



СУБГАРМОНИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В УРАВНЕНИИ ВАН ДЕР ПОЛЯ

А.П. Кузнецов, С.В. Милованов

В работе рассматривается резонанс в системе Ван дер Поля в случае, когда частота внешнего воздействия близка к утроенной собственной частоте системы. Представлен метод медленно меняющихся амплитуд для такой системы, получено укороченное уравнение, обсуждаются его бифуркации и форма языка синхронизации. Материал может быть полезен преподавателям, ведущим занятия по теории колебаний и нелинейной динамике.

Введение

Как хорошо известно, нелинейные колебательные системы под внешним воздействием могут демонстрировать резонансный отклик не только при возбуждении на частоте, близкой к собственной. Простейшими примерами могут служить ситуации, когда частота внешнего сигнала приблизительно в целое число раз (два, три и т.д.) превосходит собственную. Такие ситуации называют *субгармоническими резонансами*. Субгармонические резонансы - также классическое явление нелинейной теории колебаний [1-4], да и физики вообще [5]. Для нелинейного осциллятора с квадратичной нелинейностью известна приближенная аналитическая теория для резонанса на удвоенной частоте, а для осциллятора с кубической нелинейностью - на утроенной [5]. Соответствующие вопросы традиционно излагаются в курсах теории колебаний.

Другой эталонной моделью теории колебаний и нелинейной динамики является осциллятор Ван дер Поля. Он представляет собой простейший пример системы, демонстрирующей автоколебательные режимы и бифуркацию Андронова - Хопфа. В любом учебнике по теории колебаний можно найти в той или иной форме приближенную теорию основного резонанса в системе Ван дер Поля, объясняющую появление языка синхронизации на плоскости частота - амплитуда воздействия. Исходное уравнение имеет следующий вид:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь ω - частота внешнего сигнала, b - его амплитуда, λ - управляющий параметр автономной системы. (Скажем два слова о нормировке. Гораздо чаще второе слагаемое в уравнении (1) записывают в виде $\lambda(1-x^2)$). В этом случае, однако, в уравнении (1) отсутствует бифуркация Андронова - Хопфа. Мы считаем, что

терять такой феномен в эталонном уравнении теории колебаний не следует, и отдаем предпочтение указанной выше форме уравнения.)

При использовании метода медленно меняющихся амплитуд решение ищут в виде $x = 1/2 (ae^{i\omega t} + a^* e^{-i\omega t})$ при дополнительном условии $\dot{a}e^{i\omega t} + \dot{a}^* e^{-i\omega t} = 0$. После процедуры усреднения получаются известные укороченные уравнения для комплексной амплитуды

$$\dot{a} + i(\omega^2 - 1)/(2\omega)a = (\lambda/2)a - (1/8)|a|^2 a - b/(2\omega). \quad (2)$$

Если ввести безразмерные переменные и параметры

$$\tau = \lambda t/2, z = 1/(2\lambda^{1/2})a, \Delta = (\omega^2 - 1)/(\lambda\omega), \varepsilon = b/(2\omega\lambda^{3/2}), \quad (3)$$

то можно получить безразмерное укороченное уравнение

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z - \varepsilon. \quad (4)$$

Здесь Δ - безразмерная отстройка внешней частоты от собственной, ε - безразмерная амплитуда внешнего воздействия. Уравнения для амплитуды и фазы переменной $z = Re^{i\varphi}$ из (4) принимают вид

$$\dot{R} = R - R^3 + \varepsilon \cos\varphi, \quad (5)$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta - (\varepsilon/R)\sin\varphi.$$

При малом внешнем воздействии можно считать динамику амплитуды независимой от фазы. Тогда из первого уравнения (5) следует, что $R=1$, а из второго уравнения, что

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon \sin\varphi. \quad (6)$$

Это известное уравнение фазовой динамики, которое иногда называют уравнением Адлера [3-4]. Из его вида и следует, что режимы синхронизации имеют место внутри области (языка Арнольда), ограниченной линиями $\Delta = \pm\varepsilon$ на плоскости частота - амплитуда воздействия [1-4].

