

**БИФУРКАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ НА ГРАНИЦЕ ХАОСА**

*С.П. Кузнецов, А.А. Майлыбаев, И.Р. Сатаев*

Показано, что неподвижная точка уравнения ренормгруппы, отвечающая системе двух подсистем с однонаправленной связью – унимодального отображения с показателем степени экстремума  $k$  и отображения, аккумулирующего сумму функций состояния первой подсистемы, претерпевает при изменении параметра  $k$  бифуркацию удвоения периода, что приводит к рождению цикла периода 2 в уравнении ренормгруппы. При  $k = 2$  это решение отвечает ситуации на пороге возникновения хаоса, обозначаемой как критическое поведение типа  $C$  (*Kuznetsov and Sataev, Phys. Lett., 1992, 236*). На основе комбинации аналитических методов и численных расчетов построено и проанализировано асимптотическое разложение решения по степеням отклонения параметра  $k$  от критического значения  $k_c = 1.984396$ . Проведенное рассмотрение аналогично подходу, известному в теории фазовых переходов как  $\epsilon$ -разложение, когда «тривиальная» неподвижная точка ренормгруппового преобразования претерпевает бифуркацию с появлением новой неподвижной точки, ответственной за универсальное критическое поведение с нетривиальными критическими индексами.

*К 85-летию  
профессора Ю.И. Неймарка*

**Введение**

Одно из прогрессивных направлений в современной теоретической нелинейной динамике связано с применением для анализа перехода к хаосу метода ренормгруппы (РГ), вошедшего в обиход исследователей, начиная с классических работ Фейгенбаума [1, 2]. Этот подход позволяет вскрыть универсальные характеристики переходов к хаосу и установить законы подобия, определяющие свойства структур малого масштаба в фазовом пространстве и пространстве параметров у порога хаоса. РГ-анализ был развит, например, для каскадов удвоения периода в диссипативных и консервативных системах, для переходов через квазипериодические движения и перемежаемость [1–11].

Применение идей ренормгруппы, универсальности и скейлинга показало себя продуктивным в контексте многопараметрического анализа переходов к хаосу, разрабатываемого по аналогии с теорией бифуркаций и теорией катастроф [12–16]. В этом отношении классический каскад удвоений периода Фейгенбаума выступает как феномен коразмерности один, поскольку встречается как типичный в однопараметрических семействах нелинейных систем. Наряду с этим были обнаружены и описаны ситуации, имеющие более высокую коразмерность и допускающие анализ в терминах РГ-подхода. Поиск новых критических ситуаций на пороге хаоса представляет принципиальный интерес, хотя остается до сих пор, во многом, делом удачи. В этой связи представляется очевидной потребность выработки каких-либо общих принципов их нахождения.

Имея в виду, что идея ренормгруппы восходит к статистической физике и теории фазовых переходов, можно вспомнить, что одна из плодотворных линий рассуждения в этой области базируется на рассмотрении зависимости критических явлений от размерности пространства, трактуемой формально как непрерывный параметр [17, 18]. Во многих случаях существует критическая размерность, при которой «тривиальная» неподвижная точка РГ-преобразования претерпевает бифуркацию с появлением новой неподвижной точки, ответственной за универсальное критическое поведение с нетривиальными (неклассическими) критическими индексами, характерными для реальных фазовых переходов. В этом контексте удастся развить систематический подход, основанный на теории возмущений с использованием разложения по степеням отклонения размерности от критического значения. Этот метод известен как  $\epsilon$ -разложение и разработан К. Вильсоном (Нобелевская премия 1982 г.). По-видимому, аналогичная методика представляла бы интерес и в нелинейной динамике при анализе переходов к хаосу<sup>1</sup>.

Данная статья посвящена рассмотрению бифуркации в уравнении РГ, описывающем удвоения периода в двумерных отображениях. Эта бифуркация отвечает рождению цикла периода два из неподвижной точки уравнения РГ и приводит к возникновению нового типа критического поведения на пороге хаоса. В разделе 1 мы формулируем двумерное обобщение уравнения Фейгенбаума – Цвитановича [5, 6, 14]. В разделе 2 рассматривается критическое поведение, служащее аналогом «тривиальной» неподвижной точки в теории фазовых переходов. Оно имеет место в системе двух одномерных отображений с однонаправленной связью, в которой первая подсистема представлена отображением, демонстрирующим удвоения периода по Фейгенбауму, а вторая отвечает отображению, реализующему вычисление интегральной характеристики – накапливающейся суммы функций от состояния первой подсистемы. В разделе 3 мы показываем, что модификация исходной модели с изменением показателя степени в точке экстремума отображения  $k = 2$  на непрерывно меняющийся параметр делает возможным бифуркационный анализ ситуации вблизи неподвижной точки, являющейся аналогом «тривиальной» неподвижной точки в теории фазовых переходов. При превышении этим параметром некоторого значения  $k_c = 1.984396$  (аналог критической размерности в теории фазовых переходов)

---

<sup>1</sup> В контексте нелинейной динамики, бифуркация в уравнении РГ ранее обсуждалась в другом аспекте, применительно к задаче о переходе к хаосу в модельной системе, описываемой одномерным квадратичным отображением под внешним воздействием, заданным последовательностью с фрактальными свойствами [19, 20].

неподвижная точка уравнения РГ претерпевает бифуркацию с рождением «нетривиального» решения – цикла периода два, то есть неподвижной точки двукратного РГ-преобразования. В разделе 4 мы устанавливаем природу критического поведения на пороге хаоса, связанного с этим решением. Оказывается, что оно отвечает за тип критичности, обнаруженный в двумерных необратимых отображениях и обозначенный как тип С (от слова «Cycle») [21, 22]. Представлены результаты численного решения уравнения РГ в виде асимптотического разложения по степеням отклонения параметра  $\kappa = 2$  от критического значения  $\kappa_c$ . В заключении дается резюме результатов данной работы как примера применения бифуркационного анализа уравнения РГ и построения разложений по параметру отклонения от точки бифуркации, то есть подхода, аналогичного по своей идее методу  $\varepsilon$ -разложения в теории фазовых переходов.

## 1. Двумерное обобщение уравнения Фейгенбаума – Цвитановича

В контексте нелинейной динамики и анализа перехода к хаосу содержание метода ренормгруппы состоит, как известно, в следующем.

Пусть мы имеем зависящий от параметров оператор эволюции динамической системы на некотором временном интервале. Используя его, можно построить оператор эволюции на некотором большем интервале. Предположим, что удастся подобрать параметры исходной системы так, что посредством масштабных замен переменных можно добиться, чтобы новый оператор эволюции совпадал или почти совпадал со старым. Процедура перехода от старого к новому оператору называется *РГ-преобразованием*, а набор значений параметров задает расположение *критической точки*. РГ-преобразование можно повторять многократно, получая тем самым последовательность операторов эволюции для все больших временных интервалов. В критической точке структура операторов эволюции на больших временах оказывается обусловленной не конкретным видом исходного оператора эволюции, а неподвижной точкой операторного уравнения, задающего РГ-преобразование (*универсальность*). Поскольку получаемые при многократном применении РГ-преобразования операторы эволюции одинаковы с точностью до масштабной замены, система демонстрирует на различных временах подобную динамику, проявляя свойство *скейлинга*.

Для перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода в классе систем, включающем одномерное квадратичное (логистическое) отображение, основное уравнение РГ представляет собой функциональное уравнение Фейгенбаума – Цвитановича

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)). \quad (1)$$

Здесь  $g(x)$  есть универсальная функция, определяющая вид оператора эволюции перенормированной динамической переменной  $x$  за асимптотически большое число шагов дискретного времени  $2^m$ , а  $\alpha = -2.502907\dots$  – это универсальная константа Фейгенбаума, характеризующая пересчет масштаба динамической переменной на каждом следующем уровне построения последовательности операторов эволюции.

Чтобы изучать типы критического поведения, присущие двумерным отображениям, необходимо иметь двумерное обобщение уравнения Фейгенбаума – Цвитановича. Выведем его в предположении, что в двумерном фазовом пространстве выбра-

на такая система координат, в которой масштабное преобразование, выполняемое по ходу РГ-анализа, является диагональным:  $x \rightarrow x/\alpha$ ,  $y \rightarrow y/\beta$ . (Надо отметить, что в общем случае «скейлинговые переменные»  $x$ ,  $y$  могут не совпадать с естественными переменными, в которых записано исходное исследуемое отображение.)

