

О РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ФЕНОМЕНОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ СВЯЗАННЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

С.П. Кузнецов

1. Введение

В науке о сложной динамике и хаосе выдвинуто множество интересных и важных идей, теорий, моделей, однако, не всегда с ними соотнесены примеры реальных систем или, по крайней мере, привычные для физиков модели в виде дифференциальных уравнений. Сказанное относится, в том числе, к таким классическим объектам как отображение Бернулли, гиперболические отображения на торе, странные гиперболические аттракторы, феномены комплексной аналитической динамики, ассоциирующиеся с множествами Мандельброта и Жюлиа [1-10]. Настоящая лекция посвящена реализации абстрактных моделей и феноменов нелинейной динамики на базе систем, допускающих построение в виде устройств радиотехники и электроники. Это системы, составленные из двух или более связанных автогенераторов, которые благодаря периодической модуляции параметров по очереди выходят за порог генерации и передают друг другу возбуждение как бы по эстафете [11,12].

2. Отображение Бернулли

Как известно, простейший пример хаоса дается отображением

$$\theta_{n+1} = 2\theta_n \pmod{1}. \quad (1)$$

На рис. 1 приводится график этого отображения и диаграмма, иллюстрирующая динамику на протяжении нескольких итераций.

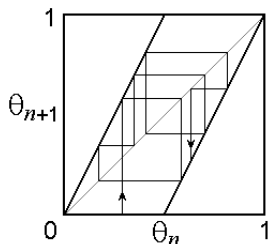


Рис. 1. График отображения Бернулли (1) и динамика на протяжении нескольких итераций

Представим переменную θ в двоичной системе счисления. При этом цифра 0 на первой позиции после запятой отвечает расположению изображающей точки в левой, а 1 — в правой половине единичного интервала. Пусть начальное состояние задано случайной последовательностью

цифр – нулей и единиц, полученной, скажем, подбрасыванием монеты. Один шаг эволюции в дискретном времени состоит в том, что последовательность сдвигается влево на одну позицию, и цифра, оказавшаяся по левую сторону от запятой, отбрасывается:

$$\theta_0=0,01011010001010011001010...$$

$$\theta_1=0,1011010001010011001010...$$

$$\theta_2=0,011010001010011001010...$$

и так далее. Такое преобразование, состоящее в сдвиге последовательности символов на одну позицию, называют *сдвигом Бернулли*. При итерациях отображения (1) изображающая точка будет посещать левую или правую половину единичного интервала, следуя нашей случайной последовательности – реализуется хаос. Ясно, что малое возмущение состояния увеличивается за один шаг в два раза. Поэтому показатель Ляпунова для данного отображения $\Lambda = \ln 2 = 0.693$.

Имея целью реализовать динамику, описываемую отображением Бернулли, интерпретируем θ как приведенную к единичному интервалу фазу некоторого колебательного процесса, т.е. $\theta = \varphi / 2\pi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Чтобы описание сводилось к эволюции в дискретном времени, обратимся к неавтономной системе, в которой для фазы имеет место отображение нужного типа за период внешнего воздействия T .

Принципиальный момент состоит в том, чтобы обеспечить принадлежность отображения нужному топологическому классу: при вариации исходной фазы на 2π точка-образ должна совершить двукратный обход окружности. Такая возможность может вызвать сомнение: мы привыкли, что сдвиг фазы на 2π приводит к такому же сдвигу фазы отклика, что несовместимо с указанным топологическим свойством. Выход в том, чтобы реализовать *удвоение фазы, определенной в начале и в конце периода T , но не допускающей определения глобально на всем периоде*.

Рассмотрим систему на базе двух генераторов Ван-дер-Поля с частотами ω_0 и $2\omega_0$:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2] \dot{x} + \omega_0^2 x &= \epsilon y \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - [-A \cos(2\pi t/T) - y^2] \dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \epsilon x^2, \end{aligned} \quad (2)$$

в которой обе подсистемы возбуждаются по очереди благодаря принудительному периодическому во времени изменению параметра, ответственного за бифуркацию Андронова – Хопфа. Присутствует также относительно слабое воздействие подсистем друг на друга, характеризуемое параметром ϵ . Предполагается, что $T = 2\pi N / \omega_0$, где N – целое число.

Пусть первый осциллятор имеет на стадии генерации некоторую фазу φ : $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Его воздействие на второй осциллятор через посредство члена ϵx^2 содержит вторую гармонику $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$ с фазой 2φ . Это обеспечивает заправку для второго осциллятора, так что при его

переходе в активную стадию колебания переменной y получают ту же фазу 2φ . В свою очередь, второй генератор действует на первый через элемент, осуществляющий смещение со вспомогательным опорным сигналом на частоте ω_0 . Порождаемая при этом составляющая на частоте ω_0 с фазой 2φ попадает в резонанс первому осциллятору и обеспечивает заправку для колебаний на очередной его активной стадии. Обе подсистемы по очереди передают возбуждение одна другой. На последовательных стадиях возбуждения первого осциллятора фаза колебаний в рассматриваемом приближении будет даваться отображением

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}. \quad (3)$$

Константу, которая возникает из-за добавок к фазе при передаче возбуждения от одного осциллятора к другому, можно устранить сдвигом начала отсчета, и тогда для нормированной переменной $\theta = \varphi/2\pi$ получается в точности отображение (1).