В последнее время в учебники стали включать и более подробный бифуркационный анализ укороченных уравнений (2) при произвольных амплитудах воздействия. Эти результаты, появившиеся впервые, по-видимому, в известной монографии Гукенхеймера и Холмса, недавно вышедшей на русском языке [6], стали постепенно «перекочевывать» из научной литературы в учебную (см., например, [3]). Результат соответствующего бифуркационного анализа представлен на рис. 1 и 2. На рис. 1 дан общий вид языка синхронизации и характерные фазовые портреты уравнений (5). На рис. 2 показана окрестность точки сборки, в которую приходит линия седло-узловой бифуркации (край языка) при увеличении амплитуды сигнала. В ее окрестности в вершинах языка синхронизации появляются линии бифуркаций Неймарка - Сакера (бифуркации Андронова - Хопфа для укороченных уравнений), точка Богданова - Такенса, из которой выходит эта линия, а также линия нелокальной бифуркации. (Подробности можно найти в [3,6].) Заметим, что в отличие от изложенного в книге [6] мы приводим не качественные портреты, а точные, построенные на компьютере для уравнений (5). Построение соответствующих бифуркационных линий и фазовых портретов может служить хорошим упражнением для компьютерного практикума.

В то же время из компьютерных расчетов известно, что полная картина резонансов в системе (1) весьма сложна (см., например, [6-7]). Общее представление о картине бифуркаций дает рис. 3 для случая $\lambda=1$ [7]. На этом

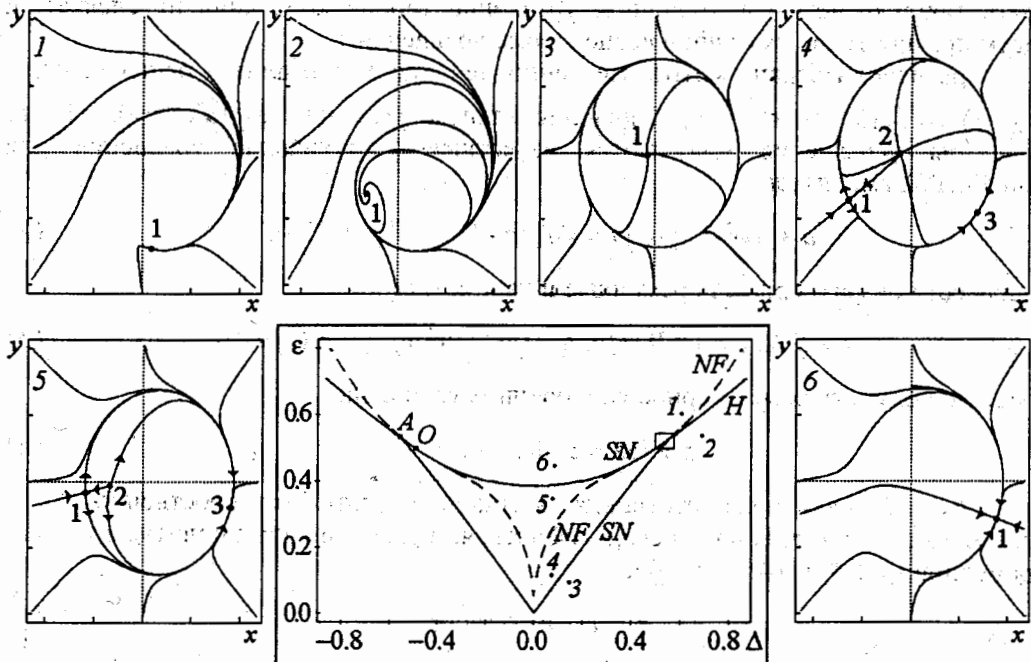


Рис. 1. Плоскость параметров укороченного уравнения (4) вблизи основной частоты и характерные фазовые портреты. SN - линии седло-узловых бифуркаций, H - линия бифуркации Неймарка - Сакера (Андропова - Хопфа), NF - линия превращения узла в фокус

