

УДК 517.9

## ХАОС И ГИПЕРХАОС В ЛАМПЕ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ

*С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков*

На основе численного решения уравнений нестационарной нелинейной теории исследуются хаотические автоколебательные режимы в лампе обратной волны. Представлены временные зависимости амплитуды выходного сигнала, фазовые портреты, статистические характеристики динамики для «слабого» хаоса, возникающего в результате последовательности бифуркаций удвоения периода автомодуляции при умеренных значениях параметра нормированной длины, и для развитого хаоса, реализующегося при больших значениях этого параметра. Показано, что развитый хаос характеризуется наличием более чем одного положительного показателя Ляпунова (гиперхаос). Представлены также оценки энтропии Колмогорова—Синяя, ляпуновской размерности и корреляционной размерности по алгоритму Грассбергера—Прокаччия. Полученный материал подтверждает, что за хаотические режимы в лампе обратной волны отвечает конечномерный странный аттрактор.

### ВВЕДЕНИЕ

Лампа обратной волны (ЛОВ) — электронный прибор для генерации электромагнитных колебаний СВЧ диапазона, идея которого оформилась в конце 40-х — начале 50-х годов в результате независимой работы нескольких исследовательских групп в СССР (М. Ф. Стельмах с сотрудниками), в Англии и США (Р. Комфнер, Н. Вильямс, Дж. Пирс), во Франции (Б. Эпштейн с сотрудниками). В ЛОВ электронный пучок взаимодействует с волной в специальной электродинамической структуре (замедляющей системе) в ситуации, когда фазовая скорость волны близка к скорости электронов, а групповая скорость противоположна по направлению. Благодаря первому условию электроны подвергаются эффективному, накапливающемуся действию поля волны, в пучке образуются сгустки, и возникает высокочастотная составляющая тока. Благодаря второму условию энергия испущенного сгустками излучения распространяется навстречу пучку, чем обеспечивается наличие в системе внутренней обратной связи и возможность автоколебаний. В «классическом» варианте генератора обратной волны (ЛОВ типа О) электроны взаимодействуют с продольной составляющей поля волны, претерпевают смещения параллельно оси пучка (процесс группирования) и отдают волне кинетическую энергию. Известны и другие разновидности систем с обратной волной (ЛОВ типа М, ЛОВ с поперечным полем, релятивистская ЛОВ на аномальном эффекте Доплера, giro-ЛОВ, пениотрон встречной волны).

В 50–60-х годах ЛОВ активно исследовались и разрабатывались для применения в радиолокации и системах связи, в качестве задающих генераторов в передатчиках и гетеродинов в приёмниках с быстрой перестройкой частоты, в измерительной технике и радиоспектроскопии. Начиная с 70-х годов, с появлением эффективных сильноточных ускорителей, возникает возможность использовать принцип генерации на обратной волне для создания мощных источников электромагнитного излучения в коротковолновой части СВЧ диапазона на интенсивных релятивистских электронных пучках.

В начале 70-х годов в Саратовском государственном университете и в НИИ механики и физики при СГУ проводились исследования, направленные на разработку нестационарной нелинейной теории ламп обратной волны. В опубликованной тогда книге [1] сформулированы основные принципы, лежащие в основе нестационарной нелинейной теории ЛОВ и доведена до определённой степени завершённости теория ЛОВ типа М, в частности, проведено численное моделирование переходного процесса, завершающегося установлением стационарного режима генерации. Там же

*С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков*

сформулированы основные уравнения нестационарной теории ЛОВ типа О, однако реализовать их численное решение удалось несколько позже. Одновременно и независимо это было сделано в ходе теоретического исследования релятивистских ЛОВ в Горьком (ныне Нижний Новгород) в группе М. И. Петелина. Согласно полученным результатам переходный процесс в нерелятивистской или слаборелятивистской ЛОВ заканчивался установлением стационарного режима генерации лишь при рабочем токе пучка, не более чем втрое превышающем стартовое значение, при котором начиналась генерация. При больших токах пучка возникали автомодуляционные режимы, когда амплитуда сигнала на выходе ЛОВ осциллировала во времени периодическим или непериодическим образом. После обсуждения на Межвузовской конференции по электронике СВЧ в Ростове-на-Дону осенью 1976 г. работа обеих групп была скоординирована (см. совместные статьи [2–4]). В экспериментах, проводившихся Б. П. Безручко, были подтверждены основные результаты нестационарной теории. Это относится к самому факту возникновения автомодуляции, её характеристикам, таким, как период и спектр, а также к полученным в эксперименте зависимостям амплитуды выходного сигнала от времени в переходном процессе [4–9]. Позднее были опубликованы результаты экспериментов с релятивистскими ЛОВ, в которых также наблюдалась автомодуляция [10–12]. Исследовалось влияние на динамику ЛОВ таких факторов, как пространственный заряд [8, 13–15], потери энергии в замедляющей системе [8, 15], отражения волн на концах системы [16–20], воздействие внешнего сигнала [8, 21, 22].

Одним из принципиально важных результатов было обнаружение в численных расчётах и в эксперименте генерации хаотических колебаний в ЛОВ при достаточно больших параметрах безразмерной длины, т. е. при значительном превышении рабочего тока пучка над стартовым [6–10]. Были продемонстрированы, в частности, такие атрибуты хаоса, как сплошной спектр выходного сигнала и неустойчивость динамики по отношению к малому возмущению начальных условий. Что касается сценария возникновения хаоса в ЛОВ, то для основной теоретической модели (см. уравнения (1)) он был достаточно детально исследован численно в работах [23, 24] и кратко резюмируется в следующем разделе. Надо отметить, однако, что в реальных ЛОВ динамика в области перехода к хаосу сильно подвержена влиянию дополнительных факторов, не учитываемых в основной модели (отражения и др.) [16, 17, 19].

Обнаружение хаотической динамики открывает возможность использования ЛОВ в качестве генератора шума, спектр которого сосредоточен в определённой полосе частот и перемещается по диапазону при изменении ускоряющего напряжения [6–10, 25, 26].

Настоящая статья посвящена дальнейшему исследованию хаотических автоколебательных режимов в лампе обратной волны. В частности, мы демонстрируем качественное и количественное различие между «слабым хаосом», реализующимся при умеренных значениях параметра нормированной длины, и развитым хаосом. Последний характеризуется наличием более одного положительного показателя Ляпунова и по принятой в нелинейной динамике терминологии должен классифицироваться как гиперхаос. Представлены также оценки размерности странного аттрактора, отвечающего за хаотические режимы в ЛОВ.

## 1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЛОВ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИХ РЕШЕНИЯ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ БИФУРКАЦИЙ НА ПУТИ К ХАОСУ

Уравнения нестационарной нелинейной теории ЛОВ типа О в простейшем варианте без учёта пространственного заряда, релятивистских эффектов, потерь энергии в замедляющей системе

(основная модель) записываются в виде

$$\partial^2 \theta / \partial \zeta^2 = -\operatorname{Re}[F \exp(i\theta)], \quad \partial F / \partial \tau - \partial F / \partial \zeta = -J, \quad J = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\theta) d\theta, \quad (1)$$

$$\theta|_{\zeta=0} = \theta_0, \quad \partial \theta / \partial \zeta|_{\zeta=0} = 0, \quad F|_{\zeta=L} = 0, \quad (2)$$

где безразмерные независимые переменные  $\zeta = \beta_0 C x$  и  $\tau = \omega_0 C (t - x/v_0) (1 + v_0/v_{гр})^{-1}$  — координата и «запаздывающее» время,  $v_0$  — скорость пучка на входе в пространство взаимодействия,  $v_{гр}$  — групповая скорость волны,  $L = \beta_0 l C = 2\pi C N$  — нормированная длина лампы,  $l$  — длина системы,  $N$  — число длин замедленных волн, укладываемых на длине системы,  $C = \sqrt[3]{I_0 K_0 / (4U)}$  — параметр Пирса, который предполагается малым,  $I_0$  — ток пучка,  $U$  — ускоряющее напряжение,  $K_0$  — сопротивление связи замедляющей системы. Величина  $\theta(\zeta, \tau, \theta_0)$  характеризует фазу электрона, влетевшего в пространство взаимодействия с фазой  $\theta_0$ , в поле волны, а  $F(\zeta, \tau) = \tilde{E} / (2\beta_0 U C^2)$  — безразмерную комплексную амплитуду высокочастотного поля волны  $E(x, t) = \operatorname{Re}[\tilde{E}(x, t) \exp(i\omega_0 t - i\beta_0 x)]$ .

Следует отметить, что уравнения (1) носят универсальный характер в том смысле, что они оказываются одинаковыми (с точностью до нормировки) для различных электронных устройств с длительным взаимодействием на обратной волне с инерционным механизмом группировки в определённой предельной ситуации (малая величина произведения квадрата масс-фактора на параметр взаимодействия в релятивистской ЛОВ, убитронах и скаттронах, большой параметр неизохронности в giro-ЛОВ и др.) [3].