На рис. 2 показаны полученные при численном решении уравнений временные зависимости переменных x и y при $\omega_0 = 2\pi$, $T = N = 10$, $A = 3$, $\varepsilon = 0.5$. Приводится также график эмпирического отображения для фазы, определенной в середине стадий возбуждения первого осциллятора $\theta = \arg(x - i\dot{x}/\omega_0)/2\pi$. На графике для достаточно большого количества периодов T отложены точки (θ_n, θ_{n+1}) . Хотя вид полученного отображения несколько отличается от отображения (1), оно с очевидностью относится к нужному топологическому классу: график имеет две ветви, расположенные как на рис. 1. Соответствие с классическим отображением Бернулли становится лучше при увеличении отношения периодов N . Хаотический характер динамики выражается в случайном смещении максимумов функций $x(t)$ и $y(t)$ относительно огибающей (см. рис. 2).

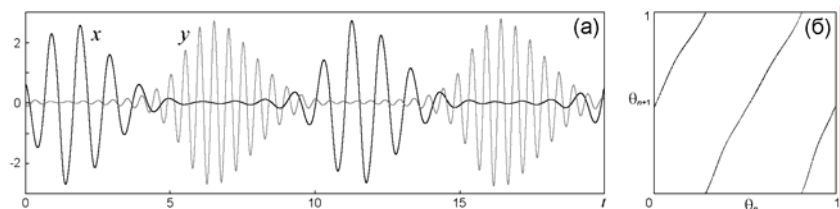


Рис. 2. Образец временной зависимости для переменных x и y , полученной при численном решении уравнений (2) для $\omega_0 = 2\pi$, $T = N = 10$, $A = 3$, $\varepsilon = 0.5$ (а) и диаграмма эмпирического отображения для фаз, определенных в середине стадий возбуждения первого осциллятора (б)

Для расчета показателя Ляпунова с помощью алгоритма Бенеттина [13] выполняется одновременно численное решение уравнений (2) и линеаризованных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} + 2x\dot{\tilde{x}} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2] \dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} &= \varepsilon \tilde{y} \cos \omega_0 t, \\ \ddot{\tilde{y}} + 2y\dot{\tilde{y}} - [-A \cos(2\pi t/T) - y^2] \dot{\tilde{y}} + 4\omega_0^2 \tilde{y} &= 2\varepsilon x\dot{\tilde{x}} \end{aligned} \quad (4)$$

с пересчетом нормы вектора возмущения к некоторой константе через определенное число шагов (для исключения расходимости). Показатель Ляпунова λ определяется как средняя скорость роста для накапливающейся суммы логарифмов от нормы вектора возмущения.

На рис. 3 представлен график зависимости нормированного показателя Ляпунова $\Lambda = \lambda T$ от амплитуды модуляции A при фиксированных остальных параметрах. В широком интервале A величина Λ почти постоянна и близка к $\ln 2 = 0.693$, что отвечает отображению Бернулли. При малых A соответствие нарушается – показатель Ляпунова становится заметно меньше.

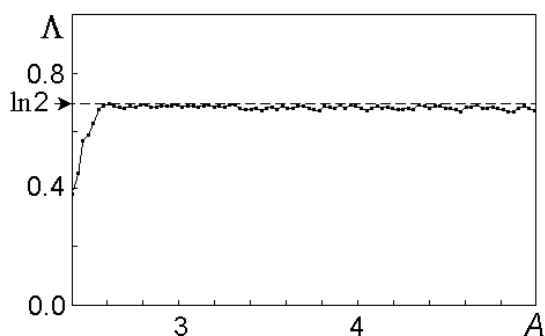


Рис. 3. Зависимость наибольшего показателя Ляпунова системы связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля от параметра A при $\omega_0 = 2\pi$, $T = N = 10$, $\varepsilon = 0.5$

3. Аттрактор Смейла - Вильямса

Математическая теория хаоса, базирующаяся на строгом аксиоматическом фундаменте, имеет дело с *однородно гиперболическими странными аттракторами* [1-5]. У такого аттрактора все принадлежащие ему фазовые траектории седловые. Устойчивые и неустойчивые многообразия (инвариантные множества, составленные из траекторий, приближающихся к исходной в прямом или обратном времени) могут пересекаться только трансверсально, т.е. без касания. Гиперболические аттракторы являются грубыми (структурно устойчивыми), что представляет очевидный интерес с точки зрения потенциальных приложений хаоса (системы коммуникации, маскировка сигналов и т.д.). К сожалению, аттракторы известных физических систем (простые генераторы хаоса, нелинейные осцилляторы с периодическим воздействием, модели Лоренца и Ресслера) не относятся к классу однородно гиперболических.

В учебниках и монографиях по нелинейной динамике примеры гиперболических аттракторов представлены абстрактными конструкциями. Например, аттрактор Смейла – Вильямса строится для отображения трехмерного пространства в себя, определенного следующей процедурой.

Рассмотрим область в форме тора, растянем ее в длину, сложим вдвое и вложим в исходный тор, как показано на рис. 4. При каждой итерации количество «витков» удваивается. Объект, который получается в пределе большого числа итераций, называют *соленоидом Смейла – Вильямса*. Его поперечная структура имеет вид канторова множества.



Рис. 4. Построение аттрактора Смейла – Вильямса

Основная проблема конструирования реальных систем с аттрактором Смейла – Вильямса та же самая, что и для отображения Бернулли. В самом деле, если ввести угловую координату θ , то она должна подчиняться отображению того же топологического класса как отображение Бернулли, в то время как по оставшимся направлениям элемент фазового объема должен сжиматься.

Очевидно, подходящим кандидатом является система связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля, рассмотренная в предыдущем разделе. Для аккуратного описания ее динамики в дискретном времени обратимся к построению отображения Пуанкаре [1-8].

