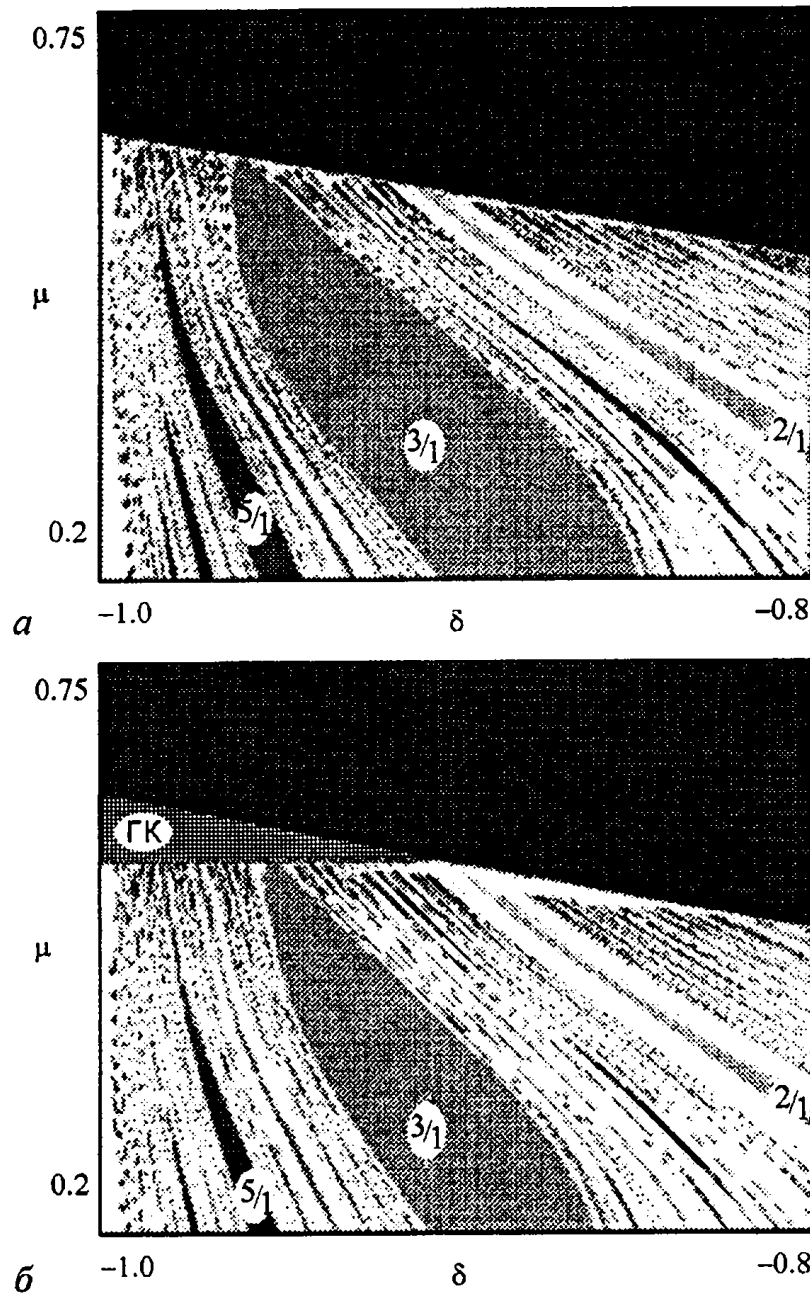


Рис. 4. Фрагменты карт динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля (1), демонстрирующие возникновение эффекта гибели колебаний в области отрицательных частотных расстройок. Значения управляющих параметров:  $a - \lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$ ,  $б - \lambda_1 = \lambda_2 = 0.6$

На рис. 5 представлены карты динамических режимов системы с активной связью. Снова рассмотрены одинаковые управляющие параметры  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  и изохронный случай  $\beta = 0$ . Помимо основного языка синхронизации  $1/1$ , находящегося в области нулевой расстройки частот, существуют еще более широкие, чем при диссипативной связи с  $\mu > 0$ , дополнительные языки синхронизации  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/6$  и т.д., наблюдаемые при увеличении параметра  $\delta$ . При активной связи, что достаточно естественно, отсутствует область гибели колебаний. Можно сделать вывод, что синхронизация системы при помощи активной связи возможна в значительно более широких областях значений параметров, чем при диссипативной связи с  $\mu > 0$ . Тем не менее, при  $\delta < -1$  периодические колебания наблюдаться по-прежнему не будут, так как условие для седло-узловой бифуркации (13) здесь справедливо.