Пусть имеем оператор эволюции за  $2^m$  шагов дискретного времени, заданный парой функций  $G_m(x, y)$  и  $F_m(x, y)$

$$\{x, y\} \mapsto \{G_m(x, y), F_m(x, y)\}, \quad (2)$$

причем полагаем, что  $G_m(0, 0) = 1$  и  $F_m(0, 0) = 1$ . Применим это отображение дважды и выполним замену  $x \rightarrow x/\alpha_m$ ,  $y \rightarrow y/\beta_m$ , где  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  – некоторые константы. В результате получаем новый оператор эволюции, заданный парой функций, которые обозначим  $G_{m+1}(x, y)$  и  $F_{m+1}(x, y)$ . При этом константы  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  подберем так, чтобы новые функции также были нормированы на единицу в начале координат. Процедура перехода от старой пары функций к новой определяет РГ-преобразование

$$\begin{pmatrix} G_{m+1} \\ F_{m+1} \end{pmatrix} = RG \begin{pmatrix} G_m \\ F_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_m G_m(G_m(x/\alpha_m, y/\beta_m), F_m(x/\alpha_m, y/\beta_m)) \\ \beta_m F_m(G_m(x/\alpha_m, y/\beta_m), F_m(x/\alpha_m, y/\beta_m)) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\alpha_m = 1/G_m(G_m(0, 0), F_m(0, 0)), \quad \beta_m = 1/F_m(G_m(0, 0), F_m(0, 0)).$$

Критическое поведение может ассоциироваться с неподвижной точкой системы рекуррентных функциональных уравнений (3), для которой будут справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha G(G(x/\alpha, y/\beta), F(x/\alpha, y/\beta)) \\ \beta F(G(x/\alpha, y/\beta), F(x/\alpha, y/\beta)) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\alpha = 1/G(G(0, 0), F(0, 0)), \quad \beta = 1/F(G(0, 0), F(0, 0)),$$

или с периодическим решением – циклом.

С принципиальной точки зрения, различие между ситуациями неподвижной точки и цикла не очень существенно. В самом деле, цикл периода  $p$  можно интерпретировать как неподвижную точку модифицированного преобразования РГ, которое эквивалентно  $p$  шагам преобразования удвоения и состоит в переходе от исходного оператора эволюции к оператору, отвечающему  $2^p$  итерациям.

Система функциональных уравнений (4) или аналогичная система уравнений для цикла может быть решена численно. Для этого все фигурирующие в уравнениях функции представляются конечными полиномиальными аппроксимациями. Собственно уравнения сводятся тогда к системе конечного числа нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения. Решение производится на компьютере с привлечением, например, многомерного метода Ньютона. Результатом решения служит набор коэффициентов разложения и константы перенормировки  $\alpha$  и  $\beta$ .

Следующий шаг в проведении РГ-анализа – исследование малых возмущений стационарного решения – неподвижной точки или цикла  $\{G_m(x, y), F_m(x, y)\}$ . Такие возмущения возникают при сдвиге по одному или нескольким параметрам из критической точки. Это, по существу, задача исследования неподвижной точки или цикла на устойчивость.

Пусть  $\{G_m(x, y), F_m(x, y)\}$  есть стационарное решение периода  $p$ . (В частности, неподвижной точке соответствует  $p = 1$ .) Выполнив в уравнениях (3) подстановку  $\{G_m(x, y) + \varepsilon u_m(x, y), F_m(x, y) + \varepsilon v_m(x, y)\}$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр, и пренебрегая членами выше первого порядка по  $\varepsilon$ , можно получить линейное уравнение для возмущений стационарного решения  $u_m(x, y), v_m(x, y)$  вида

$$\begin{pmatrix} u_{m+1} \\ v_{m+1} \end{pmatrix} = L_m \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Здесь  $L_m$  – линейные операторы, образующие последовательность периода  $p$ , вид которых определяется только функциями  $G_m, F_m$ . (Явное выражение для  $L_m$  не приводим ввиду его громоздкости.)

Решение уравнения (5) можно искать в виде  $\begin{pmatrix} u_{m+pn} \\ v_{m+pn} \end{pmatrix} = v^n \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}$ , где  $v$  – собственное значение оператора  $L = \prod_{i=1}^p L_i = L_p L_{p-1} \dots L_1$ , а набор  $\begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}$ ,  $m = 1, \dots, p$  задает собственный вектор.

Среди собственных мод нужно выделить существенные, которые имеют собственные числа по абсолютной величине большие 1 и определяют поэтому асимптотику решения уравнения (5) при больших  $m$ . При этом следует исключить те решения, которые ассоциируются с инфинитезимальными заменами переменных. Число  $M$  оставшихся мод определяет *коразмерность* типа критичности: это минимальное количество управляющих параметров, при котором данная критическая ситуация может встретиться как типичный феномен в какой-то точке пространства параметров. (В самом деле, требуя, чтобы коэффициенты при  $M$  существенных собственных векторах обратились в ноль, мы задаем точно  $M$  условий на параметры исходного отображения.)

## 2. Универсальные свойства интегральных характеристик на границе хаоса

Рассмотрим динамическую систему, описываемую гладким одномерным отображением

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_n \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

и дополним ее уравнением

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n), \quad (7)$$

где  $y_n$  – новая переменная, а  $f(x)$  – некоторая гладкая функция. При задании начального условия  $y_0 = 0$  величина  $y_n$  в каждый момент дискретного времени  $n$  определяет, очевидно, интегральную характеристику – сумму значений функции  $f(x)$  от

состояний системы (6) вида  $y_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ . В физических системах такой характеристикой может быть, например, совершенная системой работа или энергия испущенного излучения.

Вместе уравнения (6) и (7) образуют двумерную динамическую систему, составленную из двух элементов с однонаправленной связью.

Предположим, что функции  $g(x)$  и  $f(x)$  зависят гладким образом от вещественных параметров  $A$  и  $B$ , соответственно. В уравнении (7) параметр  $B$  в простейшем случае может входить аддитивно. Относительно первой подсистемы (6) предположим, что при увеличении параметра  $A$  в ней реализуется каскад бифуркаций удвоения периода притягивающих орбит с переходом к хаосу по Фейгенбауму в точке накопления бифуркаций  $A = A_c$ . Известно, что в критической точке  $A_c$  система (6) обладает рядом универсальных свойств [1, 2].

Покажем, что при правильном выборе параметра  $B = B_c$  динамика переменной  $y_n$  также обладает универсальными свойствами. Чтобы найти критическое значение  $B_c$ , рассмотрим сходящуюся к критической точке  $A = A_c$  последовательность значений параметра  $A_m$  такую, что при каждом  $A = A_m$  отображение (6) имеет устойчивый цикл периода  $k = 2^m$ :  $x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_k \rightarrow x_1 = g(x_k)$ . Тогда  $y_{Nk} = N \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i)$ . Если  $\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) \neq 0$ , то значение суммы  $y_{lk} \rightarrow \infty$  при увеличении  $N$ . Мы можем, однако, подобрать параметр  $B_m$  так, чтобы  $\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) = 0$ . (В случае, когда параметр  $B$  входит в уравнение аддитивно, это условие сводится к элементарному уравнению для  $B_m$ .) При  $A_m \rightarrow A_c$  последовательность  $B_m$  стремится к пределу  $B_c$ .

Применим для анализа системы (6), (7) ренормгрупповой подход. В нашем случае

$$G(x, y) = g(x), \quad F(x, y) = y + f(x). \quad (8)$$

Используя (3), найдем

$$RG \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = RG \begin{pmatrix} g(x) \\ y + f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha g(g(x/\alpha)) \\ y + \beta(f(x/\alpha) + f(g(x/\alpha))) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, оператор  $RG$  не меняет структуры отображения как системы двух элементов с однонаправленной связью (8). Если новые функции  $\alpha g(g(x/\alpha))$  и  $\beta(f(x/\alpha) + f(g(x/\alpha)))$  совпадают с исходными  $g(x)$  и  $f(x)$ , то мы имеем неподвижную точку РГ-преобразования. Из (9) следует, что неподвижная точка может иметь вид (8), где функция  $g(x)$  определяются уравнением Фейгенбаума – Цвитановича (1), а функция  $f(x)$  – уравнением

$$f(x) = \beta(f(x/\alpha) + f(g(x/\alpha))). \quad (10)$$

Известное решение уравнения (1), полученное Фейгенбаумом, имеет вид [1–4]

$$g(x) = 1 - 1.5276x^2 + 0.1048x^4 + 0.0267x^6 - 0.0035x^8 + 0.0001x^{10} + \dots \quad (11)$$

причем константа ренормализации равна  $\alpha = -2.502908$ . Численное решение функционального уравнения (11), согласно результатам проведенных нами расчетов, представляется в виде

$$f(x) = 1 - 2.4410x^2 + 0.0987x^4 + 0.1445x^6 - 0.0207x^8 + 0.0002x^{10} + \dots, \quad (12)$$

и при этом  $\beta = -4.586197$ .