Пусть в момент $t_n = nT$ имеем состояние системы (2), заданное четырьмя переменными – вектором $\mathbf{x}_n = \{x(nT), u(nT), y(nT), v(nT)\}$, где $u = \omega_0^{-1} \dot{x}$, $v = \omega_0^{-1} \dot{y}$. Из решения уравнений с начальными условиями \mathbf{x}_n на интервале времени T однозначным образом получаем новый вектор \mathbf{x}_{n+1} . Тем самым определяем функцию, отображающую четырехмерное пространство $\{x, u, y, v\}$ в себя:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n). \quad (5)$$

С геометрической точки зрения, в пятимерном фазовом пространстве исходной неавтономной системы $\{x, u, y, v, t\}$ имеем сечение потока траекторий четырехмерными гиперплоскостями $t = t_n = nT$, где n – целое. В силу периодичности структуры фазового пространства по переменной t , эти гиперплоскости естественно отождествить, и можно говорить об отображении гиперплоскости $\{x, u, y, v\}$ в себя.

Отображение Пуанкаре T определяется эволюцией, описываемой дифференциальными уравнениями с гладкими и ограниченными в конечной области переменных $\{x, u, y, v\}$ правыми частями. В соответствии с теоремами существования, единственности, непрерывности и дифференцируемости решения системы дифференциальных уравнений, отображение T представляет собой диффеоморфизм – взаимно однозначное и взаимно дифференцируемое отображение (класса C^∞) [14].

При выполнении отображения $\mathbf{x}_{n+1} = T(\mathbf{x}_n)$, в четырехмерном пространстве имеет место растяжение в направлении, которое связано с фигурирующей в уравнении (3) фазой, и сжатие по трем остальным направлениям. Интерпретируя действие отображения Пуанкаре геометрически, с учетом цикличности по фазовой переменной, мы можем вообразить вложенный в 4-мерное пространство тороид U (область, топологически представляющая собой прямое произведение одномерной окружности и трехмерного шара). Одна итерация отображения будет отвечать продольному растяжению и поперечному сжатию этого объекта, вкладываемого затем в виде двойной петли внутрь исходной области. Это точно соответствует конструкции Смейла – Вильямса.

Запишем соотношение, задающее область U , в виде

$$\{[(x_0^2 + x_1^2)^{1/2} - r]/d_r\}^2 + (x_2/d)^2 + (x_3/d)^2 \leq 1, \quad (6)$$

где введены новые переменные

$$\begin{aligned} x_0 &= x/r_0, \quad x_1 = (u - c_{ux}x)/r_1, \\ x_2 &= y - c_{yx}x - c_{yu}u, \quad x_3 = v - c_{vx}x - c_{vu}u - c_{vy}y. \end{aligned} \quad (7)$$

а значения констант для конкретных параметров исходной системы $\omega_0=2\pi$, $T=6$, $A=5$, $\varepsilon=0.5$ подобраны следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{ux} &= 0.438, \quad c_{yx} = -0.042, \quad c_{yu} = 0.226, \quad c_{vx} = -0.218, \\ c_{vu} &= 0.029, \quad c_{vy} = -0.118, \quad r_0 = 0.812, \quad r_1 = 0.721, \\ r &= 0.94, \quad d_r = 0.4, \quad d = 0.15. \end{aligned} \quad (8)$$

На рис. 5 приводится серия диаграмм, показывающая, как трансформируется область U в ходе эволюции фазового потока на протяжении времени T . Каждая картинка есть трехмерная проекция четырехмерного объекта в пространство $\{x_0, x_1, x_2\}$ вдоль оси четвертой переменной x_3 . Первая диаграмма (а) отвечает начальному моменту $t=0$ и изображает исходную область U . Далее, происходит сильное сжатие тороида по поперечным направлениям (б), а затем относительное растяжение в продольном направлении с такой деформацией, что образуется двойная петля (в, г). На последней стадии эта петля растягивается и в итоге оказывается вложенной в исходную область (д,е). Это, в сущности, воспроизво-

дит ту последовательность непрерывных деформаций пластичного бублика, посредством которой дается популярное описание построения аттрактора Смейла – Вильямса в трехмерном пространстве.