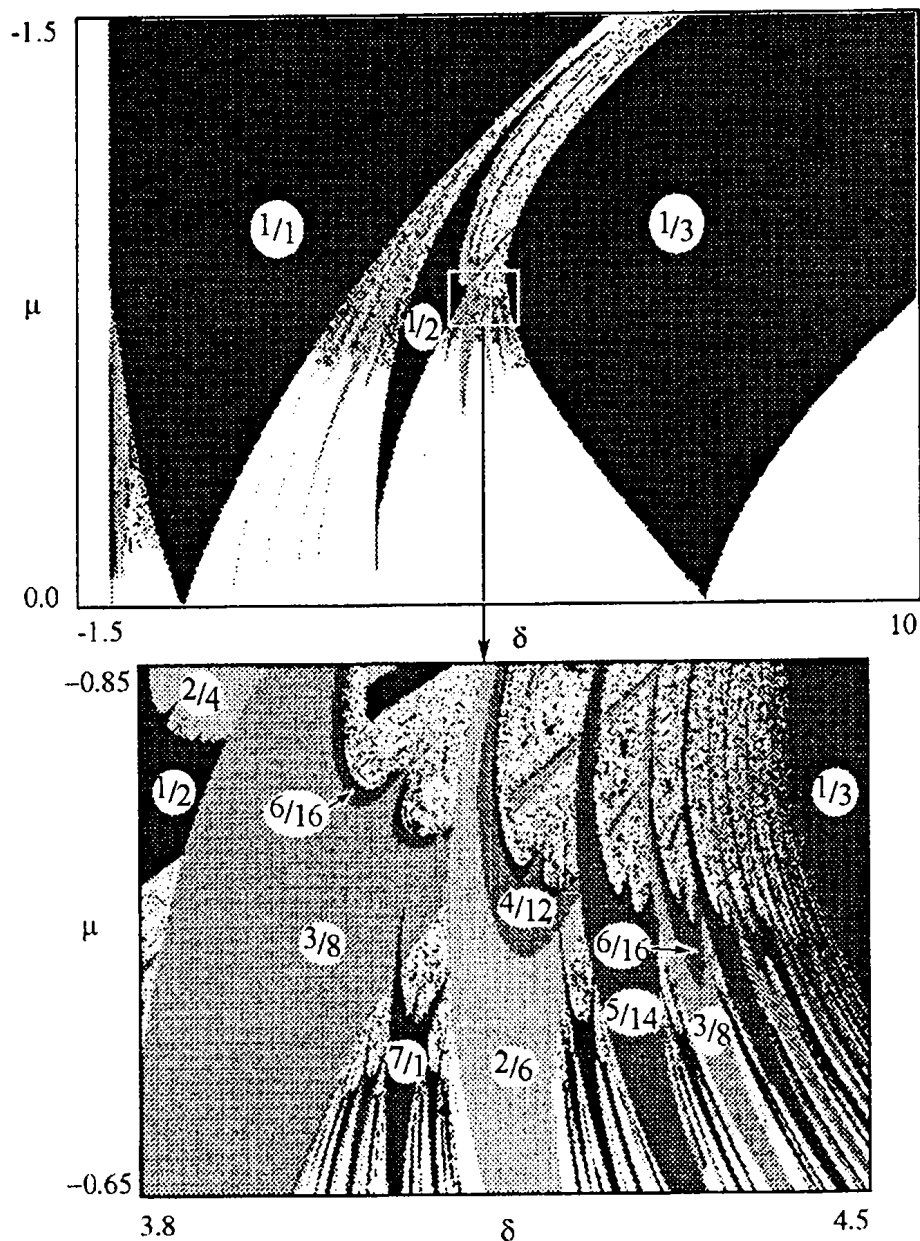


Рис. 5. Карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля для случая активной связи и ее выделенный фрагмент при  $\lambda_1=\lambda_2=1, \beta=0$

Второе существенное отличие случая активной связи - наличие выраженных языков Арнольда кратных периодов колебаний осцилляторов во всем диапазоне частотных расстроек. Более того, как видно из увеличенного фрагмента рис. 5, эти языки имеют четкую внутреннюю структуру, характерную для классического синус-отображения окружности. Можно видеть также области удвоенного периода, которые часто называют *crossroad-area*. В отличие от случая диссипативной связи с  $\mu > 0$ , возможен переход к хаосу через удвоения периода внутри этих языков.