Уравнения (1) и граничные условия (2) задают динамическую систему с бесконечномерным фазовым пространством. В самом деле, при каждом фиксированном  $\tau$  распределение поля по координате  $\zeta$  описывается некоторой комплексной функцией  $F(\zeta)$ . Эта функция должна удовлетворять естественному для комплексной амплитуды требованию гладкости и обращаться в нуль на правом конце системы  $\zeta = L$ . Поскольку в результате решения уравнений распределение поля  $F(\zeta)$  определится однозначно при любом  $\tau' > \tau$ , множество допустимых функций  $F(\zeta)$  следует трактовать как фазовое пространство системы, каждая точка которого отвечает определённому её состоянию. Когда состояние меняется во времени в соответствии с уравнениями (1), изображающая точка движется в пространстве функций по некоторой «фазовой траектории».

Роль основного управляющего параметра, подобную той, которая при анализе турбулентности отводится числу Рейнольдса, играет нормированная длина лампы  $L$ . На практике параметр  $L$  обычно регулируют изменением тока электронного пучка  $I_0$ , варьируя напряжение на управляющем электроде в электронной пушке, при этом  $L \propto I_0^{1/3}$ .

Известно, что при малых  $L$  реализуется устойчивое состояние равновесия,  $F \equiv 0$ . При  $L = L_{ст} = 1,97327$  имеет место бифуркация потери устойчивости неподвижной точки. Численное решение уравнений (1) показывает, что при  $L_{ст} < L < L_{AM} \approx 2,937$  переходный процесс заканчивался установлением стационарного режима генерации: амплитуда выходного сигнала стабилизируется на определённом уровне и далее с течением времени не меняется, при этом частота, т. е. скорость изменения фазы комплексной переменной  $F$ , также становится постоянной [2–5].

При  $L > L_{AM}$  возникает автомодуляция — самоподдерживающиеся колебания амплитуды выходного сигнала с характерным периодом, определяемым временем прохождения сигнала по петле обратной связи  $T_{AM} \propto 1,5 (l/v_0 + l/v_{гр})$  [2–5]. О дальнейшей последовательности переходов даёт представление бифуркационная диаграмма, заимствованная из работ [23, 24] и показанная на рис. 1а. Обсуждавшиеся до этого момента «простые» автомодуляционные режимы представлены одиночной линией вблизи левого края диаграммы. При  $L = L_1 \approx 4,0$  эта линия раздваивается,

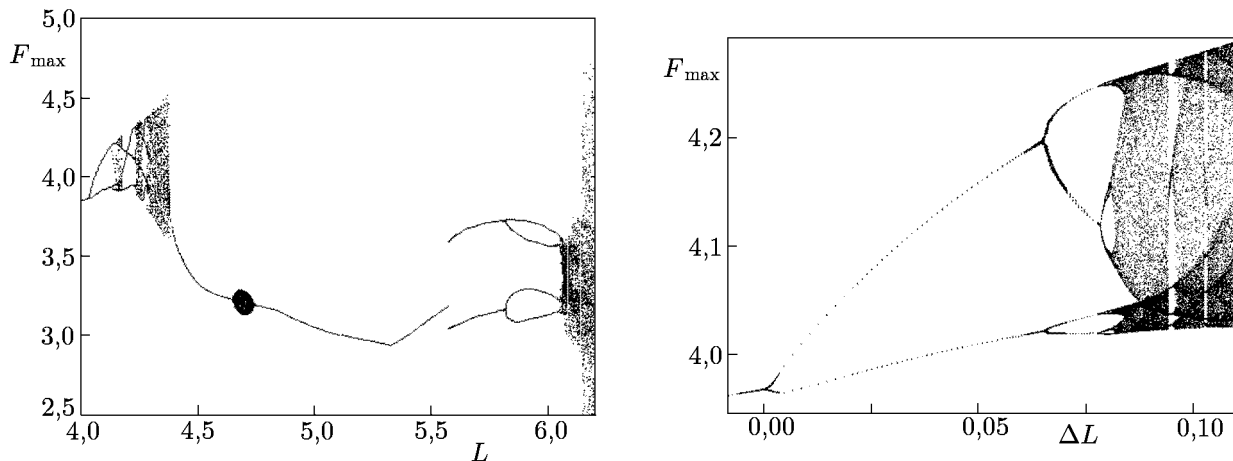


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма модели ЛОВ (1), (2) из работы [23, 24]. По оси абсцисс отложена нормированная длина  $L$ , по оси ординат — максимальные значения амплитуды выходного сигнала, которые достигаются в установившемся режиме. Отдельно показан фрагмент бифуркационной диаграммы, отвечающий области перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода автомодуляции. По оси абсцисс отложена величина  $\Delta L = L - L_1$ , где  $L_1 \approx 4,0$  отвечает первой бифуркации удвоения периода

что соответствует бифуркации удвоения периода автомодуляции (форма «пичков» автомодуляции повторяется через раз). Затем в узкой области изменения параметра  $L$  имеют место дальнейшие бифуркации удвоения периода автомодуляции при  $L = L_2, L_3, \dots$  и переход к хаосу. Соответствующий фрагмент бифуркационной диаграммы показан в увеличенном виде на рис. 1б. С точностью до многочисленных деталей он воспроизводит картину, известную для широкого класса нелинейных диссипативных систем как сценарий перехода к хаосу по Фейгенбауму через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода. Предельная точка этой последовательности — критическая точка Фейгенбаума соответствует порогу возникновения хаоса. В закритической области можно видеть области хаоса и окна периодичности (например, хорошо заметны окна периода 5 и 7). Вблизи критической точки выполняются универсальные количественные закономерности, присущие сценарию Фейгенбаума [27–29]<sup>1</sup>.

Хаос, возникающий в результате последовательности бифуркаций удвоения периода автомодуляции, оказывается в известном смысле не развитым, «слабым». Во-первых, он занимает лишь узкую область по параметру  $L$ . Во-вторых, зависимость амплитуды от времени выглядит как приближительное повторение однотипных «пичков», близких по размеру, через примерно рав-

<sup>1</sup> С формальной точки зрения, периодической автомодуляции в фазовом пространстве исходной системы отвечает не цикл, а тор. В нелинейной динамике в настоящее время хорошо известно, что последовательность удвоения торов, в отличие от удвоения циклов, в типичном случае содержит конечное число бифуркаций. Тем не менее в нашей модели ЛОВ, очевидно, имеет место полный каскад удвоений периода автомодуляции. Дело в том, что эту модель неправомерно относить в соответствующем контексте к классу типичных систем из-за присущей уравнениям специальной симметрии — инвариантности по отношению к фазовым сдвигам. В самом деле, благодаря указанному свойству можно переформулировать постановку задачи так, чтобы переменная, отвечающая за фазу выходного сигнала, была вообще исключена из рассмотрения. Для этого достаточно ввести вместо  $F(\tau, \zeta)$  новую независимую переменную  $\tilde{F}(\tau) = F(\tau) \exp[-i \arg(F(\tau, 0))]$ , хотя при этом соответствующая форма уравнений оказывается менее удобной. Тогда от двумерного тора, отвечающего режиму периодической автомодуляции, мы возвращаемся к предельному циклу, который может претерпевать бесконечную последовательность удвоений периода. Вне рамок метода медленно меняющихся амплитуд указанный аргумент теряет силу, и, по-видимому, будет реализовываться либо конечная последовательность удвоений торов, либо каскады бифуркаций удвоения на базе периодических режимов, отвечающих резонансным циклам на торе.

ные интервалы времени, а интенсивность шумовой составляющей в спектре невелика. Пространственное распределение поля не обнаруживает богатого разнообразия форм, какое должно быть характерно для развитого хаоса — «турбулентности».

Вслед за областью удвоений периода автомодуляции, в интервале  $4,15 < L < 4,33$  присутствует большое количество окон периодичности. Выход из этой области с увеличением параметра  $L$  сопровождается переходом от хаотической автомодуляции к периодической через перемежаемость 1-го рода по Помо и Манневиллю [29, 30]. В результате при  $L \approx 4,33$  хаотическая автомодуляция сменяется периодической. Затем она становится квазипериодической (в интервале примерно от 4,6 до 4,75), и потом снова периодической. По-видимому, странный аттрактор в фазовом пространстве превращается здесь в метастабильное хаотическое множество. Переходный процесс, предшествующий установлению регулярного автомодуляционного режима, может занимать длительное время, во много раз превышающее характерный период автомодуляции.