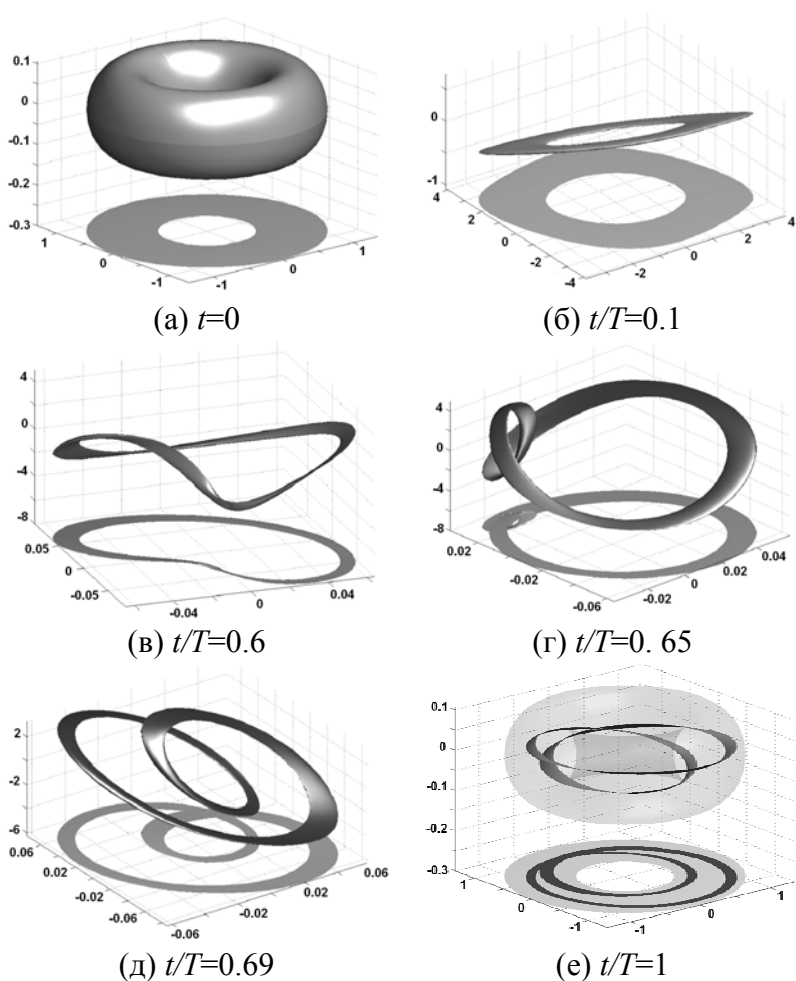


Рис. 5. Серия диаграмм, полученная в результате численного решения уравнений (2) и иллюстрирующая трансформацию образа области U в процессе эволюции за период воздействия T . Каждая картинка представляет собой трехмерную проекцию четырехмерного объекта в пространство переменных $\{x_0, x_1, x_2\}$ вдоль оси четвертой переменной x_3 . Обратите внимание на существенно различающийся масштаб по осям координат на диаграммах

Таким образом, можно заключить, что внутри тороидальной области U присутствует аттрактор типа Смейла – Вильямса. Желательно, конечно, иметь математическое обоснование гиперболической природы аттрактора. В недавней работе [15] представлены результаты численных расчетов, показывающие, что в поглощающей области U выполнены условия расположения расширяющихся и сжимающихся конусов в пространстве векторов возмущения состояний системы, гарантирующие гиперболичность. Таким образом, вывод о гиперболичности аттрактора, хотя и не доказан пока в классическом математическом смысле, с определенностью вытекает из теоремы [1,2,16], условия которой проверены в расчетах на компьютере.

Проиллюстрируем численными расчетами некоторые атрибуты гиперболической динамики в исследуемой системе.

На рис. 6 приводятся диаграммы, изображающие аттрактор системы связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля. На панели (а) показана проекция аттрактора из пятимерного расширенного фазового пространства на фазовую плоскость первого осциллятора в исходных переменных (x, u) . Аттрактор представлен тонами серого цвета (насыщенность тона определяется относительной частотой пребывания изображающей точки в соответствующем пикселе). Черным отмечены точки, отвечающие сечению Пуанкаре, т.е. моментам времени $t_n = nT$. Панель (б) изображает аттрактор в сечении Пуанкаре на плоскости (x_0, x_1) и соответствует фрагменту диаграммы (а) внутри пунктирного параллелограмма. Обращает внимание очевидное визуальное сходство с аттрактором Смейла – Вильямса. Поперечная канторова структура аттрактора иллюстрируется отдельно на панелях (в) и (г), где показаны фрагменты исходной картинки с возрастающим увеличением.

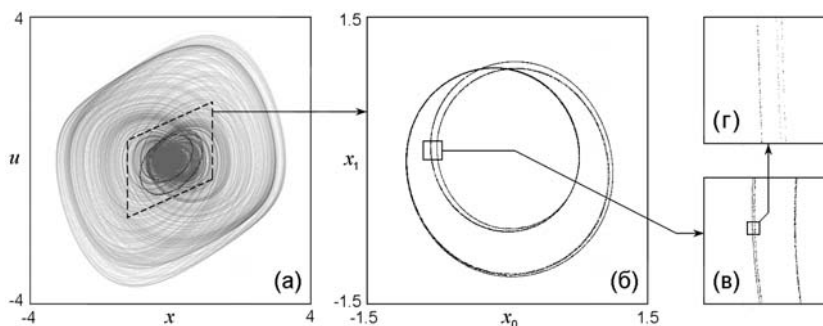


Рис. 6. Аттрактор системы связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля в проекции из пятимерного расширенного фазового пространства на фазовую плоскость первого осциллятора в исходных переменных (а), портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости (x_0, x_1) (б) и детали поперечной структуры аттрактора (в), (г)

Согласно результатам компьютерных расчетов ¹, показатели Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре при указанных значениях параметров составили

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 0.6832 \pm 0.0007, & \Lambda_2 &= -2.602 \pm 0.004, \\ \Lambda_3 &= -4.605 \pm 0.003, & \Lambda_4 &= -6.538 \pm 0.008. \end{aligned} \quad (9)$$

Положительный показатель Λ_1 , наличие которого служит подтверждением присутствия хаоса, близок по величине к $\ln 2 = 0.693$, что естественно в свете возможного приближенного описания эволюции фазовой переменной одномерным отображением Бернулли (3).

Согласно оценке по алгоритму Грассбергера – Прокаччиа с использованием четырехкомпонентного временного ряда $\mathbf{x}_n = \{x_0(t_n), \mathbf{x}_n = \{x_0(t_n), x_1(t_n), x_2(t_n), x_3(t_n)\}, n=1 \div M, M=40000$, корреляционная размерность аттрактора в сечении Пуанкаре $D \approx 1.252$. Оценка размерности аттрактора через показатели Ляпунова по формуле Каплана – Йорке приводит к результату $D \approx 1.263$.