Если же посмотреть на общую картину языков синхронизации на рис. 5, то можно констатировать, что достаточно неплохо просматривается линия начала перекрытия языков синхронизации, что также вполне близко к картине, даваемой классическим синус-отображением окружности. Таким образом, при активной связи могут сосуществовать циклы различных периодов и режим динамического хаоса, то есть имеет место мультистабильность. Отметим, что мультистабильность в системе связанных осцилляторов Ван дер Поля исследовалась М. Poliashenko,

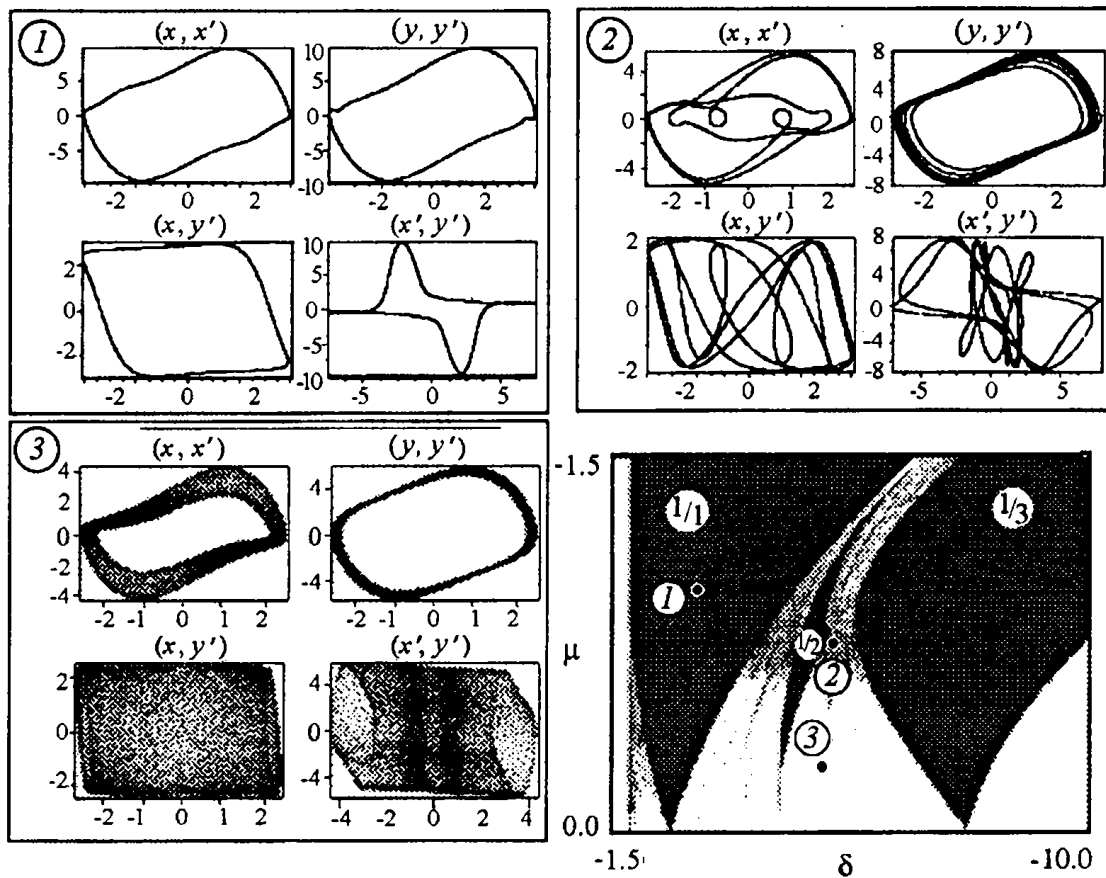


Рис. 6. Примеры фазовых портретов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля, наблюдаемых в различных точках карты динамических режимов. Случай активной связи. Значения параметров  $\lambda_1=\lambda_2=1, \beta=0$

S. McKay, C. Smith [4]. При анализе укороченных уравнений ими аналитически было обосновано существование мультистабильности. Это проявлялось в сосуществовании устойчивых неподвижных точек при решении системы укороченных уравнений, что соответствует устойчивым предельным циклам решения системы полных дифференциальных уравнений (11), и режима дрейфа фазы - аналога динамического хаоса в полной системе. Однако эти режимы можно отнести к другому типу мультистабильности.