Наконец, при достаточно больших величинах  $L \gtrsim 6$ , что соответствует превышению тока пучка над стартовым значением в 30 и более раз, изменение амплитуды и фазы сигнала во времени становится явно нерегулярным, хаотическим. При этом даже в течение очень большого времени не наблюдается никакой тенденции к установлению режима с постоянной или периодически меняющейся амплитудой. Однако усреднённые за время  $\tau$  порядка нескольких единиц квадрат амплитуды  $|F|^2$  и скорость изменения фазы сигнала становятся примерно постоянными, что позволяет говорить о достижении режима, установившегося в статистическом смысле. Режим с такими же статистическими характеристиками возникает и при других начальных условиях, так что его следует классифицировать как хаотические автоколебания.

## 2. «СЛАБЫЙ» ХАОС И РАЗВИТЫЙ ХАОС В ДИНАМИКЕ ЛОВ. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для детального анализа выберем два режима, которые наблюдаются в основной модели ЛОВ при нормированной длине  $L = 4,24$  («слабый» хаос) и  $L = 6,1$  (развитый хаос). На рис. 2 представлены зависимости амплитуды выходного сигнала от времени, имеющие место по истечении порядка сотни характерных периодов колебаний амплитуды от начала процесса.

На рис. 3 показаны фазовые портреты — двумерные проекции странных аттракторов, построенные с использованием наблюдаемой на выходе ЛОВ амплитуды сигнала по методу Такенса: по осям координат отложены амплитуды выходного сигнала в текущий и запаздывающий моменты времени. В случае слабого хаоса фазовый портрет демонстрирует визуально хорошо различимую тонкую структуру, что качественно свидетельствует о малой размерности странного аттрактора. Во втором случае такой структуры не видно, что указывает на существенно большую размерность.

На рис. 4 приводится график распределения среднего квадрата амплитуды поля по длине системы  $\sigma^2(\zeta) = \overline{|F(\tau, \zeta)|^2}$  и среднеквадратичного отклонения этой величины  $\kappa(\zeta) = \sqrt{\overline{|F(\tau, \zeta)|^4} - (\overline{|F(\tau, \zeta)|^2})^2}$ , где черта означает усреднение по времени. Величина  $\sigma^2(\zeta)$  определяет средний поток энергии электромагнитной волны в данном сечении системы  $\zeta$ , а  $\kappa(\zeta)$  характеризует флуктуации потока энергии. Видно, что обе эти величины монотонно нарастают от нуля до максимума справа налево вдоль пространства взаимодействия. При этом в режиме слабого хаоса  $\kappa(\zeta)$  больше, чем  $\sigma^2(\zeta)$ , что связано с наличием интенсивной почти периодической составляющей в динамике системы. Заметим, что для развитого хаоса имеет место обратное соотношение.

На рис. 5 показаны функции распределения амплитуды выходного сигнала  $f(|F|)$ . Для слабого

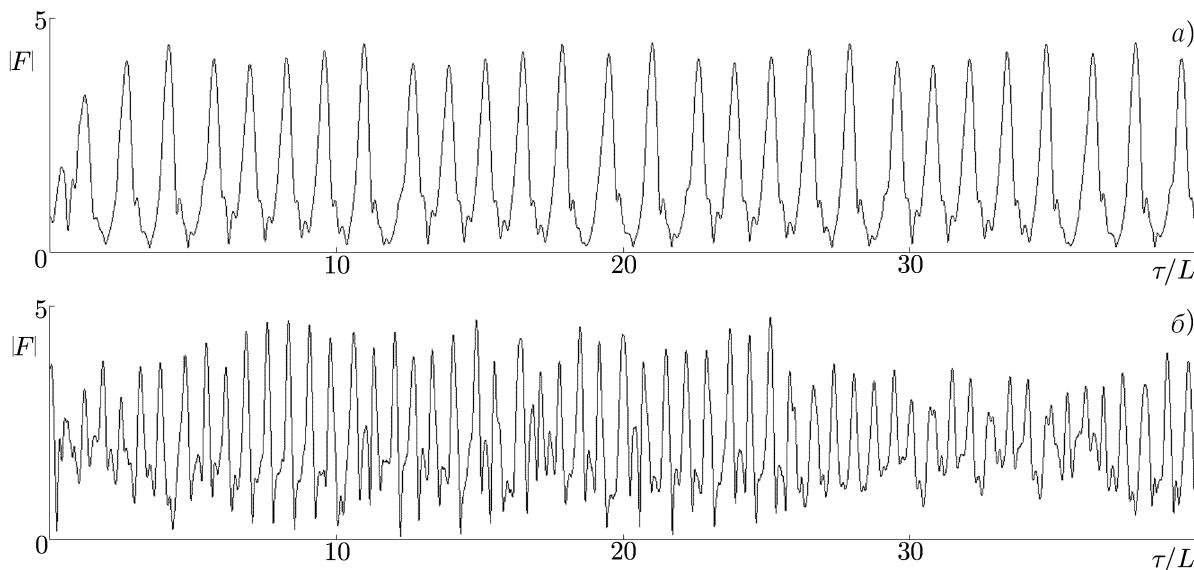


Рис. 2. Зависимости амплитуды выходного сигнала ЛОВ от времени, наблюдаемые после окончания переходного процесса, по результатам численного решения уравнений (1), (2) при  $L = 4,24$  (а) и  $L = 6,1$  (б)

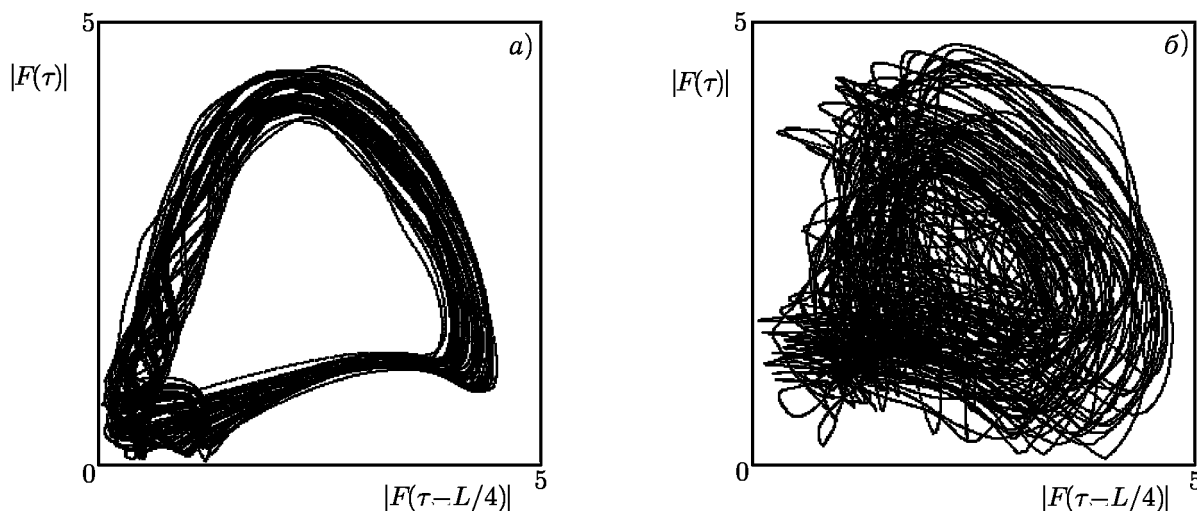


Рис. 3. Фазовые портреты слабого хаоса при  $L = 4,24$  (а) и развитого хаоса при  $L = 6,1$  (б)

хаоса эта функция имеет характерный вид с рядом пиков, которые ассоциируются с наиболее вероятными значениями минимумов и максимумов амплитуды выходного сигнала, реализующимися с достаточно правильной регулярностью. В режиме развитого хаоса функция распределения имеет сглаженный вид с одним выраженным максимумом. При дальнейшем увеличении параметра  $L$  функция распределения приближается к релейевской, т. е. к той форме, какую она имела бы, если бы комплексная амплитуда выходного сигнала вела себя как случайный процесс с гауссовым распределением вещественной и мнимой частей.