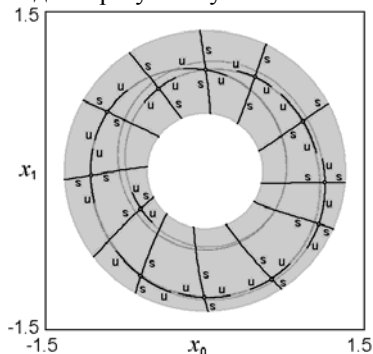


Рис. 7. Диаграмма на плоскости переменных первого осциллятора (x_0, x_1) , иллюстрирующая расположение устойчивых (s) и неустойчивых (u) многообразий для некоторого набора точек на аттракторе в сечении Пуанкаре. Светло-серая кольцеобразная зона отвечает проекции поглощающей области U

С точки зрения теоретического анализа гиперболических аттракторов, принципиальный момент состоит в том, что устойчивые и неустойчивые многообразия принадлежащих аттрактору точек обязаны пересекаться трансверсально. В силу заключения о гиперболической природе аттрактора, это свойство должно иметь место и в нашей системе.

Ситуация расположения устойчивых и неустойчивых многообразий, выявленная в численных расчетах, иллюстрируется на рис. 7 (детали методики вычислений см. в работе [15]). Для графического представления используется плоскость переменных, относящихся к первому осциллятору. Неустойчивое многообразие одномерное и изображено в виде проекции на эту плоскость. Для представления устойчивого многообразия

¹ Процедура основана на одновременном численном решении уравнений (2) и четырех комплектов уравнений в вариациях (3). Через определенное число шагов по времени выполняется ортогонализация Грама – Шмидта и нормализация для четырех векторов возмущений. Показатели Ляпунова определяются как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов норм для векторов возмущения перед нормализацией [13].

(трехмерной гиперповерхности) используем проекцию линии, образующейся от пересечения с двумерной поверхностью $\{x_2 = \text{const}, x_3 = \text{const}\}$, проходящей через точку, для которой строится многообразие. Инвариантное множество, служащее для точек аттрактора неустойчивым многообразием, совпадает с самим аттрактором, т.е. заключено внутри тороида в виде витков соленоида, обходя «дырку от бублика». С другой стороны, устойчивые многообразия располагаются поперек «трубки», образующей поверхность тороида, что в двумерной проекции выглядит как структура типа «спиц колеса». Благодаря такому размещению, пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий трансверсальные, и касания исключены.

4. Гиперболическое отображение на торе

Один из традиционных примеров класса систем с хаотической динамикой в учебниках и обзорах математической направленности составляют гиперболические автоморфизмы Аносова на торе [1-4]. Наиболее известное отображение этого класса

$$p_{n+1} = p_n + q_n \pmod{1}, \quad q_{n+1} = p_n + 2q_n \pmod{1} \quad (10)$$

часто называют отображением кота Арнольда, поскольку его действие иллюстрировалось в лекциях и книгах Арнольда с использованием изображения головы кота [17]. Для графического представления удобно представлять фазовое пространство на плоскости в виде единичного квадрата с отождествленными противоположными сторонами.

Отображение (10) относится к классу консервативных систем: образ любой области на плоскости (p, q) (например, головы кота) имеет ту же площадь, как и исходная. Известно, что отображение (10) демонстрирует хаотическую динамику в смысле гиперболической теории Смейла и Аносова. Два показателя Ляпунова выражаются через собственные числа соответствующей матрицы 2×2 :

$$\Lambda_1 = \ln(3 + \sqrt{5})/2 = 0.9624, \quad \Lambda_2 = -\ln(3 + \sqrt{5})/2 = -0.9624. \quad (11)$$

Наибольший показатель положительный, что отражает присутствие экспоненциальной неустойчивости по отношению к малому возмущению начальных условий – один из главных атрибутов хаоса.

Полезно заметить, что отображение (10) можно представить как результат двукратного применения более простого отображения:

$$p_{n+1} = q_n \pmod{1}, \quad q_{n+1} = p_n + q_n \pmod{1}. \quad (12)$$

Для реализации динамики, описываемой данным отображением, возьмем четыре связанных неавтономных осциллятора Ван-дер-Поля [18]

$$\begin{aligned} \ddot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2] \dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon z \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - [A \cos(2\pi t/T) - y^2] \dot{y} + \omega_0^2 y &= \varepsilon w, \\ \ddot{z} - [-A \cos(2\pi t/T) - z^2] \dot{z} + 4\omega_0^2 z &= \varepsilon xy, \\ \ddot{w} - [-A \cos(2\pi t/T) - w^2] \dot{w} + \omega_0^2 w &= \varepsilon x, \end{aligned} \quad (13)$$

три из которых (x, y, w) имеют равные частоты колебаний ω_0 , а четвертый – частоту $2\omega_0$. Параметр, отвечающий за бифуркацию Андронова – Хопфа в парциальных системах, медленно изменяется с периодом T , причем число $N = \omega_0 T / 2\pi$ предполагается целым. На одном полупериоде активной является первая пара осцилляторов (x, y) , а вторая ниже порога генерации. На следующем полупериоде ситуация обратная.

Выведем соотношения, описывающие изменение фаз колебаний в ходе процесса. Предположим, что первый и второй осцилляторы на активной стадии имеют некоторые фазы φ_x и φ_y :

$$x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_x), \quad y \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_y). \quad (14)$$

Отвечающий за связь член в третьем уравнении пропорционален

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_x) \cos(\omega_0 t + \varphi_y) = \frac{1}{2} \cos(\varphi_x - \varphi_y) + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y). \quad (15)$$

Составляющая на удвоенной частоте находится в резонансе с осциллятором z , и при переходе его в активную стадию служит затравкой для колебаний, которые получают фазу $\varphi_z \approx \varphi_x + \varphi_y + \text{const}$. В то же время четвертый осциллятор просто наследует фазу первого: $\varphi_w \approx \varphi_x + \text{const}$. В начале следующей фазы активности для осцилляторов x и y член, задающий воздействие на первый осциллятор,

$$z \cos \omega_0 t \sim \frac{1}{2} \cos(3\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y) + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y) \quad (16)$$