Анализ задачи о малых возмущениях неподвижной точки РГ-преобразования, определенной выражениями (8), (11), (12), дает четыре существенных собственных вектора с собственными значениями  $|\nu| \geq 1$ :<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \nu_1 = 2\beta = -9.1724, & \quad u_1(x, y) = 0, & \quad v_1(x, y) = 1 - f(x); \\ \nu_2 = \delta = 4.6692, & \quad u_2(x, y) = h(x), & \quad v_2(x, y) = w(x); \\ \nu_3 = 2, & \quad u_3(x, y) = 0, & \quad v_3(x, y) = y + z(x); \\ \nu_4 = \delta/\beta = -1.0181, & \quad u_4(x, y) = yp(x) + q(x), & \quad v_4(x, y) = yr(x) + s(x), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} h(x) &= 1.2642x^2 - 0.1800x^4 - 0.1010x^6 + 0.0174x^8 - 0.0004x^{10} - 0.0002x^{12} + \dots, \\ w(x) &= 1.2183x^2 + 0.0346x^4 - 0.4959x^6 + 0.0943x^8 - 0.0007x^{10} - 0.0020x^{12} + \dots, \\ z(x) &= -0.8430x^2 - 0.0194x^4 + 0.1394x^6 - 0.0210x^8 + 0.0009x^{10} + \dots, \\ p(x) &= -2.6480 + 0.8623x^2 + 0.1339x^4 - 0.0386x^6 + 0.0025x^8 + 0.0001x^{10} + \dots, \\ q(x) &= 0.9500x^2 + 0.2131x^4 - 0.1843x^6 + 0.0212x^8 + 0.0001x^{10} - 0.0002x^{12} \dots, \\ r(x) &= -4.1186 + 1.8551x^2 + 0.7732x^4 - 0.2247x^6 + 0.0132x^8 + 0.0031x^{10} - 0.0005x^{12} \dots, \\ s(x) &= -1, 4507x^2 + 5, 4327x^4 - 1, 7091x^6 + 0.0796x^8 + 0.0216x^{10} - 0.0033x^{12} + \dots. \end{aligned} \quad (14)$$

Охарактеризуем каждый из перечисленных типов возмущений, выводящих систему из критической точки.

Первая собственная функция, с собственным значением  $\nu_1$ , отвечает за добавку во втором отображении, которая приводит к неограниченному росту  $y_n$  при больших  $n$ . Следующее собственное значение  $\nu_2 = \delta = 4.6692016$  совпадает с известным из теории Фейгенбаума и, очевидно, связано с переходом к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в первом отображении. Функция  $h(x)$  представляет собой собственную функцию, известную в теории Фейгенбаума. Функция с собственным значением  $\nu_3 = 2$  отвечает за изменение коэффициента при  $y$  во втором отображении. Наконец, собственная функция для  $\nu_4 = \delta/\beta$  вводит зависимость от  $y$  в первое отображение.

Как можно заключить, возмущения, ассоциирующиеся с  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , не нарушают структуру отображения как системы с однонаправленной связью вида (8). Следовательно, в этом классе систем коразмерность рассматриваемого типа критичности

<sup>2</sup>Из этого перечня исключены собственные решения, связанные с заменами координат, в частности,  $\nu_5 = \alpha = -2.5029$  ассоциируется с заменой  $x \rightarrow x + \varepsilon(1 - x)$  и  $\nu_6 = \beta/\alpha = 1.8323$  - с заменой  $y \rightarrow y + \varepsilon(x - y)$ .

равна 2. В самом деле, данный режим реализуется при подобранных надлежащим образом значениях двух параметров:  $A = A_c$  и  $B = B_c$ . При этих значениях параметров (возможно, после линейной замены координат, связанной с несущественными собственными значениями) отображение общего вида (6), (7) при многократном действии РГ-оператора стремится к неподвижной точке, определяемой соотношениями (8), (11), (12).

Рассмотрим орбиту отображения (6) с функцией (11), стартующую из точки  $x_0 = 0$ . Эта орбита принадлежит аттрактору на границе хаоса [1, 2]. Используя уравнение (1), находим

$$\begin{aligned} x_0 = 0, \quad x_1 = g(0) = 1, \quad x_2 = g^2(0) = g(0)/\alpha = 1/\alpha, \\ x_3 = g(x_2) = g(g(0)/\alpha) = g(1/\alpha), \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда из уравнения (10) следует:

$$\begin{aligned} 1 = f(0) &= \beta(f(0) + f(g(0))) = \beta(f(x_0) + f(x_1)) \\ &= \beta^2(f(0) + f(g(0)) + f(g(0)/\alpha) + f(g(g(0)/\alpha))) \\ &= \beta^2(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) \\ &\vdots \\ &= \beta^m \sum_{i=0}^{2^m-1} f(x_i) = \beta^m y_{2^m}. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом,  $y_{2^m} = 1/\beta^m$ , то есть функция (10) обеспечивает для больших  $n$  ограниченность  $y_n$  на аттракторе, что было принято при определении критического значения параметра  $B = B_c$  в системе (6), (7).

В качестве конкретного примера рассмотрим случай, когда в первом уравнении (8) фигурирует функция  $x_{n+1} = 1 - Ax_n^2$ , отвечающая логистическому отображению на границе хаоса при  $A = A_c = 1.401155189092$ , а во втором – функция  $f(x) = x - B$ . Критическое значение параметра  $B$  определяется как  $B_c = \lim_{m \rightarrow \infty} (1/2^m) \sum_{i=0}^{2^m-1} x_i$ , где  $x_0 = 0$ . Расчеты показывают, что  $B_c = 0.3760720508$ . Для того, чтобы наблюдать сходимость двумерного отображения к универсальной форме (8), необходимо произвести замену координаты  $y = \tilde{y} - x$  (для исключения неустойчивости, связанной с несущественным собственным значением  $\nu_5$ ). Тогда второе отображение принимает вид  $\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + 1 - A_c x_n^2 - B_c = \tilde{y}_n + \tilde{x}_{n+1} - B_c$ . При этом функция  $1 - A_c x_n^2 - B_c$ , как и универсальная функция (12), имеет экстремум при  $x = 0$ .

Рис. 1, а иллюстрирует процесс сходимости функций  $f(x)$  к универсальной функции (12) под действием РГ-преобразования. Универсальная функция представлена широкой серой линией. Видно, что уже после одной или двух итераций отличие от универсальной функции едва заметно. Переменная  $y_n$  является суммой отклонений всех предшествующих состояний системы  $x_n$  от среднего значения  $B_c$ . Универсальность означает, что положение системы и сумма отклонений на  $2^m$ -м шаге асимптотически совпадает с теми же величинами на  $2^{m+1}$ -м шаге при ренормализации с коэффициентами  $1/\alpha$  и  $1/\beta$ . Для больших  $m$  эти величины описываются универсальными функциями (11) и (12). На рис. 1, б показана сходимость к универ-



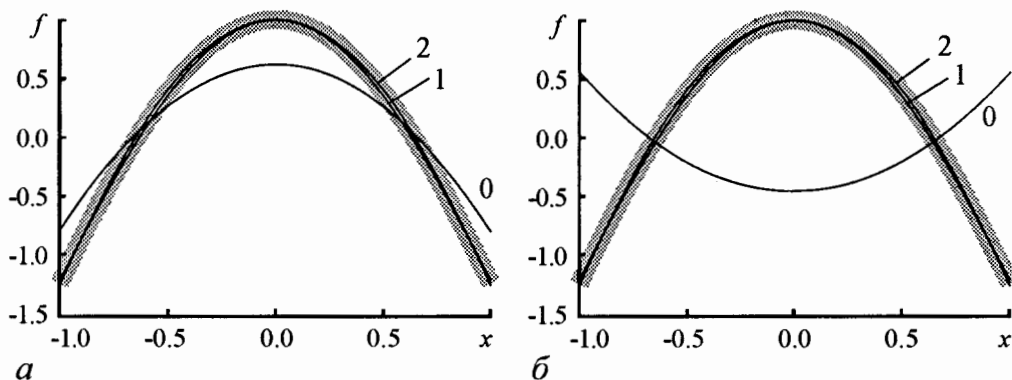


Рис. 1. Сходимость интегральных характеристик к универсальной функции для логистического отображения

сальной функции в случае  $f(x) = x^2 - B$  (то есть суммируются отклонения квадратов состояний  $x_1, \dots, x_n$  от их среднего значения). Для этого случая критическое значение параметра  $B_c = 0.4452953917$ .