На рис. 6 показан модуль автокорреляционной функции выходного сигнала ЛОВ

$$K(T) = \overline{F(\tau, 0)F^*(\tau + T, 0)} / \overline{|F(\tau, 0)|^2} \tag{3}$$

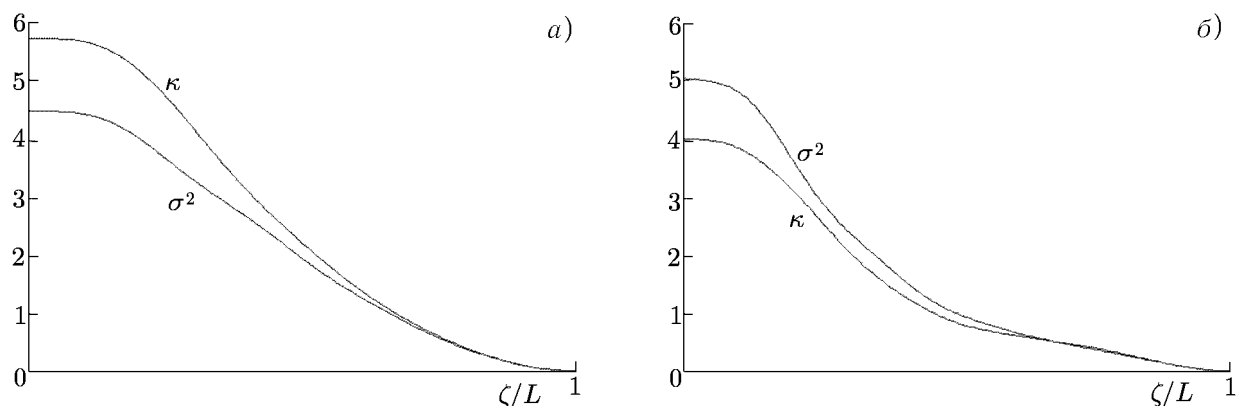


Рис. 4. Распределение среднего квадрата амплитуды поля  $\sigma^2(\zeta)$ , характеризующего средний поток энергии волны, и среднеквадратичного отклонения этой величины  $\kappa(\zeta)$ , характеризующего флуктуации потока энергии, по длине системы в режиме слабого хаоса при  $L = 4,24$  (а) и развитого хаоса при  $L = 6,1$  (б)

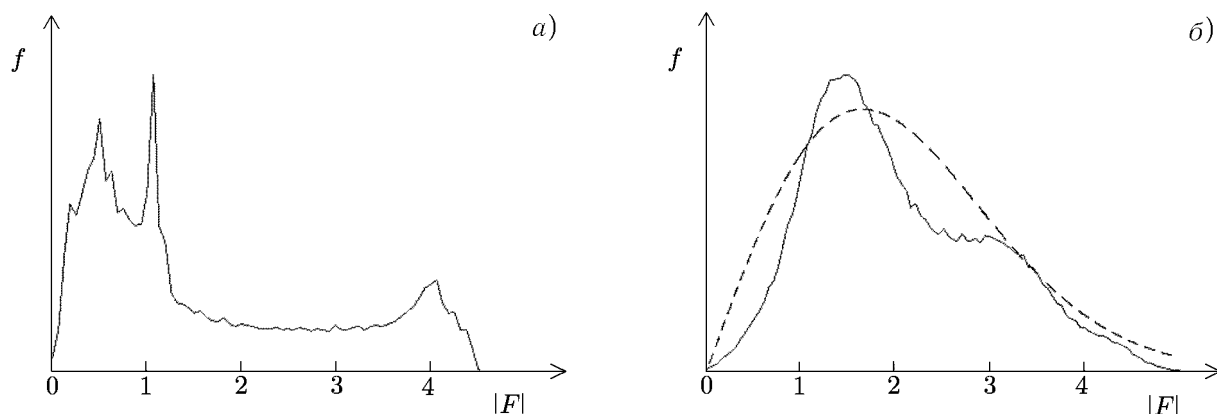


Рис. 5. Функция распределения безразмерной амплитуды выходного сигнала по результатам численного решения уравнений (1), (2) в режиме слабого хаоса при  $L = 4,24$  (а) и развитого хаоса при  $L = 6,1$  (б). Пунктиром показана функция распределения Релея, отвечающая случайному сигналу, у которого действительная и мнимая части комплексной амплитуды характеризуется гауссовым распределением

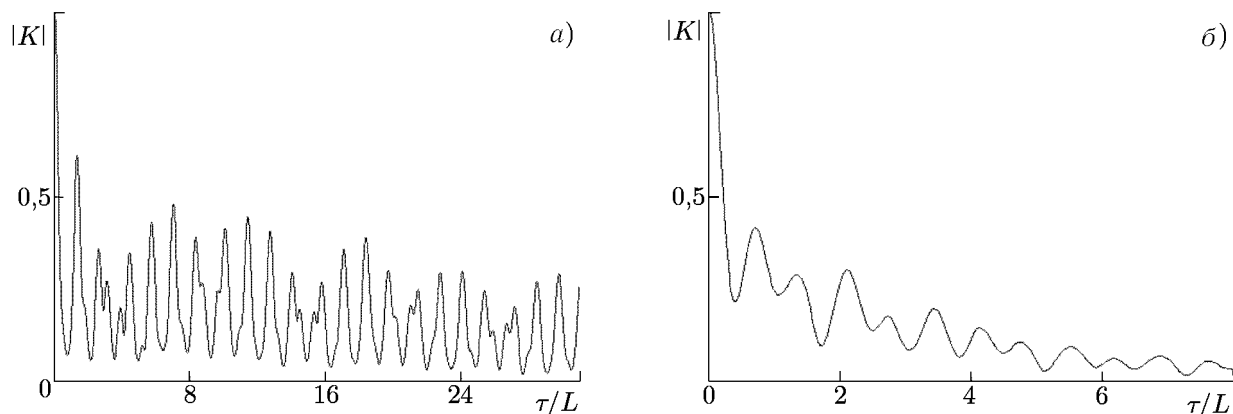


Рис. 6. Функция автокорреляции выходного сигнала по результатам численного решения уравнений (1), (2) в режиме слабого хаоса при  $L = 4,24$  (а) и развитого хаоса при  $L = 6,1$  (б)

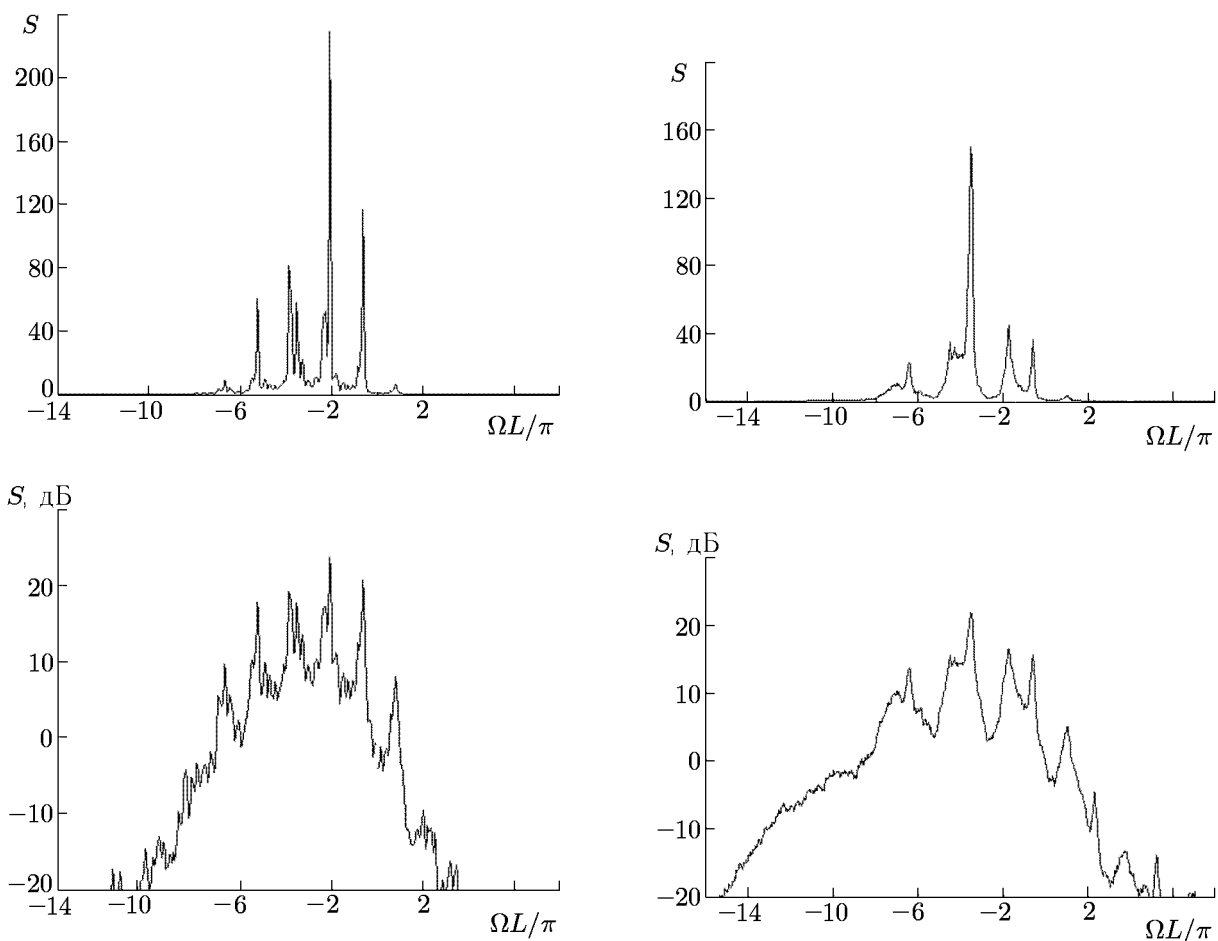


Рис. 7. Спектры мощности выходного сигнала ЛОВ по результатам численного решения уравнений (1), (2) в режиме слабого хаоса при  $L = 4,24$  (слева) и развитого хаоса при  $L = 6,1$  (справа). На верхних диаграммах спектр показан в квадратичном масштабе, на нижних — в логарифмическом

для случая слабого и развитого хаоса. Для хаотических режимов, как известно, характерно исчезновение корреляции между достаточно удалёнными по времени участками реализации, т. е.  $K(T) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$ . Из рис. 6 видно, что в режиме развитого хаоса функция корреляции действительно быстро спадает, совершая осцилляции, при увеличении параметра  $T$ . В случае слабого хаоса осцилляции убывают намного медленнее.