обеспечивает затравку для осциллятора x , так что его колебания получают фазу $\varphi'_x \approx \varphi_z + \text{const} \approx \varphi_x + \varphi_y + \text{const}$. Осциллятор y наследует фазу осциллятора w : $\varphi'_y \approx \varphi_w + \text{const} \approx \varphi_x + \text{const}$. Таким образом, приходим к отображению для фаз

$$\varphi'_x = \varphi_x + \varphi_y + \text{const}, \quad \varphi'_y = \varphi_x + \text{const}. \quad (17)$$

При нормализации $q = \varphi_x / 2\pi$ and $p = \varphi_y / 2\pi$ получаем отображение (12) с точностью до постоянных добавок, которые можно устранить сдвигом начала координат. Следовательно, при выборе основного временного интервала $2T$ стробоскопическое описание динамики для фаз осциллято-

ров (x, y) дается отображением кота Арнольда. Одно из следствий состоит в том, что динамика фаз, наблюдаемая в дискретном времени, будет демонстрировать хаос.

Обратимся к численным расчетам для системы неавтономных дифференциальных уравнений (13). На рис. 8 показаны графики зависимости переменных x, y, z и w от времени при значениях параметров $\omega_0 = 2\pi, N_0 = T = 20, A = 2, \varepsilon = 0.4$. Система функционирует в хаотическом режиме в соответствии с описанным механизмом. Хаос выражается в случайном смещении заполнения относительно огибающей на последовательных периодах модуляции.

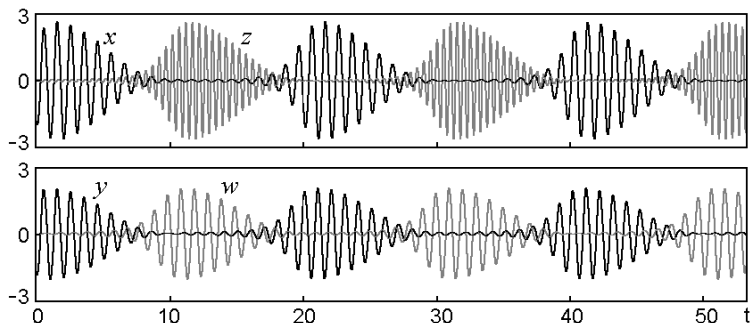


Рис. 8. Зависимость от времени динамических переменных в системе (13) при $\omega_0=2\pi, T=20, A=2, \varepsilon=0.4$

Чтобы продемонстрировать соответствие динамики отображению кота Арнольда, используем следующую процедуру. По ходу численного решения уравнений (13) будем определять фазы для первого и второго осцилляторов в середине активной стадии как $\varphi_x = \arg(x - i\dot{x}/\omega_0)$, $\varphi_y = \arg(y - i\dot{y}/\omega_0)$. Если точка $(q, p) = (\varphi_x/2\pi, \varphi_y/2\pi)$ попадает в область головы кота, нарисованной внутри единичного квадрата, то отмечаем ее на диаграмме. Также отмечаем точки-образы, получаемые через время $2T$ и $4T$ на двух последующих графиках. Накопив достаточно много точек, на первой картинке можно видеть изображение головы кота. На второй и третьей картинках получаются образы, соответствующие одной и двум итерациям отображения (рис. 9а). Их можно сравнить с представленными на рис. 9б диаграммами для отображения

$$p' = p + q + 0.07 \pmod{1}, \quad q' = p + 2q - 0.38 \pmod{1}, \quad (18)$$

где введены подобранные эмпирически постоянные добавки, учитывающие сдвиг фаз при передаче возбуждения между осцилляторами.

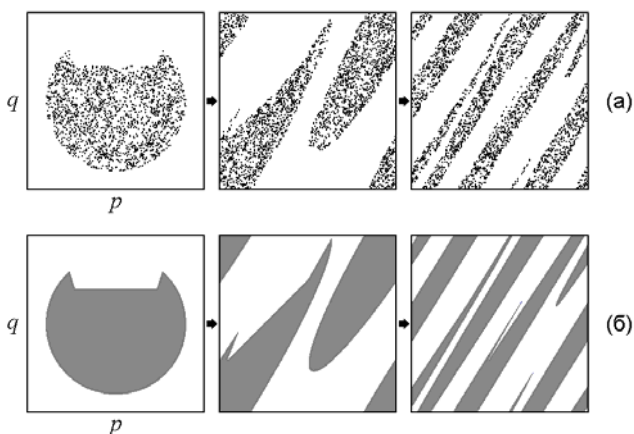


Рис. 9. Трансформация области в форме головы кота на плоскости фазовых переменных в системе связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля (13) при эволюции за время $2T$ и $4T$ (а) и аналогичные картиннки, полученные итерациями отображения (18) (б)

На рис. 10 приводится график зависимости двух наибольших показателей Ляпунова от амплитуды медленной модуляции A при фиксированных остальных параметрах, причем за единицу времени принят период $2T$. Как можно видеть, в широком интервале параметра оба показателя остаются приблизительно постоянными в хорошем соответствии с величинами, ожидаемыми для отображения кота Арнольда.