рисунке можно видеть как основной резонанс, так и систему субгармонических резонансов. Отметим, что картина бифуркаций в этой системе очень тонкая и представленная карта отображает лишь наиболее существенную, но и наиболее

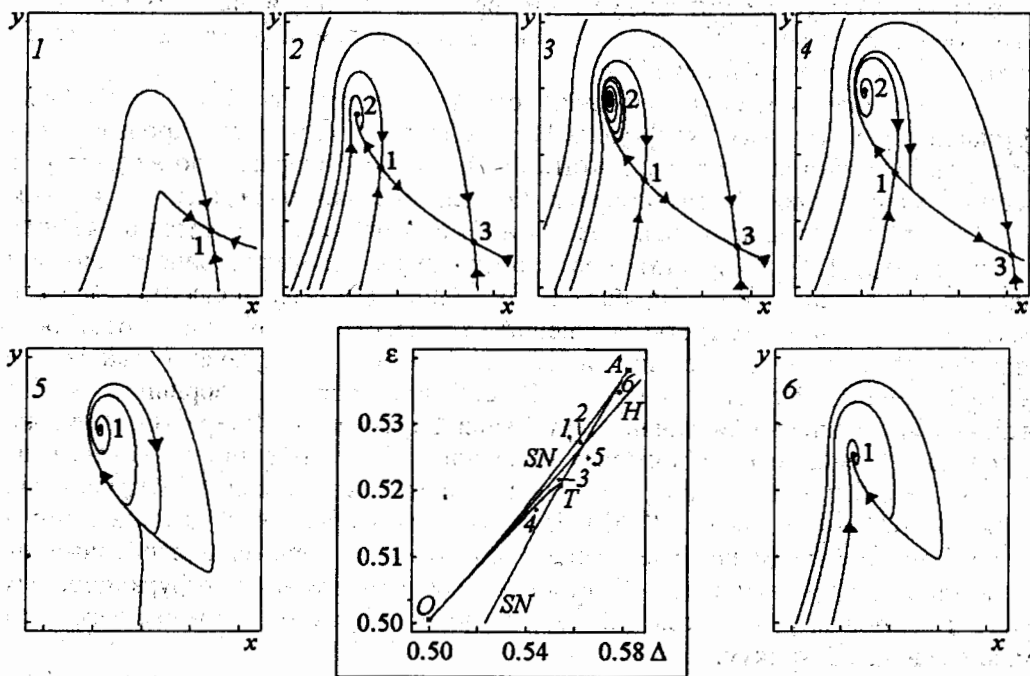


Рис. 2. Увеличенный фрагмент плоскости параметров укороченного уравнения (4) в окрестности точки сборки A . SN - линии седло-узловых бифуркаций, H - линия бифуркации Неймарка - Сакера (Андропова - Хопфа), T - точка Богданова - Такенса

грубую картину. В частности, не видны супергармонические резонансы, располагающиеся по оси частот «левее» основного. Детали численного бифуркационного анализа системы (1) можно найти в прекрасных работах Парлитца и его соавторов [7-8].

Обратим далее внимание на весьма характерную форму языка синхронизации на утроенной частоте воздействия, который имеет овальную вершину. (Она становится еще более выраженной при уменьшении λ .) Все теоретики и экспериментаторы, имеющие дело с явлением синхронизации, знают, что это очень характерный вид резонанса на утроенной частоте.

Попробуем объяснить форму соответствующего языка синхронизации и уточним картину бифуркаций у его вершины. Оказывается, что для этого вполне достаточно простейших методов, по сути представляющих собой версию метода медленно меняющихся амплитуд.