В случае активной связи в области отрицательной расстройки собственных частот также существует множество языков Арнольда. Однако они идентичны языкам, возникающими при диссипативной связи с  $\mu > 0$ .

На рис. 6 представлены фазовые портреты системы (11) для случая активной связи. Можно видеть, что форма фазовой траектории сильно модифицировалась по сравнению со случаем диссипативной связи с  $\mu > 0$ .

До этого мы рассматривали случай только положительных значений управляющих параметров индивидуальных осцилляторов. Пусть теперь управляющие параметры осцилляторов,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , отрицательны. При этом колебания автономных осцилляторов будут затухать, поскольку осцилляторы будут находиться до порога бифуркации Андронова - Хопфа. В случае активной связи можно обнаружить новый эффект раскачки колебаний за счет действия связи. Действительно, обратимся к показанной на рис. 7 карте динамических режимов на плоскости параметров  $(\delta, \mu)$  для  $\lambda_1=\lambda_2=-1$ . Параметр связи  $\mu$  принимает как положительные, так и отрицательные значения. Показаны также фазовые портреты для характерных точек на плоскости параметров, в которых реализуются различные режимы. Поскольку осцилляторы сами по себе колебаться не будут, то логично ожидать на карте динамических режимов

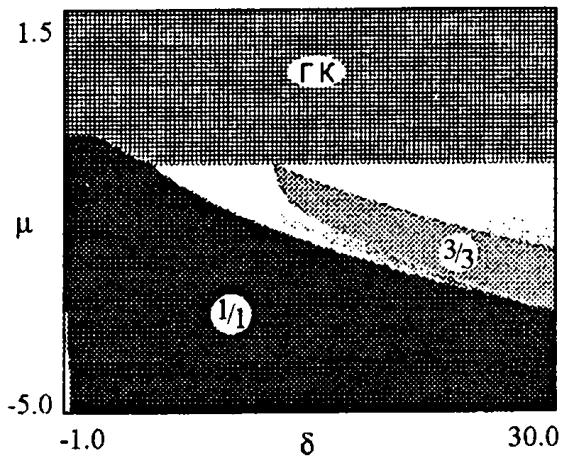


Рис. 7. Карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля при отрицательных значениях управляющих параметров  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

существование обширной области эффекта гибели колебаний, так как этот эффект как раз соответствует отсутствию каких-либо колебаний. Действительно, при диссипативной связи с  $\mu > 0$  колебаний не будет. Однако для активной связи, при  $\mu < 0$ , наблюдаются различные колебательные динамические режимы. В частности, имеются области синхронизации 1/1, 3/3