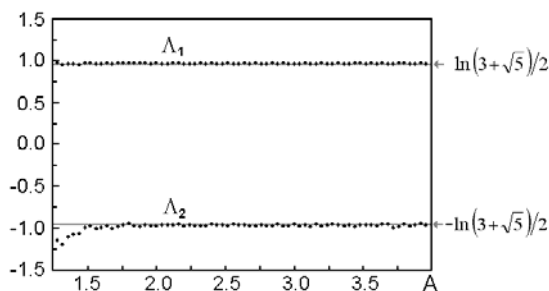


Рис. 10. Два старших показателя Ляпунова системы четырех связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля (13)

При аккуратном описании динамики в дискретном времени задача сводится к восьмимерному отображению Пуанкаре. По двум направлениям, ассоциирующимся с фазовыми переменными φ_x и φ_y , имеет место динамика, описываемая в определенном приближении отображением кота Арнольда, а по остальным – сильное сжатие, характеризуемое большими по абсолютной величине отрицательными показателями Ляпунова. В целом система диссипативная, но аттрактор в восьмимерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре располагается вблизи поверхности двумерного тора, динамика на котором хаотическая.

5. Феномены комплексной аналитической динамики: множества Мандельброта и Жюлиа

Один из глубоко проработанных математиками разделов нелинейной динамики имеет своим содержанием исследование итерируемых отображений, заданных аналитическими функциями комплексного переменного [9,10]. Классическим объектом служит комплексное квадратичное отображение

$$z_{n+1} = c + z_n^2. \quad (19)$$

При $c=0$ имеет место тривиальное поведение: для $|z_0|>1$ результат итераций будет стремиться к бесконечности, а для $|z_0|<1$ оставаться в ограниченной области. Границей раздела между этими двумя типами поведения в данном случае служит единичная окружность $|z_0|=1$. При других значениях комплексного параметра c множество на комплексной плоскости z , разграничивающее указанные два типа поведения, устроено, вообще говоря, сложным образом и имеет фрактальную природу. Его называют *множеством Жюлиа* (см. примеры на рис. 11).

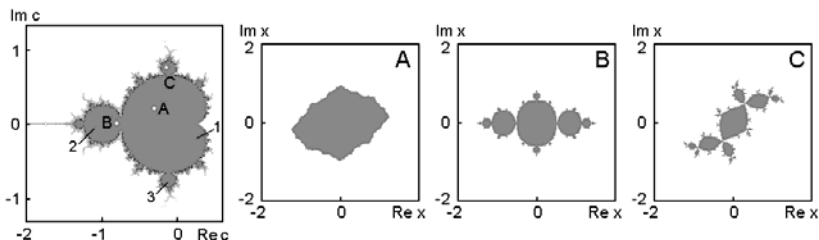


Рис. 11. Множество Мандельброта для квадратичного комплексного отображения (19) (слева) и множества Жюлиа при значениях параметра c , отмеченных точками на первой диаграмме. Белый цвет означает убегание на бесконечность

С другой стороны, если фиксировать $z_0=0$ и рассмотреть поведение последовательности z_n в зависимости от комплексного параметра c , то при одних его значениях итерации будут убегать на бесконечность, а при других оставаться в ограниченной области. Ассоциирующееся с этой последней ситуацией множество точек на комплексной плоскости c называется *множеством Мандельброта* (рис. 11, слева). Область периодических режимов напоминает кактус и представляет собой совокупность касающихся друг друга образований округлой формы, расположенных по периферии большой области в виде кардиоиды. Цифры 1, 2, 3 обозначают период динамики, наблюдаемой в нескольких основных лепестках. Хаосу соответствует обрамляющий «кактус» фрактальный узор. Точками отмечены значения параметра, для которых построены изображения множеств Жюлиа.

Идея физической реализации феноменов комплексной динамики опирается на известный в теории колебаний *метод комплексных амплитуд*. Обратимся к следующей системе связанных неавтономных осцилляторов [19]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + F \cdot [g + \sin(2\pi t/T)]\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y \sin \omega_0 t + \lambda \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ \ddot{y} + F \cdot [g - \sin(2\pi t/T)]\dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Первый осциллятор имеет собственную частоту ω_0 , а второй вдвое большую. Параметр диссипации в одном и другом осцилляторе, медленно изменяется во времени в противофазе с периодом T , составляющим целое число периодов колебаний на частоте ω_0 . Параметр g положительный, меньше единицы. Поэтому диссипация, будучи в среднем положительной, на определенной части периода вариации параметра для одного или другого осциллятора становится отрицательной. При этом осциллятор активный (колебания нарастают).

Предположим, что к моменту начала активной стадии второго осциллятора первый совершает колебания с комплексной амплитудой a : $x(t) \sim \text{Re}[a(t)\exp(i\omega_0 t)]$. Воздействие на второй осциллятор производится через нелинейный квадратичный элемент, так что результатом преобразования будет $x^2(t) = \frac{1}{2}|a(t)|^2 + \frac{1}{2}\text{Re}[a^2 \exp(2i\omega_0 t)]$. Затравкой для колебаний второго осциллятора будет попадающая в резонанс составляющая на второй гармонике, так что комплексная амплитуда его колебаний на активной стадии будет пропорциональна a^2 . Смещение с опорным сигналом (см. правую часть первого уравнения) приводит к появлению составляющей на разностной частоте ω_0 , амплитуда которой пропорциональна a^2 . В сумме с дополнительным колебательным членом на частоте ω_0 , характеризуемым амплитудой λ и фазой φ , это дает затравку для комплексной амплитуды первого осциллятора вида a^2 плюс комплексная константа. Таким образом, стробоскопическое отображение для комплексной амплитуды будет соответствовать (по крайней мере, в определенном приближении) комплексному квадратичному отображению. При этом роль комплексного параметра c играет комплексное число с модулем λ и аргументом φ . В зависимости от этого параметра, может случиться, что решение уравнений связанных неавтономных осцилляторов остается ограниченным при выборе начальных условий в какой-то области фазового пространства, или же оно может оказаться убегающим на бесконечность.