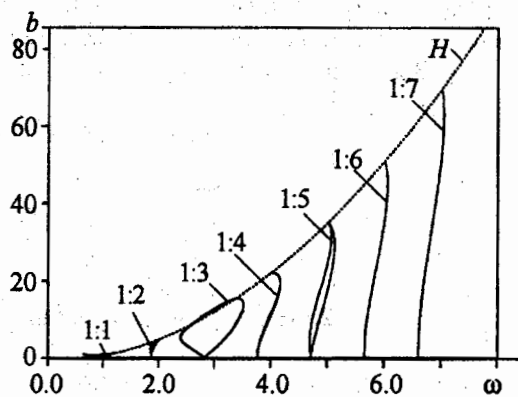


Рис. 3. Картина языков синхронизации, отвечающих основному резонансу и резонансу на главных субгармониках для дифференциальной системы Ван дер Поля (1) при $\lambda=1$

1. Метод медленно меняющихся амплитуд для субгармонического резонанса

Итак, обратимся к системе (1) в случае, когда частота внешнего сигнала ω примерно равна утроенной собственной частоте $\omega \approx 3$. По аналогии с задачей о поиске субгармонического резонанса в нелинейном осцилляторе [5], прежде всего находим нерезонансный отклик на этой частоте, для чего вполне достаточно линейного приближения. Подставим в (1) $x(t) = -A \cos \omega t$, тогда $(\omega^2 - \omega_0^2)A = b$, откуда $A = b/8$.

Для того, чтобы получить укороченное уравнение, описывающее субгармонический резонанс на утроенной частоте, полагаем

$$x = 1/2 (ae^{i\omega t/3} - Ae^{i\omega t} + a^*e^{-i\omega t/3} - Ae^{-i\omega t}). \quad (7)$$

Подставим это соотношение в исходное уравнение (1). В полученном уравнении выделим лишь резонансные члены порядка $e^{i\omega t/3}$, с линейными членами поступим аналогично обычному резонансу в уравнении Ван дер Поля. В результате некоторых преобразований получим

$$\dot{a} - \lambda a/2 + [1 - (\omega/3)^2]/[2(i\omega/3)]a + 1/8 [|\lambda|^2 a^* - \lambda^* A + 2aA^2] = 0. \quad (8)$$

Полагаем $[1 - (\omega/3)^2]/[2(\omega/3)] \approx 1 - (\omega/3)$, так как $\omega \approx 3$. Выполним замену переменных

$$\tau = \lambda t/2, \quad z = a/(2\lambda^{1/2}), \quad \Delta = 2(\omega/3 - 1)/\lambda, \quad \epsilon = A/(2\lambda^{1/2}) = b/(16\lambda^{1/2}). \quad (9)$$

Тогда получим

$$\dot{z} = z - |z|^2 z - i\Delta z - 2\epsilon^2 z + \epsilon |z|^2. \quad (10)$$

Это и есть укороченное безразмерное уравнение в комплексной форме, описывающее субгармонический резонанс на утроенной частоте. Параметры ϵ и Δ

представляют собой безразмерные амплитуду внешнего воздействия и отстройку внешней частоты от утроенной собственной.

Выполнив подстановку $z = Re^{i\varphi}$, приходим к уравнению для амплитуды и фазы

$$\dot{R} = (1 - 2\epsilon^2)R - R^3 + \epsilon R^2 \cos 3\varphi, \quad (11)$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \epsilon R \sin 3\varphi.$$

2. Малые амплитуды воздействия. Уравнение Адлера

Так же как и в традиционном случае основного резонанса, рассмотрим сначала случай малых амплитуд воздействия ϵ . По аналогии с задачей об основном резонансе [3,4] будем полагать, что динамика амплитуды идет независимо от фазы. Тогда из первого уравнения (11) получаем $R = (1 - 2\epsilon^2)^{1/2}$. Подставляем этот результат во второе уравнение (11)

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \epsilon(1 - 2\epsilon^2)^{1/2} \sin 3\varphi. \quad (12)$$

Получаем уравнение типа уравнения Адлера, но синус теперь утроенного угла. Из вида уравнения (12) заключаем, что вблизи значения частоты $\omega \approx 3$ в системе также наблюдается явление синхронизации. Как легко видеть из уравнения Адлера, границы языка синхронизации в анализируемом случае задаются соотношением $\Delta = \pm \epsilon(1 - 2\epsilon^2)^{1/2}$. При малых ϵ имеем $\Delta = \pm \epsilon$ (рис. 4, а), то есть язык имеет классическую форму в виде острия. Если, однако, нарисовать «полную» функцию $\Delta = \pm \epsilon(1 - 2\epsilon^2)^{1/2}$ (рис. 4, б), то язык оказывается замкнутым сверху и имеет овальную вершину.