Фурье-образ автокорреляционной функции, согласно теореме Винера—Хинчина, даёт спектральную плотность мощности сигнала, и в случае затухания корреляций  $K(T) \rightarrow 0$  оказывается сплошным.

На рис. 7 приведены спектры мощности выходного сигнала ЛОВ в режиме слабого и развитого хаоса. Для построения спектров, в соответствии с рекомендациями теории численного спектрального анализа случайных процессов, имеющаяся реализация разбивалась на отрезки протяжённости  $T_0$  (величина  $\Delta\omega = \pi/T_0$  определяет разрешающую способность анализа), на каждом отрезке проводилось умножение на функцию  $\sin^2(\pi\tau/T_0)$  (так называемое «окно»), после чего выполнялось преобразование Фурье, и результат усреднялся по всем отрезкам реализации. (Чем больше количество имеющихся в наличии отрезков разбиения, тем меньше среднеквадратичная погрешность оценки спектральной плотности мощности.) Спектры представлены в квадратичном и логарифмическом масштабах. Первый позволяет визуально оценить реальное распределение



мощности по спектру, второй даёт представление о деталях тонкой структуры спектра.

На графиках в логарифмическом масштабе хорошо видно, что в обоих рассматриваемых режимах спектр сплошной, т. е. имеет такой же характер, как спектр стационарного случайного процесса. Следует отметить при этом, что в спектре присутствуют высокие «пики», особенно явно выраженные в случае слабого хаоса. В режимах развитого хаоса они сглаживаются тем сильнее, чем больше параметр  $L$ .

### 3. СВОЙСТВА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДИНАМИКИ К ВОЗМУЩЕНИЯМ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ. ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА

Как известно, один из главных атрибутов динамического хаоса — неустойчивость фазовых траекторий, или наличие высокой чувствительности движения к малым вариациям начальных условий. Продemonстрируем, что это свойство присутствует в динамике ЛОВ. Выберем нормированную длину лампы, отвечающую хаотическому режиму, и проведём численное решение уравнений (1) и (2) многократно, задавая каждый раз в качестве начальных условий некоторое распределение поля малой амплитуды с малой случайной добавкой, и представим набор полученных реализаций — зависимостей амплитуды выходного сигнала от времени — на одном графике.

На рис. 8 показаны полученные таким образом результаты численных расчётов для режимов слабого хаоса при  $L = 4,24$  и развитого хаоса при  $L = 6,1$ . Видно, что на начальном участке реализации повторяют друг друга, но с течением времени, ближе к правому краю диаграммы, они расходятся относительно друг друга всё сильнее и сильнее, и картина «замазывается». Проведённый численный эксперимент аналогичен реальному эксперименту, описанному в работах [7–9].

Как известно, для количественной характеристики присущей хаосу неустойчивости фазовых траекторий используют показатели Ляпунова, которые определяют экспоненциальный в среднем рост (или затухание) возмущений вблизи типичной принадлежащей аттрактору фазовой траектории. При этом полное число показателей Ляпунова отвечает размерности фазового пространства исследуемой системы. Критерием хаоса является наличие у аттрактора, по крайней мере, одного положительного показателя Ляпунова. Если имеется более одного положительного показателя, то говорят о гиперхаосе.

В нашем случае фазовое пространство системы, заданной уравнениями (1) и (2), бесконечномерное, и полное число показателей Ляпунова должно быть бесконечным. В работах [8, 9] была рассмотрена процедура (адаптированный соответствующим образом алгоритм Бенеттина) [29, 31] для вычисления старшего показателя. Здесь мы намерены усовершенствовать эту процедуру по аналогии с [29, 32] с тем, чтобы получить несколько наибольших показателей Ляпунова из их полного спектра. В частности, это позволит различить «простой» хаос и гиперхаос, а также получить данные для оценки фрактальной размерности аттрактора по формуле Каплана—Йорке.

Вводя показатели Ляпунова, удобно использовать нормированное время, отнесённое к нормированной длине лампы:  $\tau/L$ , и полагать, что эволюция возмущения определяется выражением  $\tilde{F} \propto \exp(\Lambda\tau/L)$ . При таком определении нормировка безразмерного показателя Ляпунова  $\Lambda$  оказывается не зависящей от тока пучка.

Для численного расчёта  $n$  показателей Ляпунова рассмотрим  $n + 1$  экземпляров системы, описываемой уравнениями (1), (2). Пусть распределение амплитуды поля в некоторый момент  $\tau_0$  в системе с номером  $k = 0$  задаётся комплексной функцией  $F(\zeta)$ , а в остальных системах — функциями  $F_k(\zeta) = F(\zeta) + \varepsilon\tilde{F}_k(\zeta)$ , где  $\|\tilde{F}_k\| = \int_0^1 |\tilde{F}_k|^2 d\zeta = 1$  и  $\varepsilon \leq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Решая численно  $n + 1$  систему уравнений нестационарной краевой задачи, для следующего момента времени  $\tau_1 = \tau_0 + \Delta\tau$  получим новый набор функций  $\tilde{F}_k(\zeta) = [F_k(\zeta) - F(\zeta)]/\varepsilon$ . При этом интервал

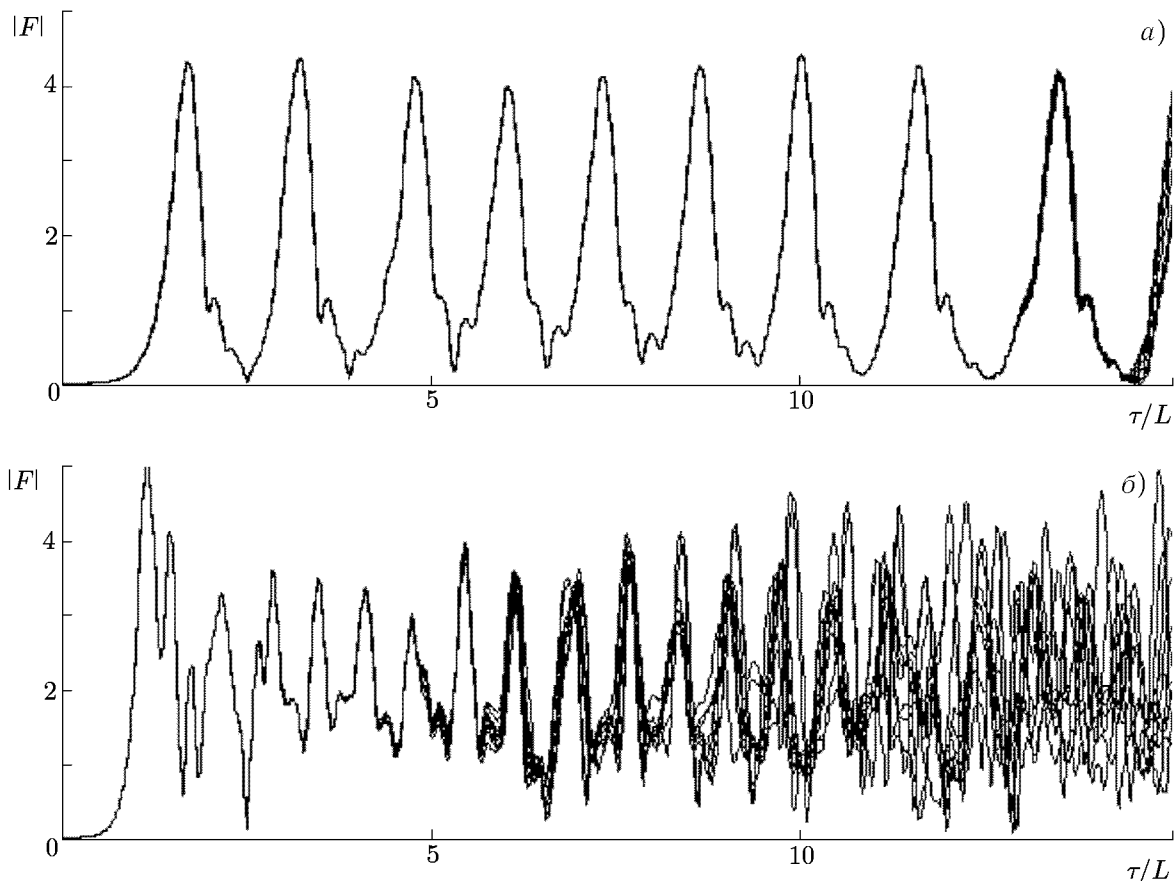


Рис. 8. Иллюстрация чувствительности динамики ЛОВ к малому возмущению начальных условий в численном эксперименте при  $L = 4,24$  (а) и  $L = 6,1$  (б). На каждом графике представлены по 20 зависимостей амплитуды выходного сигнала от времени, причём в качестве начальных условий задавалось распределение амплитуды поля на уровне 0,01 со случайной добавкой порядка 0,001