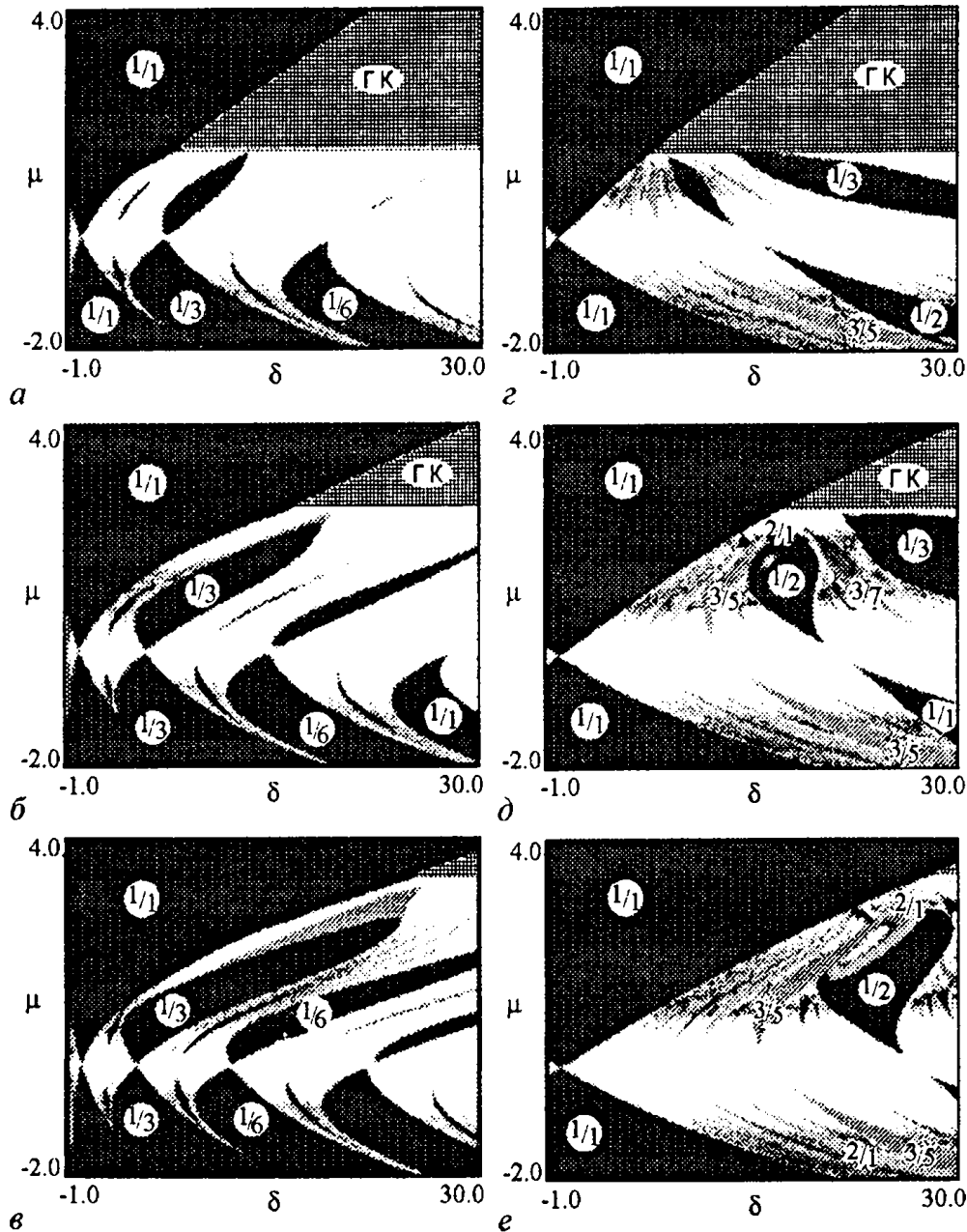


Рис. 8. Карты динамических режимов осцилляторов Ван дер Поля - Дuffинга. Левая колонка -  $\beta=0$  (отсутствие фазовой нелинейности), правая -  $\beta=1$  (наличие фазовой нелинейности). Значения параметров:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.5$  (а, г);  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.5$  (б, д);  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3.5$  (в, е)