3. Основные бифуркации в случае произвольных амплитуд воздействия

Уточним теперь форму языка синхронизации. Для этого найдем стационарное решение укороченных уравнений (11). Полагаем в уравнениях для амплитуды и фазы $\dot{R} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$

$$(1 - 2\epsilon^2)R - R^3 = -\epsilon R^2 \cos 3\varphi, \quad (13)$$

$$\Delta = -\epsilon R \sin 3\varphi.$$

Делим первое уравнение системы (13) на R , возводим оба уравнения в квадрат и складываем. Тогда получим

$$(1 - 2\epsilon^2 - R^2)^2 + \Delta^2 = \epsilon^2 R^2. \quad (14)$$

Положим $\xi = R^2 + 2\epsilon^2 - 1$, тогда $\zeta^2 - \epsilon^2(\xi - 2\epsilon^2 + 1) + \Delta^2 = 0$ или $\zeta^2 - \epsilon^2\xi + \Delta^2 + 2\epsilon^4 - \epsilon^2 = 0$, откуда

$$\xi_{1,2} = \epsilon^2/2 \pm (\epsilon^4/4 - \Delta^2 - 2\epsilon^4 + \epsilon^2)^{1/2}. \quad (15)$$

Из последнего соотношения видно, что пара новых стационарных решений укороченных уравнений возникает, когда выражение под корнем становится положительным. Таким образом, **седло-узловая бифуркация** имеет место при

$$\Delta^2 = \epsilon^2 - 7/4\epsilon^4. \quad (16)$$

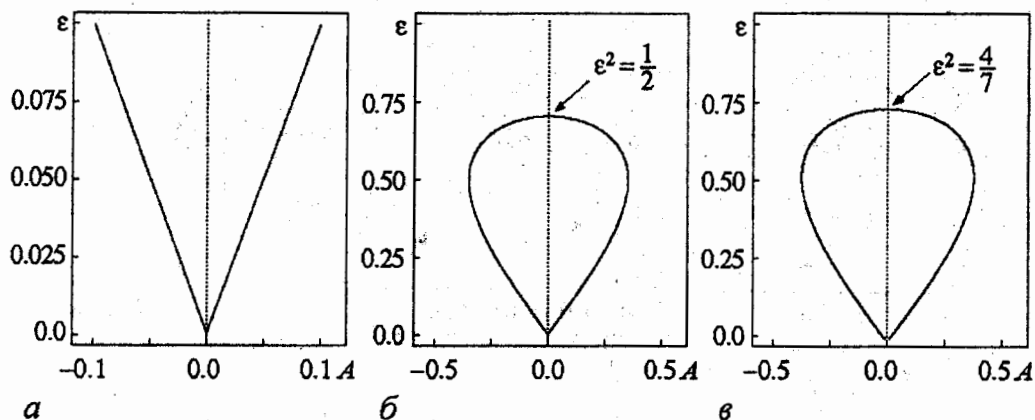


Рис. 4. Граница языка синхронизации в случае резонанса на утроенной частоте: а - случай $\varepsilon \rightarrow 0$, б - случай малых амплитуд, в - случай произвольных амплитуд воздействия.

Сравнив с решением, полученным в предыдущем пункте, заключаем, что приведенное там выражение правильно передает форму языка. (См. рис. 4, где показано в увеличенном виде острие языка (а) и его конфигурация, описываемая приближенным (б) и точным (в) соотношением (16).) Теперь мы можем уточнить координату вершины языка: $\Delta=0$, $\rightarrow \varepsilon^2 = 4/7$ (рис. 4, в).