$\Delta\tau$  выбирается небольшим, чтобы возмущения по норме оставались малыми. По методу Грама—Шмидта с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}'_1 &= \tilde{F}_1 / \|\tilde{F}_1\|, & \tilde{F}'_2 &= \tilde{F}_2 - (\tilde{F}_2, \tilde{F}'_1) \tilde{F}'_1, & \tilde{F}'_2 &= \tilde{F}'_2 / \|\tilde{F}'_2\|, \\
 \tilde{F}'_3 &= \tilde{F}_3 - (\tilde{F}_3, \tilde{F}'_1) \tilde{F}'_1 - (\tilde{F}_3, \tilde{F}'_2) \tilde{F}'_2, & \tilde{F}'_3 &= \tilde{F}'_3 / \|\tilde{F}'_3\|, \\
 \tilde{F}'_4 &= \tilde{F}_4 - (\tilde{F}_4, \tilde{F}'_1) \tilde{F}'_1 - (\tilde{F}_4, \tilde{F}'_2) \tilde{F}'_2 - (\tilde{F}_4, \tilde{F}'_3) \tilde{F}'_3, & \tilde{F}'_4 &= \tilde{F}'_4 / \|\tilde{F}'_4\|, \\
 & & & \dots & &
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

проводим ортогонализацию и перенормировку векторов возмущений. Здесь круглые скобки обозначают скалярное произведение:  $(f, g) = \int_0^1 f(\zeta)g^*(\zeta) d\zeta$ . Далее продолжаем вычисления на следующей «ступеньке» алгоритма длительности  $\Delta\tau$  с переопределёнными возмущениями:

$$F_m(\zeta) \leftarrow F_m(\zeta) + \varepsilon \tilde{F}'_m(\zeta).
 \tag{5}$$

Вся процедура повторяется многократно, на протяжении большого числа «ступенек». Произведение  $\prod_{k=1}^{M_0} \|\tilde{F}'_m\|_{\tau=k\Delta\tau}$  показывает, во сколько раз изменится норма  $m$ -го вектора возмущения в

линейном приближении за  $M_0$  шагов алгоритма, и соответствующий показатель Ляпунова выражается через логарифм этой величины:

$$\Lambda_m = S_m (M_0 \Delta\tau) / (M_0 L \Delta\tau), \quad S_m = \sum_{k=1}^{M_0} \ln \|\tilde{F}_m\|_{\tau=k\Delta\tau}. \quad (6)$$

Говоря о спектре показателей Ляпунова, полезно иметь в виду, что у любого аттрактора нашей системы, отличного от тривиальной неподвижной точки, обязательно присутствуют два нулевых показателя. Это связано с тем, что из-за присущей уравнениям нестационарной теории ЛОВ инвариантности по отношению к двум типам инфинитезимальных сдвигов (по времени и по фазе) возмущения вида

$$\tilde{F}_\tau(\zeta, \tau) \equiv \partial F(\zeta, \tau) / \partial \tau \quad \text{и} \quad \tilde{F}_\varphi(\zeta, \tau) \equiv iF(\zeta, \tau) \quad (7)$$

в ходе эволюции состояния системы в среднем не нарастают и не убывают во времени. Следовательно, им отвечают нулевые показатели Ляпунова. При вычислении остальных показателей точность их оценки существенно возрастает, если в процессе выполнения процедуры на каждой «ступеньке» алгоритма исключать из рассматриваемого вектора возмущений добавки типа (7):

$$\tilde{F}(\zeta) \leftarrow \tilde{F}(\zeta) - c_1 \tilde{F}_\tau - c_2 \tilde{F}_\varphi, \quad (8)$$

где  $c_1 = (\tilde{F}, \tilde{F}_\tau) / \|\tilde{F}_\tau\|$  и  $c_2 = (\tilde{F}, \tilde{F}_\varphi) / \|\tilde{F}_\varphi\|$  — комплексные коэффициенты, обеспечивающие минимизацию нормы возмущения.

На рис. 9 приводятся типичные графики зависимости «накапливающихся сумм»  $S_m = \sum_{k=1}^{M_0} \ln \|\tilde{F}_m\|_{\tau=k\Delta\tau}$  от нормированного времени при расчёте двух ненулевых показателей Ляпунова в режиме слабого хаоса при  $L = 4,24$  и пяти показателей в режиме развитого хаоса при  $L = 6,1$ . Оценка показателей Ляпунова даётся угловыми коэффициентами прямых, аппроксимирующих эти зависимости. В табл. 1 даётся сводка показателей Ляпунова, полученных обработкой десятка таких графиков и расположенных в порядке убывания (к ним добавлены два нулевых показателя, существование которых следует из инвариантности уравнений по отношению к сдвигам по времени и фазе). Сигнатура спектра показателей Ляпунова хаотического аттрактора в первом случае  $\langle +, 0, 0, -, \dots \rangle$ , т. е. это маломерный хаос с одним положительным показателем Ляпунова. Во втором случае положительных показателей два, т. е. это гиперхаос:  $\langle +, +, 0, 0, -, \dots \rangle$ .

В табл. 1 приведены и другие характеристики двух рассмотренных хаотических режимов, которые можно получить на основании спектра показателей Ляпунова. Это, в частности, оценка энтропии Колмогорова—Синяя как суммы положительных показателей Ляпунова, дающая показатель роста во времени информации, произведённой системой в процессе движения по хаотическому аттрактору. Другая характеристика — это размерность аттрактора по формуле Каплана—Йорке:

$$D_L = M + \left( \sum_{i=1}^M \Lambda_i \right) / |\Lambda_{M+1}|, \quad (9)$$

где  $M$  — целое число, определённое так, что  $S_M = \sum_{i=1}^M \Lambda_i > 0$ , но уже  $S_{M+1} = \sum_{i=1}^{M+1} \Lambda_i < 0$ . На практике эта формула даёт обычно довольно точную оценку фрактальной размерности странных аттракторов. Размерность, вычисленную по формуле (9), принято называть ляпуновской раз-

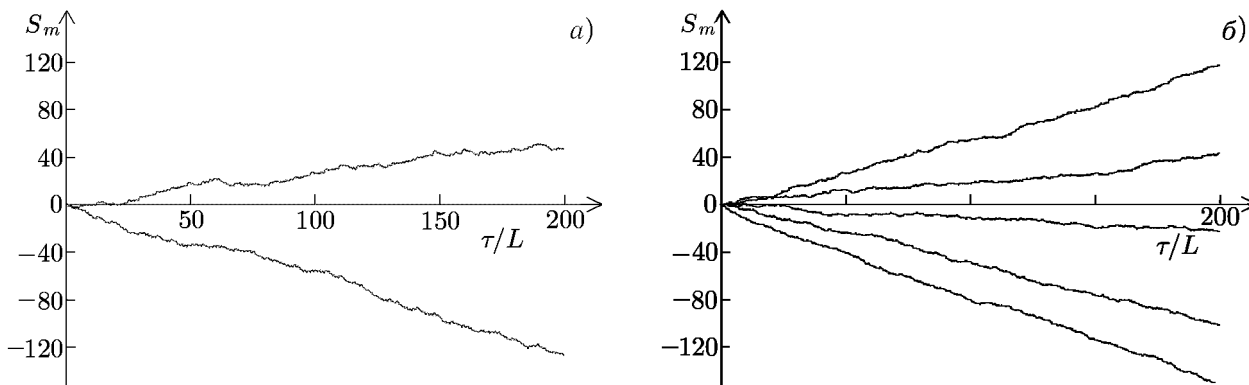


Рис. 9. Типичные графики зависимости «накапливающихся сумм» от нормированного времени при расчёте по обобщённому алгоритму Бенеттина двух ненулевых показателей Ляпунова в режиме слабого хаоса при  $L = 4,24$  и пяти показателей в режиме развитого хаоса при  $L = 6,1$ . Оценка показателей Ляпунова даётся угловыми коэффициентами прямых, аппроксимирующих эти зависимости

Таблица 1. Показатели Ляпунова и связанные с ними величины, полученные в численных расчётах для основной модели ЛОВ

Степень хаотичность	Показатели Ляпунова	Сигнатура спектра	Энтропия Колмогорова—Синяя	Ляпуновская размерность
Слабый хаос, $L = 4,24$	$\Lambda_1 = 0,268 \pm 0,010$ $\Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$ $\Lambda_4 = -0,593 \pm 0,006$	$\langle +, 0, 0, -, \dots \rangle$	$h = \Lambda_1 = 0,268$	$D_L = 3,45$
Развитый хаос (гиперхаос), $L = 6,1$	$\Lambda_1 = 0,594 \pm 0,006$ $\Lambda_2 = 0,254 \pm 0,003$ $\Lambda_3 = \Lambda_4 = 0$ $\Lambda_5 = -0,093 \pm 0,010$ $\Lambda_6 = -0,449 \pm 0,020$ $\Lambda_7 = -0,803 \pm 0,005$	$\langle +, +, 0, 0, -, -, -, \dots \rangle$	$h = \Lambda_1 + \Lambda_2 = 0,848$	$D_L = 6,38$

мерностью. В нашем случае ляпуновская размерность оказывается равной 3,45 в режиме слабого хаоса и 6,38 в режиме гиперхаоса.