### 3. Бифуркация неподвижной точки ренормгруппового оператора

Если мы рассмотрим неподвижную точку преобразования РГ, заданную соотношениями (8), (11), (12), в пространстве двумерных отображений общего вида  $x \mapsto G(x, y), y \mapsto F(x, y)$ , то с ней ассоциируется, очевидно, класс универсальности коразмерности 4. Это определяется наличием четырех существенных собственных значений (13). Обозначим данный класс универсальности FS (F означает универсальность Фейгенбаума для первого отображения, а S – правило суммирования для второго отображения).

Интересное наблюдение состоит в том, что одно из существенных собственных значений чрезвычайно близко к минус 1:  $\nu_4 = \delta/\beta = -1.018$ . Это указывает на близость ситуации к бифуркации удвоения периода в уравнении РГ.

Возникает идея модифицировать РГ-преобразование, введя непрерывную зависимость от некоторого параметра так, чтобы при некотором его значении достигалась точка бифуркации. Бифуркация состояла бы в возникновении около неподвижной точки типа FS периодического решения (цикла) периода 2.

Чтобы прийти к желаемой модификации, уместно вспомнить, что одно из первых получивших отражение в литературе обобщений теории Фейгенбаума состояло в рассмотрении бифуркаций удвоения периода в одномерных отображениях с экстремумом, степень которого отличалась от 2 и давалась вещественным параметром:  $x_{n+1} = 1 - \lambda|x_n|^k$ , где  $k > 1$ . Оказывается, что в этом случае имеет место качественно такой же переход к хаосу через последовательность удвоений периода, как в квадратичном отображении, но с другими значениями констант  $\alpha$  и  $\delta$ , зависящими от  $k$  [23–25]. Таким образом, в качестве параметра, управляющего бифуркацией в уравнении РГ, можно взять показатель степени исходного отображения в точке экстремума.

Для введенной нами неподвижной точки двумерного уравнения РГ типа FS имеют место соотношения  $G(x, y) = g(x) = \tilde{g}(x^2), F(x, y) = y + f(x) = y + \tilde{f}(x^2)$ ,

где  $\tilde{g}, \tilde{f}$  – гладкие функции. Рассмотрим более общую форму решения в виде:

$$G_{\kappa}(x, y) = \tilde{g}(|x|^{\kappa}), \quad F_{\kappa}(x, y) = y + \tilde{f}(|x|^{\kappa}). \quad (17)$$

Ясно, что  $\kappa = 2$  отвечает рассматриваемому выше случаю. Функции  $\tilde{g}(|x|^{\kappa})$  и  $\tilde{f}(|x|^{\kappa})$  имеют экстремум при  $x = 0$ ; они дифференцируемы по  $x$  один раз при  $1 \leq \kappa < 2$  и два раза при  $\kappa \geq 2$ . При изменении параметра  $\kappa$  функции, определяющие решение в виде неподвижной точки  $\tilde{g}, \tilde{f}$ , меняются. В результате изменяются и собственные значения линейризованного ренормгруппового оператора, которые даются выражениями (13), где  $\delta$  и  $\beta$  зависят от  $\kappa$ .

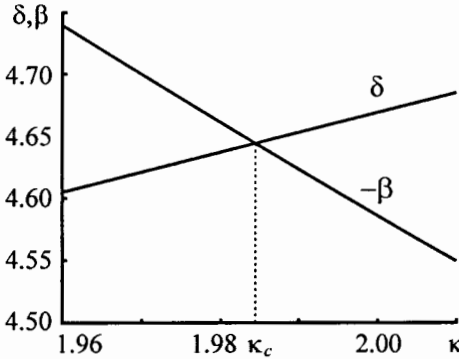


Рис. 2. Зависимость собственного значения  $\delta$  и константы ренормализации  $\beta$  от параметра  $\kappa$ .

На рис. 2 представлена зависимость<sup>3</sup>  $\delta$  и  $-\beta$  от  $\kappa$ . При  $\kappa_c = 1.984396$  мы имеем  $\delta = -\beta = 4.644444$  и, следовательно,  $\nu_4 = \delta/\beta = -1$ . Таким образом,  $\kappa_c$  – это и есть искомая точка бифуркации удвоения периода для оператора  $RG$ . При меньших значениях  $\kappa < \kappa_c$  собственное значение  $|\nu_4| < 1$ . В этой области коразмерность класса универсальности, описываемого неподвижной точкой (17), становится равной 3.

#### 4. Рождение нового класса универсальности

Введенный параметр  $\kappa$  определяет тип особенности решения (17) в точке  $x = 0$ , в то время как преобразование  $RG$  формально от  $\kappa$  не зависит. Можно перейти к математически эквивалентной формулировке задачи, модифицировав ее так, чтобы преобразование  $RG$  зависело явно от  $\kappa$  и действовало в пространстве гладких двумерных отображений. Для этого введем отображения  $\tilde{G}_{\kappa}$  и  $\tilde{F}_{\kappa}$ , связанные с  $G_{\kappa}$  и  $F_{\kappa}$  соотношениями

$$G_{\kappa}(x, y) = \tilde{G}_{\kappa}(|x|^{\kappa}, y), \quad F_{\kappa}(x, y) = \tilde{F}_{\kappa}(|x|^{\kappa}, y). \quad (18)$$

В новых обозначениях решение, отвечающее неподвижной точке (17), принимает вид

$$\tilde{G}_{\kappa}(x, y) = \tilde{g}(x), \quad \tilde{F}_{\kappa}(x, y) = y + \tilde{f}(x), \quad (19)$$

где  $\tilde{g}$  и  $\tilde{f}$  – гладкие функции. Подставив (18) в (3), найдем эквивалентную форму для оператора  $RG$  в терминах отображений  $\tilde{G}_{\kappa}, \tilde{F}_{\kappa}$ :

$$RG_{\kappa} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{\kappa} \\ \tilde{F}_{\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \tilde{G}_{\kappa} \left( |\tilde{G}_{\kappa}(x/|\alpha|^{\kappa}, y/\beta)|^{\kappa}, \tilde{F}_{\kappa}(x/|\alpha|^{\kappa}, y/\beta) \right) \\ \beta \tilde{F}_{\kappa} \left( |\tilde{G}_{\kappa}(x/|\alpha|^{\kappa}, y/\beta)|^{\kappa}, \tilde{F}_{\kappa}(x/|\alpha|^{\kappa}, y/\beta) \right) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\alpha = 1/\tilde{G}_{\kappa} \left( |\tilde{G}_{\kappa}(0, 0)|^{\kappa}, \tilde{F}_{\kappa}(0, 0) \right), \quad \beta = 1/\tilde{F}_{\kappa} \left( |\tilde{G}_{\kappa}(0, 0)|^{\kappa}, \tilde{F}_{\kappa}(0, 0) \right).$$

<sup>3</sup>Один способ получения этой зависимости состоит в том, чтобы провести аккуратное вычисление констант  $\delta$  и  $\beta$  при различных  $\kappa$ . При этом  $\delta$  вычисляется по методике Фейгенбаума, а  $\beta$  – по алгоритму, описанному в разделе 1. Другой, существенно более точный метод основан на численном решении уравнений  $RG$ . Нами были реализованы оба метода и показано, что они дают одинаковые результаты.

Легко проверить, что новый оператор  $RG_{\kappa}$  переводит гладкие отображения  $\tilde{G}_{\kappa}, \tilde{F}_{\kappa}$ , взятые в некоторой окрестности неподвижной точки (19), в гладкие отображения. (Особенности, связанные с нецелой степенью  $\kappa$ , возникают вне существенной для рассматриваемой динамики области  $|x| < 1, |y| < 1$ .) Теперь оператор  $RG_{\kappa}$  зависит явно от  $\kappa$ , а отображения  $\tilde{G}_{\kappa}, \tilde{F}_{\kappa}$  принадлежат при всех  $\kappa$  пространству гладких отображений.