Найдем далее линию бифуркации Андронова - Хопфа. Пусть $z=x+iy$. Тогда из укороченного уравнения (10) получаем

$$\dot{x} = x - (x^2+y^2)x + \Delta y - 2\varepsilon^2 x - \varepsilon(x^2-y^2), \quad (17)$$

$$\dot{y} = y - (x^2+y^2)y - \Delta x - 2\varepsilon^2 y + 2\varepsilon xy.$$

Найдем линеаризованную матрицу

$$M = \begin{bmatrix} 1 - 2\varepsilon^2 - (x^2+y^2) - 2x^2 - 2\varepsilon x & \Delta + 2\varepsilon y - 2xy \\ -\Delta + 2\varepsilon y - 2xy & 1 - 2\varepsilon^2 - (x^2+y^2) - 2y^2 + 2\varepsilon x \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Исходная система имеет тривиальное положение равновесия $x=y=0$. Для него

$$M = \begin{bmatrix} 1 - 2\varepsilon^2 & \Delta \\ -\Delta & 1 - 2\varepsilon^2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

След матрицы определяется соотношением $S=2(1-2\varepsilon^2)$. Условием бифуркации Андронова - Хопфа является равенство нулю следа матрицы линеаризации: $S=0 \rightarrow \varepsilon^2=1/2$. Соответственно, якобиан $J=\Delta^2>0$.

Формально условие $S=0$ выполняется и для нетривиального положения равновесия, но для него $J<0$ и оно не отвечает бифуркации Андронова - Хопфа.

Устройство плоскости параметров (ε, Δ) укороченного уравнения Ван дер Поля в случае резонанса на утроенной частоте и характерные фазовые портреты представлены на рис. 5. Буквами SN обозначены линии седло-узловых бифуркаций, H - линия бифуркации Андронова - Хопфа, T - точки Богданова - Такенса. Обратим внимание, что при $\varepsilon^2=1/2$ одновременно $\Delta=0$ и $J=\Delta^2=0$. Это некоторое дополнительное вырождение (но не точка Богданова - Такенса, так как в нее не приходит линия седло-узловой бифуркации). Исследование фазовых портретов показывает, что в нее приходят линии G влипания предельного цикла в

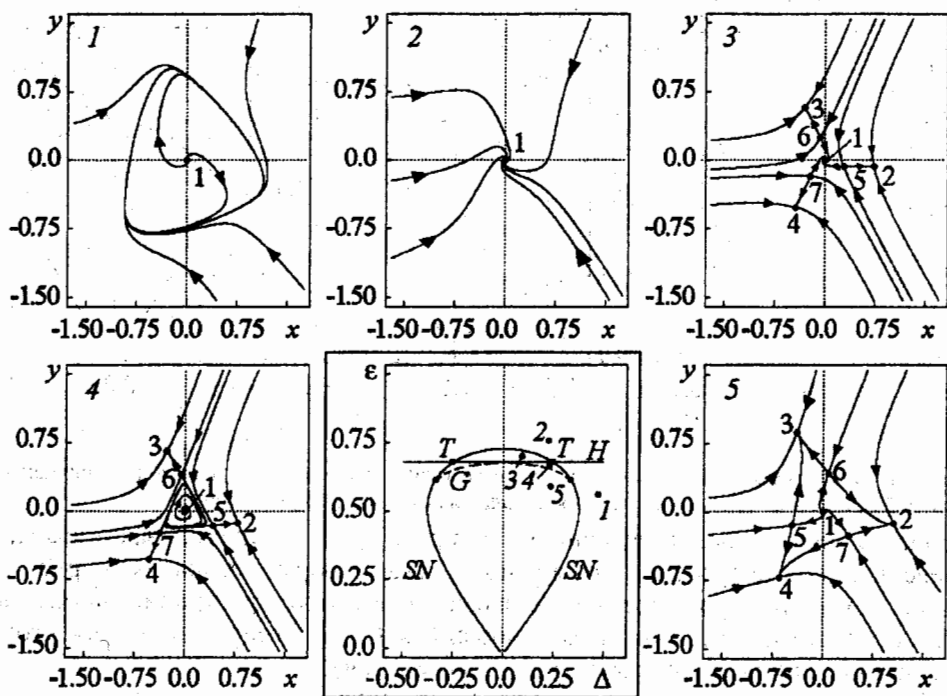


Рис. 5. Устройство плоскости параметров (ϵ, Δ) укороченного уравнения Ван дер Поля в случае резонанса на утроенной частоте. На вставках - характерные фазовые портреты укороченного уравнения. SN - линии седло-узловых бифуркаций, H - линия бифуркации Андронова - Хопфа, T - точки Богданова - Такенса, G - линия глобальной бифуркации