Полезно изобразить зависимость суммы ляпуновских показателей  $\Sigma_m = \sum_{i=1}^m \Lambda_i$  от числа слагаемых, соединив точки ломаной линией (рис. 10). Этот график позволяет почувствовать взаимное соотношение между несколькими существенными для нелинейной динамики характеристиками аттрактора. В частности, получаемая при  $m = 1$  величина  $\Sigma_1$  есть старший ляпуновский показатель  $\Lambda_1$ , а максимальное значение  $\Sigma_m$  отвечает энтропии Колмогорова—Синяя. Точка пересечения графика с осью абсцисс соответствует размерности  $D_L$ , подсчитанной по формуле Каплана—Йорке.

#### 4. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ РАЗМЕРНОСТЬ АТТРАКТОРА

Одной из наиболее популярных процедур оценки количественных характеристик хаоса в нелинейной динамике и её приложениях служит вычисление корреляционной размерности по Грассбергеру—Прокаччиа с реконструкцией аттрактора методом запаздывания.

Применительно к нашей системе скалярный временной ряд для последующей обработки получался из численного решения нестационарных нелинейных уравнений (1), (2) с выборкой значе-

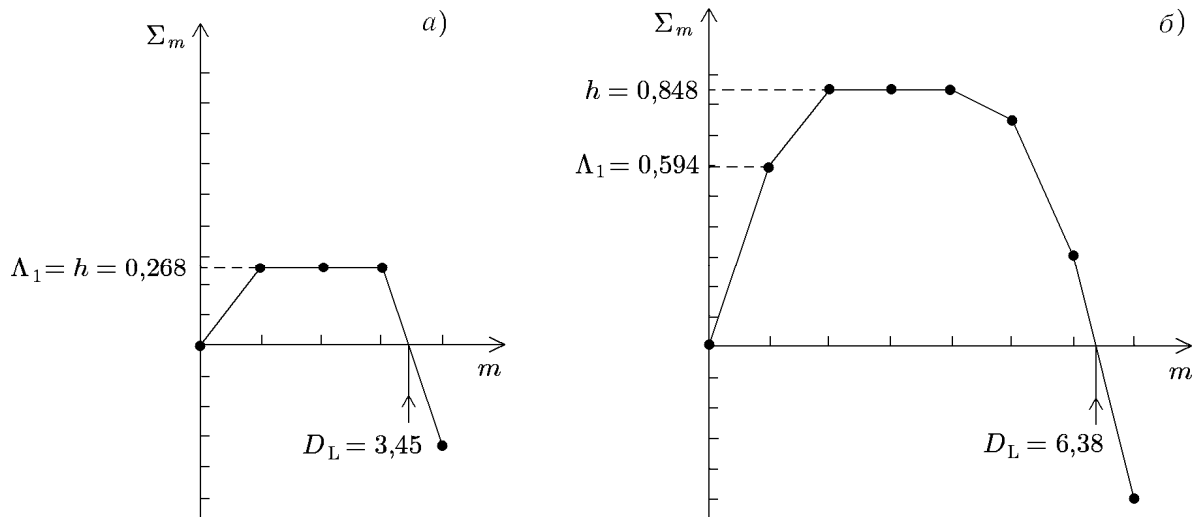


Рис. 10. Зависимость суммы нескольких первых ляпуновских показателей от числа слагаемых в случае слабого хаоса при  $L = 4,24$  (а) и развитого хаоса при  $L = 6,1$  (б). На графиках отмечены старший ляпуновский показатель  $\Lambda_1$ , энтропия Колмогорова—Синяя и ляпуновская размерность по формуле Каплана—Йорке  $D_L$

ний квадрата амплитуды выходного сигнала с определённым шагом  $\tau_0$  по времени, который обычно составлял несколько шагов разностной схемы:

$$x_0 = |F(0, 0)|^2, \quad x_1 = |F(\tau_0, 0)|^2, \quad x_2 = |F(2\tau_0, 0)|^2, \quad x_3 = |F(3\tau_0, 0)|^2, \quad \dots \quad (10)$$

Зададимся некоторым целым  $m$  и построим последовательность векторов в пространстве размерности  $m$ , полагая

$$\mathbf{x}_i = (x_i, x_{i-p}, x_{i-2p}, \dots, x_{i-(m-1)p}). \quad (11)$$

Здесь  $i = 1, 2, \dots, P$ ,  $p$  — целое число, которое целесообразно подобрать так, чтобы по возможности улучшить получаемый результат.

Рассматривая множество точек  $\mathbf{x}_i$ , можно оценить его размерность по методу Грассбергера—Прокаччия, для чего следует вычислить для разных  $\varepsilon$  так называемый корреляционный интеграл

$$C(\varepsilon) = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{P(P-1)} \sum_{i,j=1}^P \theta(\varepsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|). \quad (12)$$

Полученная зависимость откладывается на графике в двойных логарифмических координатах. Отыскивая на ней линейный участок, определяем угловой коэффициент  $D(m)$ , который и даёт оценку размерности проекции аттрактора на  $m$ -мерное пространство.

Описанную процедуру выполняют несколько раз, рассматривая последовательно  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Наличие или отсутствие насыщения зависимости  $D(m)$  при увеличении  $m$  рассматривается как критерий того, генерируется ли сигнал динамической системой или же он является шумовым. Если наблюдается насыщение на некотором уровне  $D$ , эту величину принимаем в качестве оценки корреляционной размерности аттрактора динамической системы, породившей наблюдаемый сигнал.

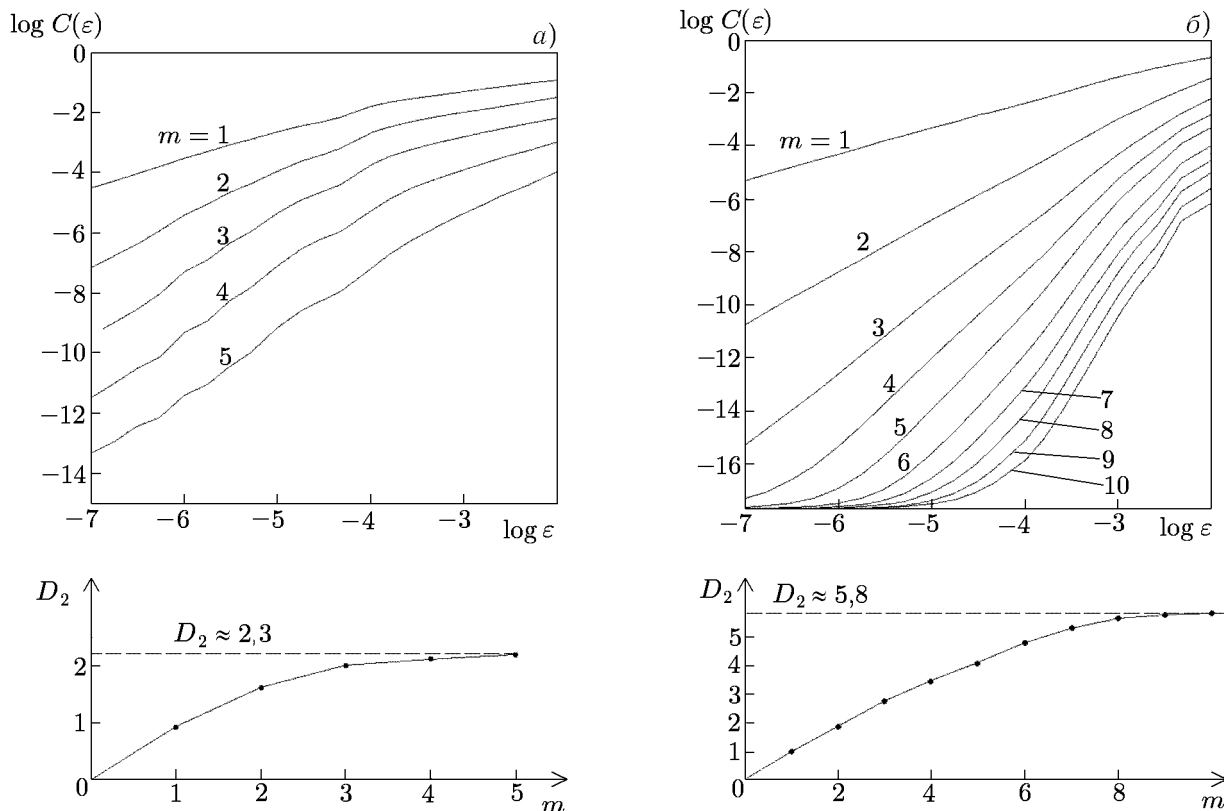


Рис. 11. Графики зависимости корреляционного интеграла от масштаба разрешения  $\varepsilon$  и размерности вложения  $m$  (вверху) и зависимости оценки корреляционной размерности от  $m$  (внизу) по скалярному временному ряду, полученному при численном решении уравнений (1) и (2) в режиме слабого хаоса при  $L = 4,24$  (а) и в режиме развитого хаоса при  $L = 6,1$  (б). Параметры алгоритма см. в табл. 2