В точке бифуркации  $\kappa_c$  неподвижная точка PГ-преобразования (19) задается функциями

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x) &= 1 - 1.5233x + 0.1038x^2 + 0.0257x^3 - 0.0033x^4 + 0.0001x^5 + \dots, \\ \tilde{f}(x) &= 1 - 2.4366x + 0.1003x^2 + 0.1403x^3 - 0.0198x^4 + 0.0004x^5 + \dots,\end{aligned}\quad (21)$$

которые были найдены численно. Собственные функции  $\tilde{u}(x, y) = y\tilde{p}(x) + \tilde{q}(x)$  и  $\tilde{v}(x, y) = y\tilde{r}(x) + \tilde{s}(x)$ , отвечающие критическому собственному значению  $\nu_4 = -1$  оператора  $RG_{\kappa}$ , выражаются через

$$\begin{aligned}\tilde{p}(x) &= -2.6331 + 0.8555x + 0.1285x^2 - 0.0367x^3 + 0.0025x^4 + 0.0001x^5 + \dots, \\ \tilde{q}(x) &= 0.9407x + 0.2196x^2 - 0.1802x^3 + 0.0199x^4 - 0.0002x^7 + \dots, \\ \tilde{r}(x) &= -4.0983 + 1.8633x + 0.7482x^2 - 0.2168x^3 + 0.0145x^4 + 0.0016x^5 + \dots, \\ \tilde{s}(x) &= -1.7429x + 5.8275x^2 - 1.7503x^3 + 0.0692x^4 + 0.0209x^5 - 0.0024x^7 + \dots.\end{aligned}\quad (22)$$

Бифуркация удвоения периода в точке  $\kappa_c$  приводит к возникновению решения (цикла) периода 2:

$$(\tilde{G}_{\kappa}^+, \tilde{F}_{\kappa}^+) \xrightarrow{RG_{\kappa}} (\tilde{G}_{\kappa}^-, \tilde{F}_{\kappa}^-) \xrightarrow{RG_{\kappa}} (\tilde{G}_{\kappa}^+, \tilde{F}_{\kappa}^+). \quad (23)$$

Отображения  $\tilde{G}_{\kappa}^{\pm}(x, y)$  и  $\tilde{F}_{\kappa}^{\pm}(x, y)$  описываются асимптотическими рядами [26]

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\kappa}^{\pm}(x, y) &= \tilde{G}_{\kappa}(x, y) \pm \chi \tilde{G}^{(1)}(x, y) + \chi^2 \tilde{G}^{(2)}(x, y) \pm \chi^3 \tilde{G}^{(3)}(x, y) + \chi^4 \tilde{G}^{(4)}(x, y) \pm \dots, \\ \tilde{F}_{\kappa}^{\pm}(x, y) &= \tilde{F}_{\kappa}(x, y) \pm \chi \tilde{F}^{(1)}(x, y) + \chi^2 \tilde{F}^{(2)}(x, y) \pm \chi^3 \tilde{F}^{(3)}(x, y) + \chi^4 \tilde{F}^{(4)}(x, y) \pm \dots,\end{aligned}\quad (24)$$

где  $\chi = \sqrt{c(\kappa - \kappa_c)}$ , а  $c$  – некоторая вещественная константа. В формуле (24) функции  $\tilde{G}_{\kappa}, \tilde{F}_{\kappa}$  берутся в точке бифуркации, а  $\tilde{G}^{(1)}(x, y) = \tilde{u}(x, y)$  и  $\tilde{F}^{(1)}(x, y) = \tilde{v}(x, y)$  представляют собой собственные функции, отвечающие критическому собственному значению  $\nu_4 = -1$ . Условие нормировки для собственных функций было выбрано в виде  $\tilde{u}(1, 0) = \tilde{h}(1) = 1$ . С использованием (21), (22) константа  $c$  может быть вычислена методами теории возмущений (см. Приложение 1):

$$c = 1.607. \quad (25)$$

Поскольку  $c > 0$ , бифуркация суперкритическая, то есть цикл периода 2 действительно возникает при  $\kappa > \kappa_c$ .

Используя аппроксимацию первого порядка (24), (25), мы получаем отображения  $\tilde{G}_{\kappa}^{\pm}, \tilde{F}_{\kappa}^{\pm}$  для малых положительных  $\kappa - \kappa_c$ . Численно, с учетом непрерывности

по  $\kappa$ , эти отображения могут быть найдены и при больших значениях  $\kappa - \kappa_c$ . На рис. 3 показана полученная на основе таких расчетов бифуркационная диаграмма, где жирная линия обозначает аппроксимацию первого порядка (24), а тонкая линия отвечает результатам численных расчетов. Производя продолжение по параметру до значения  $\kappa = 2$ , находим решение периода 2 для оператора РГ. С учетом замены (18) это решение можно преобразовать к изначальной форме представления:  $G^\pm(x, y) = \tilde{G}_\kappa^\pm(x^2, y)$ ,  $F^\pm(x, y) = \tilde{F}_\kappa^\pm(x^2, y)$  (рис. 4).

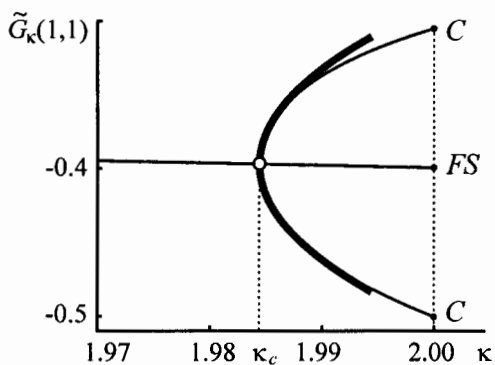


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для оператора  $RG_\kappa$ .

В первом порядке разложения по параметру  $\sqrt{\kappa - \kappa_c}$  точность представления универсальных функций и констант при  $\kappa = 2$  оказывается невысокой. С другой стороны, в рамках чисто аналитической теории получение высших членов разложения приводит к чересчур громоздким выражениям. В связи с этим нами была разработана численная методика нахождения функций, фигурирующих в соотношении (24), в виде полиномиальных разложений (см. Приложение 2).

На рис. 5 приведены зависимости факторов скейлинга  $\alpha_*$  и  $\beta_*$  от параметра  $\kappa$  для цикла периода 2 в приближении первого порядка (штрихпунктир) и четвертого порядка (пунктир). На рис. 6 показаны аналогичные данные для существенных собственных значений  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Заметим, что результаты в приближении четвертого порядка уже хорошо согласуются с данными аккуратных численных расчетов (сплошная линия).

Сравнение данных, относящихся к случаю  $\kappa = 2$ , показывает, что они находятся в соответствии с результатами РГ-анализа типа критического поведения, выявленного ранее в работах [14, 21, 27] в двумерных необратимых отображениях и обозначенного как тип С (поскольку ему отвечает цикл периода 2 в уравнении

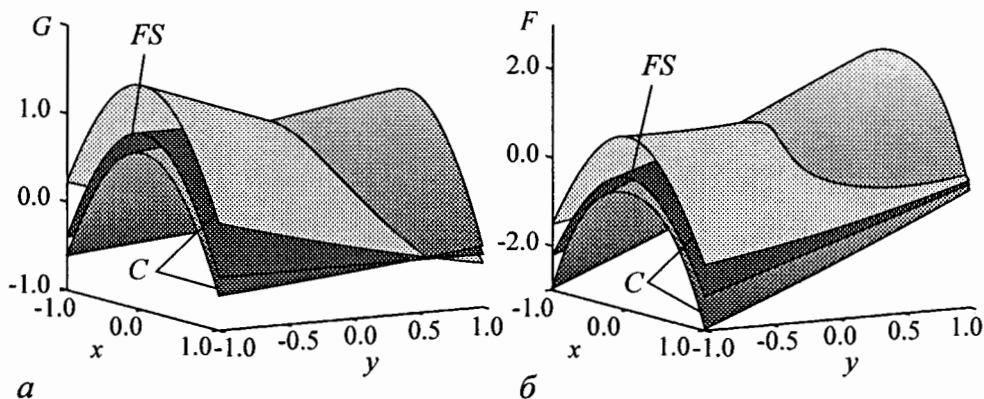


Рис. 4. Решение, отвечающее неподвижной точке FS, и цикл периода 2, соответствующий критическому поведению типа С, для оператора  $RG$