На рис. 12 слева приводится полученная численно диаграмма на комплексной плоскости $\lambda e^{i\varphi}$, где серым цветом показаны зоны, отвечающие динамике в ограниченной области. Объект демонстрирует очевидное сходство с множеством Мандельброта для комплексного квадратичного отображения. Цифры 1, 2, 3 обозначают «лепестки», где реализуется динамика периода, соответственно, T , $2T$, $3T$. Для точек, помечен-

ных на рисунке «кактуса», построены диаграммы на плоскости переменных первого осциллятора (x, \dot{x}) , изображающие бассейны аттрактора, расположенного в ограниченной области. Их можно сопоставить с множествами Жюлиа для квадратичного отображения на рис. 11.

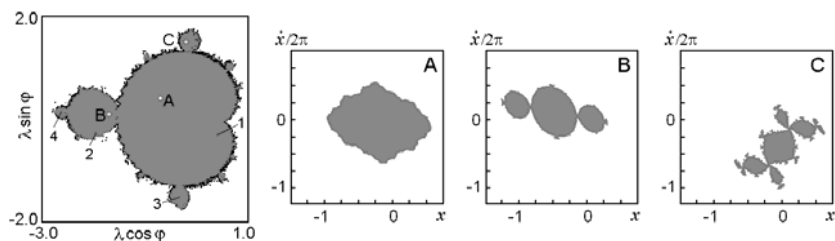


Рис. 12. Зона на плоскости параметра $\lambda e^{i\varphi}$, которой отвечает динамика системы (20) в ограниченной области (слева) и сечения бассейнов аттракторов (справа), соответствующие невозбужденному состоянию второго осциллятора, при значениях комплексного параметра, отмеченных точками на первой диаграмме. Параметры системы: $\omega_0=2\pi$, $T=10$, $F=7$, $g=0.5$, $\varepsilon=1$

Рисунок 13 иллюстрирует динамику в одном из режимов в лепестке периода 3. Показаны зависимости от времени для переменных x и y , отвечающих связанным неавтономным осцилляторам. Очевидно, тип режима определяется тем, каков будет на участке минимальной амплитуды первого осциллятора сигнал затравки, представляющий собой суперпозицию трансформированного на нелинейном элементе сигнала от осциллятора-партнера и внешнего сигнала. При этом существенны детали соотношения фаз этих двух сигналов, что и определяет тонкую структуру лепестков «кактуса» на плоскости параметров.

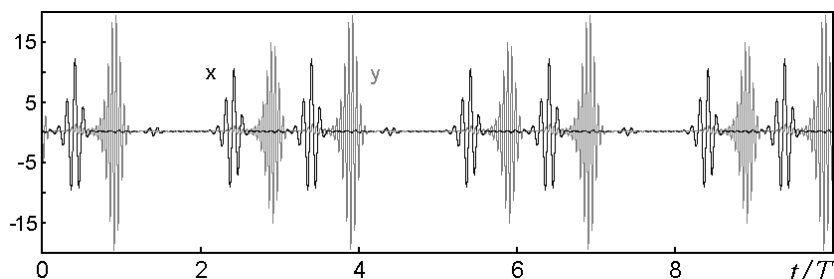


Рис. 13. Временная зависимость обобщенных координат связанных неавтономных осцилляторов (20), отвечающая циклу периода 3 отображения Пуанкаре; $\lambda e^{i\varphi} = -0.2 + 1.5i$, $\omega_0 = 2\pi$, $F = 7$, $g = 0.5$, $N = 10$, $\varepsilon = 1$

Итак, предложенная система связанных неавтономных осцилляторов демонстрирует характерные для комплексной аналитической динамики

феномены: по крайней мере, в общих чертах воспроизводятся такие объекты как множества Мандельброта и Жюлиа.²

Автор благодарен А.Ю. Жалнину, О.Б. Исаевой и И.Р. Сатаеву за участие в проведении численных расчетов, обсуждение и другую помощь. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-02-16619.

Литература

1. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем. // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 192-212.
2. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768с.
3. *Shilnikov L.* Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: A Tutorial // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997. V. 7, №9. P. 1353-2001.
4. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.– Ижевск: 2003. 428с.
5. *Belykh V., Belykh I. and Mosekilde E.* The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2005. V.15, №11. P.3567-3578.
6. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шуманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.– Ижевск: 2003. 544с.
7. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240с.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356с.
9. *Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. Образцы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с.
10. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. NY: Addison-Wesley, 1989. 336p.
11. *Kuznetsov S.P.* Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale-Williams Type // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. P. 144101.
12. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, №2. С. 400-412.
13. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // Meccanica. 1980. V. 15. P. 9–30.
14. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975, 240с.
15. *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля // Изв. вузов – Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т.15. С.3-22.
16. *Hunt T.J.* Low Dimensional Dynamics: Bifurcations of Cantori and Realisations of Uniform Hyperbolicity: PhD Thesis / Univ. of Cambridge, 2000.
17. *Арнольд В.И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 284с.
18. *Isaeva O.B., Jalnina A.Yu., Kuznetsov S.P.* Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 2006. V.74. P. 046207.
19. *Исаева О.Б., Кузнецов С.П., Осбалдестин А.* Феномены комплексной аналитической динамики в системе связанных неавтономных осцилляторов с эстафетной передачей возбуждения (в печати).

² Более тщательный анализ показывает, что соответствие не распространяется на тонкие детали структуры множества Мандельброта. Метод комплексных амплитуд является приближенным, и в следующих порядках теории возмущений отображение Пуанкаре приобретает поправки, не являющиеся комплексно аналитическими функциями. Эти добавки тем меньше, чем больше параметр N , характеризующий отношение периода модуляции параметра и периода собственных колебаний [19], так что с ростом N соответствие улучшается.