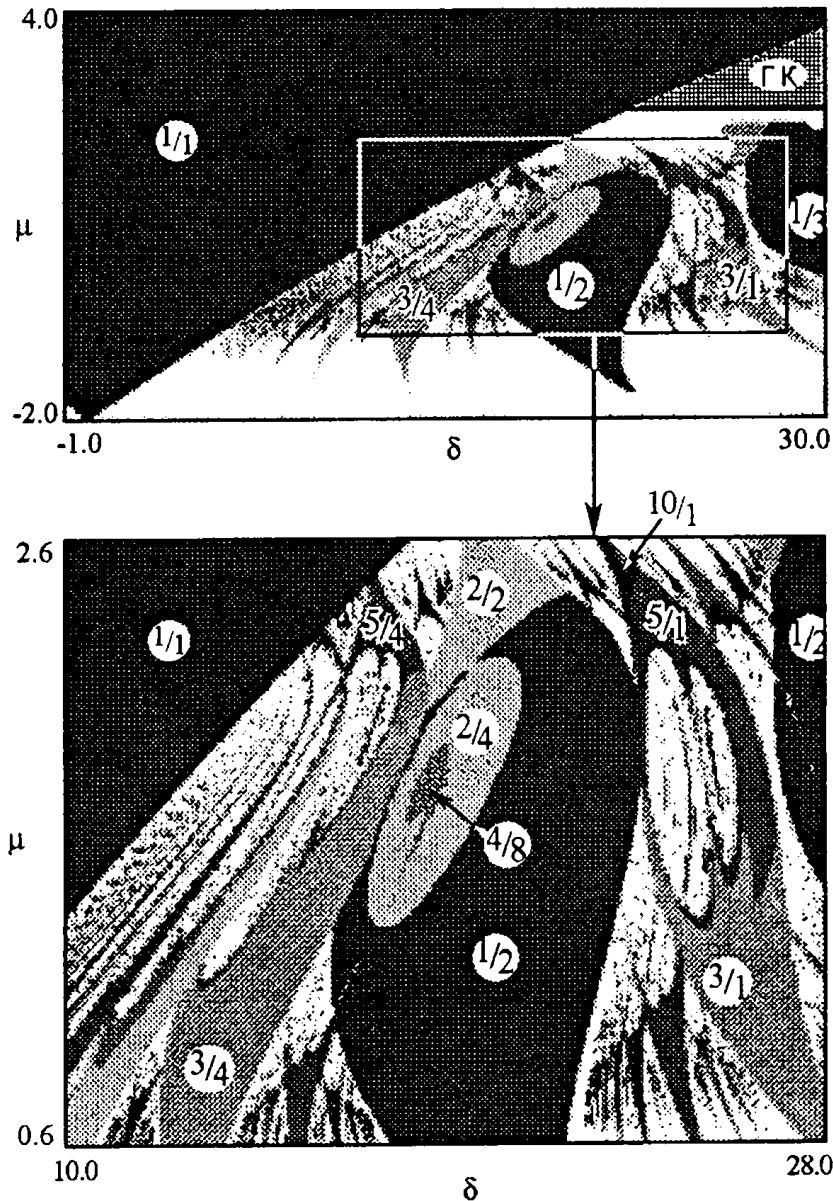


Рис. 9. Пример существования сложной внутренней структуры языков Арнольда, связанной с наличием фазовой нелинейности в системе. Значения параметров  $\beta=1$ ,  $\lambda_1=\lambda_2=3$

и т.д. Есть также области неперiodических колебаний. Таким образом, мы видим проявление эффекта, состоящего в том, что за счет наличия активной связи реализуется колебательный режим системы связанных осцилляторов, которые сами по себе колебаться не могут. Чтобы это стало возможным, необходимо, чтобы сила связи была сравнима с силой притяжения осцилляторов к устойчивому нулевому положению. Однако следует заметить, что внутри языков синхронизации периоды колебаний обоих осцилляторов равны между собой.

**3.3. Различные управляющие параметры осцилляторов и неизохронный случай.** До сих пор исследовалось поведение системы в зависимости от величины связи  $\mu$  и частотной расстройки осцилляторов  $\delta$ . (Фактически, это аналог плоскости амплитуда - частота воздействия для автономного гармонически возбуждаемого осциллятора.) При этом управляющие параметры осцилляторов  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  оставались постоянными, а фазовая нелинейность отсутствовала (параметр  $\beta=0$ ). Рассмотрим теперь, как зависит динамика системы от управляющих параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и параметра неизохронности  $\beta$ . Исследуем одновременно