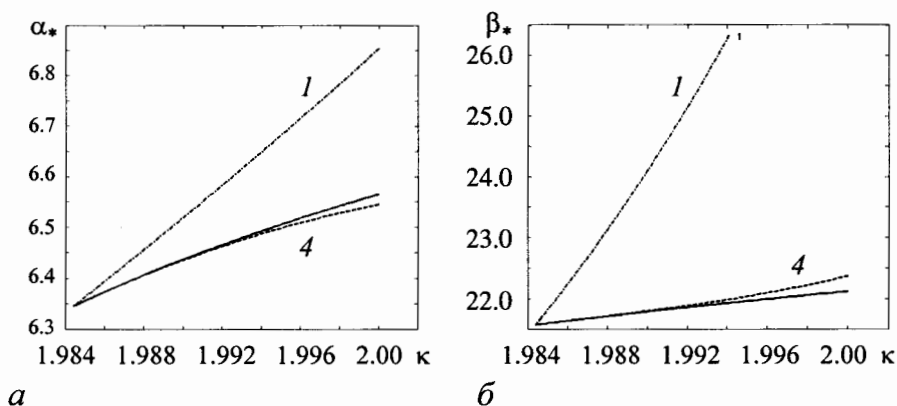


Рис. 5. Зависимости факторов скейлинга от  $\kappa$  для 2-цикла

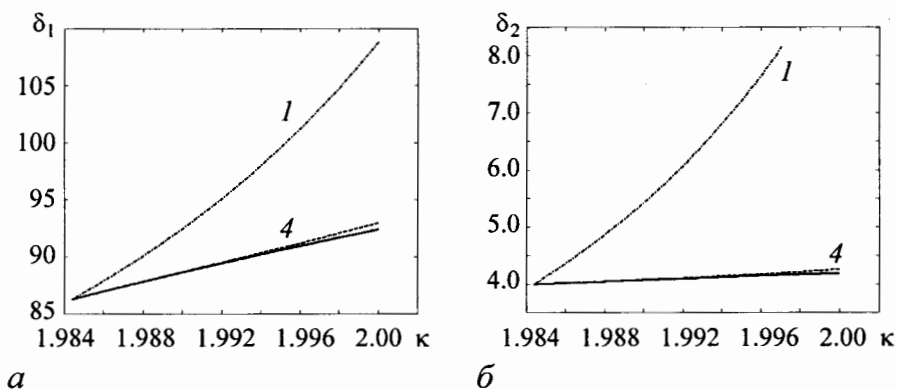


Рис. 6. Зависимости существенных собственных значений от  $\kappa$  для 2-цикла

РГ). В табл. 1 приводятся численные данные при  $\kappa = 2$  для факторов скейлинга, собственных значений, а также мультипликаторов периодических решений, реализующихся в критической точке. Результаты, полученные в приближении четвертого порядка сравниваются с результатами, относящимися к типу С [14, 21, 27].

Константы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  появляются как собственные значения линеаризованного оператора РГ-преобразования за период цикла С. Это существенные собственные числа: поскольку они по модулю больше 1, они определяют асимптотическое поведение операторов эволюции вблизи критической точки при многократном выполнении РГ-преобразования. Наряду с ними линеаризованный оператор имеет также три несущественных собственных значения

$$\delta_3 = \beta_* = 22.1202, \quad \delta_4 = \alpha_* = 6.5653, \quad \delta_5 = \beta_*/\alpha_* = 3.3692,$$

которые, как можно показать, ассоциируются с инфинитезимальными заменами координат.

Из табл. 1 следует, что класс универсальности типа С имеет коразмерность 2. С другой стороны, выше было показано, что класс универсальности типа FS имеет коразмерность 4. Таким образом, при бифуркации удвоения периода коразмерность уменьшается на 2. Этот факт связан с разделением собственных значений на существенные и несущественные и не противоречит общей теории. Как оказывается,

Значения констант, ассоциирующихся  
с решением уравнения РГ-периода 2 при  $\kappa = 2$

Универсальная константа	Аппроксимация 4-го порядка	Точное значение [21, 27, 15]
$\alpha_*$	6.5452	6.56534993
$\beta_*$	22.3701	22.12022737
$\delta_1$	93.0037	92.43126367
$\delta_2$	4.2639	4.19244406
$\mu_1^{(1)}$	0.8501	0.84745051
$\mu_2^{(1)}$	-0.8150	-0.72525604
$\mu_1^{(2)}$	1.2019	1.17445893
$\mu_2^{(2)}$	-0.8667	-0.84886546

собственное значение  $\delta_3$  для класса С должно быть отнесено к несущественным. В точке бифуркации  $\kappa_c$  это собственное значение совпадает с квадратом собственного значения  $\nu_2$  класса FS. Таким образом, происходит метаморфоза существенного собственного значения  $\nu_2$  в несущественное собственное значения  $\delta_3$ .

Этот феномен имеет следующее объяснение. Собственная функция, отвечающая несущественному собственному значению  $\delta_3$ , описывает сдвиг по второй координате:  $y \rightarrow y + \varepsilon$ . Этот сдвиг не влияет на первые члены  $\tilde{G}_\kappa$ ,  $\tilde{F}_\kappa$  в разложениях (24), так как они имеют вид (19). В результате, возмущение отображения при рассматриваемом сдвиге по координате имеет порядок  $O(\varepsilon\chi)$ . Но  $\chi = 0$  в критической точке  $\kappa_c$ . Это означает, что в точке бифуркации собственное значение  $\delta_3$  теряет связь со сдвигом по координате.

### Заключение

Исследование, предпринятое в настоящей работе, представляет собой пример применения бифуркационного анализа в отношении решений уравнения РГ – двумерного обобщения уравнения Фейгенбаума – Цвитановича, которое описывает критическое поведение на пороге возникновения хаоса через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Показано, что неподвижная точка уравнения РГ, отвечающая системе двух подсистем с однонаправленной связью – унимодального отображения с показателем степени экстремума  $\kappa$  и отображения, аккумулирующего сумму функций состояния первой подсистемы, претерпевает при изменении параметра  $\kappa$  бифуркацию удвоения периода и дает начало решению уравнения РГ в виде цикла периода два. При  $\kappa = 2$  это решение отвечает ситуации на пороге рождения хаоса, введенной в рассмотрение в работах [14, 20, 21] и обозначаемой как критическое поведение типа С. Тем самым внесена определенная ясность в механизм появления данного типа поведения.<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Примеры реалистичных моделей, демонстрирующих тип критического поведения С, обсуждаются в работах [27, 28].

На основе комбинации аналитических методов и численных расчетов построено и проанализировано асимптотическое разложение решения по степеням отклонения параметра  $k$  от критического значения  $k_c = 1.984396$ . Тот факт, что решению уравнения РГ, связанному с критическим поведением типа С, отвечает ситуация, близкая к точке бифуркации, позволяет объяснить ряд особенностей этого типа поведения. Это относится, в первую очередь, к самой природе решения, представляющего собой цикл периода два или, иначе говоря, неподвижную точку двукратно примененного РГ-преобразования. Кроме того, становится понятной близость соответствующих универсальных чисел, присущих типу С, к определенным комбинациям констант Фейгенбаума, а также медленность сходимости к универсальному асимптотическому режиму поведения при последовательных удвоениях периода из-за присутствия близкого к единице несущественного собственного числа.

С методологической точки зрения, проведенное рассмотрение аналогично подходу, развитому в свое время в теории фазовых переходов и известному как  $\varepsilon$ -разложение. Основой этого подхода служит анализ зависимости критических явлений от размерности пространства, трактуемой как непрерывный параметр. При этом «тривиальная» неподвижная точка РГ-преобразования претерпевает бифуркацию с появлением новой неподвижной точки, ответственной за универсальное критическое поведение с нетривиальными критическими индексами, характерное для реального фазового перехода. В нашей задаче аналогом параметра пространственной размерности выступает показатель степени экстремума в отображении, аналогом тривиальной неподвижной точки – решение уравнения РГ в виде системы двух отображений с однонаправленной связью, а нетривиальной неподвижной точки – рождающийся в результате бифуркации цикл периода два.

Как мы надеемся, бифуркационный анализ решений уравнений РГ может оказаться продуктивным общим методом для поиска и исследования разнообразных критических ситуаций, встречающихся при многопараметрическом анализе рождения хаоса и связанных не только с удвоениями периода, но также с переходами через перемежаемость и квазипериодичность.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №03-02-16074 и CRDF-BRHE Y1-M-06-03. А.А. Майлыбаев благодарит за поддержку Научно-образовательный центр нелинейной динамики и биофизики Саратовского государственного университета (REC-006).*

## Приложение 1

Начнем с методики построения конечномерной аппроксимации оператора РГ-преобразования. Для представления функций  $\tilde{G}_k, \tilde{F}_k$  используем интерполяционные полиномы; при этом значения функций в узлах сетки образуют вектор  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  (см. также Приложение 2). В рамках такого представления приходим к модифицированному преобразованию РГ, действующему в пространстве векторов конечной размерности:  $x \mapsto RG_k(x)$ .