петлю сепаратрисы. Это довольно естественно, так как внутри языка при уменьшении ϵ цикл должен исчезнуть. Исчезновение предельного цикла в результате этой бифуркации можно наблюдать при переходе от фазового портрета на вставке 4 к портрету на вставке 5. Обратите внимание на характерные острые углы в картине многообразий на вставке 5. Таких углов в случае основного резонанса нет.

Итак, мы продемонстрировали, что простая версия метода медленно меняющихся амплитуд позволяет описать основные особенности субгармонического резонанса на утроенной частоте в неавтономной системе Ван дер Поля. Надеемся, что этот материал будет полезен лекторам, читающим курсы теории колебаний, и позволит наряду с субгармоническим резонансом в нелинейном осцилляторе давать простые иллюстрации соответствующего явления в неавтономных автоколебательных системах. Заметим также, что в силу характера нелинейности в уравнении Ван дер Поля, предложенный способ эффективен лишь для этого резонанса. Однако нормальные формы для других основных резонансов известны (см., например, [9]). Мы рекомендуем эту литературу также для методического осмысления, так как представленные в этих работах результаты по структуре резонансов практически отсутствуют в учебной литературе. Приведем соответствующие формулы для сильных резонансов в «готовом виде» (поскольку соответствующие источники не всегда доступны для русскоязычных читателей).