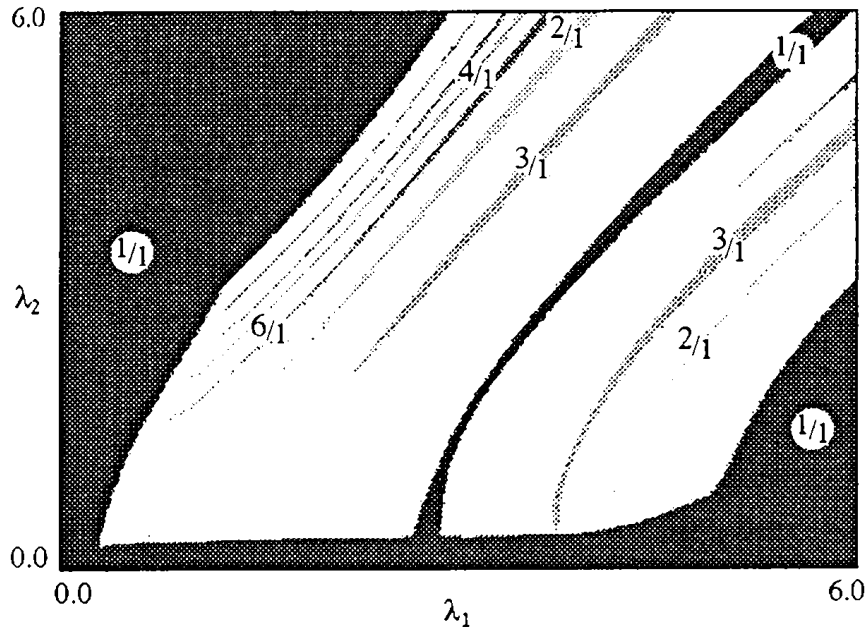


Рис. 10. Карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров осцилляторов  $(\lambda_1, \lambda_2)$  при  $\mu=0.3, \delta=1.5$

случаи диссипативной связи, строя карты динамических режимов и изменяя величину коэффициента связи  $\mu$  от отрицательных до положительных значений. Результаты таких расчетов для значений параметров  $\lambda_1=\lambda_2$ , равных 1,5; 2,5; 3,5 показаны на рис. 8. Левая колонка отвечает системе без фазовой нелинейности,  $\beta=0$ , а правая - значению параметра фазовой нелинейности  $\beta=1$ . Поскольку эффект гибели колебаний наблюдается если  $\mu > (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ , то при увеличении  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  необходима большая сила связи для подавления колебаний, что хорошо видно на картах. Также увеличение  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в области диссипативной связи приводит к заметному увеличению языков синхронизации. Для случая активной связи вид карт практически не меняется, за исключением того, что языки заметно сближаются.

Введение фазовой нелинейности гораздо более существенно модифицирует картину языков. Прежде всего, отметим, что основные языки не сближаются, а

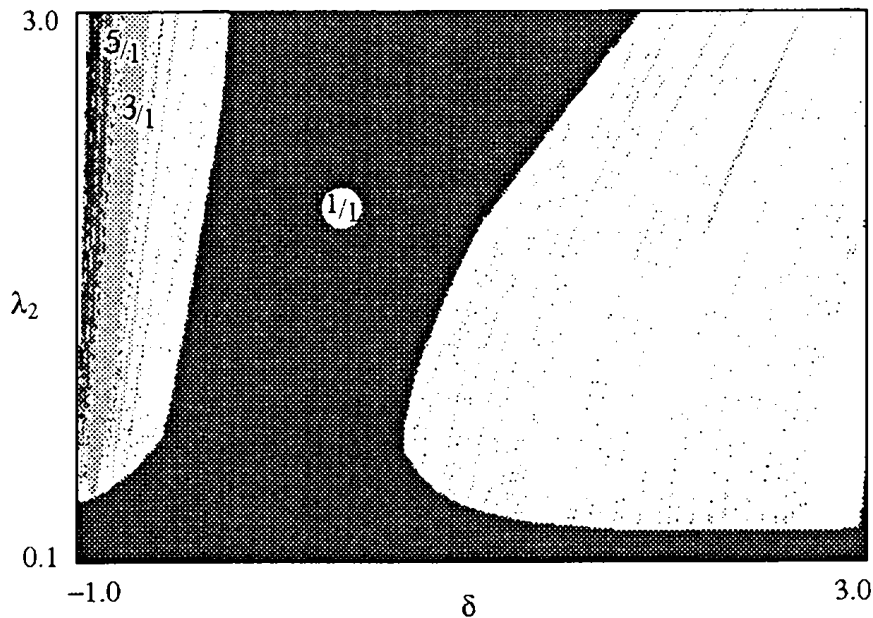


Рис. 11. Карта динамических режимов на плоскости параметров частотная расстройка - управляющий параметр второй подсистемы  $(\delta, \lambda_2)$  при  $\mu=0.3, \lambda_1=1$