Пусть  $x_c = RG_k(x_c)$  – стационарное решение преобразования РГ в точке бифуркации удвоения периода  $k = k_c$ . Следовательно, якобиан  $L = \partial RG_k / \partial x$ , вычисленный при  $x = x_c, k = k_c$ , имеет собственное значение  $\nu = -1$ ; при этом абсолютная величина других собственных значений отлична от единицы. Правый и

левый собственные векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{l}$  для  $\nu = -1$  определяются из уравнений  $\mathbf{L}\mathbf{r} = -\mathbf{r}$  и  $\mathbf{l}^T\mathbf{L} = -\mathbf{l}^T$ . При значениях параметра  $\kappa$ , близких к  $\kappa_c$ , возникает периодическое решение – цикл периода 2 (или для краткости 2-цикл)  $\mathbf{x}^+ \rightarrow \mathbf{x}^- = RG_\kappa(\mathbf{x}^+) \rightarrow \mathbf{x}^+ = RG_\kappa(\mathbf{x}^-)$ , где векторы  $\mathbf{x}^+$  и  $\mathbf{x}^-$  представимы в виде рядов [26]:

$$\mathbf{x}^\pm = \mathbf{x}_c \pm \chi \mathbf{x}^{(1)} + \chi^2 \mathbf{x}^{(2)} \pm \chi^3 \mathbf{x}^{(3)} + \dots, \quad \chi = \sqrt{c(\kappa - \kappa_c)}. \quad (26)$$

Знак вещественной константы  $c$  определяет тип бифуркации: при  $c > 0$  бифуркация суперкритическая (2-цикл возникает при  $\kappa > \kappa_c$ ), а при  $c < 0$  – субкритическая (2-цикл возникает при  $\kappa < \kappa_c$ ).

Подставим (26) в уравнение 2-цикла  $RG_\kappa^2(\mathbf{x}^+) = \mathbf{x}^+$ , разложим функцию  $RG_\kappa$  в ряд Тейлора по  $\sqrt{\kappa - \kappa_c}$  и приравняем члены одного порядка. Из уравнения для членов первого порядка следует, что  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{r}$ . Уравнение для членов второго порядка определяет вектор  $\mathbf{x}^{(2)}$  в виде

$$\mathbf{x}^{(2)} = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}(\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_\kappa/c) + \alpha \mathbf{r}, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 RG_\kappa}{\partial x_i \partial x_j} r_i r_j, \quad \mathbf{y}_\kappa = \frac{\partial RG_\kappa}{\partial \kappa}, \quad (27)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица,  $\alpha$  – неизвестный множитель,  $r_i$  – компонента вектора  $\mathbf{r}$ , и производные берутся при  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ ,  $\kappa = \kappa_c$ . Наконец, из уравнения для членов третьего порядка, умноженного слева на вектор  $\mathbf{l}^T$ , найдем неизвестную константу  $c$  в виде

$$c = - \frac{\mathbf{l}^T (D_2(\mathbf{r}, (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{y}_\kappa) + \mathbf{y}_{1\kappa})}{\mathbf{l}^T (D_2(\mathbf{r}, (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{y}_2) + \mathbf{y}_3)}, \quad (28)$$

где

$$D_2(\mathbf{r}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 RG_\kappa}{\partial x_i \partial x_j} r_i w_j, \quad \mathbf{y}_{1\kappa} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 RG_\kappa}{\partial x_i \partial \kappa} r_i, \quad \mathbf{y}_3 = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 RG_\kappa}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} r_i r_j r_k. \quad (29)$$

В численных расчетах для линеаризации оператора  $RG_\kappa$  (матрицы  $\mathbf{L}$ ) использовались аналитические соотношения, аналогичные формулам (5). Производные второго и третьего порядков определялись численно методом конечных разностей. В результате было получено значение константы  $c = 1.607$ .

## Приложение 2

В точке удвоения периода при  $\kappa_c = 1.9843964$  возникающее решение для цикла периода 2 допускает разложение в ряд по степеням параметра надкритичности  $\chi = \sqrt{\kappa - \kappa_c}$ :

$$\{\tilde{G}_\kappa^\pm, \tilde{F}_\kappa^\pm\} = \{\tilde{G}_\kappa, \tilde{F}_\kappa\} \pm \chi \{\tilde{G}^{(1)}, \tilde{F}^{(1)}\} + \chi^2 \{\tilde{G}^{(2)}, \tilde{F}^{(2)}\} \pm \chi^3 \{\tilde{G}^{(3)}, \tilde{F}^{(3)}\} + \dots \quad (30)$$

Здесь  $\{\tilde{G}_\kappa, \tilde{F}_\kappa\}$  отвечают неподвижной точке РГ для оператора  $RG_\kappa$  в момент бифуркации, а  $\tilde{G}^{(1)}, \tilde{F}^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}, \tilde{F}^{(2)}, \dots$  – неизвестные функции. Вид разложения отличается от приведенного в основном тексте (24) лишь отсутствием множителя  $c$ .

Теория бифуркаций позволяет получить относительно простые выражения для функций первого порядка приближения, которые выражаются через собственные



функции оператора  $RG_k$  в точке бифуркации (22). Однако уже для функций второго порядка приближения выражения аналитической теории становятся слишком сложными. Поэтому нами была разработана процедура нахождения функций, фигурирующих в коэффициентах асимптотического ряда, на основе численных расчетов.

Для представления функций применялись интерполяционные полиномы Чебышева, при этом функция задавалась ее значениями в узлах сетки, определяемой нулями полинома Чебышева. Размерность сетки в наших вычислениях составляла  $9 \times 11$  (по осям  $x$  и  $y$ , соответственно).

С применением метода Ньютона для системы нелинейных уравнений, сформулированных из условий равенства нулю невязки уравнений РГ в узлах интерполяции, были получены приближенные решения уравнений РГ.

Далее, с помощью стандартного метода продолжения решения по параметру была определена зависимость решений уравнений РГ от параметра  $k$  и составлена таблица (примерно 150 точек) значений функций в узлах интерполяции в зависимости от параметра надкритичности  $\chi = \sqrt{k - k_c}$ . При этом положительные значения  $\chi$  были сопоставлены одной ветви решения, а отрицательные – другой.

Затем зависимость значений функции в каждом узле интерполяции от параметра  $\chi$  аппроксимировалась полиномом достаточно высокой степени (порядка 20) методом наименьших квадратов. Коэффициенты при низших степенях при этом демонстрировали сходимость к определенным величинам, которые и принимались в качестве значений функций  $\tilde{G}_k, \tilde{F}_k, \tilde{G}^{(1)}, \tilde{F}^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}, \tilde{F}^{(2)}, \dots$  в соответствующих узлах интерполяции.

Полученные в результате приближенные функции, представленные в виде разложений по степеням  $x$  и  $y$ , приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

Коэффициенты полиномиальных разложений (30) для отображений  $\tilde{G}_k^\pm$

$\tilde{G}_k$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
1	1.0000	-1.5233	0.1038	0.0257	-0.0033	0.0001	0.0000	0.0000
$\tilde{G}^{(1)}$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
1	0	1.1923	0.2784	-0.2283	0.0252	0.0002	-0.0003	0.0000
$y$	-3.3373	1.0844	0.1627	-0.0462	0.0028	0.0003	-0.0001	0.0000
$\tilde{G}^{(2)}$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
1	0	10.3376	-4.6218	0.1091	0.0794	-0.0144	0.0007	0.0001
$y$	-11.3919	3.9357	-1.1647	0.2021	-0.0014	-0.0041	0.0005	0.0000
$y^2$	2.1128	0.2376	-0.2247	0.0271	0.0013	-0.0006	0.0000	0.0000
$\tilde{G}^{(3)}$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
1	0	-16.0014	-0.0440	7.1634	-1.3962	0.0647	0.0152	-0.0024
$y$	35.2183	-27.2956	-4.4609	2.1916	-0.2756	0.0011	0.0040	0.0000
$y^2$	14.4261	-2.5007	0.2422	0.0341	-0.0224	0.0033	0.0000	0.0000
$y^3$	-0.0629	-0.4572	0.1126	-0.0002	-0.0033	0.0000	0.0000	0.0000
$\tilde{G}^{(4)}$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
1	0	-250.886	135.838	-14.306	-0.833	0.601	-0.093	0.0000
$y$	265.233	-139.381	54.163	-13.140	0.675	0.268	-0.051	0.0000
$y^2$	-23.228	-19.108	14.140	-2.327	-0.014	0.055	0.000	0.0000
$y^3$	-3.843	-0.985	0.453	-0.087	0.009	0.000	0.000	0.0000
$y^4$	-0.325	0.216	-0.016	-0.009	0.000	0.000	0.000	0.0000