Таблица 2. Параметры алгоритма, использованные при оценке корреляционной размерности

Тип режима	Нормированная длина	Шаг выборки по нормированному времени	Число отсчётов обрабатываемой реализации	Шаг выборки элементов временного ряда при реконструкции векторов
Слабый хаос	4,24	5/160	74 000	6
Развитый хаос	6,1	3/100	200 000	7

Рассмотрим применение такого подхода к обработке временного ряда, полученного при численном решении нестационарных уравнений ЛОВ в режиме слабого хаоса при  $L = 4,24$  и развитого хаоса при  $L = 6,1$ .

На рис. 11 приводятся зависимости корреляционного интеграла от  $\varepsilon$  и от размерности вложения  $m$ . В области, где график аппроксимируется прямой, её наклон с ростом  $m$  имеет тенденцию к насыщению для двух рассмотренных режимов на уровне  $D_2 \approx 2,3$  и  $D_2 \approx 5,8$  соответственно. При принятом определении временного ряда игнорировалась фазовая переменная, поэтому фактическая корреляционная размерность аттрактора на единицу больше, и её следует считать равной  $D_2 \approx 3,3$  и  $D_2 \approx 6,8$  соответственно. Это находится в разумном соответствии с полученными выше оценками ляпуновской размерности ( $D_L \approx 3,45$  и  $D_L \approx 6,38$  соответственно). Дробная

величина размерности даёт дополнительное указание на то, что мы имеем дело со странным аттрактором. Конечная величина размерности указывает, что в рассмотренных режимах динамики задействовано фактически конечное (притом не очень большое) число степеней свободы рассматриваемой распределённой системы: в соответствии с теоремой Мане размерность фазового пространства, в которое вкладывается аттрактор, не превышает величины  $2D + 1$ , т. е. 8 в первом и 15 во втором из рассмотренных режимов.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье был вновь рассмотрен вопрос о природе хаоса в лампе обратной волны, причём ключевой момент состоял в разработке алгоритма и проведении вычисления нескольких показателей Ляпунова. Показано, что развитый хаотический режим, наблюдаемый при превышении тока пучка над стартовым током в 30 и более раз, должен квалифицироваться как гиперхаос, поскольку характеризуется наличием более одного положительного показателя Ляпунова. Проведено сравнение такого режима со слабым хаосом, возникающим при меньших значениях тока через каскад бифуркаций удвоения периода автомодуляции, обращено внимание на отличие в спектральных и корреляционных характеристиках, функции распределения, спектре показателей Ляпунова, размерностных свойствах аттракторов.

Появление режимов с возрастающим количеством положительных показателей Ляпунова при увеличении параметра неравновесности является характерным свойством распределённых систем, представителем которых является ЛОВ. Следует отметить, что именно режимы гиперхаоса перспективны с точки зрения использования ЛОВ как генератора узкополосного шума с электронной перестройкой частоты.

Благодаря универсальной природе уравнений (1) полученные результаты могут быть отнесены к широкому кругу электронных устройств с длительным взаимодействием на обратной волне с инерционным механизмом группировки, в том числе к релятивистской ЛОВ, убитронам и скатронам, гиро-ЛОВ и др. в определённых областях рабочих параметров.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-02-16192) и Научно-образовательного центра нелинейной динамики и биофизики при Саратовском госуниверситете (грант АФГИР и Минобразования РФ REC-006). Авторы признательны Б. П. Безручко, А. П. Кузнецову, Н. М. Рыскину и В. Н. Титову за обсуждение, И. Р. Сатаеву и Е. П. Селезнёву за помощь в численных расчётах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В. Н. Шевчика, Д. И. Трубецкова. Изд-во СГУ, 1975. Гл. III. С. 135.
2. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1 037.
3. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П. // Релятивистская высокочастотная электроника. Проблемы повышения мощности и частоты излучения. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 101.
4. Безручко Б. П., Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П. // Лекции по электронике СВЧ. Изд-во СГУ, 1978. Кн. 5. С. 236.
5. Безручко Б. П., Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1 053.
6. Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 3. С. 180.
7. Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. // Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. Горький: ИПФ АН СССР, 1980. С. 29.

8. Безручко Б. П., Булгакова Л. В., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Изд-во СГУ, 1981. Кн. 5. С. 25.
9. Безручко Б. П., Булгакова Л. В., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 6. С. 1136.
10. Ginzburg N. S., Zaitsev N. I., Pyakov E. V., et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 108304.
11. Гинзбург Н. С., Зайцев Н. И., Иляков Е. В. и др. // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24, № 20. С. 66.
12. Гинзбург Н. С., Зайцев Н. И., Иляков Е. В. и др. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 5. С. 60.
13. Балакирев В. А., Островский А. О., Ткач Ю. В. // ЖТФ. 1991. Т. 61, № 2. С. 158.
14. Пегель И. В. // Изв. вузов. Физика. 1996. Т. 39, № 12. С. 62.
15. Kuznetsov S. P. // Proc. Int. Symposium "Topical problems of nonlinear wave physics", Nizhni Novgorod, Russia, 6–12 Sept. 2003. P. 78.
16. Амиров Р. Ш., Безручко Б. П., Исаев В. А., Четвериков А. П. // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Изд-во СГУ, 1983. Кн. 2. С. 90.
17. Кац В. А. Стохастические автоколебания в электронных распределённых системах на сверхвысоких частотах: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 1985.
18. Levush V., Antonsen T. M., Bromborsky A., et al. // IEEE Trans. on Plasma Sci. 1992. V. 20, No. 3. P. 263.
19. Астахов С. А., Безручко Б. П., Зборовский А. В., Трубецков Д. И. // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-98): Материалы международной научно-технической конференции. Саратов: СГТУ, 1998. Т. 1. С. 39.
20. Рыскин Н. М., Титов В. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 10. С. 860.
21. Храмов А. Е. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, вып. 11. С. 56.
22. Короновский А. А., Храмов А. Е. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, вып. 12. С. 54.
23. Рыскин Н. М., Титов В. Н., Трубецков Д. И. // Докл. АН. 1998. Т. 358, № 5. С. 620.
24. Рыскин Н. М., Титов В. Н. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 1. С. 75.
25. Ефимов Б. П., Кривицкий Б. Я., Лукин К. А. и др. // Электроника миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. Сб. научных трудов. Киев: Наукова думка, 1988. С. 68.
26. Ракитянский В. А. // Радиофизика и электроника: Сб. научн. трудов. Харьков: Институт радиофизики и электроники НАН Украины, 1997. Т. 2, № 1. С. 111.
27. Фейгенбаум М. // УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 343.
28. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
29. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Наука, 2001.
30. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
31. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.-M. // Phys. Rev. A. 1976. V. 14. P. 2338.
32. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. // Meccanica. 1980. V. 15. P. 9.

Саратовский госуниверситет, Саратовское отделение  
Института радиотехники и электроники РАН,  
г. Саратов, Россия

Поступила в редакцию  
10 декабря 2003 г.



**CHAOS AND HYPERCHAOS IN THE BACKWARD-WAVE TUBE***S. P. Kuznetsov, D. I. Trubetskov*

On a basis of numeric solution of dynamical equations we study chaotic self-oscillations in the backward-wave tube. We present time dependencies for the output signal amplitude, phase portraits, statistical quantifiers for a "weak chaos" arising via period-doubling cascade of self-modulation, and for developed chaos at large values of the dimensionless length parameter. It is shown that the developed chaos is characterized by presence of more than one positive Lyapunov exponents (hyperchaos). Also estimates of Kolmogorov—Sinai entropy, Lyapunov dimension, correlation dimension obtained from the Grassberger—Procaccia algorithm are presented. The results confirm once more that a finite-dimension strange attractor is responsible for chaotic regimes in the BWT.