удаляются друг от друга (правая колонка рис. 8). При этом область между основными языками заполняется хорошо выраженными языками более высоких порядков, причем начинает просматриваться линия перекрытия языков синхронизации. Происходит деформация формы языков Арнольда, и внутри них образуются гораздо более сложные структуры. Пример таких структур проиллюстрирован на рис. 9. Хорошо видно, что центральный язык  $1/2$  ограничен сверху теперь областью синхронизации  $2/2$ , которая, в свою очередь, имеет острие, упирающееся в располагающийся слева основной язык периода  $1/1$ . Внутри же самого языка образовались острова других периодов. На двух, расположенных слева и справа от центрального, языках  $3/4$  и  $3/1$  также хорошо видно сопряжение двух областей разных периодов, образующих верхнее и нижнее острия, а также разрывы в языках, ограниченные сверху и снизу весьма характерными структурами типа crossroad-area. На выделенном фрагменте рис. 9 очень хорошо видны две системы языков больших периодов, упирающихся остриями в основной (левый) язык периода  $1/1$  и в линию нулевой связи.

Рассмотрим, наконец, случай несимметричной системы, когда сами осцилляторы различаются по значениям управляющих параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . На рис. 10 показаны карты динамических режимов на плоскости управляющих параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Заметим, что нулевые значения этих параметров отвечают бифуркации Андронова - Хопфа в изолированном осцилляторе. Хорошо видно, что вблизи этих линий реализуются области  $1/1$  - основные языки синхронизации, принявшие своеобразную форму. Внутри охватываемой этой областью части плоскости параметров реализуются необычайно узкие, вытянутые в направлении диагонали языки высших периодов и обширные зоны квазипериодических режимов. На плоскости параметров частотная расстройка  $\delta$ , управляющий параметр второй подсистемы  $\lambda_2$  (рис. 11) можно также видеть весьма своеобразный язык синхронизации периода  $1/1$  и множество крайне узких языков более высоких периодов.

Таким образом, динамика двух связанных дифференциальных систем Ван дер Поля - Дуффинга оказывается очень богатой и демонстрирует существенно более сложную картину, нежели предсказанную с помощью укороченных уравнений. Можно ожидать, что некоторые элементы этой картины могут быть характерными и для других дифференциальных систем.

Авторы выражают благодарность Аркадию Пиковскому за полезное обсуждение.

*Работа поддержана грантом Американского фонда гражданских исследований (REC 006) и Российским фондом фундаментальных исследований (03-02-16074).*

### **Библиографический список**

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003. 496 с.
2. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D*. 1990. Vol. 41. P. 403.
3. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44. P. 3452.
4. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Hysteresis of synchronous - asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 43. P. 5638.
5. Ivanchenko M.V., Osipov G.B., Shalfeev V.D. Self-synchronization of nonscalar-coupled limit-cycle oscillators.



6. Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. 171.

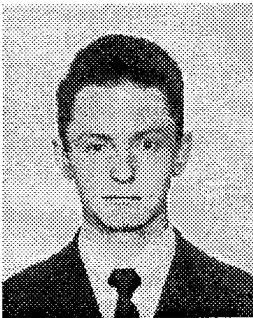
7. Herrero M., Figueras M., Rius J., Pi F., Orriols G. Experimental observation of the amplitude death effect in two coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. P. 5312.

*Саратовский государственный университет    Поступила в редакцию 10.06.03*  
*Саратовское отделение Института*  
*радиотехники и электроники РАН*

## **ABOUT DYNAMICS OF TWO VAN DER POL - DUFFING OSCILLATORS WITH DISSIPATIVE COUPLING**

*A.P. Kuznetsov, V.I. Paksutov*

Coupled van der Pol - Duffing differential systems are considered for the case of dissipative and active coupling. The arrangement of the parameter space is studied, and possible physical effects are discussed.



*Паксутов Владимир Игоревич* - родился в 1982 году. Окончил Лицей колледжа прикладных наук (1999). Студент пятого курса факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается научной работой на базовой кафедре динамических систем СГУ в Саратовском отделении Института радиотехники и электроники РАН по направлению: динамические режимы и синхронизация в автоколебательных системах различной природы. С 2000 года постоянный участник ежегодной научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», принял участие в трех международных конференциях. Имеет пять научных публикаций.