Коэффициенты полиномиальных разложений (30) для отображений  $\tilde{F}_\kappa^\pm$ 

$\tilde{F}_\kappa$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
1	1	-2.4366	0.1003	0.1402	-0.0197	0.0003	0.0002	0.0000
$y$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\tilde{F}^{(1)}$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
1	0	-2.2089	7.3860	-2.2184	0.0870	0.0288	-0.0041	-0.0003
$y$	-5.1943	2.3618	0.9470	-0.2726	0.0162	0.0035	-0.0005	0.0000
$\tilde{F}^{(2)}$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
1	0	35.7683	-52.4970	7.6173	1.6843	-0.4273	0.0087	0.0079
$y$	-18.3448	33.6336	-16.3566	1.1736	0.3819	-0.0774	-0.0001	0.0019
$y^2$	5.0091	1.7337	-1.3104	0.1700	0.0182	-0.0060	-0.0001	0.0001
$\tilde{F}^{(3)}$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
1	0	-34.2483	-2.2272	55.4843	-15.4733	0.7247	0.3685	-0.0673
$y$	60.9298	-119.6105	12.3885	19.6307	-5.6060	0.1734	0.1410	-0.0241
$y^2$	57.8457	-42.1787	4.6398	2.2900	-0.6054	0.0148	0.0184	-0.0031
$y^3$	0.4640	-2.6362	0.7223	0.0277	-0.0328	0.0014	0.0000	0.0000
$\tilde{F}^{(4)}$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
1	0	-686.919	1226.006	-388.275	-23.576	21.866	-2.842	-0.156
$y$	455.974	-1033.898	675.544	-128.217	-5.386	6.657	-1.090	-0.025
$y^2$	-10.469	-114.529	102.617	-30.080	0.996	1.161	-0.223	0.000
$y^3$	-42.472	6.997	7.832	-2.673	0.128	0.100	-0.023	0.000
$y^4$	-1.861	1.381	-0.067	-0.101	0.013	0.000	0.000	0.000

Заметим, что полиномиальные разложения функций  $\tilde{G}^{(m)}$  и  $\tilde{F}^{(m)}$  содержат лишь степени  $y$  не выше  $m$ . Этот факт, обнаруженный путем численных расчетов, может быть доказан аналитически.

Константа  $c$ , полученная по аналитическим формулам теории возмущений вблизи точки бифуркации (25), в рамках описываемых численных расчетов может быть определена как  $c = [h_1(1, 0)]^2 = 1.6064$ . Очевидна хорошая степень согласованности результатов численного и аналитического подходов.

Факторы скейлинга в фазовом пространстве рассчитываются по формулам  $\alpha_* = 1/(\tilde{G}_\kappa^+(1, 1)\tilde{G}_\kappa^-(1, 1))$  и  $\beta_* = 1/(\tilde{F}_\kappa^+(1, 1)\tilde{F}_\kappa^-(1, 1))$ . Факторы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  получаются из аппроксимаций линейного оператора  $D[RG_\kappa[\tilde{G}_\kappa^+, \tilde{F}_\kappa^+]]D[RG_\kappa[\tilde{G}_\kappa^-, \tilde{F}_\kappa^-]]$  на сетке из  $7 \times 9$  узлов интерполяции. Результаты приводятся и обсуждаются в основном тексте в разделе 4.

### Библиографический список

1. Feigenbaum M.J. Universal behavior in nonlinear systems // Physica D. 1983. Vol. 7. P. 16–39.
2. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 343–374.
3. Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // УМН. 1984. Т. 39, № 3. С. 3–37.

4. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
6. *Greene J.M., MacKay R.S., Vivaldi F., and Feigenbaum M.J.* Universal behavior in families of area preserving maps // *Physica D*. 1981. Vol. 3. P. 468–486.
7. *Collet P., Eckmann J.-P., and Koch H.* On universality for area-preserving maps of the plane // *Physica D*. 1981. Vol. 3. P. 457–467.
8. *Widom M. and Kadanoff L.P.* Renormalization group analysis of area-preserving maps // *Physica D*. 1982. Vol. 5. P. 287–292.
9. *Hu B. and Rudnick J.* Exact solution of the Feigenbaum renormalization group equations for intermittency // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48. P. 1645–1648.
10. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., and Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis // *Physica D*. 1982. Vol. 5. P. 370–386.
11. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., and Siggia E.D.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // *Physica D*. 1983. Vol. 8. P. 303–342.
12. *Collet P., Couillet P., and Tresser C.* Scenarios under constraint // *J. Physique Lett.* 1985. Vol. 46. P. L143–L147.
13. *Greene J.M. and Mao J.* Higher-order fixed points of the renormalisation operator for invariant circles // *Nonlinearity*. 1990. Vol. 3. P. 69–78.
14. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Корамерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах // *Регулярная и хаотическая динамика*. 1997. Т. 2, №3–4. С. 90–105.
15. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., and Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D*. 1997. Vol. 109. P. 91–112.
16. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическое поведение при переходе к хаосу через удвоения периода. Модельные отображения и ренормгрупповой анализ // В кн.: *Нелинейные волны 2002* / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова и В.И.Некоркина. Н.Новгород: ИПФ РАН, 2003. С. 395–415.
17. *Вильсон К., Козут Дж.* Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение. М.: Мир, 1975. 255 с.
18. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1. 405 с.
19. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P. and Sataev I.R.* Period doubling system under fractal signal: Bifurcation in the renormalization group equation // *Chaos, Solitons and Fractals*. 1991. Vol. 1. P. 355–367.
20. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Фрактальный сигнал и динамика систем, демонстрирующих удвоения периода // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1995. Т. 3, №5. С. 64–87.
21. *Kuznetsov S.P. and Sataev I.R.* New types of critical dynamics for two-dimensional maps // *Phys. Lett. A*. 1992. Vol. 162. P. 236–242.

22. *Kuznetsov S.P. and Sataev I.R.* Period-doubling for two-dimensional non-invertible maps: Renormalization group analysis and quantitative universality // *Physica D.* 1997. Vol. 101. P. 249–269.
23. *Hu B. and Mao J.M.* Period doubling: Universality and critical-point order // *Phys. Rev. A.* 1982. Vol. 25. P. 3259–3261.
24. *Hu B. and Satija I.I.* A spectrum of universality classes in period-doubling and period tripling // *Phys. Lett. A.* 1983. Vol. 98. P. 143–146.
25. *Hauser P.R., Tsallis C., and Curado E.M.F.* Criticality of roads to chaos of the  $1 - a|x|^z$  // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol. 30. P. 2074–2079.
26. *Guckenheimer J. and Holmes P.* *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* New York, Springer, 1983.
27. *Kuznetsov S.P. and Sataev I.R.* Universality and scaling for the breakup of phase synchronization at the onset of chaos in a periodically driven Rossler oscillator // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. P. 046214.
28. *Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Savin A.V., Sataev I.R., Sedova J.V., and Milovanov S.V.* Multi-parameter picture of transition to chaos // *Izvestiya vuz. Applied Nonlinear Dynamics (Saratov).* 2002. Vol. 10, № 3. P. 80–96.

*Саратовский филиал ИРЭ РАН  
Институт механики Московского  
государственного университета  
им. М.В. Ломоносова*

*Поступила в редакцию 2.06.2005*

## BIFURCATION OF UNIVERSAL REGIMES AT THE BORDER OF CHAOS

*S.P. Kuznetsov, A.A. Mailybaev, I.R. Sataev*

It is shown that a fixed point of the renormalization group transformation for a system of two subsystems with unidirectional coupling, one represented by a unimodal map with extremum of degree  $\kappa$  and another by a map accumulating a sum of terms expressed as a function of a state of the first subsystem, undergoes a period-doubling bifurcation in a course of increase of the parameter  $\kappa$ . At  $\kappa = 2$  the respective solution (period-2 cycle of the renormalization group equation) corresponds to a situation at the chaos threshold designated as the C-type critical behavior (*Kuznetsov and Sataev*, *Phys. Lett.*, 1992, 236). On a basis of combination of analytic considerations and numerical computations, we construct and analyze an asymptotical expansion of the solution over powers of deflection of the parameter  $\kappa$  from the critical value  $\kappa_c = 1.984396$ . The approach is analogous to that known in the phase transition theory as  $\varepsilon$ -expansion, which relates to presence of a bifurcation from a «trivial» fixed point of renormalization group transformation to a new fixed point, responsible for critical behavior with nontrivial critical indices.