Резонанс 1 : 2

$$\dot{z} = \mu z + C_3 \epsilon^3 z^* + C_4 |z|^2 z, \quad (20)$$

где

$$\mu = i(\Delta - C_1 \epsilon^2) + (d - C_2 \epsilon^2). \quad (21)$$

Резонанс 1 : 3

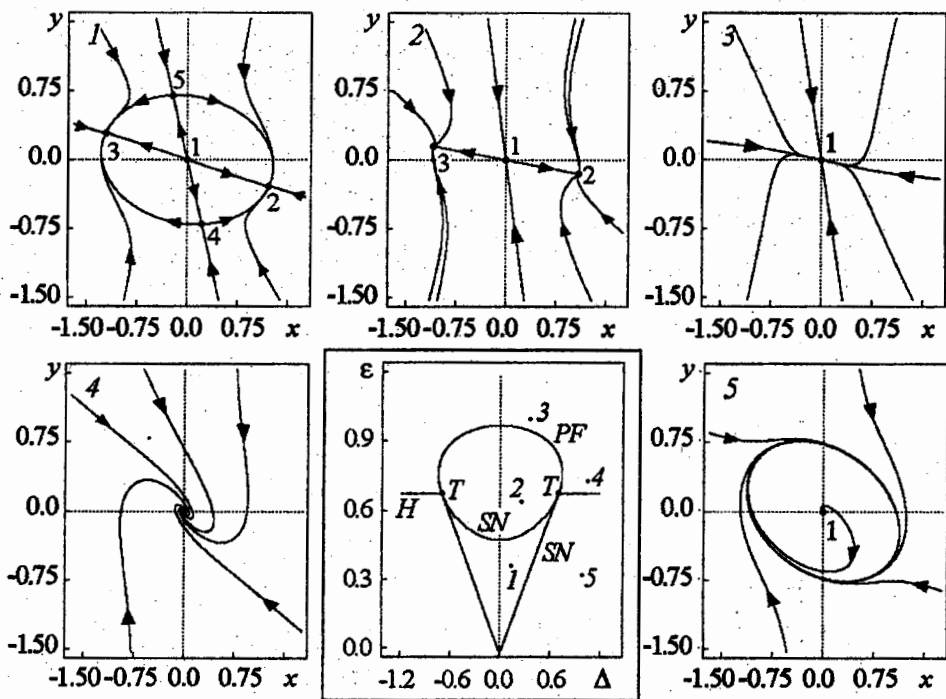


Рис. 6. Устройство плоскости параметров (ϵ, Δ) укороченного уравнения (24) и характерные фазовые портреты для резонанса 1:2. SN - линии седло-узловых бифуркаций, H - линия бифуркации Андронова - Хопфа, PF - линия бифуркации вилки, T - точки Богдамова - Такенса

$$\dot{z} = \mu z + C_3 \epsilon (z^*)^2 + C_4 |z|^2 z. \quad (22)$$

Нетрудно видеть, что полученное нами укороченное уравнение для системы Ван дер Поля (10) принадлежит к данному классу.

Резонанс 1 : 4

$$\dot{z} = \mu z + C_3 \epsilon (z^*)^3 + C_4 |z|^2 z. \quad (23)$$

Для них вполне возможно построить картинки, аналогичные представленным на рис. 5. Это может быть прекрасным упражнением в компьютерном практикуме по теории колебаний или по теории бифуркаций, которое даст наглядные образы различных резонансов в автоколебательных системах. Например, для уравнения

$$\dot{z} = z - |z|^2 z - i \Delta z - 2 \epsilon^2 z + \epsilon z^*, \quad (24)$$

являющегося частным случаем резонанса 1 : 2 (20), картина бифуркационных линий и точек, а также характерные фазовые портреты представлены на рис. 6. При переходе от вставки 2 к вставке 3 можно наблюдать бифуркацию типа вилки, что связано с определенной симметрией уравнения (24).

Наконец, глобальную картину бифуркаций и особенности устройства языков синхронизации, отвечающих основным резонансам, можно найти на примере химической системы в [10], а на примере оптотермальной системы в [11].

Работа поддержана грантом АФГИР REC-006 и Российским фондом фундаментальных исследований, грант 03-02-16074.

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М., 1984. 432 с.
2. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов, 1999. 368 с.
3. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
4. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. I. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
6. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Ижевск: РХД, 2002. 560 с.
7. Mettin R., Parlitz U., Lauterborn W. Bifurcation structure of the driven Van der Pol oscillator // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6. P. 1529.
8. Parlitz U. Common dynamical features of periodically driven strictly dissipative oscillators // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 3.
9. Noris J. The closing of Arnold tongues for periodically forced limit cycle // Nonlinearity. 1993. Vol. 6. P. 1093.
10. Vance W., Ross J. A detailed study of forced chemical oscillator: Arnold tongues and bifurcation sets // J. Chem. Phys. 1989. Vol. 91, № 12. P. 7654.
11. Farjas J., Herrero R., Orriols F. Experimental analysis of codimensional-2 bifurcations in a periodically-forced opto-thermal oscillator // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8, № 7. P. 1413.

Саратовское отделение ИРЭ РАН,
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 22.12.03

SUBHARMONIC RESONANCE IN VAN DER POL SYSTEM

A.P. Kuznetsov, S.V. Milovanov

The article deals with the resonance in Van der Pol system when the frequency of external force is in close proximity to triple natural frequency of autonomous system. The method of slowly varying amplitude for this system is presented, the amplitude equation is obtained. The shape of the synchronization tongue and possible bifurcations are also discussed. The article can be useful to the lecturers in Oscillation Theory and Nonlinear Dynamics.



Кузнецов Александр Петрович родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики».

E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Сергей Викторович Милованов родился в 1980 году. Аспирант факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов - методы топологии в нелинейной динамике, сложная динамика неавтономных систем и двумерные отображения. Принимал участие в 12 научных конференциях, в том числе в 3-х международных. Имеет 2 публикации. Соросовский студент (2000, 2001). В 2003 году был с рабочим визитом в Потсдамском университете (Германия).